

ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Н.М. Атаров

СОПРОТИВЛЕНИЕ
МАТЕРИАЛОВ
В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ



Электронно-
Библиотечная
Система
znanium.com

ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ – БАКАЛАВРИАТ

серия основана в 1996 г.

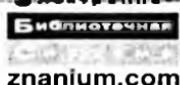
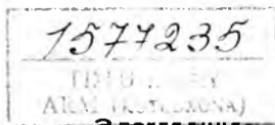


Н.М. АТАРОВ

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

*Рекомендовано
Учебно-методическим объединением вузов России
по образованию в области строительства в качестве
учебного пособия для студентов, обучающихся по направлению
270100 «Строительство»*



*Соответствует
Федеральному государственному
образовательному стандарту
3-го поколения*

Москва
ИНФРА-М
2014

УДК 539.3
ББК 30.121
A92

Рецензенты:

Кафедра «Прочность материалов и конструкций» Российского университета дружбы народов (зав. кафедрой профессор, д-р техн. наук С.Н. Кривошанко);

И.И. Шапошников — член-корр. РААСН, профессор, д-р техн. наук (Московский государственный университет путей сообщения).

Агаров Н.М.

A92 **Сопротивление материалов в примерах и задачах:** Учеб. пособие. — М.: ИНФРА-М, 2014. — 407 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). ISBN 978-5-16-003871-1

В учебном пособии приведены подробно рассмотренные и решенные задачи по курсу сопротивления материалов для студентов строительных специальностей вузов. Пособие может быть полезно студентам других технических специальностей. Приведены краткие теоретические сведения и формулы, даны задачи для самостоятельного решения.

Пособие предназначено для оказания помощи студентам при выполнении расчетно-графических работ, при подготовке к контрольным работам, компьютерному тестированию, зачетам и экзаменам.

Материал учебного пособия соответствует государственному стандарту дисциплины «Сопротивление материалов» для вузов и факультетов строительного профиля.

УДК 539.3
ББК 30.121

ISBN 978-5-16-003871-1

© Н.М. Агаров, 2010

Подписано в печать 25.07.2012.
Формат 60x90/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Newton. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 26,0. Уч.-изд. л. 26,86.
Доп. тираж 500 экз. Заказ № 6176.
Цена свободная.

ТК 128050-8757-251209

ООО «Научно-издательский центр ИНФРА-М»
127282, Москва, ул. Полярная, д. 31В, стр. 1.
Тел.: (495) 380-05-40, 380-05-43. Факс: (495) 363-92-12
E-mail: books@infra-m.ru <http://www.infra-m.ru>

Отпечатано с готовых диапозитивов в ОАО ордена «Знак Почета»
«Смоленская областная типография им. В. И. Смирнова».
214000, г. Смоленск, проспект им. Ю. Гагарина, 2.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное учебное пособие предназначено для студентов строительных специальностей вузов и факультетов. Оно также может быть полезно студентам других технических специальностей.

Пособие построено в форме подробного разбора решений задач на все основные разделы курса сопротивления материалов, включая основы теории упругости. Большинство задач являются типовыми и характерными для расчета строительных конструкций. Они входят как составные части в расчетно-графические работы, предлагаются студентам для самостоятельного решения при подготовке к компьютерному тестированию, к зачетам и экзаменам. Некоторая часть задач содержит элементы повышенной сложности.

В начале каждой главы приведены основные теоретические сведения и формулы, необходимые для решения задач. В большинстве глав даны задачи для самостоятельного решения с ответами.

Учебное пособие методически связано с учебниками по сопротивлению материалов с основами теории упругости, пластичности и строительной механики [7], [8], в написании которых автор принимал непосредственное участие.

Автор учебного пособия, профессор кафедры сопротивления материалов МИСИ—МГСУ, более 40 лет проводит педагогическую работу на факультете «Промышленное и гражданское строительство». Он является автором многочисленных учебных пособий и методических указаний. Данная работа является результатом их обобщения и переработки.

Автор выражает глубокую благодарность своим коллегам по кафедре, особенно профессорам В.И. Андрееву, Г.С. Варданяну, А.А. Горшкову, А.Н. Леонтьеву и доцентам А.Я. Астаховой, А.В. Ильяшенко, А.Г. Паушкину за ценные советы и критические замечания.

С благодарностью автор отмечает помощь в методической работе, оказанную ему товарищем по кафедре и другом доцентом Ю.Д. Насонкиным, талантливым ученым и педагогом, безвременно скончавшимся в 1998 году.

Большую признательность автор выражает издательству ИНФРА-М за многолетнее творческое сотрудничество и помощь в издании учебников и учебных пособий. Особо хочется отметить начальника технической редакции А.Е. Шукина и дизайнера

А.И. Паркани, высокопрофессионально и тщательно подготовившего рукопись учебного пособия к изданию.

В учебном пособии использована Международная система единиц измерения (СИ). Соотношения между основными механическими величинами в единицах СИ и в технической системе приведены в следующей таблице:

Наименование величины	Единица		Соотношение единиц
	Наименование	Обозначение	
Сила, нагрузка, вес	Ньютон	Н	$1 \text{ Н} \approx 0,1 \text{ кгс}$ $1 \text{ кН} \approx 0,1 \text{ тс}$
Линейная нагрузка	Ньютон на метр	Н/м	$1 \text{ Н/м} \approx 0,1 \text{ кгс/м}$ $1 \text{ кН/м} \approx 0,1 \text{ тс/м}$
Момент силы, момент пары сил	Ньютон-метр	Нм	$1 \text{ Нм} \approx 0,1 \text{ кгс}\cdot\text{м}$ $1 \text{ кНм} \approx 0,1 \text{ тс}\cdot\text{м}$
Напряжение, давление	Паскаль	Па	$1 \text{ Па} \approx 0,1 \text{ кгс/м}^2$ $1 \text{ МПа} \approx 10 \text{ кгс/см}^2$

При определении напряжений в качестве вспомогательной единицы измерения используется кН/см^2 ($1 \text{ кН/см}^2 = 10 \text{ МПа}$).

Глава 1

ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ СТЕРЖНЕЙ

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Центральное растяжение или сжатие прямого стержня имеет место в том случае, когда все приложенные к стержню нагрузки или их равнодействующие направлены вдоль его оси (осевые нагрузки). При этом в поперечных сечениях стержня действуют только нормальные напряжения, которые можно привести к одному внутреннему усилию — продольной силе N . При известных нагрузках и опорных реакциях продольная сила в поперечных сечениях стержня может быть определена статически с помощью метода сечений (рис. 1.1).

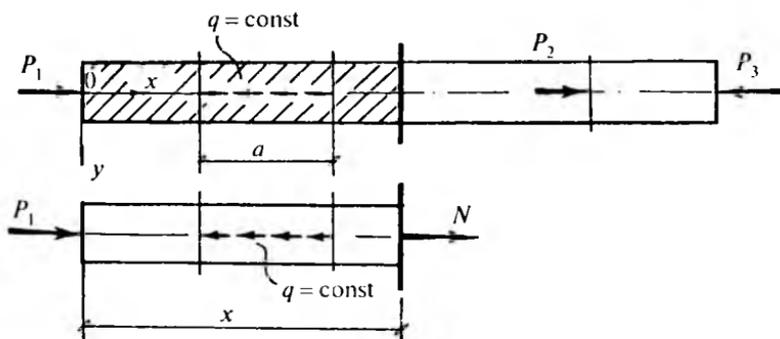


Рис. 1.1

Равновесие левой части:

$$\sum X = 0, \quad P_1 - qa + N = 0, \quad N = qa - P_1.$$

Таким образом, продольная сила в любом сечении стержня определяется как сумма проекций всех нагрузок, приложенных к одной из частей стержня, на его ось. Растягивающую продольную силу будем считать положительной, а сжимающую — отрицательной (рис. 1.2).

Продольная сила в общем случае изменяется по длине стержня. Между продольной силой и распределенной осевой нагрузкой имеет место следующая дифференциальная зависимость:

$$\frac{dN}{dx} = -q(x). \quad (1.1)$$

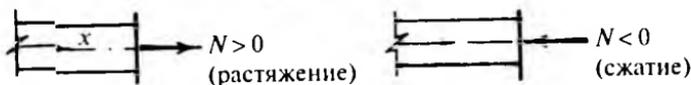


Рис. 1.2

Зависимость (1.1) позволяет установить характер изменения продольной силы в зависимости от вида распределенной осевой нагрузки.

Нормальные напряжения в стержне при центральном растяжении и сжатии принимаются постоянными по поперечному сечению. Они определяются по формуле

$$\sigma = \frac{N}{F}, \quad (1.2)$$

где F — площадь поперечного сечения стержня (рис. 1.3).

Деформация стержня при центральном растяжении и сжатии характеризуется осевыми перемещениями поперечных сечений (рис. 1.4), которые связаны между собой следующей формулой:

$$u_i = u_{i-1} + \Delta l_i, \quad (1.3)$$

где Δl_i — абсолютное удлинение или укорочение участка стержня между сечениями x_i и x_{i-1} .

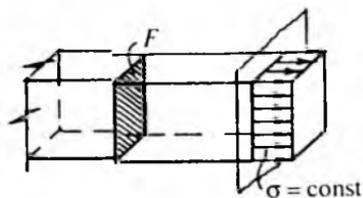


Рис. 1.3

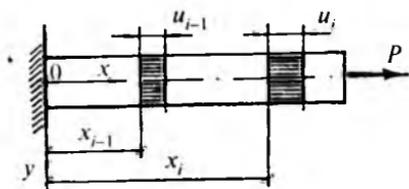


Рис. 1.4

Относительные линейные деформации продольных волокон стержня связаны с осевыми перемещениями формулой Коши:

$$\epsilon_x = \epsilon = \frac{du}{dx}. \quad (1.4)$$

Размеры поперечных сечений стержня при растяжении уменьшаются, а при сжатии — увеличиваются (рис. 1.5). Это явление

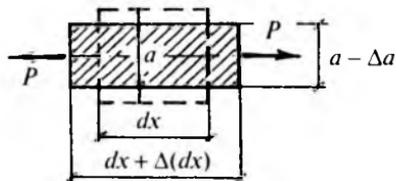


Рис. 1.5

называется поперечной деформацией и характеризуется коэффициентом Пуассона:

$$\nu = \left| \frac{\epsilon'}{\epsilon} \right|, \quad (1.5)$$

где ϵ' и ϵ — относительные линейные поперечные и продольные деформации

$$\epsilon' = -\frac{\Delta a}{a}, \quad \epsilon = \frac{\Delta(dx)}{dx}. \quad (1.6)$$

Деформации ϵ' и ϵ всегда имеют противоположные знаки. Коэффициент Пуассона определяется экспериментально с помощью специальных приборов (тензометров) и для различных материалов изменяется в пределах $0 \leq \nu \leq 0,5$.

Для линейно-упругих материалов зависимость между σ и ϵ характеризуется законом Гука при растяжении и сжатии (рис. 1.6):

$$\sigma = E\epsilon, \quad (1.7)$$

где E — модуль упругости при растяжении и сжатии, определяемый экспериментально для каждого материала. Например, для стали он равен $E = (2 \div 2,1) \cdot 10^5$ МПа.

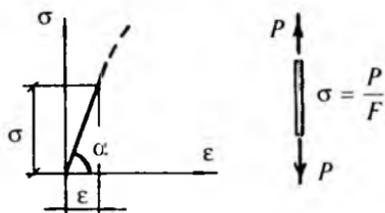


Рис. 1.6

Абсолютное удлинение или укорочение участка стержня длиной l в общем случае определяется по формуле

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N}{EF} dx, \quad (1.8)$$

где EF — жесткость стержня при растяжении и сжатии. При постоянных по длине стержня жесткости и продольной силе абсолютное удлинение или укорочение определяется по формуле

$$\begin{aligned} \text{При } EF = \text{const}, \\ N = \text{const} \quad \Delta l = \frac{Nl}{EF}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Если продольная сила или жесткость изменяются по длине стержня, то при вычислении Δl удобно использовать геометрический смысл определенного интеграла (1.8). Например, при $E = \text{const}$ формулу (1.8) можно представить в следующем виде:

$$\Delta l = \frac{1}{E} \int_0^l \frac{N}{F} dx = \frac{1}{E} \int_0^l \sigma dx = \frac{1}{E} \Omega_\sigma, \quad (1.10)$$

где Ω_σ — площадь эпюры σ на данном участке.

При постоянной по длине жесткости стержня EF центральное растяжение и сжатие описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$EFu''(x) = -q(x). \quad (1.11)$$

Дифференциальное уравнение (1.11) и соотношение (1.1) позволяют установить характер изменения продольной силы и осевых перемещений по длине стержня в зависимости от вида осевой распределенной нагрузки $q(x)$. Например, для двух наиболее распространенных случаев имеем:

1. На участках, где $q = 0$, $N = \text{const}$,
 $u(x)$ — линейный закон.
2. На участках, где $q = \text{const}$, $N(x)$ — линейный закон,
 $u(x)$ — квадратичный закон.

Потенциальная энергия деформации стержня длиной l при центральном растяжении и сжатии в общем случае определяется по формуле

$$U = \int_0^l \frac{N^2}{2EF} dx. \quad (1.12)$$

Расчеты на прочность стержней, являющихся элементами строительных конструкций, производятся по методу предельных состояний. Расчетные формулы имеют следующий вид.

Условие прочности

$$\sigma = \frac{N}{F} \leq \gamma_c R. \quad (1.13)$$

Формула подбора сечения

$$F \geq \frac{N}{\gamma_c R}. \quad (1.14)$$

Формула определения величины допустимой нагрузки

$$N = kP \leq \gamma_c RF. \quad (1.15)$$

В формулах (1.13)–(1.15) N — продольная сила, вычисленная от действия расчетных нагрузок $P_p = P_n \gamma_f$, P_n — нормативное значение нагрузки, γ_f — коэффициент надежности по нагрузке (коэффициент перегрузки), R — расчетное сопротивление материала стержня, γ_c — коэффициент условий работы и k — параметр нагрузки, определяемый из уравнений равновесия.

Значения R , γ_f и γ_c приведены в соответствующих разделах СНиП по строительным конструкциям.

Расчет на прочность элементов не строительных конструкций выполняется по методу допускаемых напряжений. Условие прочности имеет следующий вид:

$$\sigma = \frac{N}{F} \leq [\sigma], \quad (1.16)$$

где $[\sigma]$ — допускаемое напряжение, значение которого приведено в соответствующих нормативных документах.

При определении разрушающей (предельной) нагрузки для конструкций из материалов с пластическими свойствами используется схематизированная диаграмма Прандтля (рис. 1.7). В этом случае разрушающее (предельное) усилие в стержне при растяжении-сжатии определяется по формуле

$$N_{\text{пред}} = N_{\text{разр}} = \sigma_T F, \quad (1.17)$$

где σ_T — предел текучести материала.

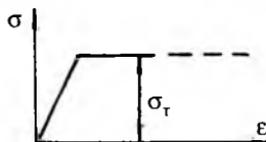


Рис. 1.7

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1.1

Стержень ступенчато-постоянного сечения находится под действием показанных на рис. 1.8, а осевых нагрузок. Требуется построить эпюры продольных сил и нормальных напряжений, определить абсолютные удлинения (укорочения) участков стержня и построить эпюру осевых перемещений. В расчетах принять $E = 2 \cdot 10^4 \text{ МПа} = 2 \cdot 10^3 \text{ кН/см}^2$.

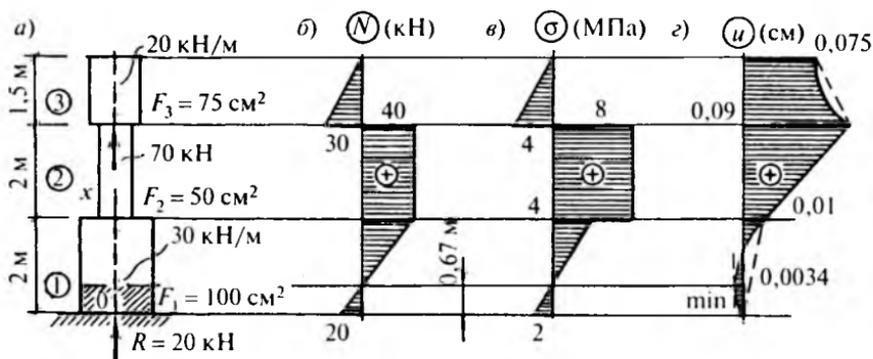


Рис. 1.8

Определяем из уравнения равновесия опорную реакцию в месте закрепления стержня:

$$\sum X = 0, \quad -20 \cdot 1,5 + 70 - 30 \cdot 2 + R = 0, \quad R = 20 \text{ кН.}$$

Поскольку реакция оказалась положительной, ее направление в начале расчета выбрано правильно. Для построения эпюр N и σ вычисляем значения продольных сил и нормальных напряжений в характерных сечениях стержня, начиная со свободного конца.

- Сечение $x = 5,5 \text{ м}$ (свободный конец)
 $N = \sigma = 0$ (сосредоточенная сила отсутствует).
- Сечение $x = 4 \text{ м}$ (выше границы участков)
 $N = -20 \cdot 1,5 = -30 \text{ кН}$ (сжатие),
 $\sigma = \frac{-30}{75} = -0,4 \text{ кН/см}^2 = -4 \text{ МПа.}$

3. Сечение $x = 4$ м (ниже границы участков)
 $N = -30 + 70 = 40$ кН (растяжение),
 $\sigma = \frac{40}{50} = 0,8$ кН/см² = 8 МПа.
4. Сечение $x = 2$ м (выше границы участков)
 $N = 40$ кН, $\sigma = \frac{40}{50} = 0,8$ кН/см² = 8 МПа.
5. Сечение $x = 2$ м (ниже границы участков)
 $N = 40$ кН,
 $\sigma = \frac{40}{100} = 0,4$ кН/см² = 4 МПа.
6. Сечение $x = 0$ (закрепление)
 $N = -R = -20$ кН (сжатие),
 $\sigma = \frac{-20}{100} = -0,2$ кН/см² = -2 МПа.

На первом и третьем участках стержня продольная сила изменяется по линейному закону ($q = \text{const}$), а на втором участке она постоянна ($q = 0$). Отметим также, что в пределах первого участка знак продольной силы и нормальных напряжений изменяется на противоположный. В сечении на границе второго и третьего участков продольная сила имеет разрыв (скачок) на величину сосредоточенной силы $P = 70$ кН.

Полученные ординаты откладываем на оси стержня и строим эпюры N и σ . Эти эпюры приведены на рис. 1.8, б, в.

Вычисляем абсолютные удлинения (укорочения) участков стержня. Значения Δl первого и третьего участков определяем с помощью площади эпюры нормальных напряжений на этих участках:

$$\Delta l_1 = \frac{1}{E} \Omega_{\sigma} = \frac{1}{2 \cdot 10^4} \cdot \frac{4-2}{2} 200 = 0,01 \text{ см (удлинение),}$$

$$\Delta l_2 = \frac{Nl}{EF} = \frac{40 \cdot 200}{2 \cdot 10^3 \cdot 50} = 0,08 \text{ см (удлинение),}$$

$$\Delta l_3 = \frac{1}{E} \Omega_{\sigma} = \frac{1}{2 \cdot 10^4} \left(-\frac{4 \cdot 150}{2} \right) = 0,015 \text{ см (укорочение).}$$

Определяем величину Δl всего стержня:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0,01 + 0,08 - 0,015 = 0,075 \text{ см (удлинение)}$$

Для построения эпюры u вычисляем по формуле (1.3) значения осевых перемещений характерных сечений стержня.

1. Сечение $x = 0$ $u = u_0 = 0$ (сечение закреплено).
2. Сечение $x = 2$ м $u_1 = u_0 + \Delta l_1 = 0,01$ см.
3. Сечение $x = 4$ м $u_2 = u_1 + \Delta l_2 = 0,01 + 0,08 = 0,09$ см.
4. Сечение $x = 5,5$ м $u_3 = u_2 + \Delta l_3 = \Delta l = 0,075$ см.

В сечении на первом участке, где продольная сила обращается в нуль, осевое перемещение имеет экстремальное значение.

5. Сечение $x = 0,67$ м

$$u = u_{\min} = u_0 + \Delta l_1^* = \frac{1}{2 \cdot 10^4} \left(-\frac{2 \cdot 67}{2} \right) = -0,0034 \text{ см,}$$

где Δl_1^* — значение абсолютного укорочения заштрихованной части первого участка (рис. 1.8, а).

Эпюра осевых перемещений представлена на рис. 1.8, з. На первом и третьем участках стержня осевые перемещения изменяются по квадратичному закону, а на втором участке — по линейному закону.

Задача 1.2

Стержень ступенчато-постоянного сечения, жестко закрепленный с двух сторон, находится под действием сосредоточенных осевых нагрузок (рис. 1.9). Требуется построить эпюры продольных сил, нормальных напряжений и осевых перемещений. В расчетах принять $E = 2 \cdot 10^5$ МПа = $2 \cdot 10^4$ кН/см².

Составим уравнение равновесия:

$$\begin{aligned} \sum X = 0, \quad R_A + R_B - 40 - 60 &= 0, \\ R_A + R_B &= 100 \text{ кН.} \end{aligned}$$

Для определения опорных реакций этого уравнения недостаточно. Стержень один раз статически неопределим, и для его расчета необходимо составить дополнительное уравнение, исходя из характера деформации стержня.

Отбросим любое из опорных закреплений стержня, например, верхнее, и заменим его искомой опорной реакцией $X = R_B$

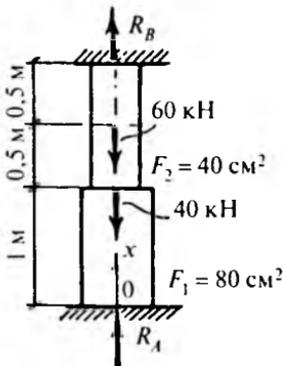


Рис. 1.9

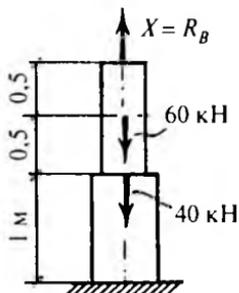


Рис. 1.10

(рис. 1.10). Образованная таким образом статически определимая система называется основной системой.

Поставим условие, что деформации основной и заданной систем совпадают. Длина жестко закрепленного с двух сторон стержня после действия нагрузок измениться не может ($\Delta l = 0$). Следовательно, для основной системы на основании принципа независимости действия сил можно записать:

$$\Delta l = \Delta l_p + \Delta l_x = 0,$$

где Δl_p — деформация основной системы под действием заданных нагрузок, Δl_x — деформация основной системы под действием искомой опорной реакции $X = R_B$.

Вычисляем значения Δl_p и Δl_x и раскрываем условие деформации:

$$\Delta l_p = -\frac{60 \cdot 50}{2 \cdot 10^4 \cdot 40} - \frac{60 \cdot 100}{2 \cdot 10^4 \cdot 80} - \frac{40 \cdot 100}{2 \cdot 10^4 \cdot 80} = -0,01 \text{ см},$$

$$\Delta l_x = \frac{X \cdot 100}{2 \cdot 10^4 \cdot 40} + \frac{X \cdot 100}{2 \cdot 10^4 \cdot 80} = 1,875 \cdot 10^{-4} \cdot X \text{ (см/кН)},$$

$$\Delta l = \Delta l_p + \Delta l_x = -0,01 + 1,875 \cdot 10^{-4} \cdot X = 0,$$

$$X = R_B = 53,3 \text{ кН}.$$

Статическая неопределимость задачи раскрыта. Реакция R_A равна: $R_A = 100 - 53,3 = 46,7$ кН. Вычисляем значения продольных сил и нормальных напряжений в характерных сечениях стержня.

1. Сечение $x = 2$ м $N = X = R_B = 53,3$ кН (растяжение),
 $\sigma = \frac{53,3}{40} = 1,33$ кН/см² = 13,3 МПа.
2. Сечение $x = 1,5$ м $N_B = 53,3$ кН, $\sigma = 13,3$ МПа.
 $N_{II} = 53,3 - 60 = -6,7$ кН (сжатие),
 $\sigma = \frac{-6,7}{40} = -0,17$ кН/см² = -1,7 МПа.
3. Сечение $x = 1$ м $N_B = -6,7$ кН, $\sigma = -1,7$ МПа.
 $N_{II} = -6,7 - 40 = -46,7$ кН (сжатие),
 $\sigma = \frac{-46,7}{80} = -0,58$ кН/см² = -5,8 МПа.
4. Сечение $x = 0$ $N = -R_A = -46,7$ кН, $\sigma = -5,8$ МПа.

По вычисленным значениям строим эпюры N и σ (рис. 1.11, б, в). Отметим наличие скачков на эпюре N в сечениях, где приложены сосредоточенные силы. В пределах участков N и σ постоянны по величине.

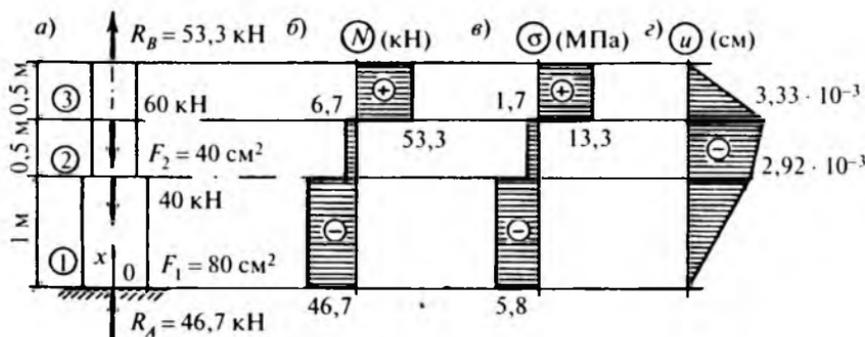


Рис. 1.11

Вычисляем абсолютные деформации участков стержня:

$$\Delta l_1 = \frac{-46,7 \cdot 100}{2 \cdot 10^4 \cdot 80} = -2,92 \cdot 10^{-3} \text{ см (укорочение),}$$

$$\Delta l_2 = \frac{-6,7 \cdot 50}{2 \cdot 10^4 \cdot 40} = -4,1 \cdot 10^{-4} \text{ см (укорочение),}$$

$$\Delta l_3 = \frac{53,3 \cdot 50}{2 \cdot 10^4 \cdot 40} = 3,33 \cdot 10^{-3} \text{ см (удлинение).}$$

Проверим выполнение условия деформации стержня:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = -2,92 \cdot 10^{-3} - 4,1 \cdot 10^{-4} + 3,33 \cdot 10^{-3} =$$

$$= (3,33 - 3,33) \cdot 10^{-3} = 0.$$

Вычисляем осевые перемещения характерных сечений стержня, начиная с нижнего закрепленного сечения:

1. Сечение $x = 0$ $u = u_0 = 0.$
2. Сечение $x = 1$ м $u_1 = u_0 + \Delta l_1 = -2,92 \cdot 10^{-3}$ см.
3. Сечение $x = 1,5$ м $u_2 = u_1 + \Delta l_2 = -2,92 \cdot 10^{-3} - 4,1 \cdot 10^{-4} =$
 $= -3,33 \cdot 10^{-3}$ см.
4. Сечение $x = 2$ м $u_3 = u_2 + \Delta l_3 = \Delta l = 0.$

Эпюра осевых перемещений представлена на рис. 1.11, з. Осевые перемещения изменяются по линейному закону. Все сечения стержня перемещаются в отрицательном направлении оси Ox , то есть вниз.

Задача 1.3

Медный стержень ступенчато-постоянного сечения жестко закреплен на левом конце и находится под действием сосредоточенной силы и температурного нагрева на первом участке (рис. 1.12). На правом конце имеется зазор $\delta = 0,01$ см между торцом стержня и жесткой опорой. Требуется построить эпюры продольных сил, нормальных напряжений и осевых перемещений. В расчетах принять $E = 1 \cdot 10^4$ кН/см² = $1 \cdot 10^5$ МПа, $\alpha = 1,65 \cdot 10^{-5}$ 1/град, где α — коэффициент линейного температурного расширения.

Определяем возможное удлинение стержня под действием нагрузки и теплового воздействия:

$$\Delta l = \Delta l_p + \Delta l_T = \frac{40 \cdot 20}{1 \cdot 10^4 \cdot 30} + \frac{40 \cdot 50}{1 \cdot 10^4 \cdot 20} + 1,65 \cdot 10^{-5} \cdot 50 \cdot 10 =$$

$$= 0,0209 \text{ см,}$$

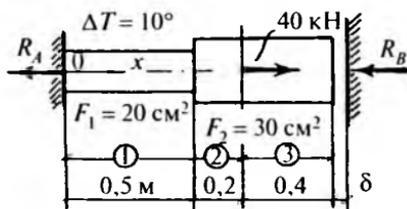


Рис. 1.12

где $\Delta l_T = \alpha \Delta T$ — величина удлинения стержня под действием нагрева.

Поскольку зазор δ меньше возможного удлинения стержня Δl , при нагружении и нагреве он будет выбран, и правый торец стержня упрется в жесткую опору. При этом на обеих опорах возникнут опорные реакции, и стержень будет работать как статически неопределимый. Составим уравнение равновесия:

$$\sum X = 0, \quad R_A + R_B = 40 \text{ кН.}$$

Образует основную систему (рис. 1.13), суммарная деформация которой под действием заданной нагрузки, температуры и искомой опорной реакции $X = R_B$ должна быть равна первоначальному зазору. Составим условие деформации:

$$\Delta l = \Delta l_p + \Delta l_T + \Delta l_X = \delta = 0,01 \text{ см,}$$

$$\text{где } \Delta l_X = -\frac{X \cdot 60}{1 \cdot 10^4 \cdot 30} - \frac{X \cdot 50}{1 \cdot 10^4 \cdot 20} = -4,5 \cdot 10^{-4} \cdot X.$$

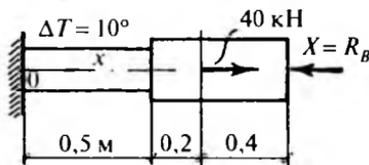


Рис. 1.13

Раскрываем статическую неопределимость задачи:

$$\Delta l = 0,0209 - 4,5 \cdot 10^{-4} \cdot X = \delta = 0,01 \text{ см,} \quad X = R_B = 24,3 \text{ кН.}$$

Вычисляем продольные силы и нормальные напряжения в характерных сечениях стержня и строим эпюры N и σ (рис. 1.14, б, в). Вычисляем абсолютные удлинения (укорочения) участков стержня:

$$\Delta l_1 = \frac{15,7 \cdot 50}{1 \cdot 10^4 \cdot 20} + 1,65 \cdot 10^{-5} \cdot 50 \cdot 10 = 0,0122 \text{ см,}$$

$$\Delta l_2 = \frac{15,7 \cdot 20}{1 \cdot 10^4 \cdot 30} = 0,00105 \text{ см,}$$

$$\Delta l_3 = \frac{-24,3 \cdot 40}{1 \cdot 10^4 \cdot 30} = -0,00324 \text{ см.}$$

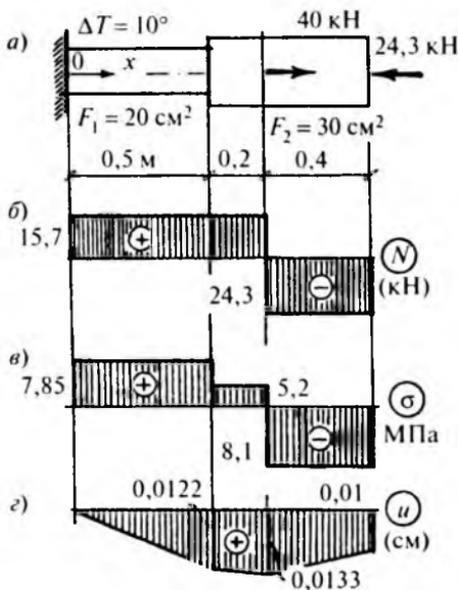


Рис. 1.14

Удлинение всего стержня должно быть равно зазору δ . Проверим выполнение этого условия:

$$\Delta l = 0,0122 + 0,00105 - 0,00324 = 0,01 \text{ см.}$$

Эпюра осевых перемещений представлена на рис. 1.14, г. Осевые перемещения изменяются по линейному закону.

Задача 1.4

Жесткая балка AB нагружена на конце сосредоточенной силой и поддерживается с помощью стержня CD (рис. 1.15). Требуется подобрать сечение стержня в виде двух равнобоких уголков и в виде двух тяг круглого сечения, а также определить величину удлинения стержня и угол поворота балки. Коэффициент надежности по нагрузке принять $\gamma_f = 1,4$. Материал стержня — сталь марки ВСт.3. В расчетах принять $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2,1 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$, $R = 210 \text{ МПа} = 21 \text{ кН/см}^2$ и $\gamma_c = 1,0$.

Данная задача является статически определимой. Вычисляем значение расчетной продольной силы в стержне из уравнения равновесия:

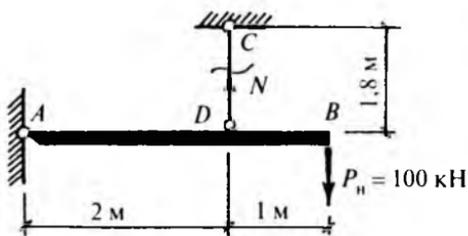


Рис. 1.15

$$P_p = 100 \cdot 1,4 = 140 \text{ кН.}$$

$$\sum M_A = 0, \quad 2N = 3P, \quad N = 210 \text{ кН.}$$

Определяем требуемую площадь сечения стержня:

$$F \geq \frac{N}{\gamma_c R} = \frac{210}{1 \cdot 21} = 10 \text{ см}^2.$$

В первом варианте принимаем по сортаменту сечение стержня в виде двух равнобоких уголков $L56 \times 5$ (рис. 1.16, а). Площадь поперечного сечения стержня равна

$$F = 2 \cdot 5,41 = 10,82 \text{ см}^2.$$

Во втором варианте (рис. 1.16, б) определяем требуемый диаметр сечения каждого стержня:

$$F = 2 \cdot \frac{\pi D^2}{4} \geq 10 \text{ см}^2, \quad D \geq 2,52 \text{ см.}$$

Округляя в большую сторону, примем $D = 2,6$ см. При этом площадь сечения стержня равна

$$F = 2 \cdot \frac{\pi \cdot 2,6^2}{4} = 10,62 \text{ см}^2.$$

Приняв сечение стержня в виде двух равнобоких уголков, вычислим значение напряжений в стержне и величину его удлинения:

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{210}{10,82} = 19,41 \text{ кН/см}^2 = 194,1 \text{ МПа} < \gamma_c R = 210 \text{ МПа,}$$

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF} = \frac{210 \cdot 180}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 10,82} = 0,166 \text{ см.}$$

Рассмотрев схему деформации системы (рис. 1.17), определяем значение угла поворота жесткой балки AB :

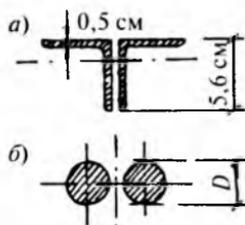


Рис. 1.16

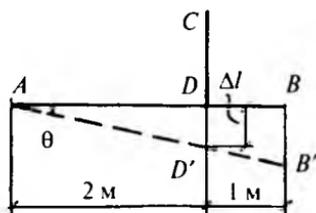


Рис. 1.17

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{DD'}{AD} = \frac{\Delta l}{200} = \frac{0,166}{200} = 8,3 \cdot 10^{-4}, \quad \theta = 0^{\circ}02'51''.$$

Угол поворота балки очень мал.

Задача 1.5

Для данной стержневой системы (рис. 1.18) требуется определить величину допустимой расчетной силы из условия прочности стержней, величины удлинений стержней и перемещения шарнирного узла B . Материал стержней — сталь марки ВСт.3 со следующими характеристиками: $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа = $2,1 \cdot 10^4$ кН/см², $R = 210$ МПа = 21 кН/см², $\gamma_c = 1,0$.

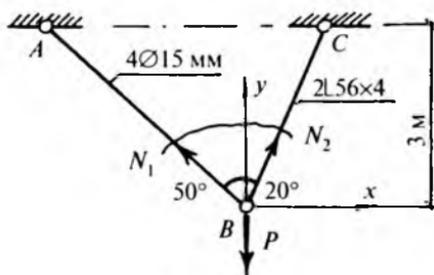


Рис. 1.18

Данная система является статически определимой. Составляем уравнения равновесия и выражаем силу P через усилия N_1 и N_2 в стержнях:

$$\begin{aligned} \sum X = 0, \quad N_1 \sin 50^\circ &= N_2 \sin 20^\circ, \\ \sum Y = 0, \quad N_1 \cos 50^\circ + N_2 \cos 20^\circ &= P, \end{aligned}$$

$$P = 2,75N_1, \quad P = 1,227N_2.$$

Вычисляем значения допустимых расчетных усилий для каждого стержня.

Стержень AB 4Ø15 мм $F_1 = 4 \frac{\pi \cdot 1,5^2}{4} = 7,07 \text{ см}^2,$

$$N_1 = \gamma_c R F_1 = 1,0 \cdot 21 \cdot 7,07 = 148,5 \text{ кН}.$$

Стержень BC 2L56×4 $F_2 = 2 \cdot 4,38 = 8,76 \text{ см}^2,$

$$N_2 = \gamma_c R F_2 = 1,0 \cdot 21 \cdot 8,76 = 184 \text{ кН}.$$

Вычисляем значения допустимой расчетной силы.

1. Из условия прочности стержня AB

$$P = 2,75N_1 = 2,75 \cdot 148,5 = 408,4 \text{ кН}.$$

2. Из условия прочности стержня CB

$$P = 1,227N_2 = 1,227 \cdot 184 = 226 \text{ кН}.$$

Чтобы обеспечить прочность обоих стержней, надо принять меньшую силу. Принимаем $P = 226 \text{ кН}$ и вычисляем усилия и напряжения в стержнях:

$$N_1 = \frac{226}{2,75} = 82,2 \text{ кН}, \quad \sigma = \frac{82,2}{7,07} = 11,62 \text{ кН/см}^2 = 116,2 \text{ МПа}.$$

$$N_2 = \frac{226}{1,227} = 184 \text{ кН}, \quad \sigma = \frac{184}{8,76} = 21 \text{ кН/см}^2 = 210 \text{ МПа}.$$

Отметим, что первый стержень недогружен. Вычисляем величины удлинений стержней:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E F_1} = \frac{82,2 \cdot 4,67}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 7,07} = 0,26 \text{ см},$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E F_2} = \frac{184 \cdot 3,19}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 8,76} = 0,32 \text{ см},$$

где $l_1 = \frac{3}{\cos 50^\circ} = 4,67 \text{ м}$, $l_2 = \frac{3}{\cos 20^\circ} = 3,19 \text{ м}$ — длины стержней.

Положение шарнирного узла B после деформации можно определить графически. Для этого на продолжении стержней надо отложить величины их удлинений Δl_1 и Δl_2 , а затем из полученных точек провести перпендикуляры (рис. 1.19). Точка пересечения этих перпендикуляров и соответствует положению узла B после

деформации системы. Зная общее перемещение BB' , можно определить его проекции на оси Ox и Oy , то есть вертикальное и горизонтальное перемещения узла B . Составляем два уравнения:

$$\Delta l_1 = v_B \cos 50^\circ + u_B \sin 50^\circ = 0,26 \text{ см},$$

$$\Delta l_2 = v_B \cos 20^\circ - u_B \sin 20^\circ = 0,32 \text{ см}.$$

Отсюда находим: $u_B = 0,041 \text{ см}$, $v_B = 0,36 \text{ см}$.

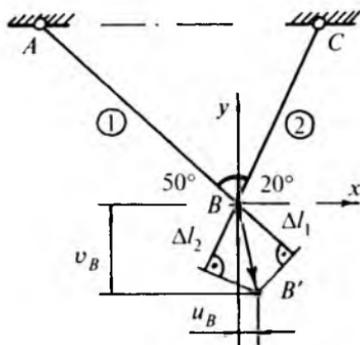


Рис. 1.19

Задача 1.6

Для данной стержневой системы (рис. 1.20) требуется определить усилия в стержнях DC и BC и проверить их прочность по методу предельных состояний. Нормативное значение нагрузки $q_n = 20 \text{ кН/м}$. Коэффициент перегрузки $\gamma_f = 1,2$, $R = 210 \text{ МПа}$, $\gamma_c = 1,0$, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2,1 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$.

Данная система один раз статически неопределима, поскольку число неизвестных H_A , R_A , N_1 и N_2 превышает число уравнений равновесия для плоской системы сил. Определяем расчетное зна-

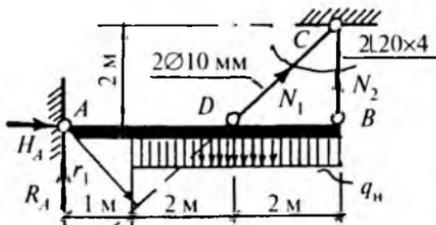


Рис. 1.20

чение нагрузки: $q_p = 1,2 \cdot 20 = 24$ кН/м. Составим уравнение равновесия, содержащее только усилия в стержнях:

$$\sum M_A = 0, \quad 2,12N_1 + 5N_2 = 24 \cdot 4 \cdot 3 = 288 \text{ кНм},$$

где $r_1 = 3 \cdot \sin 45^\circ = 2,12$ м, $r_2 = 5$ м — плечи усилий.

Для решения задачи необходимо рассмотреть схему деформации системы и получить дополнительное уравнение. Под действием нагрузки жесткая балка AB повернется на весьма малый угол θ относительно шарнира A (рис. 1.21). При этом удлинения стержней будут связаны между собой:

$$\Delta l_1 = DD' \cos 45^\circ, \quad \Delta l_2 = BB',$$

$$\frac{DD'}{BB'} = \frac{\Delta l_1}{\cos 45^\circ \cdot \Delta l_2} = \frac{3}{5}, \quad \frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = 0,424.$$

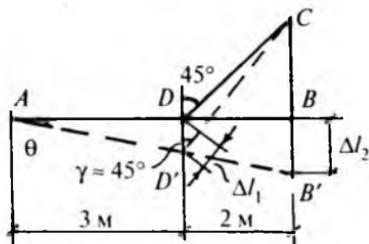


Рис. 1.21

Выражаем удлинения стержней через действующие в них усилия и составляем дополнительное уравнение:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF_1}, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EF_2}, \quad \frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{N_1}{N_2} \cdot \frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{F_2}{F_1} = 0,424.$$

Стержень CD $2\emptyset 10$ мм:

$$l_1 = \frac{2}{\cos 45^\circ} = 2,83 \text{ м}, \quad F_1 = 2 \cdot \frac{\pi \cdot 1,0^2}{4} = 1,57 \text{ см}^2.$$

Стержень CB $2\text{L}20 \times 4$: $l_2 = 2$ м, $F_2 = 2 \cdot 1,46 = 2,92 \text{ см}^2$.

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{N_1}{N_2} \cdot \frac{2,83}{2} \cdot \frac{2,92}{1,57} = 0,424, \quad N_1 = 0,161 N_2.$$

Решаем систему двух уравнений и определяем расчетные значения усилий в стержнях:

$$\left. \begin{aligned} 2,12N_1 + 5N_2 &= 288 \text{ кНм,} \\ N_1 &= 0,161N_2. \end{aligned} \right\}$$

$$N_1 = 8,68 \text{ кН, } N_2 = 53,9 \text{ кН.}$$

Определяем напряжения в стержнях и проверяем выполнение условий их прочности:

Стержень CD $2\varnothing 10$ мм:

$$\sigma = \frac{8,68}{1,57} = 5,53 \text{ кН/см}^2 = 55,3 \text{ МПа} < \gamma_c R = 210 \text{ МПа.}$$

Стержень CB $2L20 \times 4$:

$$\sigma = \frac{53,9}{2,92} = 18,46 \text{ кН/см}^2 = 184,6 \text{ МПа} < \gamma_c R = 210 \text{ МПа.}$$

Прочность стержней обеспечена.

Задача 1.7

Короткая стальная труба $\varnothing 200 \times 10$ мм заполнена бетоном и находится под действием сжимающей силы (рис. 1.22). Коэффициент надежности по нагрузке $\gamma_f = 1,2$. Требуется определить продольные силы и напряжения, воспринимаемые стальной трубой и бетоном, и проверить их прочность. Устойчивость колонны и совместную работу трубы и бетона считать обеспеченными. Эффекты, связанные с поперечными деформациями, не учитывать. В расчетах принять:

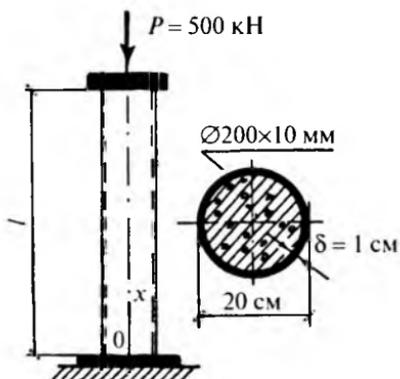


Рис. 1.22

$$E_{\text{ст}} = 2,1 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2 = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad R_{\text{ст}} = 210 \text{ МПа},$$

$$E_{\text{б}} = 3 \cdot 10^3 \text{ кН/см}^2 = 3 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \quad R_{\text{б}} = 20 \text{ МПа}, \quad \gamma_c = 1,0.$$

Продольная сила в колонне воспринимается одновременно стальной трубой и бетоном. Из уравнения равновесия получаем:

$$\sum X = 0, \quad N = N_{\text{ст}} + N_{\text{б}} = P_p = 600 \text{ кН},$$

где $P_p = 1,2 \cdot 500 = 600 \text{ кН}$ — расчетная сжимающая сила, $N_{\text{ст}}$ — продольная сила в трубе, $N_{\text{б}}$ — продольная сила в бетоне.

Задача один раз статически неопределима. Дополнительное уравнение получим исходя из характера деформации стержня. На основании совместной работы стальной трубы и бетонного цилиндра записываем условие равенства их укорочений под действием нагрузки:

$$\Delta l_{\text{ст}} = \Delta l_{\text{б}}, \quad \frac{N_{\text{ст}} l}{E_{\text{ст}} F_{\text{ст}}} = \frac{N_{\text{б}} l}{E_{\text{б}} F_{\text{б}}}, \quad \frac{N_{\text{ст}}}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 59,7} = \frac{N_{\text{б}}}{3 \cdot 10^3 \cdot 254,5},$$

$$N_{\text{ст}} = 1,642 \cdot N_{\text{б}},$$

где $F_{\text{ст}} = \pi(10^2 - 9^2) = 59,7 \text{ см}^2$, $F_{\text{б}} = \pi \cdot 9^2 = 254,5 \text{ см}^2$ — площади поперечных сечений трубы и бетонного цилиндра.

Определяем продольные силы и напряжения в стальной трубе и бетонном заполнителе и проверяем их прочность:

$$\left. \begin{aligned} N_{\text{ст}} + N_{\text{б}} &= 600 \text{ кН}, \\ N_{\text{ст}} &= 1,642 N_{\text{б}}, \end{aligned} \right\}$$

$$N_{\text{ст}} = 372,9 \text{ кН}, \quad N_{\text{б}} = 227,1 \text{ кН},$$

$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{N_{\text{ст}}}{F_{\text{ст}}} = \frac{372,9}{59,7} = 6,25 \text{ кН/см}^2 = 62 \text{ МПа} < \gamma_c R_{\text{ст}} = 210 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{\text{б}} = \frac{N_{\text{б}}}{F_{\text{б}}} = \frac{227,1}{254,5} = 0,89 \text{ кН/см}^2 = 8,9 \text{ МПа} < \gamma_c R_{\text{б}} = 20 \text{ МПа}.$$

Условия прочности выполняются.

Задача 1.8

Для стержневой системы (рис. 1.23) требуется:

1. Определить усилия в стержнях CB и BD , приняв соотношение площадей сечений стержней $F_2/F_1 = 1,2$.
2. Подобрать сечения стержней в виде двух стальных прокатных уголков, считая одну треть нагрузки постоянной, а две трети —

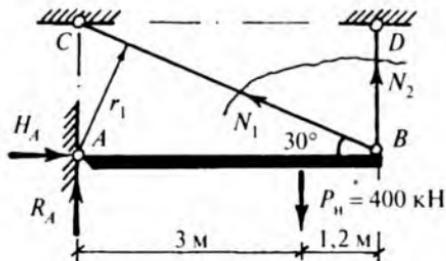


Рис. 1.23

временной. Коэффициенты надежности по нагрузке принять для постоянной нагрузки $\gamma_f^p = 1,1$, для временной нагрузки — $\gamma_f^v = 1,4$.

3. Определить величину разрушающей нагрузки в пластической стадии и установить коэффициент запаса, приняв $\sigma_T = 240$ МПа. В расчетах принять $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа = $2,1 \cdot 10^4$ кН/см², $R = 210$ МПа, $\gamma_c = 1,0$.

Определяем величину расчетной нагрузки:

$$P_p = \frac{1}{3} 400 \cdot 1,1 + \frac{2}{3} 400 \cdot 1,4 = 520 \text{ кН.}$$

Данная стержневая система один раз статически неопределима. Составим уравнение равновесия, не содержащее опорных реакций R_A и H_A :

$$\sum M_A = 0, \quad 2,1 N_1 + 4,2 N_2 = 3P = 3 \cdot 520 = 1560 \text{ кНм,}$$

где $r_1 = 4,2 \sin 30^\circ = 2,1$ м, $r_2 = 4,2$ м — плечи усилий.

Для получения дополнительного уравнения рассмотрим схему деформации системы при повороте жесткой балки AB относительно шарнира A на малый угол θ (рис. 1.24) и свяжем удлинения стержней между собой.

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \cos 60^\circ, \quad \frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = 0,5.$$

Выражаем удлинения стержней через действующие в них усилия и получаем дополнительное уравнение:

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{N_1 l_1}{E F_1} \cdot \frac{E F_2}{N_2 l_2} = \frac{N_1}{N_2} \cdot \frac{4,85}{2,42} \cdot 1,2 = 0,5, \quad N_1 = 0,208 N_2,$$

где $l_1 = \frac{4,2}{\cos 30^\circ} = 4,85$ м, $l_2 = 4,2 \tan 30^\circ = 2,42$ м — длины стержней.

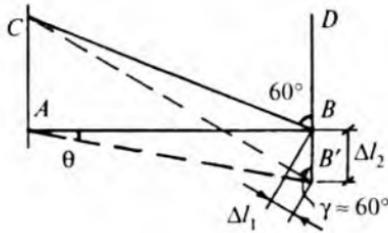


Рис. 1.24

Определяем величины расчетных усилий в стержнях:

$$\left. \begin{aligned} 2,1N_1 + 4,2N_2 &= 1560 \text{ кНм}, \\ N_1 &= 0,208N_2, \end{aligned} \right\}$$

$$N_1 = 70 \text{ кН}, \quad N_2 = 336 \text{ кН}.$$

Вычисляем требуемые площади сечений стержней:

$$F_1 = \frac{N_1}{\gamma_c R} = \frac{70}{21} = 3,33 \text{ см}^2, \quad F_2 = \frac{N_2}{\gamma_c R} = \frac{336}{21} = 16 \text{ см}^2.$$

Проверяем выполнение принятого в начале расчета соотношения между площадями сечений стержней:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{16}{3,33} = 4,8 > 1,2.$$

Принятое соотношение не выполняется. Следовательно, при подборе сечений стержней надо увеличить требуемую площадь сечения первого стержня в соответствии с принятым соотношением и принять

$$F_1 = \frac{F_2}{1,2} = \frac{16}{1,2} = 13,33 \text{ см}^2.$$

Принимаем по сортаменту сечения стержней в виде двух стальных прокатных равнобоких уголков и определяем действующие в стержнях напряжения.

Первый стержень 2L70x5. $F_1 = 2 \cdot 6,86 = 13,72 \text{ см}^2$,

$$\sigma = \frac{70}{13,72} = 5,1 \text{ кН/см}^2 = 51 \text{ МПа}.$$

Второй стержень 2L70x6. $F_2 = 2 \cdot 8,15 = 16,3 \text{ см}^2$,

$$\sigma = \frac{336}{16,3} = 20,6 \text{ кН/см}^2 = 206 \text{ МПа}.$$

Определяем величины удлинений стержней:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF_1} = \frac{70 \cdot 485}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 13,72} = 0,12 \text{ см,}$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EF_2} = \frac{336 \cdot 242}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 16,3} = 0,24 \text{ см.}$$

Вычисляем значения разрушающих усилий в стержнях:

$$N_{1T} = \sigma_T F_1 = 24 \cdot 13,72 = 329 \text{ кН,}$$

$$N_{2T} = \sigma_T F_2 = 24 \cdot 16,3 = 391 \text{ кН.}$$

Определяем из уравнения равновесия величину разрушающей (предельной) нагрузки и коэффициент запаса по отношению к нормативной нагрузке:

$$\sum M_A = 0, \quad 2,1 N_{1T} + 4,2 N_{2T} = 3 P_{\text{разр}},$$

$$P_{\text{разр}} = \frac{2,1 \cdot 329 + 4,2 \cdot 391}{3} = 778 \text{ кН,}$$

$$n = \frac{P_{\text{разр}}}{P_n} = \frac{778}{400} = 1,95.$$

Задача 1.9

Стальной стержень жестко соединен на конце с медной втулкой ступенчато-постоянного сечения, к выступу которой приложена кольцевая нагрузка с осевой равнодействующей P (рис. 1.25). Трение между элементами отсутствует. Требуется определить:

1. Величину силы P_T , вызывающей появление текучести в одном из элементов системы.
2. Величину разрушающей силы $P_{\text{разр}}$.
3. Значения остаточных усилий, напряжений и перемещений при полной разгрузке системы после нагружения ее силой $P = 0,5(P_T + P_{\text{разр}})$.

Деформирование материала элементов системы следует диаграмме Прандтля (рис. 1.7). В расчетах принять $l_1 = 60$ см, $l_2 = 30$ см, $F_{\text{ст}} = 10$ см², $F_{1M} = 15$ см², $F_{2M} = 20$ см², $E_{\text{ст}} = 2 \cdot 10^5$ МПа, $E_M = 1 \times 10^5$ МПа, $\sigma_T^M = 100$ МПа, $\sigma_T^{\text{ст}} = 240$ МПа.

Данная задача является один раз статически неопределимой. Проводим сечения в пределах каждого из участков системы и с помощью уравнения равновесия $\sum X = 0$ получаем:

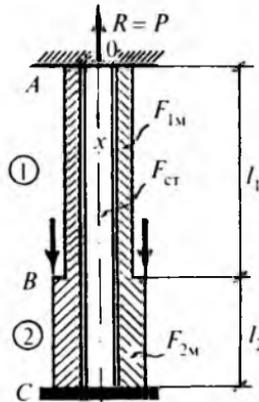


Рис. 1.25

$$N_{\text{ст}} + N_{1\text{М}} = P, \quad N_{\text{ст}} = N_{2\text{М}},$$

где $N_{\text{ст}}$, $N_{1\text{М}}$ и $N_{2\text{М}}$ — продольные силы в стальном стержне и в медной втулке в пределах первого и второго участков. Силы $N_{\text{ст}}$ и $N_{1\text{М}}$ являются растягивающими, а сила $N_{2\text{М}}$ является сжимающей.

Дополнительное уравнение для определения усилий в элементах системы получаем из условия совместности деформаций стержня и втулки:

$$\Delta l_{\text{ст}} = \Delta l_{\text{М}}, \quad \frac{N_{\text{ст}}(l_1 + l_2)}{E_{\text{ст}} F_{\text{ст}}} = \frac{N_{1\text{М}} l_1}{E_{\text{М}} F_{1\text{М}}} - \frac{N_{2\text{М}} l_2}{E_{\text{М}} F_{2\text{М}}}.$$

Подставив числовые данные и используя уравнения равновесия, получаем:

$$N_{1\text{М}} = 1,5 N_{2\text{М}}, \quad N_{\text{ст}} = N_{2\text{М}} = 0,4 P, \quad N_{1\text{М}} = 0,6 P.$$

При постепенном увеличении нагрузки нормальные напряжения достигнут предела текучести в первую очередь в пределах наиболее нагруженного верхнего участка медной втулки. Продольная сила на этом участке будет равна

$$N_{1\text{М}} = \sigma_{\text{T}}^{\text{М}} F_{1\text{М}} = 10 \cdot 15 = 150 \text{ кН}.$$

Определяем значение нагрузки, соответствующей появлению первых пластических деформаций в элементах системы:

$$P_{\text{T}} = \frac{N_{1\text{М}}}{0,6} = \frac{150}{0,6} = 250 \text{ кН}.$$

Деформации стального стержня являются упругими. Определяем величину перемещения нижнего конца системы:

$$N_{\text{ст}} = 0,4 \cdot 250 = 100 \text{ кН},$$

$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{100}{10} = 10 \text{ кН/см}^2 = 100 \text{ МПа} < \sigma_{\text{T}}^{\text{ст}},$$

$$u_{\text{C}} = \Delta l_{\text{ст}} = \frac{N_{\text{ст}}(l_1 + l_2)}{E_{\text{ст}} F_{\text{ст}}} = \frac{100(60 + 30)}{2 \cdot 10^4 \cdot 10} = 0,045 \text{ см}.$$

При дальнейшем увеличении нагрузки ($P > P_1$) система работает в упруго-пластической стадии. В пределах верхнего участка втулки деформации являются пластическими, а продольная сила остается постоянной и равной $N_{1\text{M}} = 150$ кН. Стальной стержень и медная втулка в пределах нижнего участка деформируются упруго. Разрушение системы будет соответствовать появлению пластических деформаций либо в пределах нижнего участка втулки, либо в стальном стержне. Вычисляем значения продольных сил, соответствующих появлению текучести в этих элементах:

$$N_{2\text{M}} = \sigma_{\text{T}}^{\text{M}} F_{2\text{M}} = 10 \cdot 20 = 200 \text{ кН},$$

$$N_{\text{ст}} = \sigma_{\text{T}}^{\text{ст}} F_{\text{ст}} = 24 \cdot 10 = 240 \text{ кН}.$$

Очевидно, что при возрастании нагрузки от значения P_{T} нормальные напряжения раньше достигнут предела текучести в нижнем участке втулки. Определяем соответствующее значение нагрузки:

$$P = N_{1\text{M}} + N_{2\text{M}} = 150 + 200 = 350 \text{ кН}.$$

Дальнейшее увеличение нагрузки невозможно из-за неограниченного роста пластических деформаций в пределах обоих участков втулки. В качестве разрушающей силы надо принять $P_{\text{разр}} = 350$ кН.

Произведем расчет системы на действие силы $P = 0,5(P_{\text{T}} + P_{\text{разр}}) = 0,5(250 + 350) = 300$ кН. Усилия и напряжения в элементах системы при действии этой силы равны

$$N_{1\text{M}} = 150 \text{ кН}, \quad N_{\text{ст}} = 300 - 150 = 150 \text{ кН}, \quad N_{2\text{M}} = -150 \text{ кН},$$

$$\sigma_{1\text{M}} = \sigma_{\text{T}}^{\text{M}} = 100 \text{ МПа}, \quad \sigma_{\text{ст}} = \frac{150}{10} = 15 \text{ кН/см}^2 = 150 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{2\text{M}} = -\frac{150}{20} = -7,5 \text{ кН/см}^2 = -75 \text{ МПа},$$

$$u_C = \Delta l_{\text{ст}} = \frac{150 \cdot 90}{2 \cdot 10^4 \cdot 10} = 0,0675 \text{ см,}$$

$$\Delta l_{2\text{м}} = -\frac{150 \cdot 30}{1 \cdot 10^4 \cdot 20} = -0,0225 \text{ см, } u_B = 0,0675 + 0,0225 = 0,09 \text{ см.}$$

Соответствующие эпюры приведены на рис. 1.26. Размерность продольной силы N в кН, напряжений σ в МПа, перемещений u в см.

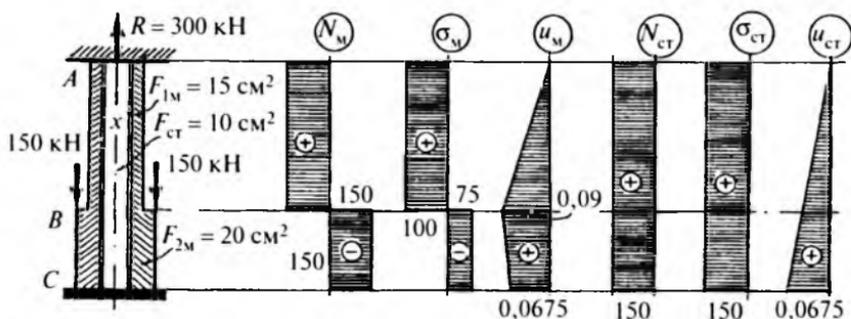


Рис. 1.26

Примем, что материал элементов системы при разгрузке деформируется упруго с первоначальными модулями упругости. Для определения остаточных усилий, напряжений и осевых перемещений при полной разгрузке системы после нагружения ее силой $P = 300$ кН произведем расчет системы в упругой стадии на действие силы P обратного направления, а полученные результаты сложим с данными на рис. 1.26.

$$N_{2\text{м}} = 0,4P = 0,4 \cdot 300 = 120 \text{ кН, } N_{\text{ст}} = -120 \text{ кН,}$$

$$N_{1\text{м}} = -0,6P = -0,6 \cdot 300 = -180 \text{ кН,}$$

$$\sigma_{\text{ст}} = -\frac{120}{10} = -12 \text{ кН/см}^2 = -120 \text{ МПа,}$$

$$\sigma_{2\text{м}} = \frac{120}{20} = 6 \text{ кН/см}^2 = 60 \text{ МПа,}$$

$$\sigma_{1\text{м}} = -\frac{180}{15} = -12 \text{ кН/см}^2 = -120 \text{ МПа,}$$

$$u_C = \Delta l_{\text{ст}} = -\frac{120 \cdot 90}{2 \cdot 10^4 \cdot 10} = -0,054 \text{ см,}$$

$$u_B = \Delta l_{1M} = -\frac{180 \cdot 60}{1 \cdot 10^4 \cdot 15} = -0,072 \text{ см.}$$

Эпюры остаточных усилий, напряжений и перемещений в медной втулке и стальном стержне приведены на рис. 1.27.

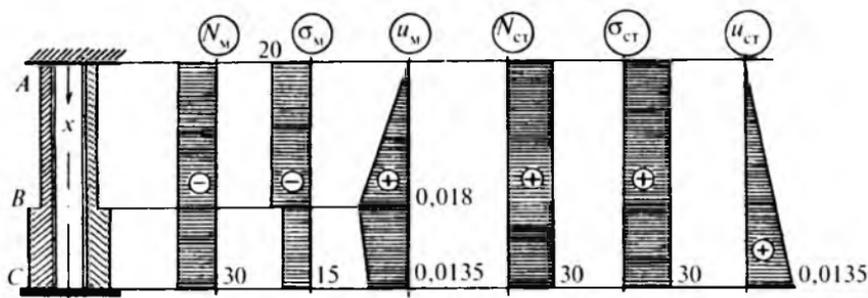


Рис. 1.27

Построим график, характеризующий зависимость между силой P и осевым перемещением нижнего конца системы (сечение С). Этот график имеет излом при $P = P_T = 250$ кН. Проведя прямую разгрузки, параллельную первому участку графика, определяем остаточное перемещение сечения С (рис. 1.28).

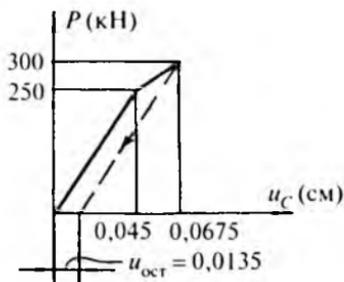


Рис. 1.28

Задача 1.10

На стальной стержень надета алюминиевая трубка и закреплена с помощью гайки (рис. 1.29). Определить напряжения, возникающие в элементах системы при нагреве ее на величину $\Delta T = 60^\circ \text{C}$. Начальные напряжения и трение между элементами отсутствуют.

В расчетах принять $E_{ст} = 2 \cdot 10^5$ МПа, $E_{ал} = 0,7 \cdot 10^5$ МПа, $\alpha_{ст} = 1,2 \cdot 10^{-5}$ 1/град, $\alpha_{ал} = 2,4 \cdot 10^{-5}$ 1/град.

При нагреве системы ее элементы в силу жесткости соединения получают одинаковые удлинения: $\Delta l_{ст} = \Delta l_{ал}$. Поскольку коэффициент линейного температурного расширения у алюминия больше, чем у стали, нагрев системы вызовет появление растягивающих усилий в стальном стержне и сжимающих усилий в алюминиевой трубке. При отсутствии внешних нагрузок эти усилия должны быть равны между собой: $\sum X = 0$, $N_{ст} = N_{ал}$.

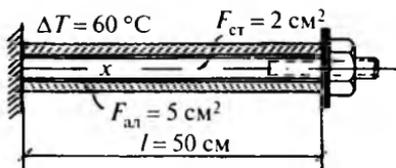


Рис. 1.29

Задача является статически неопределимой. Приравняв деформации стержня и трубки между собой, получим

$$\frac{N_{ст}l}{E_{ст}F_{ст}} + \alpha_{ст}l\Delta T = \alpha_{ал}l\Delta T - \frac{N_{ал}l}{E_{ал}F_{ал}}, \quad N_{ст} = N_{ал}.$$

Подставив числовые данные и решив эти уравнения, находим усилия в элементах системы: $N_{ст} = 13,44$ кН, $N_{ал} = -13,44$ кН. Вычисляем значения напряжений в стержне и трубке, а также величину их удлинения:

$$\sigma_{ст} = \frac{13,44}{2} = 6,72 \text{ кН/см}^2 = 67,2 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{ал} = -\frac{13,44}{5} = -2,69 \text{ кН/см}^2 = -27 \text{ МПа},$$

$$\Delta l = \Delta l_{ст} = \frac{13,44 \cdot 50}{2 \cdot 10^4 \cdot 2} + 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 50 \cdot 60 = 0,0528 \text{ см}.$$

Задача 1.11

При монтаже показанной на рис. 1.30 стержневой системы оказалось, что длина среднего стержня CB меньше проектной на величину $\delta = 0,2$ см. Требуется определить усилия и напряжения в

стержнях после монтажа. Поперечные сечения стержней имеют следующие площади: $F_1 = F_3 = 10 \text{ см}^2$, $F_2 = 12 \text{ см}^2$. Модули упругости материала стержней равны $E_1 = E_3 = 1 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2 = 1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $E_2 = 2,1 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2 = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

При установке среднего стержня его необходимо либо предварительно растянуть на величину δ , либо нагреть на температуру ΔT , величину которой можно определить из уравнения $\Delta l = \alpha \Delta T = \delta$, где α — коэффициент линейного температурного расширения. Приняв $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5} \text{ 1/град}$, находим

$$\Delta l = 1,25 \cdot 10^{-5} \cdot 300 \cdot \Delta T = \delta = 0,2 \text{ см}, \quad \Delta T = 53^\circ.$$

После монтажа системы средний стержень будет находиться под действием растягивающего усилия, а крайние стержни — под действием сжимающих усилий (рис. 1.31). Вырежем узел B и рассмотрим его равновесие:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0, & N_1 &= N_3 \text{ (в силу симметрии),} \\ \sum Y &= 0, & N_2 &= (N_1 + N_3) \cos 45^\circ = 1,414 N_1. \end{aligned}$$

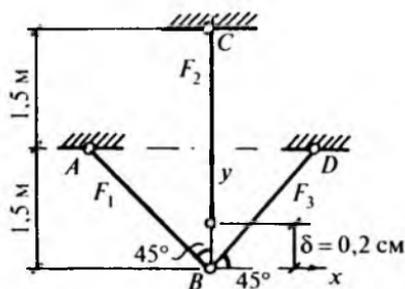


Рис. 1.30

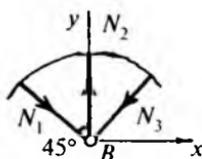


Рис. 1.31

Задача является один раз статически неопределимой, и для ее решения надо рассмотреть схему деформации системы. После монтажа шарнирный узел B переместится вертикально вверх на величину $\delta - \Delta l_2$ (рис. 1.32). Из схемы деформации получаем

$$\Delta l_1 = BB' \cos 45^\circ = (\delta - \Delta l_2) \cos 45^\circ.$$

Выражаем деформации стержней через действующие в них усилия и составляем дополнительное уравнение:

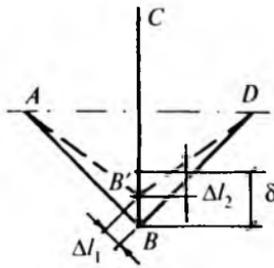


Рис. 1.32

$$\frac{N_1 \cdot 212}{1 \cdot 10^4 \cdot 10} = \left(0,2 - \frac{N_2 \cdot 300}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 12} \right) \cos 45^\circ,$$

где $l_1 = \frac{1,5}{\cos 45^\circ} = 2,12$ м, $l_2 = 3$ м — длины стержней.

Вычисляем усилия и напряжения в стержнях системы:

$$\left. \begin{aligned} 2,12 N_1 + 0,842 N_2 &= 1,414 \cdot 10^2, \\ N_2 &= 1,414 N_1, \end{aligned} \right\}$$

$$N_1 = N_3 = 42,7 \text{ кН}, \quad N_2 = 60,4 \text{ кН}.$$

Первый и третий стержни: $\sigma = \frac{42,7}{10} = 4,27 \text{ кН/см}^2 = 42,7 \text{ МПа}.$

Второй (средний) стержень: $\sigma = \frac{60,4}{12} = 5,03 \text{ кН/см}^2 = 50,3 \text{ МПа}.$

Усилия и напряжения в крайних стержнях — сжимающие, в среднем стержне — растягивающие. Определяем вертикальное перемещение узла B после монтажа системы:

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 F_2} = \frac{60,4 \cdot 300}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 12} = 0,072 \text{ см},$$

$$v_B = BB' = \delta - \Delta l_2 = 0,2 - 0,072 = 0,128 \text{ см}.$$

Задача 1.12

В процессе работы стержневой системы (рис. 1.33) опора A жесткой балки AB получила осадку $\delta = 0,5$ см. Требуется определить усилия и напряжения в стержнях CD и EB , а также угол поворота балки. Площади поперечных сечений стержней $F_1 = 10 \text{ см}^2$, $F_2 =$

≈ 15 см. Модуль упругости материала $E = 2,1 \cdot 10^4$ кН/см² = $2,1 \cdot 10^5$ МПа. Собственный вес балки не учитывать.

При осадке опоры A жесткая балка AB совершит поворот относительно некоторой точки K , расположенной на участке между точками закрепления стержней (рис. 1.34). При этом первый стержень будет испытывать растяжение, а второй — сжатие (рис. 1.33). Составим уравнение равновесия:

$$\sum M_A = 0, \quad 2N_1 = 4N_2, \quad \frac{N_1}{N_2} = 2.$$

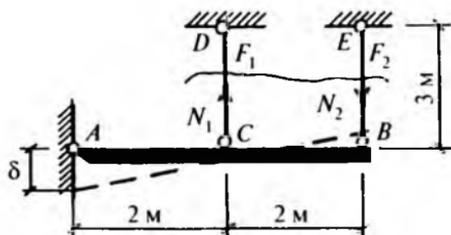


Рис. 1.33

Определить усилия в стержнях с помощью уравнений равновесия нельзя, поскольку система один раз статически неопределима.

Рассмотрев схему деформации системы (рис. 1.34), определяем положение точки K :

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{a}{2-a}, \quad \Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF_1}, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EF_2}, \quad \frac{N_1 l_1}{EF_1} \cdot \frac{EF_2}{N_2 l_2} = \frac{a}{2-a},$$

$$\frac{N_1}{N_2} \cdot \frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{F_2}{F_1} = 2 \cdot 1 \cdot \frac{15}{10} = \frac{a}{2-a}, \quad a = 1,5 \text{ м}, \quad (l_1 = l_2 = 3 \text{ м}).$$

Выражаем деформации стержней через величину осадки опоры δ и определяем усилия и напряжения в стержнях.

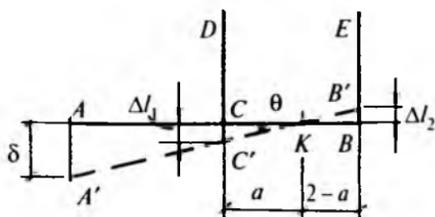


Рис. 1.34

Первый стержень

$$\frac{\Delta l_1}{\delta} = \frac{1,5}{3,5}, \quad \Delta l_1 = 0,5 \cdot \frac{1,5}{3,5} = 0,2143 = \frac{N_1 l_1}{EF_1},$$

$$N_1 = \frac{2,1 \cdot 10^4 \cdot 10 \cdot 0,2143}{300} = 150 \text{ кН},$$

$$\sigma = \frac{150}{10} = 15 \text{ кН/см}^2 = 150 \text{ МПа (растяжение)}.$$

Второй стержень

$$N_2 = -\frac{150}{2} = -75 \text{ кН (сжатие)},$$

$$\sigma = -\frac{75}{15} = -5 \text{ кН/см}^2 = -50 \text{ МПа}.$$

Вычисляем угол поворота балки AB :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\delta}{350} = \frac{0,5}{350} = 1,43 \cdot 10^{-3}, \quad \theta = 0^{\circ}04'55''.$$

Задача 1.13

Для стержневой системы (рис. 1.35) требуется определить усилия и напряжения в стержнях и вычислить вертикальное перемещение узла D . В расчетах принять $P = 100 \text{ кН}$, $F_1 = 10 \text{ см}^2$, $F_2 = 4 \text{ см}^2$, $F_3 = 12 \text{ см}^2$. Модуль упругости материала стержней $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$.

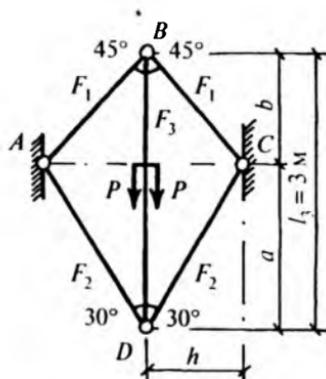


Рис. 1.35

Определяем длины первого и второго стержней: $l_1 = AB$ и $l_2 = AD$.

$$h = b \operatorname{tg} 45^\circ = a \operatorname{tg} 30^\circ, \quad a + b = l_3 = 3 \text{ м},$$

$$(l_3 - a) \operatorname{tg} 45^\circ = a \operatorname{tg} 30^\circ, \quad a = 1,902 \text{ м}, \quad b = 1,098 \text{ м},$$

$$l_1 = \frac{1,098}{\cos 45^\circ} = 1,553 \text{ м}, \quad l_2 = \frac{1,902}{\cos 30^\circ} = 2,196 \text{ м}.$$

В силу симметрии системы относительно вертикальной оси усилия в стержнях AB и AD равны соответственно усилиям в стержнях BC и CD . Обозначим их N_1 и N_2 , причем усилия N_1 являются сжимающими, а усилия N_2 — растягивающими. В вертикальном стержне BD верхняя часть испытывает растягивающее усилие $N_{3в}$, а нижняя часть — сжимающее усилие $N_{3н}$, причем $N_{3в} + N_{3н} = 2P$. Таким образом, число искомых усилий в стержнях системы равно четырем, и она один раз статически неопределима.

Вырезаем узлы B и D и рассматриваем их равновесие (рис. 1.36, $a, б$).

$$\text{Узел } B: \quad 2N_1 \cos 45^\circ = N_{3в};$$

$$\text{Узел } D: \quad 2N_2 \cos 30^\circ = N_{3н}.$$

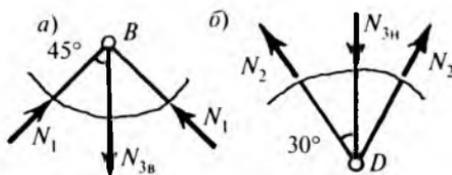


Рис. 1.36

Рассмотрим схему деформации системы (рис. 1.37). В силу симметрии узлы B и D перемещаются вертикально вниз. Из схемы деформации получим соотношения между величинами удлинений и укорочений стержней:

$$\Delta l_1 = BB' \cos 45^\circ, \quad \Delta l_2 = DD' \cos 30^\circ, \quad \Delta l_3 = DD' - BB'.$$

Выражая удлинения и укорочения стержней через действующие в них усилия, получим

$$\Delta l_3 = \frac{N_{3в} b}{EF_3} - \frac{N_{3н} a}{EF_3} = \frac{N_2 l_2}{EF_2 \cos 30^\circ} - \frac{N_1 l_1}{EF_1 \cos 45^\circ}.$$

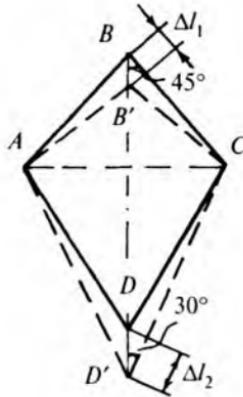


Рис. 1.37

Решая это уравнение совместно с уравнениями (1.17) и используя соотношение $N_{3в} + N_{3н} = 2P$, получим при числовых данных задачи следующие результаты:

$$N_{3в} = 1,36P = 136 \text{ кН}, \quad \sigma = \frac{136}{12} = 11,3 \text{ кН/см}^2 = 113 \text{ МПа},$$

$$N_{3н} = -64 \text{ кН}, \quad \sigma = -\frac{64}{12} = -5,33 \text{ кН/см}^2 = -53,3 \text{ МПа},$$

$$N_2 = 0,37P = 37 \text{ кН}, \quad \sigma = \frac{37}{4} = 9,25 \text{ кН/см}^2 = 92,5 \text{ МПа},$$

$$N_1 = -0,962P = -96,2 \text{ кН},$$

$$\sigma = -\frac{96,2}{10} = -9,62 \text{ кН/см}^2 = -96,2 \text{ МПа}.$$

Определяем вертикальное перемещение узла D :

$$u_D = DD' = \frac{\Delta l_2}{\cos 30^\circ} = \frac{N_2 l_2}{EF_2 \cos 30^\circ} = \frac{37 \cdot 219,6}{2 \cdot 10^4 \cdot 4 \cdot \cos 30^\circ} = 0,12 \text{ см}.$$

Задача 1.14

Для стержневой системы (рис. 1.38), состоящей из жесткой балки AB , поддерживаемой стержнями BC и DE указанного сечения, требуется определить:

1. Величину силы P_T , вызывающую появление текучести в одном из стержней.

2. Величину разрушающей силы $P_{\text{разр}}$, при действии которой несущая способность системы будет полностью исчерпана.
3. Значения остаточных усилий, напряжений и удлинений при полной разгрузке системы после нагружения ее силой $P = 0,5(P_T + P_{\text{разр}})$. Построить график зависимости перемещения точки приложения силы от ее величины при нагрузке и разгрузке.

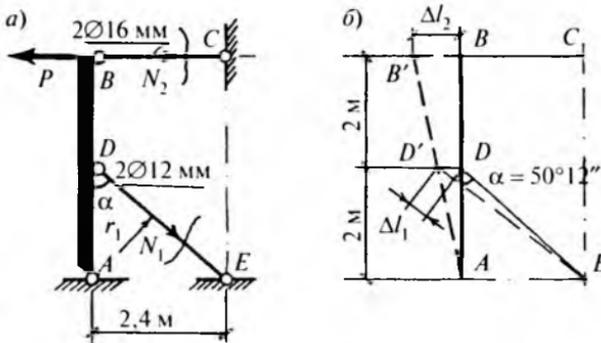


Рис. 1.38

Деформирование материала стержней следует диаграмме Прандтля. В расчетах принять $E_1 = E_2 = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\sigma_T = 280$ МПа = 28 кН/см².

Определяем площади сечений стержней и их длины:

$$F_1 = 2\pi \cdot 0,6^2 = 2,262 \text{ см}^2, \quad F_2 = 2\pi \cdot 0,8^2 = 4,021 \text{ см}^2,$$

$$l_1 = \sqrt{(2,4)^2 + (2)^2} = 3,124 \text{ м}, \quad l_2 = 2,4 \text{ м}.$$

Система один раз статически неопределима. Рассматриваем работу системы в упругой стадии и раскрываем ее статическую неопределимость с помощью схемы деформации (рис. 1.38, б). Из уравнения равновесия получаем

$$\sum M_A = 0, \quad 1,536N_1 + 4N_2 = 4P,$$

где $r_1 = 2 \sin \alpha = 1,536$ м, $r_2 = 4$ м — плечи усилий.

Из схемы деформации находим соотношение между усилиями:

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{DD' \sin \alpha}{BB'} = 0,5 \sin \alpha = 0,3841,$$

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{N_1 l_1}{E F_1} \cdot \frac{E F_2}{N_2 l_2} = \frac{N_1}{N_2} \cdot \frac{3,124}{2,4} \cdot \frac{4,021}{2,262} = 0,3841, \quad N_1 = 0,166 N_2.$$

Подставляем соотношение между усилиями в уравнение равновесия и выражаем усилия в стержнях через силу P :

$$N_1 = 0,1561 P, \quad N_2 = 0,9401 P.$$

Нетрудно видеть, что второй стержень является более нагруженным. При увеличении силы P напряжения в этом стержне в первую очередь достигнут предела текучести, а усилие будет равно $N_{2T} = \sigma_T F_2 = 28 \cdot 4,021 = 112,6$ кН. Определяем величину соответствующей силы $P = P_T$:

$$P_T = \frac{N_{2T}}{0,9401} = \frac{112,6}{0,9401} = 119,8 \text{ кН.}$$

Материал первого стержня находится при этом в упругой стадии. Определяем усилие в первом стержне и величины перемещений точек D и B .

$$N_1 = 0,1561 P_T = 0,1561 \cdot 119,8 = 18,69 \text{ кН,}$$

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E F_1} = \frac{18,69 \cdot 3,124 \cdot 10^2}{2 \cdot 10^4 \cdot 2,262} = 0,129 \text{ см,} \quad u_D = \frac{0,129}{\sin \alpha} = 0,168 \text{ см,}$$

$$u_B = \Delta l_2 = 2 \cdot 0,168 = 0,336 \text{ см.}$$

При дальнейшем увеличении силы P напряжения и в первом стержне достигнут предела текучести. При этом согласно диаграмме Прандтля деформации стержней будут неограниченно возрастать, что соответствует началу разрушения системы. Величину разрушающей силы определяем из уравнения предельного равновесия:

$$P_{\text{разр}} = \frac{N_{1T} r_1 + N_{2T} r_2}{r_P} = \frac{63,34 \cdot 1,536 + 112,6 \cdot 4}{4} = 136,9 \text{ кН,}$$

где $N_{1T} = \sigma_T F_1 = 28 \cdot 2,262 = 63,34$ кН.

Рассмотрим действие силы $P = 0,5(P_T + P_{\text{разр}}) = 0,5(119,8 + 136,9) = 128$ кН. В этом случае материал второго стержня находится в пластическом состоянии, и усилие в нем равно $N_2 = N_{2T} = 112,6$ кН.

Первый стержень при этом работает в пределах упругих деформаций, поскольку $P = 128 \text{ кН} < P_{\text{разр}}$. Усилие в первом стержне определяем из уравнения равновесия:

$$\sum M_A = 0, N_1 = \frac{4P - 4N_2}{r_1} = \frac{4 \cdot 128 - 4 \cdot 112,6}{1,536} = 40,1 \text{ кН.}$$

Определяем величину перемещения точки приложения силы:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF_1} = \frac{40,1 \cdot 3,124 \cdot 10^2}{2 \cdot 10^4 \cdot 2,262} = 0,277 \text{ см,}$$

$$u_B = \Delta l_2 = \frac{\Delta l_1}{0,3841} = \frac{0,277}{0,3841} = 0,721 \text{ см.}$$

Для определения остаточных усилий, напряжений и удлинений при полной разгрузке системы после нагружения ее силой $P = 128 \text{ кН}$ произведем расчет системы в упругой стадии на действие этой силы обратного направления (рис. 1.39). Полученные результаты надо сложить с данными предыдущего расчета.

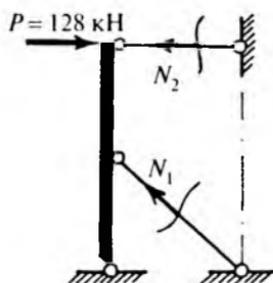


Рис. 1.39

$$N_1 = -0,1561P = -0,1561 \cdot 128 = -19,98 \text{ кН,}$$

$$N_2 = -0,9401P = -0,9401 \cdot 128 = -120,3 \text{ кН,}$$

$$\Delta l_1 = -\frac{19,98 \cdot 3,124 \cdot 10^2}{2 \cdot 10^4 \cdot 2,262} = -0,138 \text{ см,}$$

$$\Delta l_2 = -\frac{120,3 \cdot 2,4 \cdot 10^2}{2 \cdot 10^4 \cdot 4,021} = -0,359 \text{ см,}$$

$$N_1^{\text{ост}} = 40,1 + (-19,98) = 20,12 \text{ кН,}$$

$$\sigma_{\text{ост}} = \frac{20,12}{2,262} = 8,89 \text{ кН/см}^2 = 88,9 \text{ МПа,}$$

$$\Delta l_1^{\text{ост}} = 0,277 - 0,138 = 0,139 \text{ см,}$$

$$N_2^{\text{ост}} = 112,6 + (-120,3) = -7,7 \text{ кН,}$$

$$\sigma_{\text{ост}} = -\frac{7,7}{4,021} = -1,91 \text{ кН/см}^2 = -19,1 \text{ МПа},$$

$$\Delta l_2^{\text{ост}} = u_B^{\text{ост}} = 0,721 - 0,359 = 0,362 \text{ см}.$$

После разгрузки первый стержень испытывает растягивающее усилие, а второй — сжимающее, причем усилия в стержнях взаимно уравновешены:

$$\sum M_A = 0, \quad N_1 r_1 = N_2 r_2, \quad 20,12 \cdot 1,536 = 7,7 \cdot 4 = 30,8 \text{ кНм}.$$

На рис. 1.40 приведен график зависимости между перемещением точки приложения силы и ее величиной при нагрузке и разгрузке. После достижения силой величины $P = P_T = 119,8 \text{ кН}$ материал второго стержня находится в пластическом состоянии, в силу чего интенсивность перемещения точки B возрастает (на графике имеет место излом). Прямая разгрузки параллельна первому участку графика.

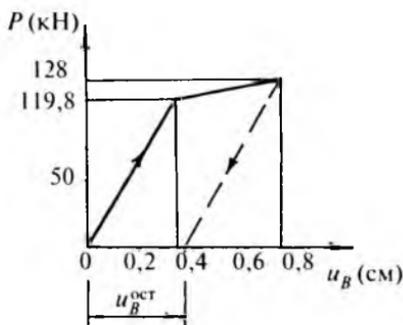


Рис. 1.40

Задача 1.15

Для фермы (рис. 1.41) требуется определить усилия в стержнях и подобрать сечение стержня 2–4 в виде двух стальных прокатных уголков, приняв $R = 210 \text{ МПа} = 21 \text{ кН/см}^2$, $\gamma_c = 1,0$.

При действии на ферму сил, приложенных в узлах (узловая нагрузка), в ее стержнях возникают только продольные силы. Для их аналитического определения применяются различные методы — метод вырезания узлов, метод проекций, метод моментных точек. Графическое определение усилий в стержнях ферм обычно производится с помощью диаграммы Максвелла—Кремоны.

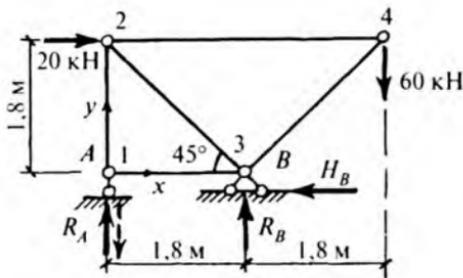


Рис. 1.41

Расчет фермы начинаем с определения опорных реакций:

$$\sum M_A = 0, \quad 20 \cdot 1,8 + 60 \cdot 3,6 - 1,8R_B = 0, \quad R_B = 140 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0, \quad 20 \cdot 1,8 + 60 \cdot 1,8 + 1,8R_A = 0, \quad R_A = -80 \text{ кН};$$

$$\sum X = 0, \quad H_B = 20 \text{ кН}, \quad \sum Y = 0 \text{ (проверка)}, \quad -60 - 80 + 140 = 0.$$

Для определения усилий в стержнях, сходящихся в узлах 1 и 4, применяем метод вырезания узлов.

Равновесие узла 1 (рис. 1.42):

$$\sum X = 0; \quad N_{13} = 0; \quad \sum Y = 0, \quad N_{12} = 80 \text{ кН}.$$

Стержень 1–3 ненагружен (нулевой стержень).

Равновесие узла 4 (рис. 1.43):

$$\sum X = 0, \quad -N_{24} - N_{34} \cos 45^\circ = 0,$$

$$\sum Y = 0, \quad -N_{34} \sin 45^\circ - 60 = 0, \quad N_{24} = 60 \text{ кН}, \quad N_{34} = -84,9 \text{ кН}.$$

Стержень 3–4 сжат.

Для определения усилия в стержне 2–3 применяем метод проекций. Рассекаем ферму сечением 1–1 и рассматриваем равновесие левой части (рис. 1.44):

$$\sum Y = 0, \quad -N_{23} \cos 45^\circ - 80 = 0, \quad N_{23} = -113,1 \text{ кН}.$$

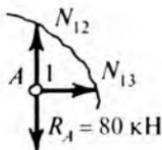


Рис. 1.42

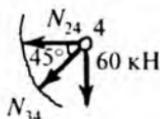


Рис. 1.43

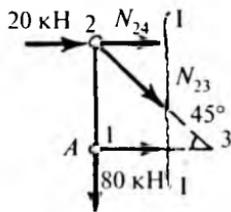


Рис. 1.44

Стержень 2–3 сжат. Отметим, что для определения усилия в стержне 2–4 можно использовать моментную точку 3, в которой сходятся усилия в стержнях 1–3 и 2–3.

Подбираем сечение растянутого стержня 2–4.

$$F \geq \frac{60}{1,0 \cdot 21} = 2,86 \text{ см}^2. \quad \text{Принимаем } 2L25 \times 3$$

Подбор сечения сжатых стержней надо проводить с учетом их возможной потери устойчивости.

Задача 1.16

Для стального растянутого стержня из двух равнополочных уголков $L56 \times 4$ (рис. 1.45, а) требуется определить величину параметра нагрузки P из условия, что удлинение стержня не превысит значение $\Delta l = 0,2$ см. Определить наибольшие напряжения в стержне. В расчетах принять $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2,1 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$.

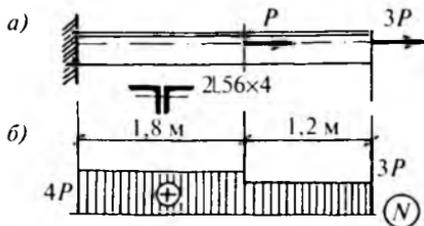


Рис. 1.45

Строим эпюру продольных сил в стержне (рис. 1.45, б). Определяем удлинения участков стержня и выполняем требуемое условие его жесткости:

$$\begin{aligned} \Delta l &= \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{4Pl_1}{EF} + \frac{3Pl_2}{EF} = \\ &= \frac{P}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 8,76} (4 \cdot 180 + 3 \cdot 120) \leq 0,2 \text{ см}, \end{aligned}$$

где $F = 2 \cdot 4,38 = 8,76 \text{ см}^2$ — площадь сечения стержня.

Из этого условия находим параметр нагрузки $P \leq 34,07 \text{ кН}$. Наибольшие нормальные напряжения в стержне равны

$$\sigma = \frac{4P}{F} = \frac{4 \cdot 34,07}{8,76} = 15,6 \text{ кН/см}^2 = 156 \text{ МПа}.$$

Задача 1.17

Для алюминиевого стержня, состоящего из двух участков круглого сплошного и кольцевого сечений (рис. 1.46, а), требуется определить параметр нагрузки P из условия прочности. Определить величину удлинения стержня. В расчетах принять $R = 140$ МПа, $\gamma_c = 1,0$, $E = 0,7 \cdot 10^5$ МПа = $0,7 \cdot 10^4$ кН/см².

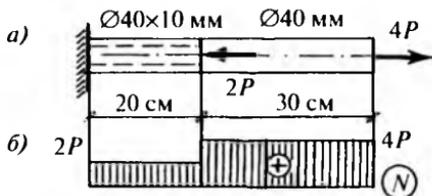


Рис. 1.46

Эпюра продольных сил в стержне приведена на рис. 1.46, б. Определяем площади сечений стержня и выражаем нормальные напряжения в пределах каждого его участка через P :

$$F_1 = \pi(2^2 - 1^2) = 9,425 \text{ см}^2, \quad \sigma = \frac{2P}{9,425} = 0,212P,$$

$$F_2 = \pi \cdot 2^2 = 12,57 \text{ см}^2, \quad \sigma = \frac{4P}{12,57} = 0,318P.$$

Величину параметра P определяем из условия прочности стержня в пределах второго участка: $\sigma = 0,318P \leq \gamma_c R = 14$ кН/см², $P \leq 44$ кН. Удлинение стержня равно

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{2 \cdot 44 \cdot 20}{0,7 \cdot 10^4 \cdot 9,425} + \frac{4 \cdot 44 \cdot 30}{0,7 \cdot 10^4 \cdot 12,57} = 0,087 \text{ см}.$$

Задача 1.18

Стальной стержень круглого сечения (арматура) заделан в бетонную плиту и находится под действием растягивающей силы P (рис. 1.47, а). Стержень удерживается в плите силами сцепления с бетоном. Требуется определить величину силы из условия прочности стержня и величину его удлинения. В расчетах принять $R = 240$ МПа, $\gamma_c = 1,0$, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Считаем, что силы сцепления стержня с бетоном равномерно распределены по длине a . Стержень находится в равновесии под

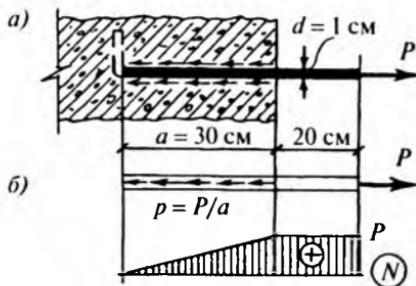


Рис. 1.47

действием силы P и равномерно распределенной осевой нагрузки интенсивностью $p = P/a$ (рис. 1.47, б). На этом рисунке приведена эпюра продольных сил. Выполняем условие прочности и находим величину силы:

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{P}{\pi \cdot d^2/4} \leq \gamma_c R = 24 \text{ кН/см}^2, \quad P \leq 18,85 \text{ кН.}$$

Определяем величину удлинения стержня:

$$\begin{aligned} \Delta l &= \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{pl_1^2}{2EF} + \frac{Pl_2}{EF} = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 10^4 \cdot \pi \cdot 1^2/4} \left[\frac{18,85}{2 \cdot 30} 30^2 + 18,85 \cdot 20 \right] = 0,042 \text{ см.} \end{aligned}$$

Отметим, что на практике закладные части арматуры делаются с отгибами, что на рис. 1.47, а показано пунктиром.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 1.19. Для стержней на рис. 1.48 требуется определить значения продольных сил в характерных сечениях, построить эпюры N и σ , определить величины абсолютных удлинений (укорочений) участков и построить эпюры осевых перемещений. Для схем принять:

- $E = 2 \cdot 10^5$ МПа;
- $E = 1 \cdot 10^5$ МПа;
- $E_1 = E_2 = 1 \cdot 10^5$ МПа, $E_3 = 2 \cdot 10^5$ МПа;
- $E_1 = 1,6 \cdot 10^5$ МПа, $E_2 = E_3 = 0,8 \cdot 10^5$ МПа.

Ответ: (табл. 1.1).

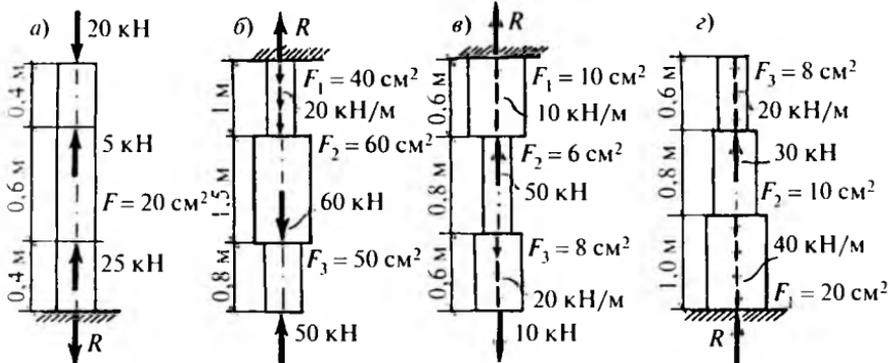


Рис. 1.48

Таблица 1.1

Схема	R , кН	Δl_1 , см	Δl_2 , см	Δl_3 , см	Δl , см
а	10	0,001	-0,00225	-0,002	-0,00325
б	30	0,005	0,0025	-0,008	-0,0005
в	-22	-0,015	0,0293	0,006	0,0203
г	22	-0,000625	0,018	-0,005625	0,01175

Задача 1.20. Для ферм на рис. 1.49 требуется аналитически определить усилия в стержнях.

Ответ: (табл. 1.2).

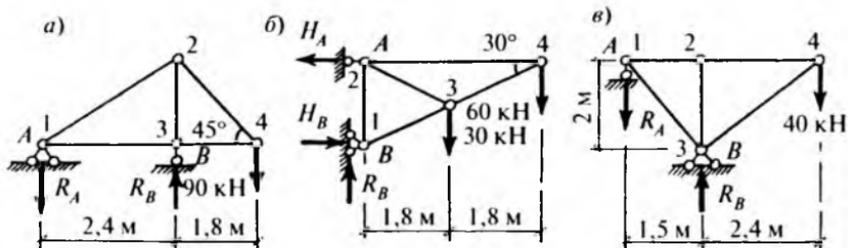


Рис. 1.49

Таблица 1.2

Схема	Опорные реакции, кН				Усилия в стержнях, кН				
	R_A	R_B	H_A	H_B	N_{12}	N_{23}	N_{13}	N_{24}	N_{34}
а	67,5	157,5	0	0	112,5	-157,5	-90	127,3	-90
б	0	90	129,9	129,9	-15,0	30	-150	103,9	-120
в	64	104	0	0	48,0	0	-80	48	-62,5

Задача 1.21. Латунный стержень круглого ступенчато-постоянного сечения нагружен тремя силами P (рис. 1.50). С помощью индикатора часового типа определено осевое перемещение верхнего конца $u = 0,04$ см. Требуется определить величину параметра нагрузки P . В расчетах принять $D_1 = 4$ см, $D_2 = 3$ см, $E = 1 \cdot 10^5$ МПа.

Ответ: $P = 40,03$ кН.

Задача 1.22. Жесткая балка AB поддерживается тремя стальными стержнями, состоящими из двух прокатных равнобоких уголков и находится под действием показанных на рис. 1.51 нагрузок. Требуется определить усилия и напряжения в стержнях и величины их удлинений. В расчетах принять $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа.

Ответ: $N_1 = -29,7$ кН, $\sigma = -27,5$ МПа, $\Delta l_1 = -0,037$ см,
 $N_2 = 55$ кН, $\sigma = 37,8$ МПа, $\Delta l_2 = 0,036$ см,
 $N_3 = 25,2$ кН, $\sigma = 23,3$ МПа, $\Delta l_3 = 0,04$ см.

Задача 1.23. В стержне AB стальной фермы (рис. 1.52) определена с помощью тензодатчика относительная линейная деформация $\epsilon = 2,6 \cdot 10^{-4}$. Стержень состоит из двух прокатных равнобоких уголков $\angle 75 \times 6$. Требуется определить значение приложенной силы P и величину удлинения стержня AB . В расчетах принять $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа.

Ответ: $P = 79,9$ кН, $\Delta l = 0,0624$ см.

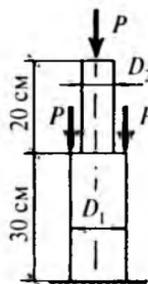


Рис. 1.50

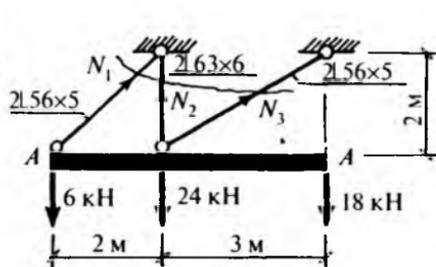


Рис. 1.51

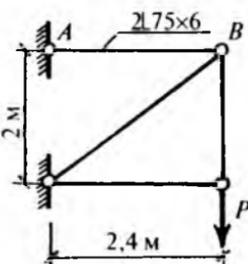


Рис. 1.52

Задача 1.24. Для стального стержня CB , поддерживающего жесткую балку AB (рис. 1.53), требуется подобрать сечение из условия прочности в двух вариантах и определить вертикальное перемещение точки B . В расчетах принять $R = 210$ МПа, $\gamma_c = 1,0$, $E = 2,1 \times 10^5$ МПа.

Ответ: а) 2.56×4 , $u_B = 0,58$ см; б) $d = 2,3$ см.

Задача 1.25. Для стержневой системы, состоящей из двух жестких балок, поддерживаемых двумя стальными стержнями указанного на рис. 1.54 сечения, требуется определить величину силы P из условий прочности стержней. Определить вертикальное перемещение точки C . В расчетах принять $R_1 = 380$ МПа, $R_2 = 210$ МПа, $\gamma_c = 1,0$, $E_1 = E_2 = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Ответ: $P = 171,9$ кН, $u_C = 0,462$ см.

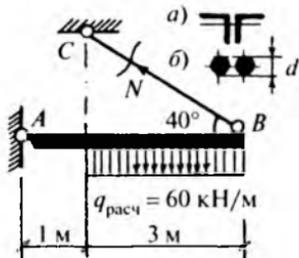


Рис. 1.53

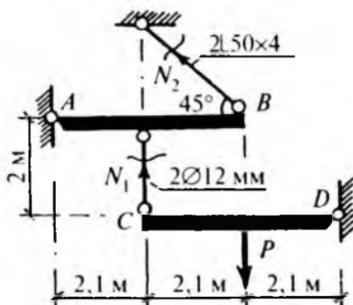


Рис. 1.54

Задача 1.26. Для стержневой системы (рис. 1.55) требуется определить усилия в стержнях и вертикальное перемещение узла D . В расчетах принять $F_1 = 2$ см², $F_2 = 3$ см², $F_3 = 4$ см², $E_1 = E_2 = 1 \cdot 10^5$ МПа, $E_3 = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Ответ: $N_1 = 10,11$ кН, $N_2 = 14,83$ кН, $N_3 = 14,3$ кН, $u_D = 0,228$ см.

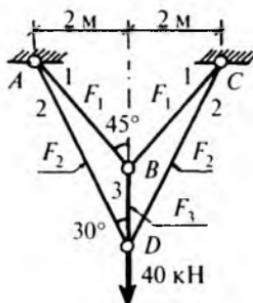


Рис. 1.55

Задача 1.27. Для стержней (рис. 1.56) требуется раскрыть статическую неопределимость и построить эпюры продольных сил, нор-

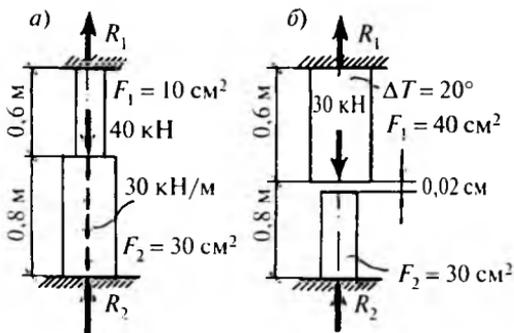


Рис. 1.56

мальных напряжений и осевых перемещений. Для схем принять: а) $E_1 = 2 \cdot 10^5$ МПа, $E_2 = 1 \cdot 10^5$ МПа; б) $E_1 = E_2 = 1 \cdot 10^5$ МПа, $\alpha = 1,65 \cdot 10^{-5}$ 1/град.

Ответ: (табл. 1.3).

Таблица 1.3

Схема	R_1 , кН	R_2 , кН	Δl_1 , см	Δl_2 , см	Δl , см
а	24,47	39,53	0,007341	-0,007341	0
б	-1,0	31,0	0,0262	-0,0062	0,02

Задача 1.28. Латунный стержень круглого сечения и стальная труба жестко соединены между собой и растягиваются силой P (рис. 1.57). Определить величину силы из условий прочности стержней. $R_{ст} = 210$ МПа, $E_{ст} = 2 \cdot 10^5$ МПа, $R_{л} = 120$ МПа, $\gamma_c = 1,0$, $E_{л} = 0,9 \cdot 10^5$ МПа.

Ответ: $P = 161,8$ кН.

Задача 1.29. Для статически неопределимого стержня (рис. 1.58) требуется определить величину силы P_T , вызывающей появление текучести на одном из участков, величину разрушающей силы $P_{разр}$ и значения остаточных усилий при полной разгрузке стержня после нагружения его силой $P = 0,5(P_T + P_{разр})$, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\sigma_T = 240$ МПа.

Ответ: $P_T = 1120$ кН, $P_{разр} = 1440$ кН, $N_{ост} = -68,6$ кН.

Задача 1.30. При установке жесткой балки AB длина стержня BD оказалась меньше проектной на величину $\delta = 0,1$ см (рис. 1.59). Требуется определить усилия в стержнях после монтажа. В расчетах принять $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа.

Ответ: $N_1 = -45,24$ кН, $N_2 = 31,99$ кН.

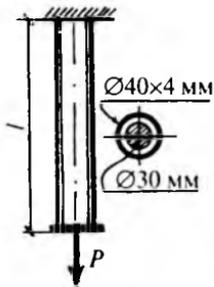


Рис. 1.57

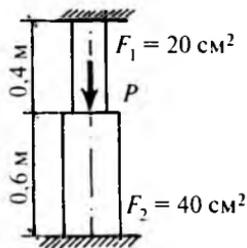


Рис. 1.58

Задача 1.31. Для стержневой системы (рис. 1.60) требуется определить усилия в стержнях после осадки опоры C жесткой балки AB на величину $\delta = 0,2$ см. В расчетах принять $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа.

Ответ: $N_1 = 56,34$ кН, $N_2 = 18,78$ кН.

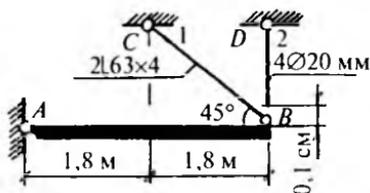


Рис. 1.59

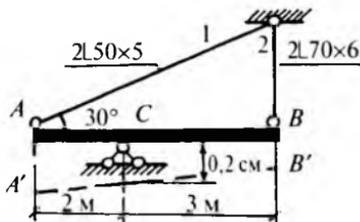


Рис. 1.60

НАПРЯЖЕННОЕ И ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТОЧКЕ ТЕЛА

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Для исследования напряженного состояния в точке тела в ее окрестности выделяется бесконечно малый элемент (прямоугольный параллелепипед со сторонами dx , dy и dz). Взаимодействие элемента с остальной частью тела при его нагружении характеризуется наличием на гранях элемента нормальных и касательных напряжений (рис. 2.1).

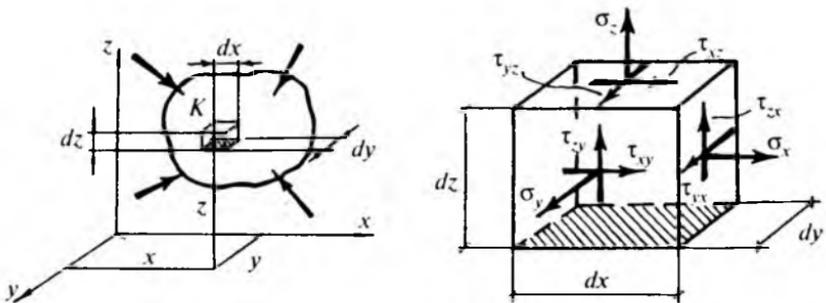


Рис. 2.1

Нормальные напряжения имеют индекс, указывающий направление действия напряжения. У касательных напряжений первый индекс также указывает направление действия напряжения, а второй индекс — направление нормали к площадке, на которой оно действует.

Растягивающие нормальные напряжения считаются положительными, а сжимающие — отрицательными. Знак касательных напряжений такого физического смысла не имеет. В теории упругости он устанавливается в зависимости от направления осей координат и внешней нормали к площадке (правило внешней нормали), что показано на рис. 2.2.

В задачах сопротивления материалов знак касательных напряжений в поперечных сечениях стержня принимается соответствующим знаком поперечной силы Q при изгибе.

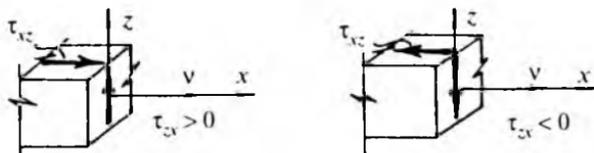


Рис. 2.2

Касательные напряжения на взаимно ортогональных площадках подчиняются закону парности, согласно которому они равны по величине и направлены либо к линии пересечения площадок, либо от этой линии (рис. 2.2). На основании закона парности имеем

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}. \quad (2.1)$$

Совокупность напряжений на трех координатных площадках вблизи данной точки полностью определяет напряженное состояние в этой точке и составляет специального вида матрицу — тензор напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

В силу закона парности (2.1) тензор напряжений симметричен относительно главной диагонали.

Напряжения на любой наклонной площадке вблизи данной точки можно выразить через напряжения на координатных площадках с помощью косинусов углов между нормалью к наклонной площадке v и осями координат $l = \cos(v, x)$, $m = \cos(v, y)$, $n = \cos(v, z)$ по формулам:

$$\left. \begin{aligned} X_v &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n, \\ Y_v &= \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n, \\ Z_v &= \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n, \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

где X_v , Y_v , Z_v — составляющие полного напряжения на наклонной площадке по осям координат.

Если точка, в которой рассматривается напряженное состояние, находится на поверхности тела, то величины X_v , Y_v и Z_v представляют собой компоненты внешней распределенной нагрузки $X_v = p_{xv}$, $Y_v = p_{yv}$, $Z_v = p_{zv}$. При этом уравнения (2.3) используются в качестве статических граничных условий.

В общем случае напряжения в теле являются переменными величинами, то есть функциями трех координат x, y, z . В окрестности каждой точки должны выполняться три дифференциальных уравнения равновесия Навье:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

где X, Y, Z — проекции объемных сил на оси координат. Объемными называются силы (нагрузки), действующие на каждую частицу тела (например, силы притяжения).

Вблизи любой точки тела можно выделить три взаимно перпендикулярные площадки, на которых отсутствуют касательные напряжения. Такие площадки называются главными. Нормальные напряжения на главных площадках обладают экстремальными свойствами и называются главными напряжениями. Они обозначаются σ_1, σ_2 и σ_3 , причем принимается, что $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Главные напряжения определяются как корни следующего кубического уравнения:

$$\sigma^3 - J_1 \sigma^2 + J_2 \sigma - J_3 = 0, \quad (2.5)$$

где J_1, J_2 и J_3 — инварианты напряженного состояния в точке (инварианты тензора напряжений), то есть величины, не зависящие для данной точки от направления осей координат. Инварианты выражаются через составляющие тензора напряжений по следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ J_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1, \\ J_3 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2 \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Наибольшие касательные напряжения вблизи данной точки действуют на площадках, наклоненных под углами 45° к главным площадкам. Они равны полуразности соответствующих главных напряжений:

$$\tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad \tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (2.7)$$

В зависимости от числа главных напряжений можно различить три вида напряженного состояния в точке тела — линейное, плоское и пространственное (рис. 2.3, а, б, в).

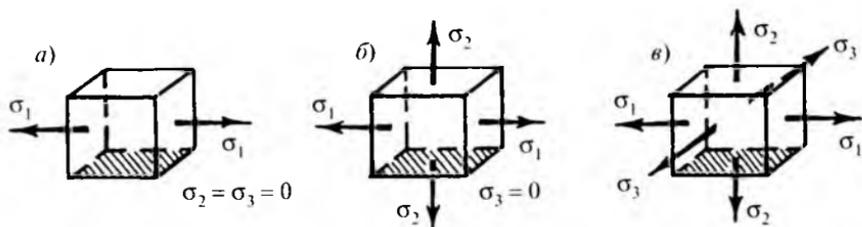


Рис. 2.3

Деформированное состояние в точке тела характеризуется шестью линейными и угловыми деформациями. Линейные деформации ϵ_x , ϵ_y и ϵ_z связаны с изменением линейных размеров вблизи данной точки в направлении осей координат. Угловые деформации или углы сдвига γ_{xy} , γ_{yz} и γ_{zx} связаны с искажением прямых углов в трех взаимно перпендикулярных плоскостях Oxy , Oyz и Ozx вблизи данной точки. Примеры линейной и угловой деформаций приведены на рис. 2.4 и 2.5.

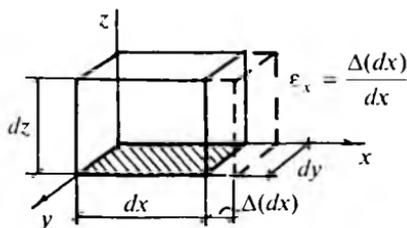


Рис. 2.4

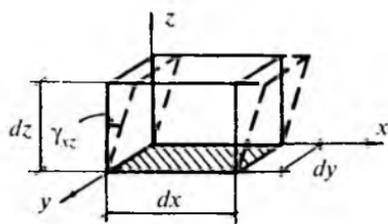


Рис. 2.5

Сумма трех линейных деформаций характеризует изменение объема вблизи данной точки и называется относительной объемной деформацией:

$$e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z. \quad (2.8)$$

Вблизи любой точки можно выделить три взаимно перпендикулярных направления, углы между которыми после деформации остаются прямыми. Такие направления называются главными осями деформации. Для линейно-упругих и изотропных тел главные оси деформации совпадают с направлениями главных напряжений. Линейные деформации в направлении главных осей называются главными деформациями и обозначаются ϵ_1 , ϵ_2 и ϵ_3 , причем полагается, что $\epsilon_1 \geq \epsilon_2 \geq \epsilon_3$.

Деформации, как и напряжения, являются переменными величинами и зависят от трех координат. Они связаны с компонентами перемещений точек тела u , v и w при его нагружении формулами Коши:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Шесть деформаций ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z , γ_{xy} , γ_{yz} и γ_{zx} полностью характеризуют деформированное состояние вблизи данной точки тела и составляют тензор деформаций:

$$T_\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \epsilon_z \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Тензор деформаций, как и тензор напряжений, симметричен относительно главной диагонали и имеет три инварианта. Первый инвариант представляет собой относительную объемную деформацию (2.8) вблизи данной точки.

В большинстве задач механики деформируемого твердого тела принимается положение о его сплошности, что по существу означает, что реальное молекулярное строение вещества тела не учитывается. При этом деформации в окрестности всех точек тела должны быть связаны между собой дифференциальными уравнениями неразрывности деформаций (уравнениями сплошности):

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial x \partial z}, \\
 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}, \\
 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z}, \\
 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}.
 \end{aligned} \right\} (2.11)$$

Для линейно-упругих и изотропных тел связь между деформациями и напряжениями характеризуется обобщенным законом Гука:

$$\left. \begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}, \\
 \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz}, \\
 \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \tau_{zx},
 \end{aligned} \right\} (2.12)$$

где E — модуль упругости материала при растяжении-сжатии, ν — коэффициент Пуассона и $G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$ — модуль упругости материала при сдвиге.

Закон Гука можно записать в объемной форме, характеризующей связь между относительной объемной деформацией (2.8) и первым инвариантом тензора напряжений (2.6):

$$e = \frac{1 - 2\nu}{E} J_1. \quad (2.13)$$

При деформировании тела под действием нагрузки в нем накапливается потенциальная энергия деформации. Удельная потенциальная энергия, то есть отнесенная к единице объема материала, определяется по формуле

$$U_0 = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]. \quad (2.14)$$

Для вычисления полной потенциальной энергии деформации тела надо выражение (2.14) проинтегрировать по всему его объему.

В задачах сопротивления материалов наиболее часто встречается плоское напряженное состояние. Оно характерно для тонких тел типа пластин, нагруженных в срединной плоскости (рис. 2.6). При этом две грани любого бесконечно малого элемента, параллельные плоскостям пластины, считаются свободными от напряжений ($\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$). Напряжения на остальных гранях элемента показаны на рис. 2.7.

При изучении плоского напряженного состояния в сопротивлении материалов обычно принимается более простое правило знаков для касательных напряжений: касательные напряжения считаются положительными, если они стремятся повернуть элемент по ходу часовой стрелки, что показано на рис. 2.7. Физический смысл закона парности касательных напряжений остается в силе.

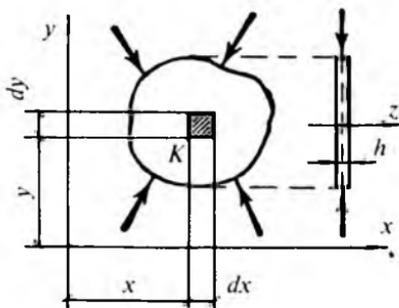


Рис. 2.6

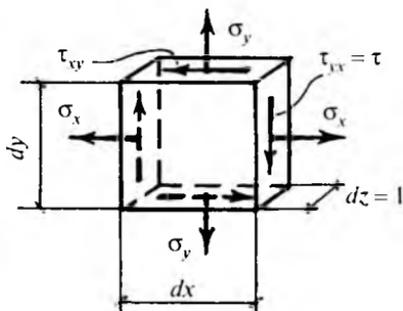


Рис. 2.7

Напряжения на наклонной площадке вблизи данной точки (рис. 2.8, $a, б$) при плоском напряженном состоянии определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau \sin 2\alpha, \\ \tau_\alpha &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau \cos 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

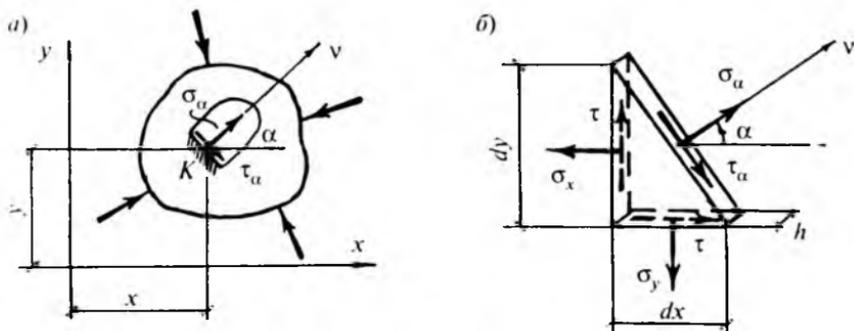


Рис. 2.8

Угол поворота нормали к площадке α считается положительным, если поворот происходит от оси Ox к оси Oy , то есть против хода часовой стрелки. Главные напряжения и углы наклона нормалей к главным площадкам (рис. 2.9) при плоском напряженном состоянии можно определить по формулам

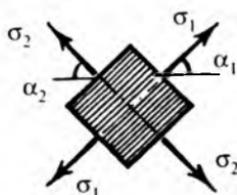


Рис. 2.9

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}, \quad (2.16)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{1,2} = \frac{\tau}{\sigma_y - \sigma_{1,2}}, \quad |\alpha_1| + |\alpha_2| = 90^\circ. \quad (2.17)$$

Третье главное напряжение $\sigma_3 = \sigma_z = 0$.

Сумма нормальных напряжений на любой паре ортогональных площадок вблизи данной точки является постоянной величиной (инвариантом):

$$\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha+90^\circ} = \sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2 = \text{const}. \quad (2.18)$$

Наибольшие касательные напряжения вблизи данной точки действуют на площадках, наклоненных под углами 45° к главным площадкам; они определяются по формуле

$$\tau_{1,2} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (2.19)$$

В соответствии с принятым правилом знаков касательные напряжения $\tau_1 = \tau_{\max}$ образуют пару, стремящуюся повернуть элемент по ходу часовой стрелки, а $\tau_2 = \tau_{\min}$ — против хода часовой стрелки. Углы наклона нормалей к площадкам с наибольшими касательными напряжениями можно также определить по формуле

$$\operatorname{tg} \beta_{1,2} = \frac{2(\tau_{1,2} - \tau)}{\sigma_x - \sigma_y}, \quad (2.20)$$

где $|\beta_1| + |\beta_2| = 90^\circ$.

Нормальные напряжения на площадках с наибольшими касательными напряжениями определяются по формуле

$$\sigma_\beta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}. \quad (2.21)$$

Закон Гука для плоского напряженного состояния можно рассматривать как частный случай соотношений (2.12). Положив в этих соотношениях $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, получим

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x), \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

Графическое исследование напряженного состояния вблизи данной точки проводится с помощью кругов Мора. Пример построения круга Мора дан в задачах 2.1 и 2.5.

Рассмотрим частные случаи плоского напряженного состояния.

1. Линейное напряженное состояние

При линейном напряженном состоянии вблизи данной точки можно выделить две взаимно ортогональные площадки, на которых действует только одно нормальное напряжение (рис. 2.10).

Полагая в формулах (2.15) $\sigma_y = \tau = 0$, получим

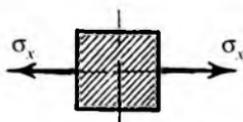


Рис. 2.10

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x}{2}(1 + \cos 2\alpha), \quad \tau_\alpha = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\alpha. \quad (2.23)$$

Координатные площадки являются главными, причем $\sigma_1 = \sigma_x$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$.

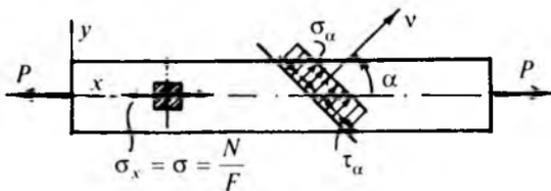


Рис. 2.11

Линейное напряженное состояние характерно для центрального растяжения и сжатия стержня. При этом с помощью формул (2.23) можно определять напряжения в наклонных сечениях стержня (рис. 2.11). Касательные напряжения достигают наибольших значений в сечениях, проведенных под углами $\alpha = \pm 45^\circ$ к оси стержня.

$$\text{При } \alpha = 45^\circ \quad \tau_\alpha = \tau_{\max} = \frac{\sigma}{2}, \quad \sigma_\alpha = \frac{\sigma}{2}.$$

Поскольку в горизонтальных сечениях напряжения отсутствуют (при $\alpha = 90^\circ$, $\sigma_\alpha = \tau_\alpha = 0$), продольные слои и волокна стержня при центральном растяжении и сжатии друг с другом не взаимодействуют.

2. Двухосное растяжение-сжатие

При двухосном растяжении-сжатии координатные площадки являются главными ($\sigma_1 = \sigma_x$, $\sigma_2 = \sigma_y$ или наоборот) (рис. 2.12). Напряжения на наклонной площадке можно выразить через главные напряжения по формулам

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha, \\ \tau_\alpha &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

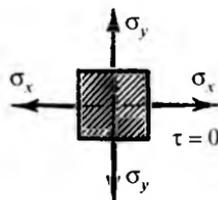


Рис. 2.12

Любое плоское напряженное состояние можно привести к двухосному растяжению-сжатию в направлении главных напряжений. В частном случае при $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ все площадки вблизи данной точки являются главными, и нормальные напряжения на них равны по величине и являются либо растягивающими, либо сжимающими.

3. Чистый сдвиг

Чистый сдвиг характеризуется наличием вблизи данной точки двух взаимно перпендикулярных площадок, на которых действуют

только касательные напряжения. Напряженное состояние чистого сдвига будет иметь место, когда главные напряжения равны по величине и противоположны по знаку (рис. 2.13). В этом случае на наклонных площадках определяются по формулам

$$\sigma_{\alpha} = \sigma \cos 2\alpha, \quad \tau_{\alpha} = \sigma \sin 2\alpha. \quad (2.25)$$

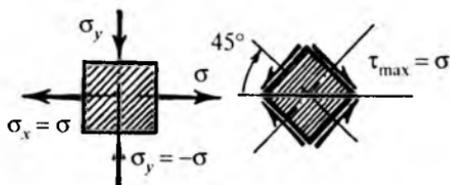


Рис. 2.13

На площадках, наклоненных под углами $\alpha = \pm 45^\circ$ к главным площадкам, нормальные напряжения отсутствуют, а касательные напряжения аксиальны и равны по абсолютной величине главным напряжениям.

При $\alpha = \pm 45^\circ$ $\sigma_{\alpha} = 0$, $\tau_{\alpha} = \tau_{1,2} = \pm \sigma$.

Сдвиг сопровождается искажением прямых углов или угловой деформацией γ (рис. 2.5). Для линейно-упругих изотропных тел зависимость γ от касательного напряжения τ называется законом Гука при сдвиге (2.12) и (2.22).

На сдвиг (рез, скалывание) производится расчет элементов соединений — сварных швов, болтов, заклепок, шпоронок и т.п. Вопросы расчета этих элементов обычно излагаются в курсах строительной механики.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 2.1

На координатных площадках вблизи данной точки тела, находящегося в условиях плоского напряженного состояния, действуют напряжения $\sigma_x = 60$ МПа, $\sigma_y = -20$ МПа, $\tau_{yx} = \tau = -30$ МПа.

Направления действия этих напряжений с учетом знаков показаны на рис. 2.14 для бесконечно малого элемента с координатными площадками. Требуется определить аналитически и графически:

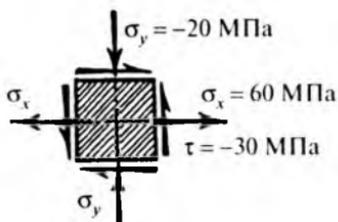


Рис. 2.14

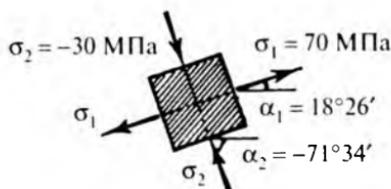


Рис. 2.15

1. Значения главных напряжений и углы наклона главных площадок.
2. Значения наибольших касательных напряжений и углы наклона площадок, на которых они действуют.
3. Значения нормальных и касательных напряжений на площадке с углом наклона нормали к оси Ox , равным $\alpha = 40^\circ$.

Вычисляем значения главных напряжений по формуле (2.16):

$$\sigma_{1,2} = \frac{60 + (-20)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{60 - (-20)}{2}\right)^2 + (-30)^2} = 20 \pm 50,$$

$$\sigma_1 = 70 \text{ МПа}, \quad \sigma_2 = -30 \text{ МПа}, \quad \sigma_3 = 0.$$

Определяем положение главных площадок:

$$\operatorname{tg} \alpha_{1,2} = \frac{\tau}{\sigma_y - \sigma_{1,2}} = \frac{-30}{-20 - \left(\begin{array}{c} 70 \\ -30 \end{array}\right)},$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = 0,333, \quad \alpha_1 = 18^\circ 26', \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = -3,0, \quad \alpha_2 = -71^\circ 34'.$$

Положение главных площадок вблизи данной точки показано на рис. 2.15. Проверим правильность вычислений:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 70 + (-30) = \sigma_x + \sigma_y = 60 + (-20) = 40 \text{ МПа},$$

$$|\alpha_1| + |\alpha_2| = 18^\circ 26' + 71^\circ 34' = 90^\circ.$$

Наибольшие касательные напряжения вблизи данной точки равны

$$\begin{aligned} \tau_{1,2} &= \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} = \pm \sqrt{\left(\frac{60 - (-20)}{2}\right)^2 + (-30)^2} = \\ &= \pm 50 \text{ МПа}, \end{aligned}$$

$$\tau_{\max} = \tau_1 = 50 \text{ МПа}, \quad \tau_{\min} = \tau_2 = -50 \text{ МПа}.$$

Определяем положение площадок с наибольшими касательными напряжениями:

$$\operatorname{tg} \beta_{1,2} = \frac{2(\tau_{1,2} - \tau)}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2[\pm 50 - (-30)]}{60 - (-20)},$$

$$\operatorname{tg} \beta_1 = 2, \quad \beta_1 = 63^\circ 26', \quad \operatorname{tg} \beta_2 = -0,5, \quad \beta_2 = -26^\circ 34'.$$

Проверяем правильность вычислений:

$$|\beta_1| + |\beta_2| = 63^\circ 26' + 26^\circ 34' = 90^\circ,$$

$$\beta_1 - \alpha_1 = 63^\circ 26' - 18^\circ 26' = 45^\circ.$$

Площадки с наибольшими касательными напряжениями показаны на рис. 2.16.

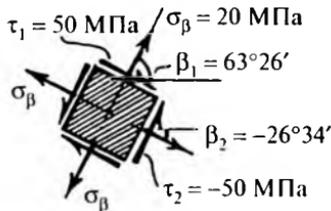


Рис. 2.16

Последняя проверка показывает, что площадки с наибольшими касательными напряжениями наклонены под углами 45° к главным площадкам. Нормальные напряжения на площадках с наибольшими касательными напряжениями равны

$$\sigma_\beta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{60 + (-20)}{2} = 20 \text{ МПа.}$$

Определяем по формулам (2.15) значения напряжений на площадке, нормаль к которой наклонена к оси Ox под углом $\alpha = 40^\circ$:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau \sin 2\alpha = \\ &= \frac{60 + (-20)}{2} + \frac{60 - (-20)}{2} \cos 80^\circ - (-30) \sin 80^\circ = 56,49 \text{ МПа,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_\alpha &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau \cos 2\alpha = \\ &= \frac{60 - (-20)}{2} \sin 80^\circ + (-30) \cos 80^\circ = 34,18 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

Для графического исследования напряженного состояния вблизи данной точки приведем формулы (2.15) к следующему виду:

$$\left(\sigma_{\alpha} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{\alpha}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2. \quad (2.26)$$

Уравнение (2.26) можно рассматривать как уравнение окружности в осях $O\sigma$ и $O\tau$ с центром на горизонтальной оси. Эта окружность называется кругом Мора для плоского напряженного состояния.

Для построения круга Мора надо на горизонтальной оси отложить со своими знаками значения напряжений σ_x и σ_y . Полуусумма этих напряжений определяет положение центра круга Мора.

Круг Мора характеризуется наличием особой точки окружности — полюса. Полюс обладает тем свойством, что в нем пересекаются нормали ко всем площадкам вблизи данной точки. Положение полюса легко устанавливается с помощью координатных площадок как точка окружности с координатами σ_y и τ . Соединив полюс с центром круга Мора, получим радиус искомой окружности.

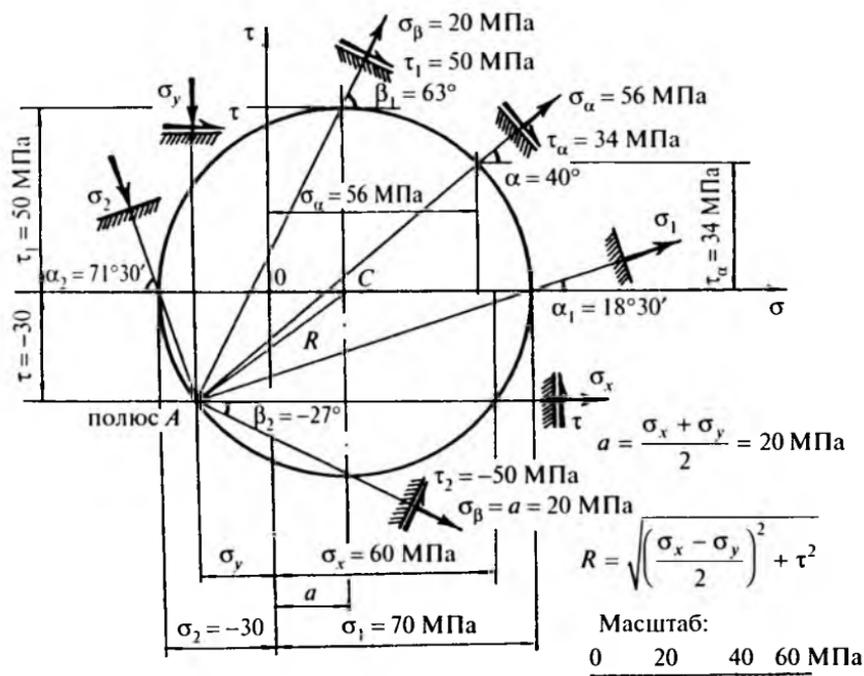


Рис. 2.17

Для определения напряжений σ_α и τ_α на любой наклонной площадке вблизи данной точки надо из полюса провести луч под углом к горизонтальной оси, равным углу наклона нормали к площадке. Координаты точки пересечения этого луча с окружностью круга Мора дадут значения напряжений на данной площадке. С помощью круга Мора можно также определить значения главных и наибольших касательных напряжений и углы наклона соответствующих площадок.

Круг Мора для данной задачи с результатами графического расчета представлен на рис. 2.17.

Задача 2.2

Стальная полоса прямоугольного сечения, имеющая косой сварной шов, находится под действием растягивающих сил $P = 240$ кН (рис. 2.18).

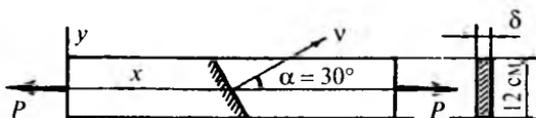


Рис. 2.18

Требуется определить толщину полосы δ из условий, что в сечении, соответствующем сварному шву, касательные напряжения не превышают $[\tau] = 80$ МПа, а нормальные напряжения — $[\sigma] = 160$ МПа.

С помощью формул (2.23) записываем условия прочности полосы на сдвиг и на растяжение по наклонному сечению, соответствующему сварному шву:

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\alpha = \frac{N}{2F} \sin 2\alpha = \frac{240}{2 \cdot 12 \cdot \delta} \sin 60^\circ \leq [\tau] = 8 \text{ кН/см}^2,$$

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x}{2} (1 + \cos 2\alpha) = \frac{240}{2 \cdot 12 \cdot \delta} (1 + \cos 60^\circ) \leq [\sigma] = 16 \text{ кН/см}^2.$$

Из этих условий определяем два значения толщины полосы:

$$\delta \geq \frac{240}{2 \cdot 12 \cdot 8} \sin 60^\circ = 1,08 \text{ см},$$

$$\delta \geq \frac{240}{2 \cdot 12 \cdot 16} (1 + \cos 60^\circ) = 0,94 \text{ см}.$$

Чтобы обеспечить выполнение обоих условий прочности, надо принять большую толщину. Округлив ее, примем $\delta = 1,1$ см.

Задача 2.3

Стальной прокатный двутавр П14 находится под действием осевых растягивающих сил (рис. 2.19). С помощью установленных на стенке двутавра тензометров определены относительные линейные деформации по двум взаимно перпендикулярным направлениям $\epsilon_\alpha = 3,2 \cdot 10^{-4}$ и $\epsilon_{\alpha_1} = 0,9 \cdot 10^{-4}$. Требуется определить величину силы P и углы установки тензометров. В расчетах принять $E = 2,1 \times 10^5$ МПа = $2,1 \cdot 10^4$ кН/см², $\nu = 0,3$.

Считая, что стенка двутавра находится в условиях плоского напряженного состояния, запишем обобщенный закон Гука (2.22) для линейных деформаций ϵ_α и ϵ_{α_1} :

$$\epsilon_\alpha = \frac{1}{E}(\sigma_\alpha - \nu\sigma_{\alpha_1}) = 3,2 \cdot 10^{-4},$$

$$\epsilon_{\alpha_1} = \frac{1}{E}(\sigma_{\alpha_1} - \nu\sigma_\alpha) = 0,9 \cdot 10^{-4},$$

где σ_α и σ_{α_1} — нормальные напряжения на площадках вблизи установки тензометров с углами наклона нормалей α и α_1 к оси Ox (рис. 2.20). Определяем эти напряжения из уравнений закона Гука:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_\alpha + \nu\epsilon_{\alpha_1}) = \frac{2,1 \cdot 10^4}{1-0,3^2}(3,2 \cdot 10^{-4} + 0,3 \cdot 0,9 \cdot 10^{-4}) = \\ &= 8,1 \text{ кН/см}^2 = 80,1 \text{ МПа}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha_1} &= \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_{\alpha_1} + \nu\epsilon_\alpha) = \frac{2,1 \cdot 10^4}{1-0,3^2}(0,9 \cdot 10^{-4} + 0,3 \cdot 3,2 \cdot 10^{-4}) = \\ &= 4,29 \text{ кН/см}^2 = 42,9 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Эти напряжения постоянны по соответствующим наклонным сечениям двутавра. Используя свойство инвариантности суммы

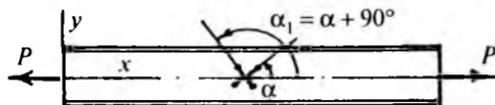


Рис. 2.19

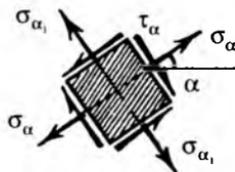


Рис. 2.20

нормальных напряжений (2.18), определяем нормальные напряжения в поперечном сечении двутавра:

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_x = \sigma_\alpha + \sigma_{\alpha_1} = 80,1 + 42,9 = 123 \text{ МПа.}$$

Нормальные напряжения в продольных сечениях σ_y при растяжении и сжатии полагаются отсутствующими. Определяем величину растягивающих сил P :

$$P = N = \sigma_x F = 12,3 \cdot 17,4 = 214 \text{ кН,}$$

где $F = 17,4 \text{ см}^2$ — площадь поперечного сечения двутавра I14.

С помощью формулы (2.23) определяем углы установки тензодатчиков:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x}{2}(1 + \cos 2\alpha) = \frac{123}{2}(1 + \cos 2\alpha) = 80,1 \text{ МПа,}$$

$$\cos 2\alpha = 0,3024, \quad 2\alpha = 72^\circ 24', \quad \alpha = 36^\circ 12', \quad \alpha_1 = 126^\circ 12',$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\alpha = \frac{123}{2} \sin 72^\circ 24' = 58,6 \text{ МПа.}$$

Задача 2.4

В прорезь массивной недеформируемой плиты свободно, но без зазоров, вставлен алюминиевый кубик $10 \times 10 \times 10,01$ см (рис. 2.21). Требуется определить величину давления q , которое надо приложить к верхней грани кубика, чтобы его высота стала равна глубине прорези. Определить также относительную и абсолютную объ-

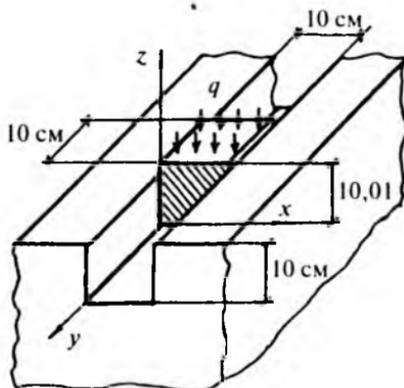


Рис. 2.21

емные деформации кубика. Трением между гранями кубика и поверхностями прорези пренебречь. В расчетах принять для алюминия $\nu = 0,34$, $E = 0,7 \cdot 10^5$ МПа.

Будем приближенно считать, что напряженное состояние в каждой точке кубика одинаково (однородное напряженное состояние). Тогда к кубику в целом можно применить обобщенный закон Гука (2.12).

Для решения задачи используем условие отсутствия напряжений σ_y на свободных гранях кубика и равенство нулю деформации ϵ_x в силу неподатливости стенок прорези. По закону Гука (2.12) получим

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_z) = 0, \quad \sigma_x = \nu\sigma_z.$$

Высота кубика после приложения нагрузки должна быть равна глубине прорези. Определяем относительную деформацию ϵ_z :

$$\Delta h = 10,01 - 10 = 0,01 \text{ см}, \quad \epsilon_z = -\frac{\Delta h}{h} = -\frac{0,01}{10} = -1 \cdot 10^{-3}.$$

С помощью обобщенного закона Гука определяем напряжение σ_z , которое и принимаем равным требуемому давлению q :

$$\epsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\nu\sigma_z)] = \frac{1 - \nu^2}{E}\sigma_z = -1 \cdot 10^{-3},$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1 - \nu^2}\epsilon_z = \frac{0,7 \cdot 10^5}{1 - 0,34^2}(-1 \cdot 10^{-3}) = -79,1 \text{ МПа},$$

$$q = |\sigma_z| = 79,1 \text{ МПа}.$$

Определяем нормальное напряжение σ_x :

$$\sigma_x = \nu\sigma_z = 0,34(-79,1) = -26,9 \text{ МПа}.$$

Это напряжение численно равно давлению кубика на стенки прорези. Поскольку касательные напряжения на гранях кубика полагаются отсутствующими, напряжения σ_x , σ_y и σ_z являются главными, причем $\sigma_1 = \sigma_y = 0$, $\sigma_2 = \sigma_x = -26,9$ МПа, $\sigma_3 = \sigma_z = -79,1$ МПа.

Определяем значение линейной деформации ϵ_y :

$$\epsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] = \frac{1}{0,7 \cdot 10^5}[-0,34(-26,9 - 79,1)] =$$

$$= 5,15 \cdot 10^{-4}.$$

Относительная объемная деформация (2.8) определяется как сумма трех линейных деформаций:

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0 + 5,15 \cdot 10^{-4} + (-1 \cdot 10^{-3}) = -4,85 \cdot 10^{-4}.$$

Абсолютное изменение объема кубика равно

$$\Delta V = eV = (-4,85 \cdot 10^{-4}) \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = -0,485 \text{ см}^3.$$

Определяем потенциальную энергию деформации кубика:

$$\begin{aligned} U &= U_0 V = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] \cdot 10^3 = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 0,7 \cdot 10^4} [(-2,69)^2 + (-7,91)^2 - 2 \cdot 0,34(-2,69)(-7,91)] \cdot 10^3 = \\ &= 3,95 \text{ кНсм}. \end{aligned}$$

Задача 2.5

Вблизи некоторой точки тела, находящегося в условиях пространственного (трехосного) напряженного состояния, известны компоненты тензора напряжений $\sigma_x = 40$ МПа, $\sigma_y = -30$ МПа, $\sigma_z = 10$ МПа, $\tau_{xy} = 20$ МПа, $\tau_{yz} = -20$ МПа, $\tau_{zx} = 10$ МПа. Знак касательных напряжений соответствует правилу внешней нормали. Требуется произвести анализ напряженного и деформированного состояний тела вблизи данной точки и вычислить значение удельной потенциальной энергии деформации. В расчетах принять $E = 1 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0,35$.

Покажем направления действия напряжений с учетом их знаков на площадках бесконечно малого элемента, выделенного вблизи данной точки в системе осей $Oxyz$ (рис. 2.22).

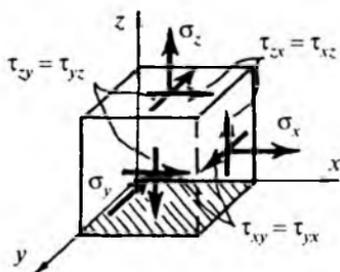


Рис. 2.22

Вычисляем значения инвариантов тензора напряжений:

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 40 + (-30) + 10 = 20 \text{ МПа},$$

$$J_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = 40(-30) + (-30)10 + 10 \cdot 40 - (20)^2 - (-20)^2 - 10^2 = -2000 \text{ (МПа)}^2,$$

$$J_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2(\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}) - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 = 40(-30) \cdot 10 + 2 \cdot 20(-20)10 - 40(-20)^2 - (-30)(10)^2 - 10(20)^2 = -37\,000 \text{ (МПа)}^3.$$

Значения главных напряжений вблизи данной точки определяются как корни кубического уравнения (2.5).

$$\sigma^3 - 20\sigma^2 + (-2000)\sigma - (-37\,000) = 0.$$

Решение этого уравнения дает следующие значения главных напряжений: $\sigma_1 = 46 \text{ МПа}$, $\sigma_2 = 18,21 \text{ МПа}$, $\sigma_3 = -44,19 \text{ МПа}$. Проверим правильность решения с помощью инвариантов.

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 46 + 18,21 + (-44,19) = 20,02 \text{ МПа},$$

$$J_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 = 46 \cdot 18,21 + 18,21 \cdot (-44,19) + (-44,19) \cdot 46 = -1999,8 \text{ (МПа)}^2.$$

$$J_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = 46 \cdot 18,21 \cdot (-44,19) = -37\,016 \text{ (МПа)}^3.$$

Вычислительные погрешности вполне допустимы. Положение главных площадок определяется с помощью направляющих косинусов нормалей к главным площадкам, т.е. косинусов углов наклона нормалей к осям координат $l = \cos(\nu, x)$, $m = \cos(\nu, y)$, $n = \cos(\nu, z)$. Значения направляющих косинусов подлежат определению из следующей системы однородных алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma)l + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n &= 0, \\ \tau_{yx}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{yz}n &= 0, \\ \tau_{zx}l + \tau_{zy}m + (\sigma_z - \sigma)n &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

где через σ обозначено одно из трех главных напряжений. При этом каждому главному напряжению соответствует своя тройка направляющих косинусов l_i, m_i, n_i , которые подчиняются известному из линейной алгебры соотношению

$$l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2.28)$$

Подставляем $\sigma_1 = 46$ МПа в любые два уравнения системы (2.27) и используем в качестве третьего уравнения соотношение (2.28).

$$\left. \begin{aligned} (40 - 46)l_1 + 20m_1 + 10n_1 &= 0, \\ 20l_1 + (-30 - 46)m_1 + (-20)n_1 &= 0, \\ l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 &= 1. \end{aligned} \right\}$$

Решив эту систему, находим $l_1 = 0,965$, $m_1 = 0,2145$, $n_1 = 0,151$. Аналогично определяем значения направляющих косинусов двух других главных площадок: $l_2 = 0,05176$, $m_2 = 0,401$, $n_2 = -0,9147$, $l_3 = -0,256$, $m_3 = 0,89$, $n_3 = 0,3756$. Проверим ортогональность главных площадок (нормалей к главным площадкам) по формуле

$$l_i l_k + m_i m_k + n_i n_k = 0 \quad (i \neq k), \quad (2.29)$$

$$0,965 \cdot 0,05176 + 0,2145 \cdot 0,4041 + 0,151(-0,9147) = -2,2 \cdot 10^{-3},$$

$$0,965(-0,256) + 0,2145 \cdot 0,89 + 0,151 \cdot 0,3756 = 5,8 \cdot 10^{-4},$$

$$0,05176(-0,256) + 0,401 \cdot 0,89 + (-0,9147) \cdot 0,3756 = 7,8 \cdot 10^{-5}.$$

Вычислительные погрешности также невелики.

Для графического изображения главных площадок в системе осей $Oxuz$ надо определить положение трех точек M_1 , M_2 и M_3 по координатам, численно равным или пропорциональным значениям соответствующих направляющих косинусов. Векторы $\overline{OM_1}$, $\overline{OM_2}$ и $\overline{OM_3}$ соответствуют направлениям главных напряжений вблизи данной точки, что показано на рис. 2.23.

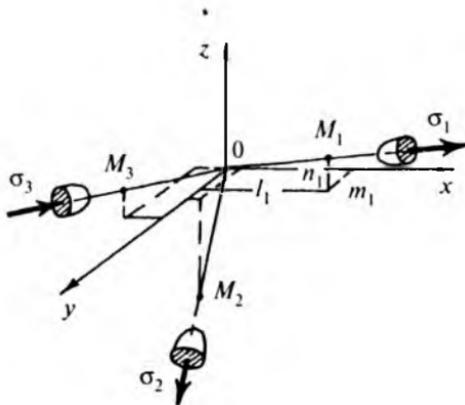


Рис. 2.23

По вычисленным значениям главных напряжений построим в осях $\sigma - \tau$ три круга Мора, соответствующие напряженным состояниям на площадках, параллельных каждому из трех главных напряжений. Круговая диаграмма напряжений приведена на рис. 2.24. Напряжения, действующие на любых площадках вблизи рассматриваемой точки, определяются как координаты точек заштрихованной части круговой диаграммы. В частности, значения максимальных касательных напряжений вблизи данной точки равны радиусу наибольшего из трех кругов Мора, то есть полуразности главных напряжений σ_1 и σ_3 . Вычисляем это значение:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{46 - (-44,19)}{2} = 45,1 \text{ МПа.}$$

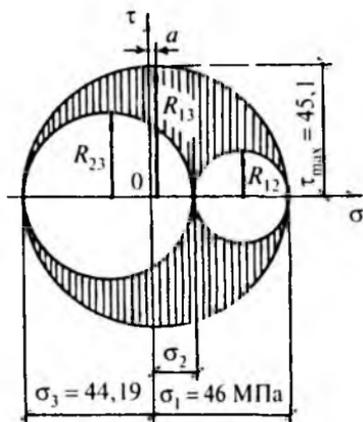


Рис. 2.24

Площадки, на которых действуют максимальные касательные напряжения, наклонены под углами 45° к главным площадкам с напряжениями σ_1 и σ_3 и параллельны направлению главного напряжения σ_2 . Одна из таких площадок показана на рис. 2.25 для бесконечно малого элемента, ориентированного по направлениям действия главных напряжений (по главным осям деформации 1, 2, 3).

На площадках с максимальными касательными напряжениями нормальные напряжения равны полусумме соответствующих главных напряжений:

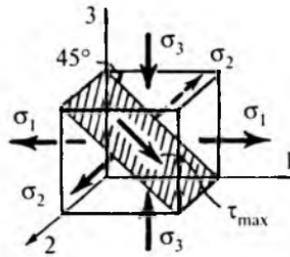


Рис. 2.25

$$\sigma = a = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{46 + (-44,19)}{2} = 0,905 \text{ МПа.}$$

Вычисляем по формулам обобщенного закона Гука (2.12) значения относительных линейных деформаций:

$$\epsilon_x = \frac{1}{1 \cdot 10^5} [40 - 0,35(-30 + 10)] = 4,7 \cdot 10^{-4},$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{1 \cdot 10^5} [-30 - 0,35(40 + 10)] = -4,75 \cdot 10^{-4},$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{1 \cdot 10^5} [10 - 0,35(40 - 30)] = 0,65 \cdot 10^{-4}.$$

Характер деформированного состояния бесконечно малого элемента вблизи данной точки, соответствующий линейным деформациям, показан на рис. 2.26.

Относительная объемная деформация равна

$$e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = (4,7 - 4,75 + 0,65) \cdot 10^{-5} = 0,6 \cdot 10^{-5}.$$

Объем тела вблизи данной точки увеличивается. Вычисляем значения угловых деформаций:

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} = \frac{1}{0,37 \cdot 10^5} \cdot 20 = 5,41 \cdot 10^{-4},$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} = \frac{1}{0,37 \cdot 10^5} \cdot (-20) = -5,41 \cdot 10^{-4},$$

$$\gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx} = \frac{1}{0,37 \cdot 10^5} \cdot 10 = 2,7 \cdot 10^{-4},$$

где $G = \frac{E}{2(1 + \nu)} = \frac{1 \cdot 10^5}{2(1 + 0,35)} = 0,37 \cdot 10^5 \text{ МПа.}$

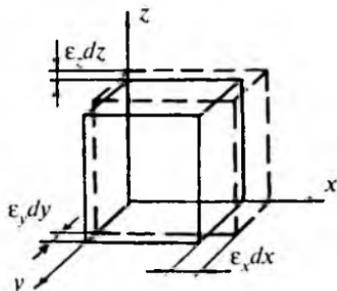


Рис. 2.26

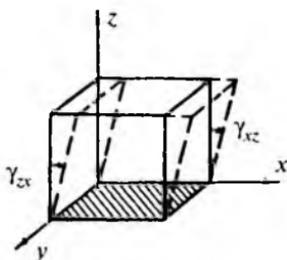


Рис. 2.27

Характер деформированного состояния бесконечно малого элемента вблизи данной точки, соответствующий угловой деформации γ_{xz} , показан на рис. 2.27.

Вычисляем значение полной удельной потенциальной энергии деформации вблизи рассматриваемой точки:

$$\begin{aligned}
 U_0 &= \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] = \\
 &= \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot 10^5} \{46^2 + 18,21^2 + (-44,19)^2 - 2 \cdot 0,35[46 \cdot 18,21 + \\
 &+ 18,21(-44,19) + (-44,19) \cdot 46]\} = 0,029 \text{ МПа}.
 \end{aligned}$$

Полную удельную потенциальную энергию деформации можно представить в виде суммы удельной энергии изменения формы U_0^Φ и удельной энергии изменения объема. Вычисляем значения этих величин:

$$\begin{aligned}
 U_0^\Phi &= \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \\
 &= \frac{1+0,35}{6 \cdot 1 \cdot 10^5} [(46 - 18,21)^2 + (18,21 + 44,19)^2 + (-44,19 - 46)^2] = \\
 &= 0,0288 \text{ МПа}, \\
 U_0^{\sigma_0} &= \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 = \frac{1-2 \cdot 0,35}{6 \cdot 1 \cdot 10^5} (46 + 18,21 - 44,19)^2 = \\
 &= 2 \cdot 10^{-4} \text{ МПа}.
 \end{aligned}$$

Вычислим значения напряжений на октаэдрической площадке вблизи данной точки. Такая площадка является равнонаклоненной к главным площадкам (рис. 2.28), и ее направляющие косинусы в системе осей 1, 2, 3 равны по величине

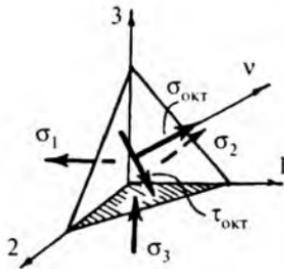


Рис. 2.28

$$l = m = n = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (2.30)$$

Октаэдрические напряжения равны

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}(46 + 18,21 - 44,19) = 6,67 \text{ МПа},$$

$$\begin{aligned} \tau_{\text{окт}} &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{(46 - 18,21)^2 + (18,21 + 44,19)^2 + (-44,19 - 46)^2} = \\ &= 37,7 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 2.6. Стальная труба $\varnothing 180 \times 6$ мм находится под действием растягивающих сил $P = 120$ кН (рис. 2.29). Требуется определить значения нормальных и касательных напряжений в сечениях под углом $\alpha = 60^\circ$ к оси и величину удлинения трубы. В расчетах принять $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа.

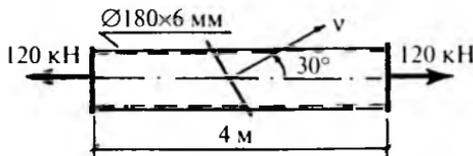


Рис. 2.29

Ответ: $\sigma_\alpha = 27,44$ МПа, $\tau_\alpha = 15,9$ МПа, $\Delta l = 0,07$ см.

Задача 2.7. Стальная полоса прямоугольного сечения имеет косой сварной шов и находится под действием растягивающих сил P (рис. 2.30). Требуется определить максимально допустимую величину силы P из условия, что касательные напряжения в сечении по шву не превышают $[\tau] = 80$ МПа.

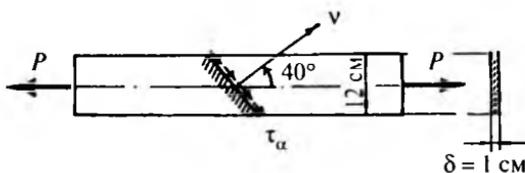


Рис. 2.30

Ответ: $P = 195$ кН.

Задача 2.8. Тонкая алюминиевая прямоугольная пластина находится под действием равномерно распределенных по краям усилий $p = 50$ МПа и $t = 30$ МПа (рис. 2.31). Считая напряженное состояние в пластине плоским и однородным, вычислить значения главных напряжений, углы наклона главных площадок и величину абсолютной объемной деформации пластины. В расчетах принять $E = 0,7 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0,35$.

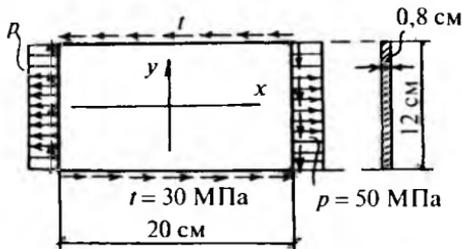


Рис. 2.31

Ответ: $\sigma_1 = 64,05$ МПа, $\sigma_2 = -14,05$ МПа, $\Delta V = 0,041$ см³.

Задача 2.9. Тонкая стальная прямоугольная пластина находится в условиях двухосного растяжения-сжатия (рис. 2.32). С помощью тензорезисторов определены линейные деформации по двум взаимно перпендикулярным направлениям $\epsilon_\alpha = 2,4 \cdot 10^{-4}$, $\epsilon_{\alpha_1} = -1,6 \cdot 10^{-4}$. Считая напряженное состояние в пластине однородным, определить величины растягивающих и сжимающих распре-

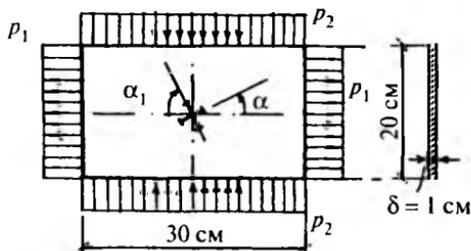


Рис. 2.32

деленных усилий, действующих по краям пластины, и значения относительной и абсолютной объемных деформаций. В расчетах принять $\alpha = 30^\circ$, $\alpha_1 = -60^\circ$, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0,3$.

Ответ: $p_1 = 72,97$ МПа, $p_2 = -50,11$ МПа, $e = 4,57 \cdot 10^{-5}$, $\Delta V = 0,027$ см³.

Задача 2.10. В гнездо массивной недеформируемой плиты свободно, но без зазоров вставлен медный кубик высотой $h = 6,003$ см (рис. 2.33). Требуется определить величину давления, которое надо приложить к верхней грани кубика, чтобы его высота стала равна глубине гнезда. Определить при этом величины давлений кубика на стенки гнезда и значения его относительной и абсолютной объемных деформаций. Трением пренебречь. Для материала кубика принять $E = 1 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0,34$.

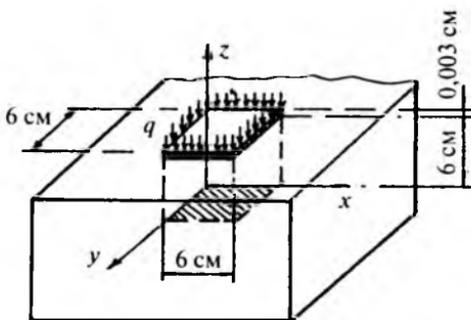


Рис. 2.33

Ответ: $q = 76,96$ МПа, $\sigma_x = \sigma_y = -39,65$ МПа, $e = -5 \cdot 10^{-4}$, $\Delta V = -0,108$ см³.

Задача 2.11. При испытании стального цилиндрического резервуара высокого давления (рис. 2.34) была определена линейная деформация в стенке цилиндрической части под углом $\alpha = 30^\circ$ к образующей: $\epsilon_\alpha = 2,8 \cdot 10^{-4}$. Требуется определить величину давления в резервуаре. В расчетах принять $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0,3$. Меридиональные и кольцевые напряжения в стенке цилиндрической части определяются по формулам

$$\sigma_t = \frac{pD}{2\delta}, \quad \sigma_m = \frac{pD}{4\delta}.$$

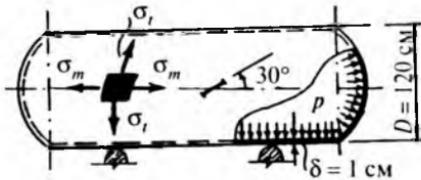


Рис. 2.34

Ответ: $p = 1,36$ МПа, $\sigma_m = 40,7$ МПа, $\sigma_t = 81,4$ МПа.

Глава 3

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ СТЕРЖНЕЙ

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Поперечное сечение стержня имеет в системе произвольных взаимно ортогональных осей Oyz (рис. 3.1) следующие геометрические характеристики.

1. Площадь сечения

$$F = \iint_F dF. \quad (3.1)$$

2. Статические моменты площади

$$S_z = \iint_F y dF, \quad S_y = \iint_F z dF. \quad (3.2)$$

Статические моменты имеют размерность длины в третьей степени, например см^3 . Они могут быть положительными, отрицательными и равными нулю. Статические моменты можно определить по формулам

$$S_z = y_C F, \quad S_y = z_C F, \quad (3.3)$$

где z_C и y_C — координаты центра тяжести сечения (рис. 3.1). Из формул (3.3) следует, что

$$z_C = \frac{S_y}{F}, \quad y_C = \frac{S_z}{F}. \quad (3.4)$$

Статические моменты относительно любых осей, проходящих через центр тяжести сечения, равны нулю.

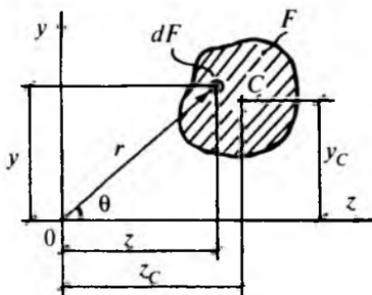


Рис. 3.1

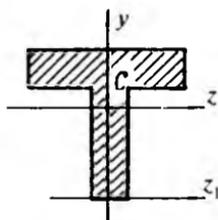


Рис. 3.2

3. Осевые моменты инерции

$$J_z = \iint_F y^2 dF, \quad J_y = \iint_F z^2 dF. \quad (3.5)$$

4. Полярный момент инерции

$$J_p = \iint_F r^2 dF. \quad (3.6)$$

Если полюс совпадает с началом координатных осей, то выполняется условие

$$J_p = J_z + J_y. \quad (3.7)$$

Осевые и полярный моменты инерции сечений всегда положительны.

5. Центробежный момент инерции

$$J_{yz} = \iint_F zy dF. \quad (3.8)$$

Центробежный момент инерции может быть положительным, отрицательным и равным нулю. Если хотя бы одна из осей координат является осью симметрии сечения, то центробежный момент инерции относительно такой пары осей равен нулю. Например, для сечения на рис. 3.2 имеем $J_{yz} = J_{zy} = 0$.

Осевые, полярный и центробежный моменты инерции имеют размерность длины в четвертой степени, например см⁴.

Статические моменты и моменты инерции определяются как интегралы по площади сечения. Следовательно, для одних и тех же осей их можно вычислять раздельно по частям (элементам) сечения, а результаты алгебраически просуммировать. Например, для осевых моментов инерции имеем

$$J_z = \sum_i \iint_{F_i} y^2 dF, \quad J_y = \sum_i \iint_{F_i} z^2 dF,$$

где i — номер части (элемента) сечения.

6. Радиусы инерции

$$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{F}}, \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}. \quad (3.9)$$

Радиусы инерции не являются интегральными геометрическими характеристиками сечения. Они считаются положительными и имеют размерность длины.

Изменение моментов инерции при параллельном переносе осей (рис. 3.3) происходит по формулам

$$\left. \begin{aligned} J_{z_1} &= J_z + a^2 F, \\ J_{y_1} &= J_y + b^2 F, \\ J_{z_1 y_1} &= J_{zy} + abF, \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

где Oy, Oz — центральные оси, Oy_1, Oz_1 — произвольные оси.

Формулы (3.10) можно использовать в обратной последовательности при переходе от произвольных осей к центральным.

При повороте координатных осей (рис. 3.3) моменты инерции изменяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} J_{\alpha} &= \frac{J_{z_1} + J_{y_1}}{2} + \frac{J_{z_1} - J_{y_1}}{2} \cos 2\alpha - J_{z_1 y_1} \sin 2\alpha, \\ J_{\alpha_1} &= \frac{J_{z_1} + J_{y_1}}{2} - \frac{J_{z_1} - J_{y_1}}{2} \cos 2\alpha + J_{z_1 y_1} \sin 2\alpha, \\ J_{\alpha \alpha_1} &= \frac{J_{z_1} - J_{y_1}}{2} \sin 2\alpha + J_{z_1 y_1} \cos 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

где $\alpha_1 = \alpha + 90^\circ$.

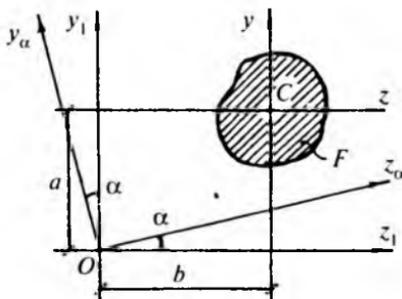


Рис. 3.3

Сумма осевых моментов инерции относительно любой пары ортогональных осей с общим началом является постоянной величиной:

$$J_{\alpha} + J_{\alpha_1} = J_{z_1} + J_{y_1} = J_p = \text{const.}$$

Ортогональные оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, называются главными осями инерции.

Осевые моменты инерции относительно таких осей имеют экстремальные значения и называются главными моментами инерции. Они определяются по формуле

$$J_{1,2} = \frac{J_z + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_z - J_y}{2}\right)^2 + J_{zy}^2}, \quad (3.12)$$

Углы наклона главных осей инерции можно определить по формуле

$$\operatorname{tg} \alpha_{1,2} = \frac{J_{zy}}{J_y - J_{1,2}}, \quad (3.13)$$

где $|\alpha_1| + |\alpha_2| = 90^\circ$.

На рис. 3.4 Ou, Ov — главные оси инерции, причем $J_v = J_{\max}$, $J_u = J_{\min}$, $J_{uv} = 0$. Главные оси можно провести через любую точку сечения или плоскости, где оно расположено. Однако наибольший интерес представляют главные центральные оси инерции (рис. 3.5), для которых выполняются условия $S_u = S_v = 0$, $J_{uv} = 0$.

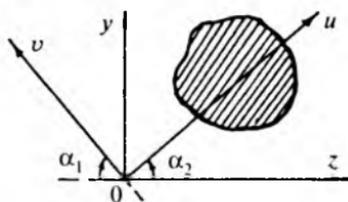


Рис. 3.4

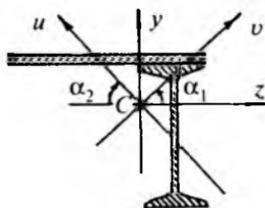


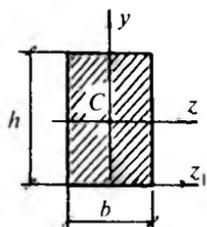
Рис. 3.5

Частным случаем главных осей инерции являются оси, из которых хотя бы одна является осью симметрии сечения.

Задача определения моментов инерции при повороте осей может быть решена графически с помощью круга инерции, который строится аналогично кругу Мора для плоского напряженного состояния. Пример построения круга инерции дан в задаче 3.4.

Формулы для моментов инерции простых фигур приведены на рис. 3.6–3.9. Геометрические характеристики сечений прокатных стержней (двутавров, швеллеров и уголков) приведены в сортаменте (см. Приложение).

Прямоугольник

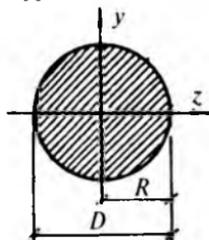


$$J_z = \frac{bh^3}{12},$$

$$J_{z_1} = \frac{bh^3}{3}$$

Рис. 3.6

Круг

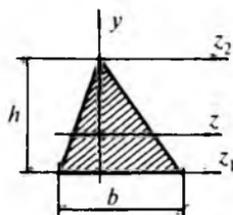


$$J_p = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32},$$

$$J_z = J_y = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}$$

Рис. 3.7

Треугольник



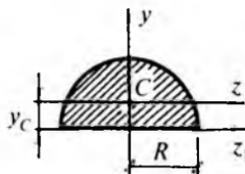
$$J_{z_2} = \frac{bh^3}{4},$$

$$J_z = \frac{bh^3}{36},$$

$$J_{z_1} = \frac{bh^3}{12}$$

Рис. 3.8

Полукруг



$$y_C = \frac{4R}{3\pi} = 0,424R,$$

$$J_{z_1} = J_y = \frac{\pi R^4}{8},$$

$$J_z = 0,11R^4$$

Рис. 3.9

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 3.1

Для сечения на рис. 3.10 требуется определить значения главных моментов инерции.

Данное сечение имеет две оси симметрии Oy и Oz , которые являются главными центральными осями инерции. В точке пересечения этих осей находится центр тяжести сечения. Выписываем из сортамента и вычисляем необходимые геометрические характеристики элементов сечения (рис. 3.11 и 3.12).

С помощью формул параллельного переноса (3.10) вычисляем значения моментов инерции сечения относительно осей Oy и Oz :

$$J_z = 7080 + 2[16 + 16^2 \cdot 48] = 31\,690 \text{ см}^4,$$

$$J_y = 337 + 2 \cdot 2304 = 4945 \text{ см}^4,$$

$$J_{yz} = 0.$$

Вычисленные моменты инерции сечения являются главными, причем

$$J_{\max} = J_z = 31\,690 \text{ см}^4, \quad J_{\min} = J_y = 4945 \text{ см}^4.$$

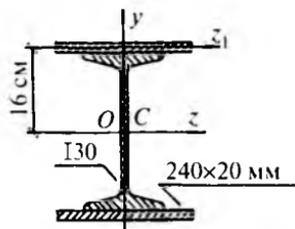
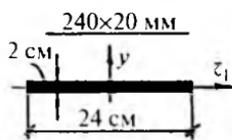


Рис. 3.10

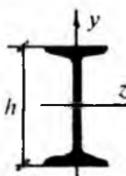


$$F = 2 \cdot 24 = 48 \text{ см}^2,$$

$$J_{z_1} = \frac{24 \cdot 2^3}{12} = 16 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_1} = \frac{2 \cdot 24^3}{12} = 2304 \text{ см}^4$$

Рис. 3.11



I30

$$h = 30 \text{ см},$$

$$J_y = 337 \text{ см}^4,$$

$$J_z = 7080 \text{ см}^4$$

Рис. 3.12

Задача 3.2

Для сечения на рис. 3.13 требуется определить положение центра тяжести и вычислить значения главных моментов инерции.

Геометрические характеристики сечения швеллера I30 приведены на рис. 3.14.

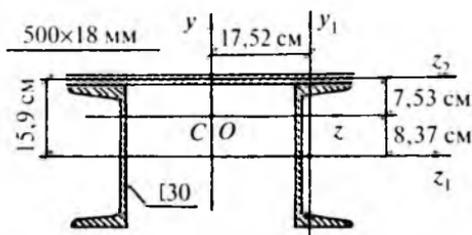
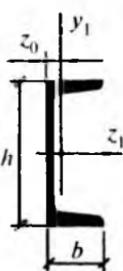


Рис. 3.13



I30

$$h = 30 \text{ см},$$

$$b = 10 \text{ см},$$

$$z_0 = 2,52 \text{ см},$$

$$F_1 = 40,5 \text{ см}^2,$$

$$J_{z_1} = 5810 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_1} = 327 \text{ см}^4$$

Рис. 3.14

Поскольку сечение имеет одну ось симметрии Oy , надо определить только одну координату центра тяжести. Принимаем в качестве вспомогательной оси центральную ось швеллеров (рис. 3.13) и вычисляем по формуле (3.4) значение u_C :

$$y_C = \frac{S_{z_1}}{F} = \frac{2 \cdot 40,5 \cdot 0 + 50 \cdot 1,8(15 + 0,9)}{50 \cdot 1,8 + 2 \cdot 40,5} = \frac{1431}{171} = 8,37 \text{ см.}$$

Положение центральной оси Oz показано на рис. 3.13. Оси Oy и Oz являются главными центральными осями сечения. Вычисляем значения главных моментов инерции:

$$J_z = 2(5810 + 8,37^2 \cdot 40,5) + \left(\frac{50 \cdot 1,8^3}{12} + 7,53^2 \cdot 50 \cdot 1,8 \right) =$$

$$= 22\,420 \text{ см}^4,$$

$$J_y = \frac{1,8 \cdot 50^3}{12} + 2(327 + 17,52^2 \cdot 40,5) = 44\,270 \text{ см}^4,$$

$$J_{yz} = 0, \quad J_{\max} = J_y = 44\,270 \text{ см}^4, \quad J_{\min} = J_z = 22\,420 \text{ см}^4.$$

Задача 3.3

Для сечения на рис. 3.15 требуется определить положение центра тяжести и вычислить значения главных моментов инерции.

Данное сечение симметрично относительно вертикальной оси Oy . Разбиваем сечение на три простые фигуры (рис. 3.16). Принимаем в качестве вспомогательной оси центральную ось большого прямоугольника и вычисляем расстояния от этой оси до центров тяжести первого и третьего элементов сечения. Эти расстояния показаны на рис. 3.15. Вычисляем координату центра тяжести сечения:

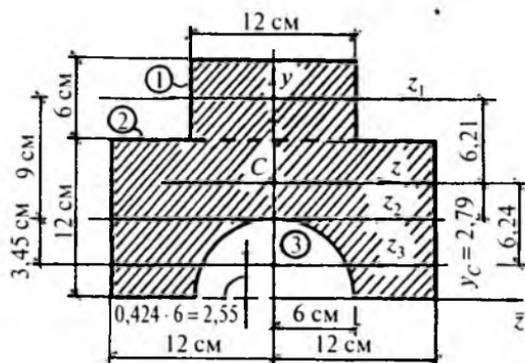


Рис. 3.15

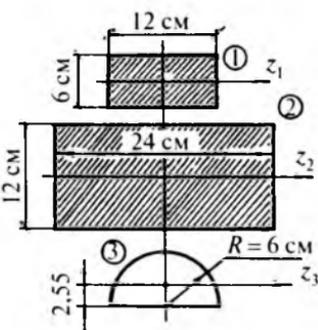


Рис. 3.16

$$y_C = \frac{S_{z_2}}{F} = \frac{9 \cdot 12 \cdot 6 + 0 \cdot 24 \cdot 12 - \left[(-3,45) \frac{\pi \cdot 6^2}{2} \right]}{12 \cdot 6 + 24 \cdot 12 - \frac{\pi \cdot 6^2}{2}} = \frac{845}{303} = 2,79 \text{ см.}$$

Определяем координаты центров тяжести элементов сечения:

$$y_1 = 9 - 2,79 = 6,21 \text{ см}, \quad y_2 = 0 - 2,79 = -2,79 \text{ см},$$

$$y_3 = -3,45 - 2,79 = -6,24 \text{ см.}$$

Соответствующие расстояния показаны на рис. 3.15. Оси Oy , Oz являются главными центральными осями инерции. Вычисляем значения главных моментов инерции:

$$J_z = \left(\frac{12 \cdot 6^3}{12} + 6,21^2 \cdot 6 \cdot 12 \right) + \left(\frac{24 \cdot 12^3}{12} + 2,79^2 \cdot 24 \cdot 12 \right) - \left(0,11 \cdot 6^4 + 6,24^2 \frac{\pi \cdot 6^2}{2} \right) = 6346 \text{ см}^4,$$

$$J_y = \frac{6 \cdot 12^3}{12} + \frac{12 \cdot 24^3}{12} - \frac{\pi \cdot 6^4}{8} = 14180 \text{ см}^4, \quad J_{yz} = 0,$$

$$J_{\max} = J_y = 14180 \text{ см}^4, \quad J_{\min} = 6346 \text{ см}^4.$$

Для определения момента инерции относительно центральной оси Oz можно использовать ось, проходящую по основанию полукруга и большого прямоугольника (рис. 3.15). При этом получим

$$J_{\bar{z}} = 2 \frac{6 \cdot 12^3}{3} + \frac{12 \cdot 18^3}{3} - \frac{\pi \cdot 6^4}{8} = 29730 \text{ см}^4,$$

$$J_z = J_{\bar{z}} - a^2 F = 29730 - (6 + 2,79)^2 \cdot 303 = 6320 \text{ см}^4.$$

Результаты расчета практически совпали.

Задача 3.4

Для несимметричного сечения (рис. 3.17) требуется определить положение центра тяжести, углы наклона главных центральных осей инерции и значения главных моментов инерции.

Выписываем из сортамента и вычисляем геометрические характеристики элементов сечения (рис. 3.18, 3.19, 3.20).

Определяем центробежный момент инерции уголка относительно центральных осей Oz_3 , Oy_3 . Для этого используем формулы из-

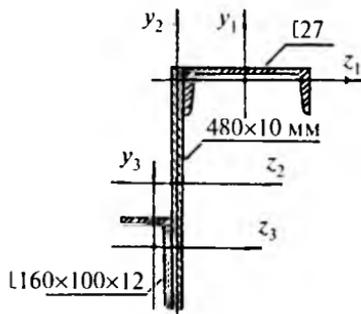


Рис. 3.17

Швеллер [27]

$$\begin{aligned}
 h &= 27 \text{ см}, & b &= 9,5 \text{ см}, \\
 y_0 &= 2,47 \text{ см}, & F_1 &= 35,2 \text{ см}^2, \\
 J_{z_1} &= 262 \text{ см}^4, & J_{y_1} &= 4160 \text{ см}^4
 \end{aligned}$$

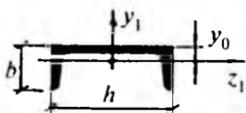


Рис. 3.18

Лист 480x10 мм

$$\begin{aligned}
 F_2 &= 1 \cdot 48 = 48 \text{ см}^2, \\
 J_{z_2} &= \frac{1 \cdot 48^3}{12} = 9216 \text{ см}^4, \\
 J_{y_2} &= \frac{48 \cdot 1^3}{12} = 4 \text{ см}^4
 \end{aligned}$$

Рис. 3.19

Уголок L160x100x12

$$\begin{aligned}
 F_3 &= 30 \text{ см}^2, \\
 J_{z_1} &= 784 \text{ см}^4, \\
 J_{y_1} &= 239 \text{ см}^4, \\
 J_u &= 142 \text{ см}^4, \\
 \operatorname{tg} \alpha &= 0,388, \\
 (\alpha &= 21^\circ 12')
 \end{aligned}$$

Рис. 3.20

менения моментов инерции при повороте от главных центральных осей Ou , Ov к осям Oz_3 , Oy_3 :

$$J_v = J_{z_3} + J_{y_3} - J_u = 784 + 239 - 142 = 881 \text{ см}^4, \quad J_{uv} = 0,$$

$$\begin{aligned}
 J_{z_3 y_3} &= \frac{J_v - J_u}{2} \sin 2\alpha + J_{uv} \cos 2\alpha = \frac{881 - 142}{2} \sin(-42^\circ 24') = \\
 &= -249 \text{ см}^4.
 \end{aligned}$$

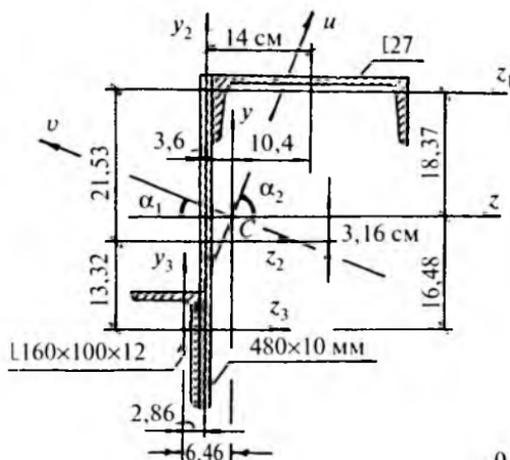
Угол поворота принят отрицательным, поскольку поворот от осей Ou , Ov к осям Oz_3 , Oy_3 происходит по ходу часовой стрелки.

Отметим, что значения центрбежного момента инерции уголка по абсолютной величине приведены в сортаменте.

Вычисляем площадь сечения:

$$F = F_1 + F_2 + F_3 = 35,2 + 48 + 30 = 113,2 \text{ см}^2.$$

Принимаем в качестве вспомогательных осей центральные оси вертикального листа и определяем положение центра тяжести сечения. Расстояния от центров тяжести элементов сечения до вспомогательных осей показаны на рис. 3.21.



Координаты центров тяжести элементов в системе центральных осей Oz, Oy :

$$\begin{aligned} z_1 &= 14 - 3,6 = 10,4 \text{ см}, \\ z_2 &= 0 - 3,6 = -3,6 \text{ см}, \\ z_3 &= -2,86 - 3,6 = -6,46 \text{ см}, \\ y_1 &= 21,53 - 3,16 = 18,37 \text{ см}, \\ y_2 &= 0 - 3,16 = -3,16 \text{ см}, \\ y_3 &= -13,32 - 3,16 = -16,48 \text{ см} \end{aligned}$$

Масштаб:
0 10 20 30 40 см

Рис. 3.21

$$y_C = \frac{S_{z_2}}{F} = \frac{35,2 \cdot 21,53 + 48 \cdot 0 + 30(-13,32)}{113,2} = \frac{358,3}{113,2} = 3,16 \text{ см},$$

$$z_C = \frac{S_{y_2}}{F} = \frac{35,2 \cdot 14 + 48 \cdot 0 + 30(-2,86)}{113,2} = \frac{407}{113,2} = 3,6 \text{ см}.$$

В качестве проверки вычисляем статические моменты сечения относительно центральных осей Oz, Oy :

$$S_z = 35,2 \cdot 18,37 + 48(-3,16) + 30(-16,48) = 646,6 - 646,1 = 0,5 \text{ см}^3,$$

$$S_y = 35,2 \cdot 10,4 + 48(-3,6) + 30(-6,46) = 366,1 - 366,6 = -0,5 \text{ см}^3.$$

Относительные погрешности равны:

$$\Delta_1 = \frac{0,5}{646,1} \cdot 100\% = 0,08\%, \quad \Delta_2 = \frac{0,5}{366,1} \cdot 100\% = 0,14\%.$$

Такие погрешности можно считать вполне допустимыми.

С помощью формул (3.10) вычисляем значения моментов инерции сечения относительно центральных осей Oz , Oy :

$$J_z = (262 + 18,37^2 \cdot 35,2) + (9216 + 3,16^2 \cdot 48) + (784 + 16,48^2 \cdot 30) = 30\,767 \text{ см}^4,$$

$$J_y = (4160 + 10,4^2 \cdot 35,2) + (4 + 3,6^2 \cdot 48) + (239 + 6,46^2 \cdot 30) = 10\,084 \text{ см}^4,$$

$$J_{zy} = (0 + 10,4 \cdot 18,37 \cdot 35,2) + [0 + (-3,6)(-3,16) \cdot 48] + [-249 + (-6,46)(-16,48) \cdot 30] = 10\,216 \text{ см}^4.$$

Вычисляем по формуле (3.12) значения главных моментов инерции:

$$J_{1,2} = \frac{J_z + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_z - J_y}{2}\right)^2 + J_{zy}^2} =$$

$$= \frac{30\,767 + 10\,084}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{30\,767 - 10\,084}{2}\right)^2 + 10\,216^2},$$

$$J_{\max} = J_v = 34\,962 \text{ см}^4, \quad J_{\min} = J_u = 5889 \text{ см}^4.$$

$$\text{Проверка: } J_{\max} = J_{\min} = J_z + J_y = 40\,851 \text{ см}^4.$$

Определяем углы наклона главных центральных осей инерции Ou , Ov :

$$\operatorname{tg} \alpha_{1,2} = \frac{J_{zy}}{J_y - J_{\min}} = \frac{10\,216}{10\,084 - \left(\frac{34\,962}{5889}\right)},$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = -0,4106, \quad \alpha_1 = -22^\circ 19', \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = 2,435, \quad \alpha_2 = 67^\circ 41',$$

$$|\alpha_1| + |\alpha_2| = 22^\circ 19' + 67^\circ 41' = 90^\circ.$$

Положение главных центральных осей инерции сечения Ou , Ov показано на рис. 3.21.

Для графического определения моментов инерции сечения относительно центральных осей построим круг инерции, который

строится аналогично кругу Мора для плоского напряженного состояния. С помощью круга инерции (рис. 3.22) определяем значения главных моментов инерции и углы наклона главных центральных осей Ou, Ov .

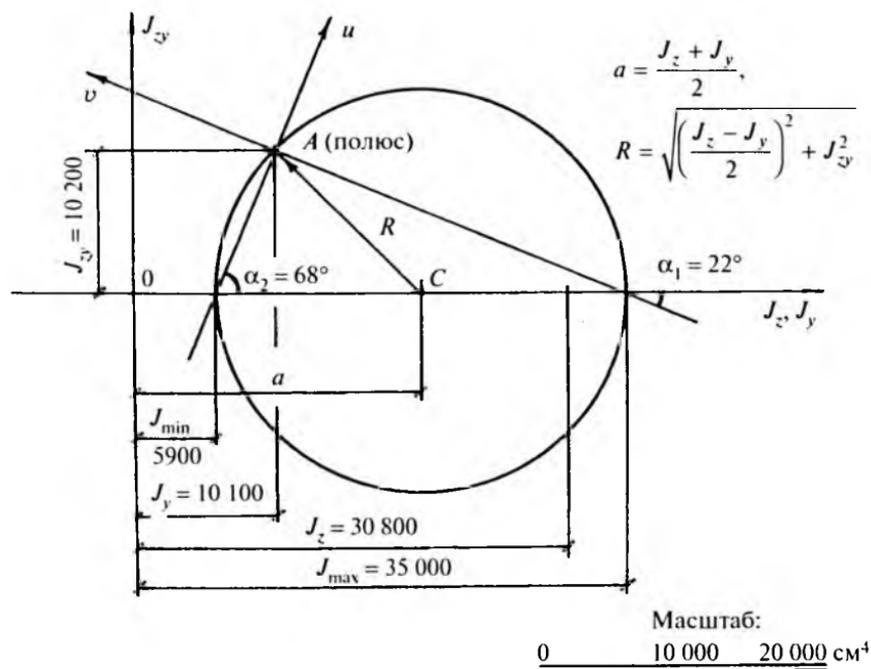


Рис. 3.22

Задача 3.5

Для сечения на рис. 3.23 требуется определить величины главных моментов инерции и углы наклона главных центральных осей инерции.

Положение центра тяжести сечения совпадает с положением центра тяжести листа, поскольку очевидно выполнение условий $S_z = S_y = 0$.

Используем необходимые геометрические характеристики швеллера [22a] и вычисляем осевые и центробежный моменты инерции относительно центральных осей сечения Oz, Oy :

$$J_z = \frac{1 \cdot 48^3}{12} + 2(187 + 21,54^2 \cdot 28,8) = 36\,315 \text{ см}^4,$$

$$J_y = \frac{48 \cdot 1^3}{12} + 2(2330 + 11,5^2 \cdot 28,8) = 12\,282 \text{ см}^4,$$

$$J_{zy} = 2 \cdot 28,8 \cdot 21,54 \cdot 11,5 = 14\,268 \text{ см}^4.$$

Вычисляем значения главных моментов инерции и углов наклона главных центральных осей инерции:

$$J_{1,2} = \frac{36\,315 + 12\,282}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{36\,315 - 12\,282}{2}\right)^2 + 14\,268^2},$$

$$J_{\max} = 42\,953 \text{ см}^4, \quad J_{\min} = 5644 \text{ см}^4,$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{1,2} = \frac{14\,268}{12\,282 - \left(\frac{42\,953}{5644}\right)}, \quad \alpha_1 = -24^\circ 57', \quad \alpha_2 = 65^\circ 03'.$$

Положение главных центральных осей Ou , Ov показано на рис. 3.23.

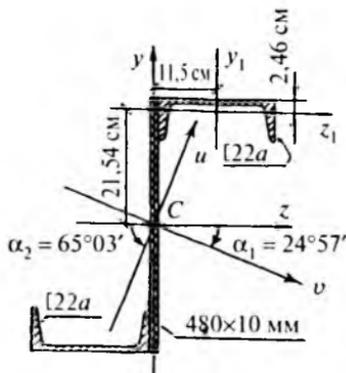


Рис. 3.23

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 3.6. Для сечений с двумя осями симметрии (рис. 3.24) требуется определить значения главных моментов инерции.

Ответ: а) $J_{\max} = J_y = 17\,105 \text{ см}^4$, $J_{\min} = J_z = 14\,176 \text{ см}^4$;

б) $J_{\max} = J_y = 32\,795 \text{ см}^4$, $J_{\min} = J_z = 13\,725 \text{ см}^4$;

в) $J_{\max} = J_z = 120\,620 \text{ см}^4$, $J_{\min} = J_y = 4956 \text{ см}^4$.

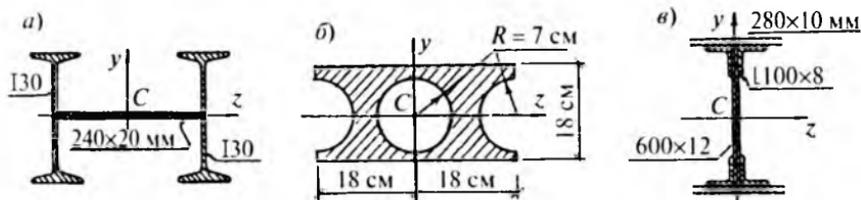


Рис. 3.24

Задача 3.7. Для сечений с одной осью симметрии (рис. 3.25) требуется определить координату центра тяжести и вычислить значения главных моментов инерции.

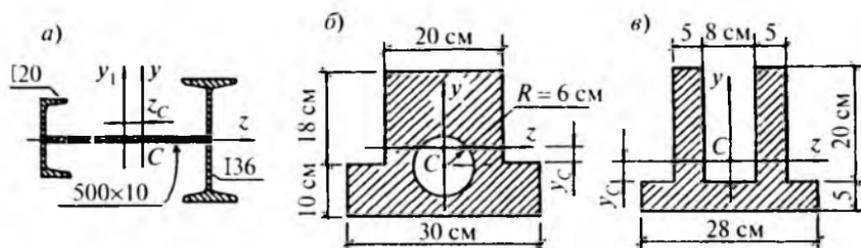


Рис. 3.25

Ответ: а) $z_C = 7,24$ см, $J_{\max} = J_y = 58\,740$ см⁴, $J_{\min} = J_z = 14\,904$ см⁴;
 б) $y_C = 3,18$ см, $J_{\max} = J_z = 42\,326$ см⁴, $J_{\min} = J_y = 33\,482$ см⁴;
 в) $y_C = 4,853$ см, $J_{\max} = J_z = 19\,826$ см⁴, $J_{\min} = J_y = 18\,013$ см⁴.

Задача 3.8. Для сечений на рис. 3.26 требуется определить значения моментов инерции относительно центральных осей Oy и Oz , значения главных моментов инерции и углов наклона главных центральных осей Ou , Ov . Построить круги инерции.

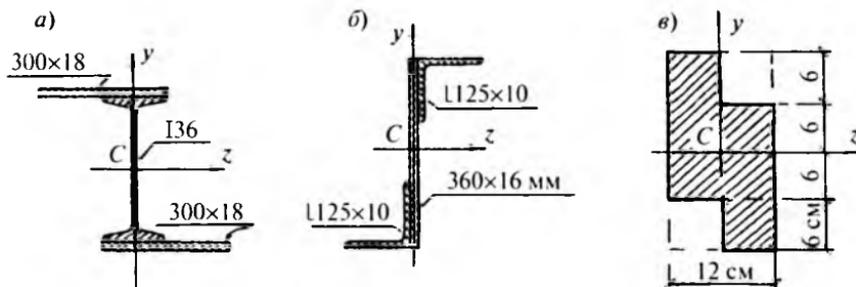


Рис. 3.26

Ответ (табл. 3.1):

Таблица 3.1

Схема	$J_z, \text{см}^4$	$J_y, \text{см}^4$	$J_{zy}, \text{см}^4$	$J_{\max}, \text{см}^4$	$J_{\min}, \text{см}^4$	α_1	α_2
а	51 988	15 103	-15 819	57 843	9248	20°19'	-69°41'
б	17 230	1610	3427	17 949	891	-11°51'	78°09'
в	7776	2592	-1944	8424	1944	18°26'	-71°34'

Задача 3.9. Для сечений на рис. 3.27 требуется определить положение центра тяжести, значения главных моментов инерции и углов наклона главных центральных осей. Построить круги инерции.

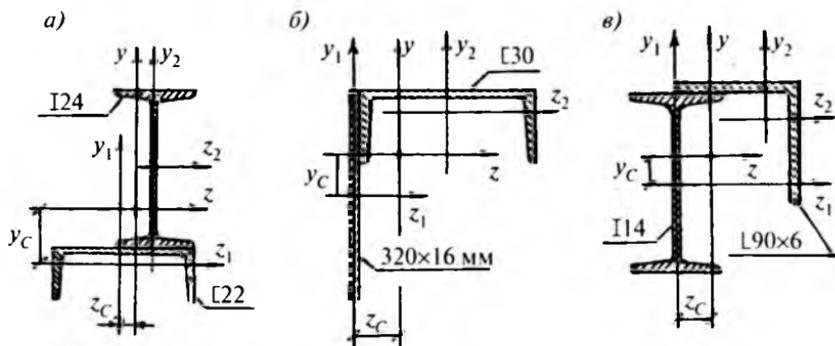


Рис. 3.27

Ответ: (табл. 3.2):

Таблица 3.2

Схема	$y_c, \text{см}$	$z_c, \text{см}$	$J_{\max}, \text{см}^4$	$J_{\min}, \text{см}^4$	α_1	α_2
а	8,04	2,97	6961	2424	-14°52'	75°08'
б	6,98	6,98	15 132	5139	-52°43'	37°17'
в	1,96	2,49	893,8	344,7	-19°54'	70°06'

Глава 4 КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Кручение стержней вызывается парами сил, действующими в плоскостях, перпендикулярных к оси стержня. Эти пары приводятся к скручивающим нагрузкам, которые могут быть сосредоточенными и распределенными по длине. Стержень, работающий в основном на кручение, обычно называется валом.

При действии на стержень скручивающих нагрузок в его поперечных сечениях возникает только одно внутреннее усилие — крутящий момент M_k . В статически определимых задачах крутящий момент может быть определен с помощью уравнений равновесия как сумма скручивающих нагрузок, приложенных к одной из частей стержня (рис. 4.1).

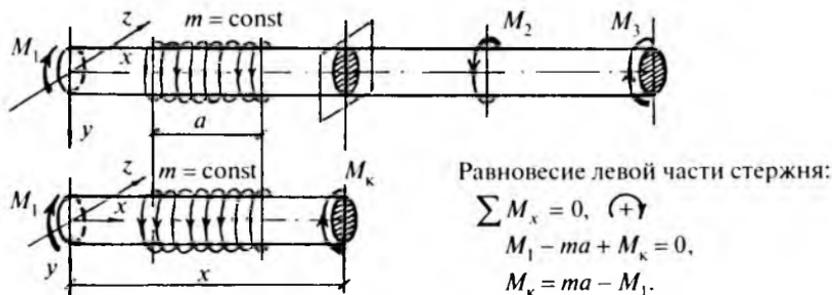


Рис. 4.1

Знак крутящего момента физического смысла не имеет. Будем считать крутящий момент положительным, если при взгляде на сечение со стороны внешней нормали он стремится повернуть оставшуюся часть стержня по ходу часовой стрелки (рис. 4.2).

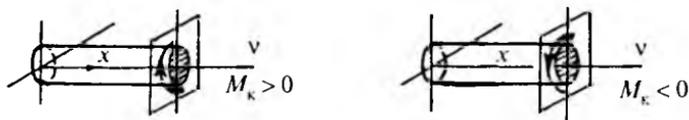


Рис. 4.2

Крутящий момент и интенсивность распределенной скручивающей нагрузки связаны между собой дифференциальной зависимостью

$$\frac{dM_{\kappa}}{dx} = -m(x). \quad (4.1)$$

Из формулы (4.1) следует, например, что на участках стержня с постоянной скручивающей нагрузкой $m = \text{const}$ крутящий момент изменяется по линейному закону, а на участках, где $m = 0$, он имеет постоянное значение. Изменение крутящих моментов по длине стержня графически изображается с помощью эпюры M_{κ} .

В качестве элементов конструкций и машин, работающих преимущественно на кручение, наиболее часто применяются стержни круглого или кольцевого сечений (круглые сплошные или полые валы). Деформацию таких стержней при кручении можно характеризовать как взаимный поворот поперечных сечений (рис. 4.3). При этом поперечные сечения остаются плоскими, и расстояния между ними не изменяются. Угол поворота сечений является переменной величиной и называется углом закручивания $\varphi(x)$.

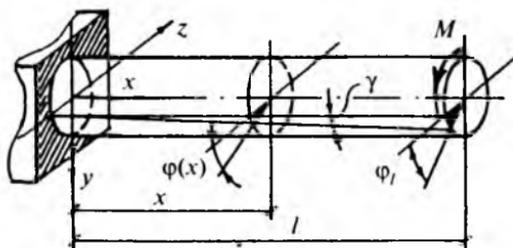


Рис. 4.3

Характеристикой степени закручивания вала по длине является относительный угол закручивания $\theta = \varphi'(x)$. Различие углов поворота поперечных сечений вызывает деформацию сдвига γ на поверхности вала (рис. 4.3) и внутри его. При этом в поперечных сечениях сплошных и полых валов действуют только касательные напряжения (рис. 4.4), перпендикулярные к радиусам и определяемые по формуле

$$\tau = \frac{M_{\kappa}}{J_p} r, \quad (4.2)$$

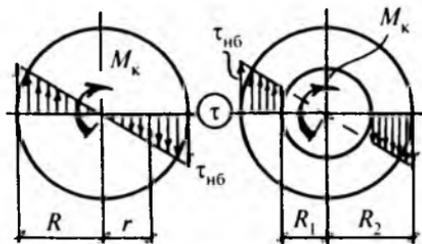


Рис. 4.4

где $J_p = \iint_F r^2 dF$ — полярный момент инерции сечения.

Относительный и абсолютный углы закручивания вала определяются по формулам

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_k}{GJ_p}, \quad \varphi = \int_0^l \theta dx = \int_0^l \frac{M_k}{GJ_p} dx, \quad (4.3)$$

где G — модуль упругости материала при сдвиге. Произведение GJ_p называется жесткостью вала круглого сечения при кручении.

Для частного случая, когда $M_k = \text{const}$ и $GJ_p = \text{const}$, абсолютный угол закручивания вала длиной l определяется по формуле

$$\varphi = \frac{M_k l}{GJ_p}. \quad (4.4)$$

При переменном по длине вала крутящем моменте формулу (4.3) можно использовать в следующем виде:

$$\text{При } GJ_p = \text{const} \quad \varphi = \frac{1}{GJ_p} \int_0^l M_k dx = \frac{1}{GJ_p} \Omega_{M_k}, \quad (4.5)$$

где Ω_{M_k} — площадь эпюры крутящих моментов на данном участке.

Кручение вала круглого сечения постоянной жесткости ($GJ_p = \text{const}$) описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$GJ_p \varphi''(x) = -m(x). \quad (4.6)$$

Потенциальная энергия деформации вала круглого сечения при кручении в общем случае определяется по формуле

$$U = \int_0^l \frac{M_k^2}{2GJ_p} dx. \quad (4.7)$$

Условие прочности сплошного или полого вала при кручении имеет следующий вид:

$$\tau_{\text{нб}} = \frac{M_{\text{к}}^{\text{нб}}}{W_p} \leq [\tau], \quad (4.8)$$

где $M_{\text{к}}^{\text{нб}}$ — наибольший крутящий момент в валу, W_p — полярный момент сопротивления сечения и $[\tau]$ — допускаемое касательное напряжение.

Таким образом, расчет на прочность вала при кручении выполняется по наибольшим касательным напряжениям на поверхности вала. Приведем значения полярного момента сопротивления сечения вала.

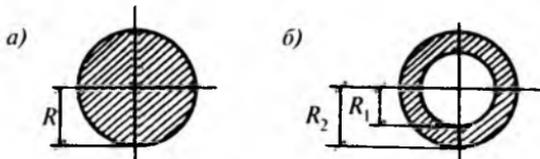


Рис. 4.5

Сплошной вал (рис. 4.5, а)

$$\left. \begin{aligned} J_p &= \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}, \\ W_p &= \frac{J_p}{R} = \frac{\pi R^3}{2} = \frac{\pi D^3}{16}. \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

Полый вал (рис. 4.5, б)

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{R_1}{R_2} = \frac{D_1}{D_2}, \quad R_1 = \xi R_2, \\ J_p &= \frac{\pi R_2^4}{2} (1 - \xi^4) = \frac{\pi D_2^4}{32} (1 - \xi^4), \\ W_p &= \frac{\pi R_2^3}{2} (1 - \xi^4) = \frac{\pi D_2^3}{16} (1 - \xi^4). \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

Подбор сечения вала из условия прочности проводится по требуемому моменту сопротивления сечения:

$$W_p \geq \frac{M_{\text{к}}^{\text{нб}}}{[\tau]}. \quad (4.11)$$

Зная W_p , можно определить требуемый диаметр вала.

Сплошной вал

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{кр}^{нб}}{\pi[\tau]}}$$

Полый вал

$$D_2 \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{кр}^{нб}}{\pi[\tau](1-\xi^4)}}$$

Вал, работающий на кручение, должен также удовлетворять условию жесткости:

$$\theta_{нб} = \frac{M_{кр}^{нб}}{GJ_p} \leq [\theta], \quad (4.12)$$

где $[\theta]$ — допускаемый относительный угол закручивания вала, обычно принимаемый в пределах $[\theta] = (0,15 \div 2)$ град/м.

Из условия жесткости можно также определить требуемый диаметр вала.

Сплошной вал

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32M_{кр}^{нб}}{\pi G[\theta]}}$$

Полый вал

$$D_2 \geq \sqrt[4]{\frac{32M_{кр}^{нб}}{\pi G[\theta](1-\xi^4)}}$$

При расчете вала на прочность и жесткость из двух требуемых диаметров надо принять больший.

Значение допустимой скручивающей нагрузки можно определить по величине допускаемого крутящего момента, определяемого из следующих условий.

$$\text{Из условия прочности: } M_{доп} = [\tau] \cdot W_p. \quad (4.13)$$

$$\text{Из условия жесткости: } M_{доп} = [\theta] \cdot GJ_p. \quad (4.14)$$

При кручении сплошных или полых валов наибольшие нормальные напряжения (главные растягивающие и главные сжимающие) действуют на поверхности вала под углами 45° к образующим (рис. 4.6). Они равны по абсолютной величине наибольшим касательным напряжениям в поперечных сечениях вала:

$$\sigma_1 = |\sigma_2| = \tau_{нб}.$$

Разрушающий (предельный) крутящий момент в вале из пластичных материалов определяется по формуле

$$M_{пред} = M_{разр} = \tau_T W_{пл}, \quad (4.15)$$

где τ_T — предел текучести материала при сдвиге; $W_{пл}$ — пластический момент сопротивления сечения вала.

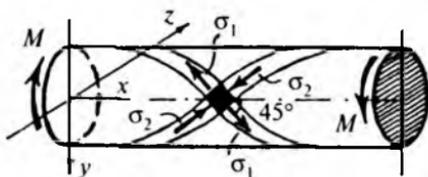


Рис. 4.6

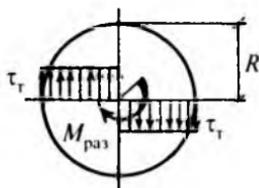


Рис. 4.7

Для вала сплошного круглого сечения эпюра касательных напряжений в момент разрушения вала (пластическая стадия) показана на рис. 4.7. При этом пластический момент сопротивления сечения вала определяется по формуле

$$W_{\text{пл}} = \frac{2}{3} \pi R^3 = \frac{\pi D^3}{12}. \quad (4.16)$$

При кручении стержней некруглого сечения (прямоугольного, треугольного и т.п.) поперечные сечения не остаются плоскими. Происходит их коробление или депланация. Расчет таких стержней при кручении достаточно сложен и производится с помощью методов теории упругости.

Приведем данные расчета стержня прямоугольного сечения при кручении. Касательные напряжения в поперечных сечениях изменяются по нелинейному закону (рис. 4.8) и достигают наибольших значений в серединах сторон, причем $\tau_1 \leq \tau_{\text{нб}}$. Расчетные формулы имеют следующий вид:

$$\tau_{\text{нб}} = \frac{M_{\text{к}}}{W_{\text{к}}}, \quad \tau_1 = \gamma \tau_{\text{нб}}. \quad (4.17)$$

Угол закручивания вала определяется по формуле

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_{\text{к}}}{GJ_{\text{к}}} dx.$$

Геометрические характеристики сечения $J_{\text{к}}$ и $W_{\text{к}}$ определяются по формулам

$$J_{\text{к}} = \alpha hb^3, \quad W_{\text{к}} = \beta hb^2, \quad (4.18)$$

где α , β и γ — числовые коэффициенты, зависящие от отношения сторон $n = h/b$. Некоторые значения этих коэффициентов приведены в табл. 4.1.

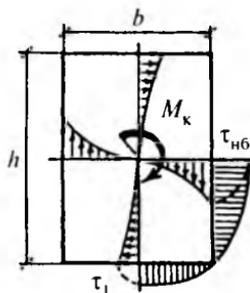


Рис. 4.8

Таблица 4.1

n	α	β	γ
1,0	0,141	0,208	1,00
2,0	0,229	0,246	0,79
5,0	0,291	0,291	0,74
10,0	0,312	0,312	0,74

Для узких прямоугольников (полос) при $n \geq 10$ формулы (4.18) приобретают следующий вид:

$$J_k = \frac{h\delta^3}{3}, \quad W_k = \frac{h\delta^2}{3}, \quad (4.19)$$

где $\delta = b$ — толщина полосы.

При этом наибольшие касательные напряжения в полосе можно определить по формуле

$$\tau_{н6} = \frac{M_k}{J_k} \delta. \quad (4.20)$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 4.1

Жестко закрепленный на одном торце стальной вал сплошного ступенчато-постоянного сечения находится под действием показанных на рис. 4.9, а скручивающих нагрузок.

Требуется построить эпюру крутящих моментов и определить значения наибольших касательных напряжений на каждом участке вала и углы поворота характерных сечений. В расчетах принять модуль упругости при сдвиге $G = 0,8 \cdot 10^5$ МПа = $0,8 \cdot 10^4$ кН/см².

Вычисляем значения крутящих моментов в характерных сечениях вала, начиная со свободного конца.

1. Сечение $x = 2$ м, $M_k = 0$.
2. Сечение $x = 1$ м (справа), $M_k = -100 \cdot 1 = -100$ Нм.
3. Сечение $x = 1$ м (слева), $M_k = -100 + 400 = 300$ Нм.
4. Сечение $x = 0$, $M_k = 300$ Нм.

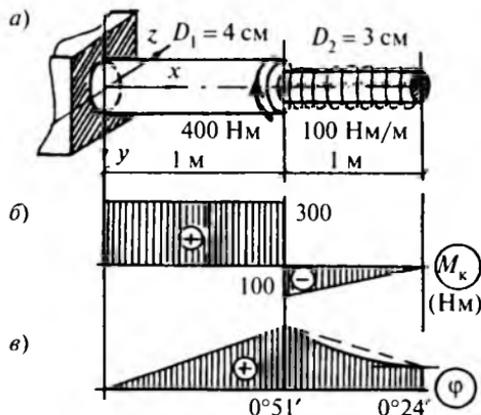


Рис. 4.9

Эпюра крутящих моментов приведена на рис. 4.9, б. На первом участке крутящий момент имеет постоянное значение, а на втором участке он изменяется по линейному закону. В сечении, соответствующем границе участков, крутящий момент имеет скачок на величину сосредоточенного момента 400 Нм.

Вычисляем значения наибольших касательных напряжений на каждом участке вала и углы закручивания участков.

Первый участок ($D_1 = 4$ см).

$$J_p = \frac{\pi D_1^4}{32} = \frac{\pi \cdot 4^4}{32} = 25,13 \text{ см}^4, \quad W_p = \frac{J_p}{R_1} = \frac{25,13}{2} = 12,57 \text{ см}^3,$$

$$\tau_{\text{нб}} = \frac{M_{\kappa}}{W_p} = \frac{30}{12,57} = 2,39 \text{ кН/см}^2 = 23,9 \text{ МПа},$$

$$\varphi_1 = \frac{M_{\kappa} l}{GJ_p} = \frac{30 \cdot 100}{0,8 \cdot 10^4 \cdot 25,13} = 0,0149 \text{ рад} = 0^{\circ}51'.$$

Второй участок ($D_2 = 3$ см).

$$J_p = \frac{\pi D_2^4}{32} = \frac{\pi \cdot 3^4}{32} = 7,95 \text{ см}^4, \quad W_p = \frac{J_p}{R_2} = \frac{7,95}{1,5} = 5,3 \text{ см}^3,$$

$$\tau_{\text{нб}} = \frac{M_{\kappa}}{W_p} = \frac{10}{5,3} = 1,89 \text{ кН/см}^2 = 18,9 \text{ МПа},$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{GJ_p} \Omega_{M_{\kappa}} = -\frac{\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 100}{0,8 \cdot 10^4 \cdot 7,95} = -7,86 \cdot 10^{-3} \text{ рад} = -0^{\circ}27'.$$

Угол закручивания второго участка вала вычислен с помощью площади эпюры крутящих моментов.

Определяем угол поворота правого торцевого сечения вала:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = 0^\circ 51' - 0^\circ 27' = 0^\circ 24'.$$

Торцевое сечение поворачивается по ходу часовой стрелки. Эпюра углов закручивания вала показана на рис. 4.9, в. На первом участке углы закручивания изменяются по линейному закону, а на втором — по квадратичному закону.

Задача 4.2

Стальной вал сплошного сечения находится под действием показанных на рис. 4.10, а скручивающих нагрузок. Требуется построить эпюру крутящих моментов, подобрать сечение вала из условий прочности и жесткости и определить взаимный угол поворота торцевых сечений. В расчетах принять $G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 0,8 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$, $[\tau] = 80 \text{ МПа} = 8 \text{ кН/см}^2$, $[\theta] = 0,8 \text{ град/м} = 1,396 \cdot 10^{-4} \text{ рад/см}$.

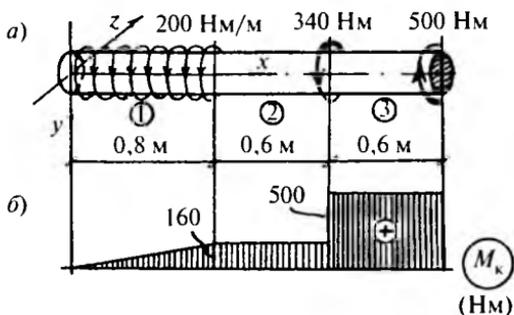


Рис. 4.10

Проверяем выполнение условия равновесия вала:

$$\sum M_x = 0, \quad 500 - 340 - 200 \cdot 0,8 = 500 - 340 - 160 = 0.$$

Вал находится в равновесии. Вычисляем значения крутящих моментов в характерных сечениях.

1. Сечение $x = 2 \text{ м}$, $M_k = 500 \text{ Нм}$.
2. Сечение $x = 1,4 \text{ м}$ (справа), $M_k = 500 \text{ Нм}$.

3. Сечение $x = 1,4$ м (слева), $M_k = 500 - 340 = 160$ Нм.

4. Сечение $x = 0,8$ м, $M_k = 160$ Нм.

5. Сечение $x = 0$, $M_k = 160 - 200 \cdot 0,8 = 0$.

Эпюра крутящих моментов показана на рис. 4.10, б.

Расчеты на прочность и жесткость проводим по сечениям с наибольшим крутящим моментом на третьем участке вала $M_k^{нб} = 500$ Нм. Вычисляем значения требуемого диаметра вала.

Из условия прочности:

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16M_k^{нб}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 50}{\pi \cdot 8}} = 3,17 \text{ см.}$$

Из условия жесткости:

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32M_k^{нб}}{G\pi[\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 50}{0,8 \cdot 10^4 \cdot \pi \cdot 1,396 \cdot 10^{-4}}} = 4,62 \text{ см.}$$

Из двух требуемых диаметров надо принять больший. Округлив его в большую сторону, примем $D = 4,7$ см. Вычисляем геометрические характеристики поперечного сечения вала:

$$J_p = \frac{\pi \cdot 4,7^4}{32} = 47,9 \text{ см}^4, \quad W_p = \frac{\pi \cdot 4,7^3}{16} = 20,38 \text{ см}^3.$$

Вычисляем углы закручивания участков вала:

$$\varphi_1 = \frac{1}{GJ_p} \Omega_{M_k} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 80}{0,8 \cdot 10^4 \cdot 47,9} = 1,67 \cdot 10^{-3} \text{ рад} = 0^\circ 06',$$

$$\varphi_2 = \frac{M_k l}{GJ_p} = \frac{16 \cdot 60}{0,8 \cdot 10^4 \cdot 47,9} = 2,51 \cdot 10^{-3} \text{ рад} = 0^\circ 09',$$

$$\varphi_3 = \frac{50 \cdot 60}{0,8 \cdot 10^4 \cdot 47,9} = 7,83 \cdot 10^{-3} \text{ рад} = 0^\circ 27'.$$

Взаимный угол поворота торцевых сечений вала равен

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0^\circ 06' + 0^\circ 09' + 0^\circ 27' = 0^\circ 42'.$$

Вычисляем наибольшие касательные напряжения в вале:

$$\tau_{нб} = \frac{M_k^{нб}}{W_p} = \frac{50}{20,38} = 2,45 \text{ кН/см}^2 = 24,5 \text{ МПа.}$$

Задача 4.3

Стальной полый стержень сечением $\text{Ø}40 \times 4$ мм скручивается приложенным на торце сосредоточенным моментом (рис. 4.11). Требуется определить величину допускаемого скручивающего момента из условий прочности и жесткости стержня и угол поворота торцевого сечения. В расчетах принять $G = 0,8 \cdot 10^5$ МПа = $0,8 \cdot 10^4$ кН/см², $[\tau] = 80$ МПа = 8 кН/см², $[\theta] = 1$ град/м.

Вычисляем геометрические характеристики поперечного сечения вала (рис. 4.12):

$$D_2 = 4 \text{ см}, \quad D_1 = 4 - 2 \cdot 0,4 = 3,2 \text{ см}, \quad \xi = \frac{D_1}{D_2} = 0,8,$$

$$J_p = \frac{\pi D_2^4}{32} (1 - \xi^4) = \frac{\pi \cdot 4^4}{32} (1 - 0,8^4) = 14,84 \text{ см}^4,$$

$$W_p = \frac{J_p}{R_2} = \frac{14,84}{2} = 7,42 \text{ см}^3.$$

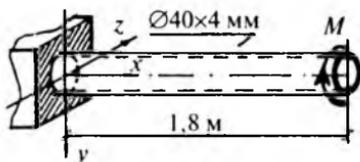


Рис. 4.11

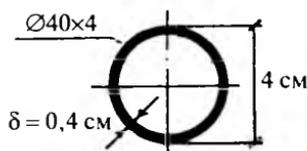


Рис. 4.12

Вычисляем значения допускаемого скручивающего момента из условия прочности:

$$M_{\text{доп}} = [\tau] W_p = 8 \cdot 7,42 = 59,4 \text{ кНсм} = 594 \text{ Нм}.$$

Из условия жесткости получаем:

$$M_{\text{доп}} = [\theta] G J_p = 1,745 \cdot 10^{-4} \cdot 0,8 \cdot 10^4 \cdot 14,84 = 20,72 \text{ кНсм} = 207 \text{ Нм},$$

где $[\theta] = 1$ град/м = $1 \cdot 10^{-2} \pi / 180 = 1,745 \cdot 10^{-4}$ рад/см.

Из двух допускаемых моментов надо принять меньший. Округлив его в меньшую сторону, примем $M = 200$ Нм.

Вычисляем значения наибольших касательных напряжений в стержне и угол поворота торцевого сечения:

$$\tau_{\text{нб}} = \frac{M_{\text{к}}}{W_p} = \frac{200}{7,42} = 2,7 \text{ кН/см}^2 = 27 \text{ МПа},$$

$$\varphi = \frac{M_k l}{GJ_p} = \frac{20 \cdot 180}{0,8 \cdot 10^4 \cdot 14,84} = 0,0303 \text{ рад} = 1^\circ 44'.$$

Задача 4.4

При испытании на кручение стального стержня круглого сечения (рис. 4.13) на его поверхности под углом 45° к образующим был установлен тензометр, с помощью которого определена линейная деформация $\varepsilon = 2,7 \cdot 10^{-4}$. Требуется определить напряжения в стержне, величину крутящего момента и угол поворота торцевого сечения. В расчетах принять $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2,1 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$, $\nu = 0,3$.

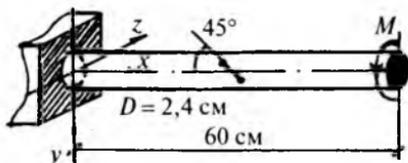


Рис. 4.13

Установленный под углом 45° к образующим стержня тензометр показывает значение линейной деформации по направлению действия главного растягивающего напряжения σ_1 . Напряженное состояние на поверхности стержня имеет характер чистого сдвига, причем $\sigma_1 = |\sigma_2| = \tau_{\text{нб}}$. Используя формулу закона Гука для плоского напряженного состояния, вычисляем значения наибольших касательных напряжений и главные напряжения в стержне:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2) = \frac{1 + \nu}{E} \tau_{\text{нб}},$$

$$\tau_{\text{нб}} = \frac{E}{1 + \nu} \varepsilon = \frac{2,1 \cdot 10^4}{1 + 0,3} \cdot 2,7 \cdot 10^{-4} = 4,36 \text{ кН/см}^2 = 43,6 \text{ МПа},$$

$$\sigma_1 = \tau_{\text{нб}} = 43,6 \text{ МПа}, \quad \sigma_2 = -\tau_{\text{нб}} = -43,6 \text{ МПа}.$$

Вычисляем геометрические характеристики сечения и модуль упругости материала при сдвиге:

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi \cdot 2,4^4}{32} = 3,26 \text{ см}^4, \quad W_p = \frac{J_p}{R} = \frac{3,26}{1,2} = 2,72 \text{ см}^3,$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} = \frac{2,1 \cdot 10^5}{2(1 + 0,3)} = 0,808 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 0,808 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2.$$

Определяем крутящий момент в стержне и угол поворота торцевого сечения:

$$M_k = \tau_{\text{ноб}} W_p = 4,36 \cdot 2,72 = 11,86 \text{ кНсм} = 118,6 \text{ Нм},$$

$$\varphi = \frac{M_k l}{GJ_p} = \frac{11,86 \cdot 60}{0,808 \cdot 10^4 \cdot 3,26} = 0,027 \text{ рад} = 1^\circ 33'.$$

Задача 4.5

Латунный вал сплошного сечения, состоящий из двух участков (рис. 4.14, а), жестко закреплен на торцах и нагружен показанными на рисунке скручивающими моментами. Требуется построить эпюру крутящих моментов, определить наибольшие касательные на-

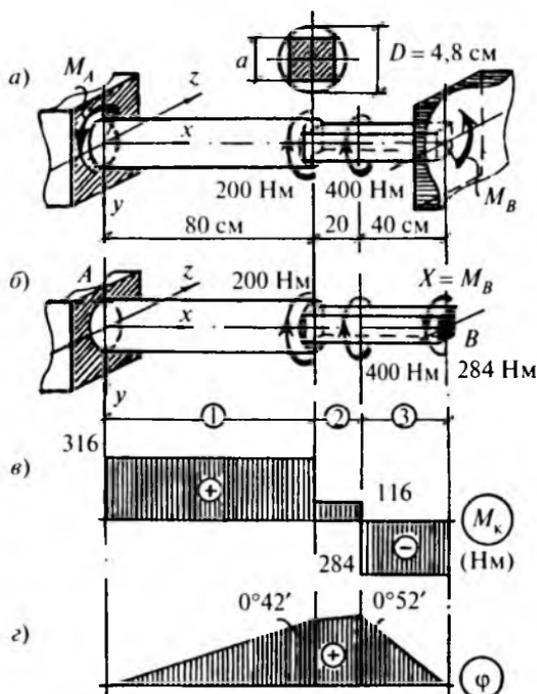


Рис. 4.14

пряжения на участках вала и построить эпюру углов закручивания. В расчетах принять $G = 0,4 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 0,4 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$.

Составим уравнение равновесия:

$$\sum M_x = 0, \quad M_A + M_B = 200 + 400 = 600 \text{ Нм},$$

где M_A и M_B — реактивные моменты на опорах.

Данная задача является статически неопределимой, и для ее решения используем условие жесткого закрепления торцов вала — взаимный угол поворота торцевых сечений равен нулю.

Отбросим любое из закреплений вала (например, правое) и приложим в этом сечении неизвестный момент $X = M_B$ (рис. 4.14, б). Угол поворота освобожденного от закрепления сечения B должен быть равен нулю. С помощью принципа независимости действия сил запишем условие деформации вала: $\varphi_B = \varphi_{BP} + \varphi_{BX} = 0$, где φ_{BP} и φ_{BX} — углы поворота сечения B от действия заданных нагрузок и искомого реактивного момента $X = M_B$.

Вычисляем геометрические характеристики сечений вала. Первый участок — круглое сечение диаметром $D = 4,8 \text{ см}$.

$$J_p = \frac{\pi \cdot 4,8^4}{32} = 52,1 \text{ см}^4, \quad W_p = \frac{J_p}{R} = \frac{52,1}{2,4} = 21,7 \text{ см}^3.$$

Второй участок — квадратное сечение со стороной $a = \frac{4,8\sqrt{2}}{2} = 3,39 \text{ см}$. С помощью данных табл. 4.1 при $n = 1$ получаем

$$J_k = \alpha hb^3 = \alpha a^4 = 0,141 \cdot 3,39^4 = 18,62 \text{ см}^4,$$

$$W_k = \beta hb^2 = \beta a^3 = 0,208 \cdot 3,39^3 = 8,1 \text{ см}^3.$$

Вычисляем углы поворота освобожденного от закрепления сечения B и раскрываем статическую неопределимость задачи:

$$\varphi_{BP} = \frac{40 \cdot 20}{0,4 \cdot 10^4 \cdot 18,62} + \frac{(40 + 20) \cdot 80}{0,4 \cdot 10^4 \cdot 52,1} = 0,0338 \text{ рад},$$

$$\varphi_{BX} = -\frac{X \cdot 60}{0,4 \cdot 10^4 \cdot 18,62} - \frac{X \cdot 80}{0,4 \cdot 10^4 \cdot 52,1} = -1,189 \cdot 10^{-3} \cdot X,$$

$$\varphi_B = 0,0338 - 1,189 \cdot 10^{-3} \cdot X = 0, \quad X = M_B = 28,4 \text{ кНсм} = 284 \text{ Нм}.$$

Строим эпюру крутящих моментов (рис. 4.14, в) и вычисляем значения наибольших касательных напряжений в вале.

Первый участок:

$$\tau_{нб} = \frac{M_k}{W_p} = \frac{31,6}{21,7} = 1,46 \text{ кН/см}^2 = 14,6 \text{ МПа.}$$

Третий участок:

$$\tau_{нб} = \frac{M_k}{W_k} = \frac{28,4}{8,1} = 3,51 \text{ кН/см}^2 = 35,1 \text{ МПа.}$$

Определяем углы закручивания участков:

$$\varphi_1 = \frac{31,6 \cdot 80}{0,4 \cdot 10^4 \cdot 52,1} = 0,0121 \text{ рад} = 0^\circ 42',$$

$$\varphi_2 = \frac{11,6 \cdot 20}{0,4 \cdot 10^4 \cdot 18,62} = 0,00311 \text{ рад} = 0^\circ 10',$$

$$\varphi_3 = -\frac{28,4 \cdot 40}{0,4 \cdot 10^4 \cdot 18,62} = -0,0153 \text{ рад} = -0^\circ 52',$$

$$\varphi_B = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0^\circ 42' + 0^\circ 10' - 0^\circ 52' = 0.$$

Условие деформации выполняется.

Эпюра углов закручивания приведена на рис. 4.14, г. При взгляде со стороны опоры *B* все сечения поворачиваются по ходу часовой стрелки.

Задача 4.6

Вал, состоящий из жестко соединенных между собой алюминиевого стержня круглого сечения и стальной трубы, находится под действием скручивающих моментов (рис. 4.15). Требуется определить крутящие моменты и касательные напряжения в стержне и трубе. В расчетах принять $G_{ст} = 0,8 \cdot 10^5$ МПа, $G_{ал} = 0,27 \cdot 10^5$ МПа.

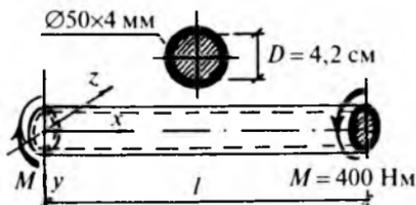


Рис. 4.15

Крутящий момент в вале, равный $M_k = 400$ Нм, воспринимается алюминиевым стержнем и стальной трубой. Из уравнения равновесия получаем

$$\sum M_x = 0, \quad M_{\text{ст}} + M_{\text{ал}} = M_k = 400 \text{ Нм},$$

где $M_{\text{ст}}$ и $M_{\text{ал}}$ — крутящие моменты в стержне и трубе.

Задача является один раз статически неопределимой. Дополнительное уравнение получим из условия совместной деформации алюминиевого стержня и стальной трубы — взаимные углы поворота их торцевых сечений должны быть одинаковыми: $\varphi_{\text{ст}} = \varphi_{\text{ал}}$. Раскрывая это условие, получаем соотношение между крутящими моментами:

$$\frac{M_{\text{ст}} l}{(GJ_p)_{\text{ст}}} = \frac{M_{\text{ал}} l}{(GJ_p)_{\text{ал}}}, \quad M_{\text{ст}} = \frac{(GJ_p)_{\text{ст}}}{(GJ_p)_{\text{ал}}} M_{\text{ал}}.$$

Крутящий момент в вале распределяется по его элементам пропорционально их жесткостям. Вычисляем геометрические характеристики поперечных сечений элементов вала и их жесткости.

Алюминиевый стержень диаметром $D = 4,2$ см:

$$J_p = \frac{\pi \cdot 4,2^4}{32} = 30,55 \text{ см}^4, \quad W_p = \frac{30,55}{2,1} = 14,55 \text{ см}^3,$$

$$(GJ_p)_{\text{ал}} = 0,27 \cdot 10^4 \cdot 30,55 = 8,25 \cdot 10^4 \text{ кНсм}^2.$$

Стальная труба $\varnothing 50 \times 4$ мм:

$$J_p = \frac{\pi(5^4 - 4,2^4)}{32} = 30,8 \text{ см}^4, \quad W_p = \frac{30,8}{2,5} = 12,3 \text{ см}^3,$$

$$(GJ_p)_{\text{ст}} = 0,8 \cdot 10^4 \cdot 30,8 = 24,6 \cdot 10^4 \text{ кНсм}^2.$$

Вычисляем значения крутящих моментов и наибольших касательных напряжений в алюминиевом стержне и стальной трубе:

$$\left. \begin{aligned} M_{\text{ст}} &= \frac{24,6 \cdot 10^4}{8,25 \cdot 10^4} M_{\text{ал}} = 2,98 M_{\text{ал}}, \\ M_{\text{ст}} + M_{\text{ал}} &= 400 \text{ Нм}, \end{aligned} \right\} \begin{aligned} M_{\text{ст}} &= 299,5 \text{ Нм} = 29,95 \text{ кНсм}, \\ M_{\text{ал}} &= 100,5 \text{ Нм} = 10,05 \text{ кНсм}. \end{aligned}$$

$$\tau_{\text{ст}} = \frac{29,95}{12,3} = 2,43 \text{ кН/см}^2 = 24,3 \text{ МПа},$$

$$\tau_{\text{ал}} = \frac{10,05}{14,55} = 0,691 \text{ кН/см}^2 = 6,91 \text{ МПа}.$$

Эпюра касательных напряжений в поперечном сечении вала приведена на рис. 4.16.

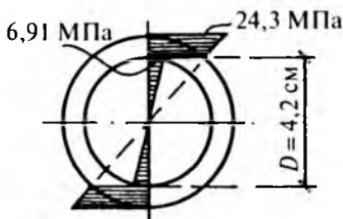


Рис. 4.16

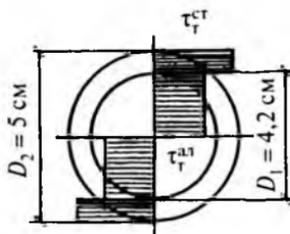


Рис. 4.17

Вычислим значение разрушающего (предельного) крутящего момента, приняв пределы текучести при сдвиге для стали и алюминия $\tau_T^{ст} = 160$ МПа, $\tau_T^{ал} = 100$ МПа. Разрушение (исчерпание несущей способности) вала наступит в тот момент, когда касательные напряжения во всех точках поперечных сечений его элементов достигнут соответствующих пределов текучести при сдвиге. Эпюра касательных напряжений, соответствующая началу разрушения вала, приведена на рис. 4.17. Разрушающий крутящий момент равен сумме разрушающих моментов для алюминиевого стержня и стальной трубы. С помощью формулы (4.16) получаем

$$M_{разр} = M_{разр}^{ст} + M_{разр}^{ал} = \frac{\pi}{12} [(D_2^3 - D_1^3) \tau_T^{ст} + D_1^3 \tau_T^{ал}] =$$

$$= \frac{\pi}{12} [(5^3 - 4,2^3) \cdot 16 + 4,2^3 \cdot 10] = 407 \text{ кНсм} = 4070 \text{ Нм}.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 4.7. Для вала круглого ступенчато-постоянного сечения (рис. 4.18) требуется построить эпюру крутящих моментов, определить значения наибольших касательных напряжений на каждом участке вала, углы закручивания участков и построить эпюру углов поворота поперечных сечений. В расчетах принять $G = 0,8 \times 10^5$ МПа = $0,8 \cdot 10^4$ кН/см².

Ответ: $\tau_{н6}^{(1)} = 23,2$ МПа, $\tau_{н6}^{(2)} = 21,8$ МПа, $\varphi_1 = -0^\circ 57'$, $\varphi_2 = 0^\circ 42'$.

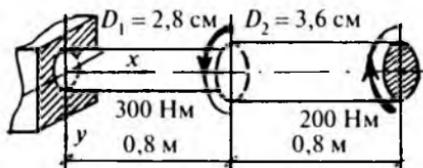


Рис. 4.18

Задача 4.8. Для латунного вала круглого сечения (рис. 4.19) требуется построить эпюру крутящих моментов, определить требуемый диаметр вала из условий прочности и жесткости и вычислить взаимный угол поворота торцевых сечений. В расчетах принять $G = 0,4 \cdot 10^5$ МПа, $[\tau] = 40$ МПа, $[0] = 1,2$ град/м.

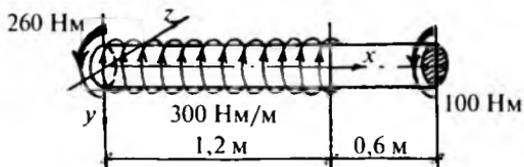


Рис. 4.19

Ответ: $D = 4,3$ см, $\varphi = 0^\circ 10'$.

Задача 4.9. Стальная труба $\varnothing 42 \times 4$ мм скручивается приложенным на торце моментом на угол $\varphi = 2^\circ$ (рис. 4.20). Требуется определить величину скручивающего момента и значения наибольших касательных напряжений в трубе. Вычислить значение разрушающего (предельного) момента, соответствующего пластическим деформациям стенок трубы. В расчетах принять $G = 0,8 \cdot 10^5$ МПа, $\tau_T = 120$ МПа.

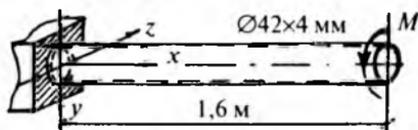


Рис. 4.20

Ответ: $M_k = 304,2$ Нм, $\tau_{нб} = 36,7$ МПа, $M_{разр} = 1093$ Нм.

Задача 4.10. Для стального стержня прямоугольного сечения 40×20 мм (рис. 4.21) требуется определить величину допускаемого скручивающего момента из условий прочности и жесткости. Вы-

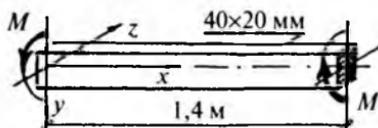


Рис. 4.21

числить значения наибольших касательных напряжений в стержне и взаимный угол поворота торцевых сечений. В расчетах принять $G = 0,8 \cdot 10^5$ МПа, $[\tau] = 80$ МПа, $[\theta] = 1,8$ град/м.

Ответ: $M_{\text{доп}} = 184$ Нм, $\tau_{\text{нб}} = 46,7$ МПа, $\varphi = 2^\circ 31'$.

Задача 4.11. Для стального вала круглого ступенчато-постоянного сечения (рис. 4.22) требуется раскрыть статическую неопределимость и построить эпюры крутящих моментов и углов закручивания поперечных сечений. Вычислить значения наибольших касательных напряжений на участках вала. В расчетах принять $G = 0,8 \cdot 10^5$ МПа.

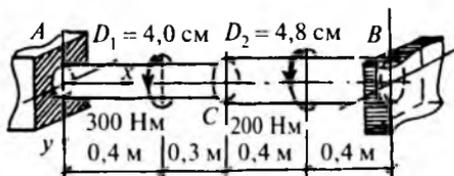


Рис. 4.22

Ответ: $M_A = -225$ Нм, $M_C = 75$ Нм, $M_B = 275$ Нм, $\tau_{\text{нб}}^{(1)} = 17,9$ МПа, $\tau_{\text{нб}}^{(2)} = 12,7$ МПа, $\varphi_C = -0^\circ 12'$.

Задача 4.12. Для статически неопределимого латунного вала ступенчато-постоянного сечения (рис. 4.23) требуется определить:

1. Величину допускаемого скручивающего момента при расчете вала на прочность по методу допускаемых напряжений.
2. Величину разрушающего (предельного) скручивающего момента. В расчетах принять $G = 0,4 \cdot 10^5$ МПа, $[\tau] = 30$ МПа, $\tau_T = 60$ МПа.

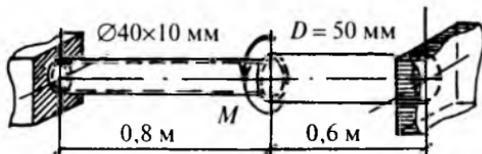


Рис. 4.23

Ответ: $M_{\text{доп}} = 948$ Нм, $M_{\text{разр}} = 2843$ Нм.

Глава 5

ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ В БАЛКАХ И РАМАХ ПРИ ИЗГИБЕ

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Прямой изгиб стержня имеет место в том случае, когда приложенные к нему нагрузки перпендикулярны к оси (поперечные нагрузки) и действуют в главной центральной плоскости инерции, например в плоскости симметрии стержня. Статический расчет стержня при прямом изгибе производится в плоскости действия поперечных нагрузок (в силовой плоскости). Прямой стержень, работающий в основном на изгиб, обычно называется балкой.

В поперечных сечениях балки при прямом изгибе в плоскости Oxy могут действовать два внутренних усилия — поперечная сила $Q = Q_y$ и изгибающий момент $M = M_z$ (рис. 5.1). Если все действующие на балку нагрузки, включая опорные реакции, известны, то внутренние усилия можно определить статически с помощью метода сечений (рис. 5.1).

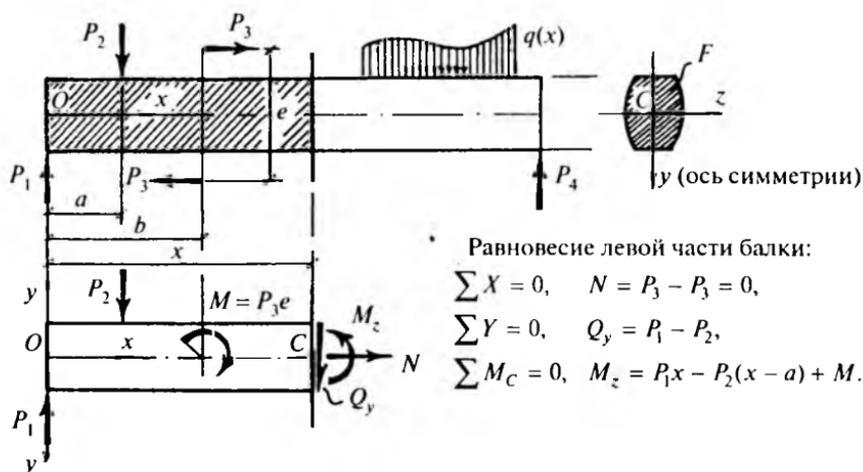


Рис. 5.1

Поперечная сила в любом сечении балки определяется как сумма проекций всех нагрузок, приложенных к одной из частей балки, на нормаль к ее оси в этом сечении. Поперечная сила считается положительной, если она стремится повернуть оставшуюся часть

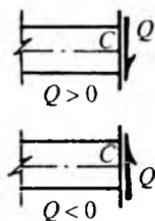


Рис. 5.2



Рис. 5.3

балки по ходу часовой стрелки относительно центра тяжести сечения (рис. 5.2).

Изгибающий момент в любом сечении балки определяется как сумма моментов всех нагрузок, приложенных к одной из ее частей, относительно центра тяжести данного сечения. При расчете балок изгибающий момент считается положительным, если он вызывает растяжение нижних волокон балки (рис. 5.3).

Внутренние усилия в общем случае переменны по длине балки. Законы их изменения изображаются графически с помощью эпюр M и Q . При построении эпюры изгибающих моментов принято откладывать ординаты M со стороны растянутых волокон.

Между изгибающим моментом, поперечной силой и распределенной поперечной нагрузкой $q(x)$ имеют место следующие дифференциальные зависимости:

$$\frac{dM}{dx} = Q, \quad \frac{dQ}{dx} = -q(x). \quad (5.1)$$

Формулы (5.1) используются при построении и проверке эпюр M и Q в балках при изгибе. С их помощью можно определить вид этих эпюр в зависимости от характера нагрузки на балку. Например, для трех часто встречающихся случаев имеем:

1. На участках, где $q = 0$, $Q = \text{const}$,
 $M(x)$ — линейный закон.
2. На участках, где $q = \text{const}$, $Q(x)$ — линейный закон,
 $M(x)$ — квадратичный закон.
3. На участках, где $q = ax + b$, $Q(x)$ — квадратичный закон,
 $M(x)$ — кубический закон.

Первая зависимость из (5.1) позволяет сделать выводы:

1. В сечении, где поперечная сила обращается в нуль, изгибающий момент имеет экстремальное значение (M_{\max} или M_{\min}).
2. В сечении, где поперечная сила имеет скачок (разрыв), на эпюре M должен быть излом.

Отмеченные особенности показаны на рис. 5.4, а, б.

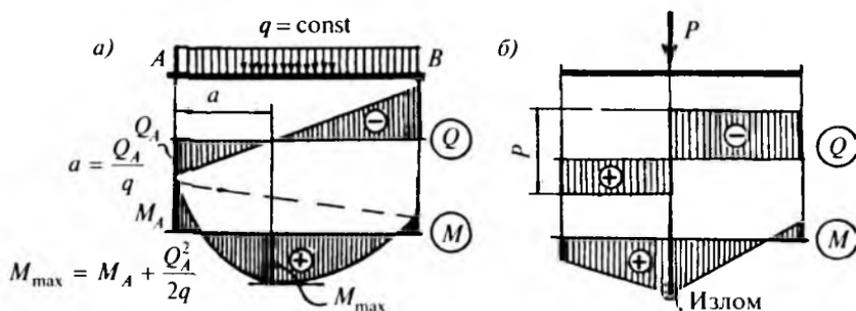


Рис. 5.4

При построении эпюр M и Q обычно вычисляют значения этих внутренних усилий в характерных сечениях балки, а полученные ординаты соединяют соответствующими линиями на основании зависимостей (5.1).

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 5.1

Построить эпюры M и Q для консольной балки (рис. 5.5, а).

Вычисляем значения M и Q в характерных сечениях балки, начиная со свободного конца.

- Сечение $x = 3$ м, $Q = 0$, $M = 10$ кНм
(растянуты нижние волокна).

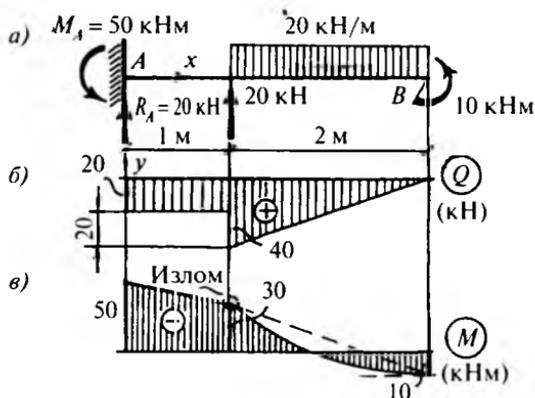


Рис. 5.5

2. Сечение $x = 1$ м, $Q_{\text{пр}} = 20 \cdot 2 = 40$ кН,
 $M = 10 - 20 \cdot 2 \cdot 1 = -30$ кНм.
(растянуты верхние волокна).
 $Q_{\text{лев}} = 40 - 20 = 20$ кН.
4. Сечение $x = 0$, $Q = R_A = 20$ кН,
 $M = M_A = 10 + 20 \cdot 1 - 20 \cdot 2 \cdot 2 = -50$ кНм
(растянуты верхние волокна).

Откладываем полученные ординаты M и Q на оси балки и соединяем соответствующими линиями. На участке с равномерно распределенной нагрузкой поперечная сила изменяется по линейному закону, а изгибающий момент — по закону квадратной параболы. В сечении на свободном конце касательная к эпюре M параллельна оси. На участке, примыкающем к заделке, поперечная сила постоянна, а изгибающий момент изменяется по линейному закону. Эпюры M и Q приведены на рис. 5.5, б, в.

Задача 5.2

Построить эпюры M и Q для консольной балки (рис. 5.6, а).

Вычисляем значения M и Q в характерных сечениях балки, начиная со свободного конца.

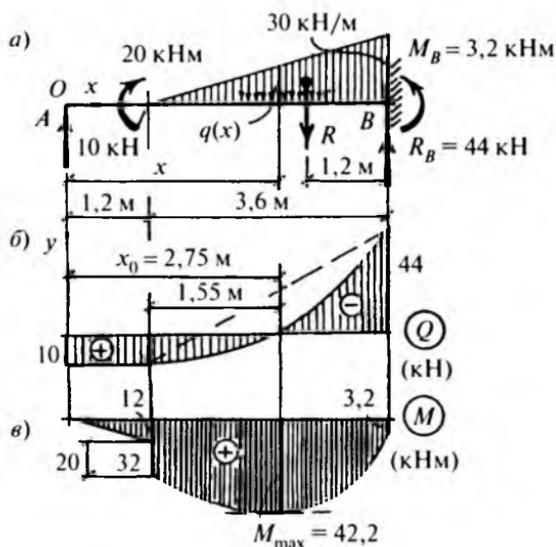


Рис. 5.6

1. Сечение $x = 0$, $Q = 10 \text{ кН}$, $M = 0$.
2. Сечение $x = 1,2 \text{ м}$, $Q = 10 \text{ кН}$,
 $M_{\text{лев}} = 10 \cdot 1,2 = 12 \text{ кНм}$
 (растянуты нижние волокна).
 $M_{\text{пр}} = 12 + 20 = 32 \text{ кНм}$.
4. Сечение $x = 4,8$, $Q = 10 - R = -44 \text{ кН}$,
 $M = 10 \cdot 4,8 + 20 - R \cdot \frac{1}{3} \cdot 3,6 = 3,2 \text{ кНм}$,

где $R = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 3,6 = 54 \text{ кН}$ — равнодействующая распределенной нагрузки.

Опорные реакции равны внутренним усилиям в заделке. При расчете консольных балок предварительное определение опорных реакций не обязательно.

На участке с линейно изменяющейся распределенной нагрузкой поперечная сила изменяется по закону квадратной параболы, а изгибающий момент — по закону кубической параболы. Определяем положение сечения, где поперечная сила обращается в нуль, и вычисляем значение экстремального изгибающего момента:

$$Q(x) = 10 - \frac{1}{2}q(x)(x - 1,2) = 10 - \frac{1}{2} \cdot \frac{30}{3,6}(x - 1,2)^2 = 0,$$

$$x = x_0 = 2,75 \text{ м},$$

$$M_{\text{max}} = 10 \cdot 2,75 + 20 - \frac{1}{2} \cdot \frac{30}{3,6} \cdot 1,55 \cdot 1,55 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1,55 = 42,2 \text{ кНм},$$

где $q(x) = \frac{30}{3,6}(x - 1,2)$ — закон изменения распределенной нагрузки на участке $1,2 \text{ м} \leq x \leq 4,8 \text{ м}$.

Эпюры M и Q приведены на рис. 5.6, б, в. В сечении $x = 1,2 \text{ м}$ на эпюре M скачок на величину сосредоточенного момента 20 кНм .

Задача 5.3

Построить эпюры M и Q для шарнирно-опертой балки (рис. 5.7, а).

Расчет шарнирно-опертых балок надо начинать с определения опорных реакций:

$$\sum M_A = 0, \quad 28 \cdot 3 \cdot 1,5 + 30 \cdot 3 + 24 = 4,6R_B, \quad R_B = 52,2 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0, \quad 28 \cdot 3 \cdot 3,1 + 30 \cdot 1,6 - 24 = 4,6R_A, \quad R_A = 61,8 \text{ кН}.$$

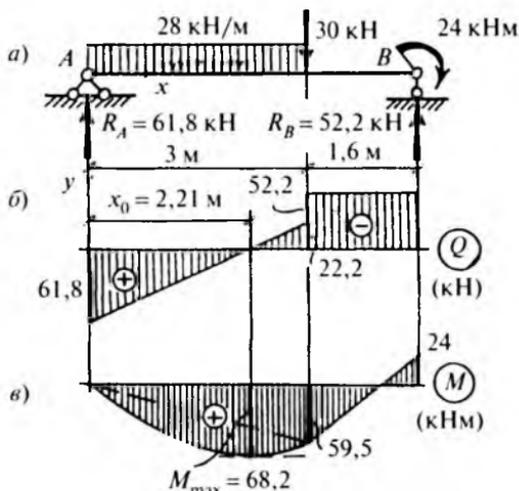


Рис. 5.7

$$\sum Y = 0 \text{ (проверка), } 28 \cdot 3 + 30 - 61,8 - 52,2 = 0.$$

Вычисляем значения M и Q в характерных сечениях балки.

1. Сечение $x = 0$, $Q = R_A = 61,8$ кН, $M = 0$.
2. Сечение $x = 3$ м, $Q_{\text{лев}} = 61,8 - 28 \cdot 3 = -22,2$ кН,
 $Q_{\text{прав}} = -22,2 - 30 = -52,2$ кН,
 $M = 61,8 \cdot 3 - 28 \cdot 3 \cdot 1,5 = 59,5$ кНм
 (растянуты нижние волокна).

3. Сечение $x = 4,6$ м, $Q = -R_B = -52,2$ кН, $M = -24$ кНм.

На участке с распределенной нагрузкой изгибающий момент изменяется по закону квадратной параболы. Вычисляем экстремальное значение изгибающего момента на этом участке:

$$Q(x) = 61,8 - 28 \cdot x = 0, \quad x = x_0 = 2,21 \text{ м,}$$

$$M_{\text{max}} = 61,8 \cdot 2,21 - 28 \cdot 2,21 \cdot \frac{2,21}{2} = 68,2 \text{ кНм.}$$

Эпюры M и Q приведены на рис. 5.7, б, в. Поперечная сила в сечении $x = 3$ м имеет скачок на величину сосредоточенной силы $P = 30$ кН.

Задача 5.4

Для шарнирно-опертой балки с консольным участком (рис. 5.8, а) построить эпюры M и Q .

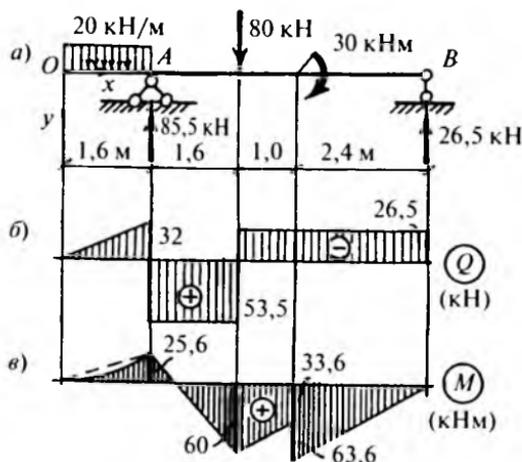


Рис. 5.8

Определяем опорные реакции:

$$\sum M_A = 0, \quad 80 \cdot 1,6 + 30 - 20 \cdot 1,6 \cdot 0,8 = 5R_B, \quad R_B = 26,5 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B = 0, \quad 20 \cdot 1,6 \cdot 5,8 + 80 \cdot 3,4 - 30 = 5R_A, \quad R_A = 85,5 \text{ кН.}$$

$$\sum Y = 0 \text{ (проверка)}, \quad 20 \cdot 1,6 + 80 - 85,5 - 26,5 = 0.$$

Вычисляем внутренние усилия в характерных сечениях балки.

1. Сечение $x = 0$, $Q = M = 0$.

2. Сечение $x = 1,6$ м (опора A),

$$M = -20 \cdot 1,6 \cdot 0,8 = -25,6 \text{ кНм,}$$

$$Q_{\text{лев}} = -20 \cdot 1,6 = -32 \text{ кН,}$$

$$Q_{\text{прав}} = -32 + 85,5 = 53,5 \text{ кН.}$$

3. Сечение $x = 3,2$ м, $Q_{\text{лев}} = 53,5$ кН,

$$Q_{\text{прав}} = 53,5 - 80 = -26,5 \text{ кН,}$$

$$M = -20 \cdot 1,6 \cdot 2,4 + 85,5 \cdot 1,6 = 60 \text{ кНм.}$$

4. Сечение $x = 6,6$ м (опора B),

$$Q = -R_B = -26,5 \text{ кН,} \quad M = 0.$$

5. Сечение $x = 4,2$ м,

$$Q = -26,5 \text{ кН,}$$

$$M_{\text{прав}} = 26,5 \cdot 2,4 = 63,6 \text{ кНм},$$

$$M_{\text{лев}} = 63,6 - 30 = 33,6 \text{ кНм}.$$

Эпюры внутренних усилий приведены на рис. 5.8, б, в. В сечении, где приложен сосредоточенный момент 30 кНм, на эпюре M имеется скачок на его величину.

Задача 5.5

Для балки с промежуточным шарниром (рис. 5.9, а) построить эпюры M и Q .

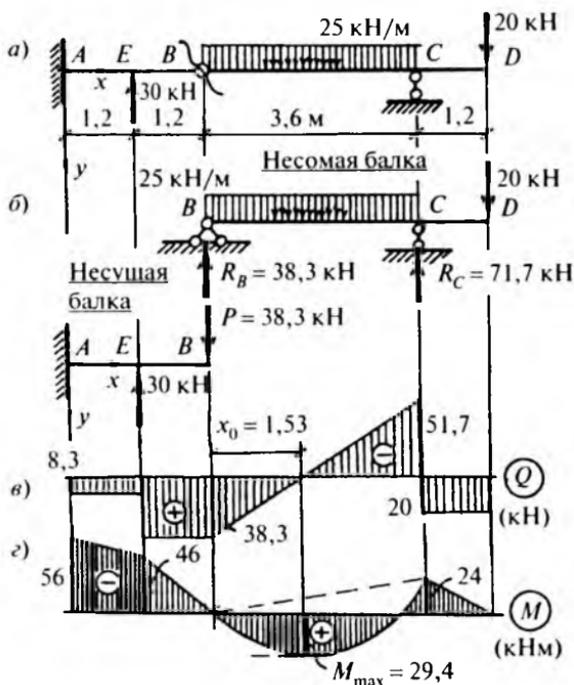


Рис. 5.9

Данная балка является статически определимой. Для удобства расчета мысленно разделяем ее на несомую и несущую балки. Расчет начинаем с несомой балки BD (рис. 5.9, б).

$$\sum M_B = 0, \quad 25 \cdot 3,6 \cdot 1,8 + 20 \cdot 4,8 = 3,6R_C, \quad R_C = 71,7 \text{ кН}.$$

$$\sum M_C = 0, \quad 25 \cdot 3,6 \cdot 1,8 - 20 \cdot 1,2 = 3,6R_B, \quad R_B = 38,3 \text{ кН}.$$

$$\sum Y = 0 \text{ (проверка), } 25 \cdot 3,6 + 20 - 38,3 - 71,7 = 0.$$

Вычисляем M и Q в характерных сечениях несомой балки.

1. Сечение B , $Q = R_B = 38,3 \text{ кН}$, $M = 0$.
2. Сечение D , $Q = 20 \text{ кН}$, $M = 0$.
3. Сечение C , $Q_{\text{прав}} = 20 \text{ кН}$, $Q_{\text{лев}} = 20 - 71,7 = -51,7 \text{ кН}$,
 $M = -20 \cdot 1,2 = -24 \text{ кНм}$
 (растянуты верхние волокна).

В пролете несомой балки BC изгибающий момент изменяется по закону квадратной параболы. Вычисляем экстремальное значение момента:

$$Q(x) = 38,3 - 25x = 0, \quad x_0 = 1,53 \text{ м,}$$

$$M_{\text{max}} = 38,3 \cdot 1,53 - 25 \cdot 1,53 \cdot \frac{1,53}{2} = 29,4 \text{ кНм.}$$

Несущая балка AB (рис. 5.9, б) рассчитывается на действие приложенной к ней нагрузки и силы, численно равной условной опорной реакции R_B и направленной в противоположную сторону. С помощью этой силы осуществляется передача нагрузки с несомой балки на несущую.

4. Сечение B , $Q = P = 38,3 \text{ кН}$, $M = 0$.
5. Сечение E , $Q_{\text{прав}} = 38,3 \text{ кН}$, $Q_{\text{лев}} = 38,3 - 30 = 8,3 \text{ кН}$,
 $M = -38,3 \cdot 1,2 = -46 \text{ кНм}$.
6. Сечение A , $Q = 8,3 \text{ кН}$, $M = -38,3 \cdot 2,4 + 30 \cdot 1,2 = -56 \text{ кНм}$.
 Эпюры внутренних усилий приведены на рис. 5.9, в, г.

Задача 5.6

Для балки с наклонным участком (рис. 5.10, а) построить эпюры M и Q . Интенсивность равномерно распределенной вертикальной нагрузки отнесена к единице длины горизонтальной проекции наклонного участка.

Расчет начинаем с определения опорных реакций.

$$\sum X = 0, \quad H_A = 0,$$

$$\sum M_A = 0, \quad 20 \cdot 4 \cdot 2 + 30 + 10 \cdot 5 = 4R_B, \quad R_B = 60 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B = 0, \quad 20 \cdot 4 \cdot 2 - 30 - 10 \cdot 1 = 4R_A, \quad R_A = 30 \text{ кН.}$$

$$\sum Y = 0 \text{ (проверка), } 20 \cdot 4 + 10 - 60 - 30 = 0.$$

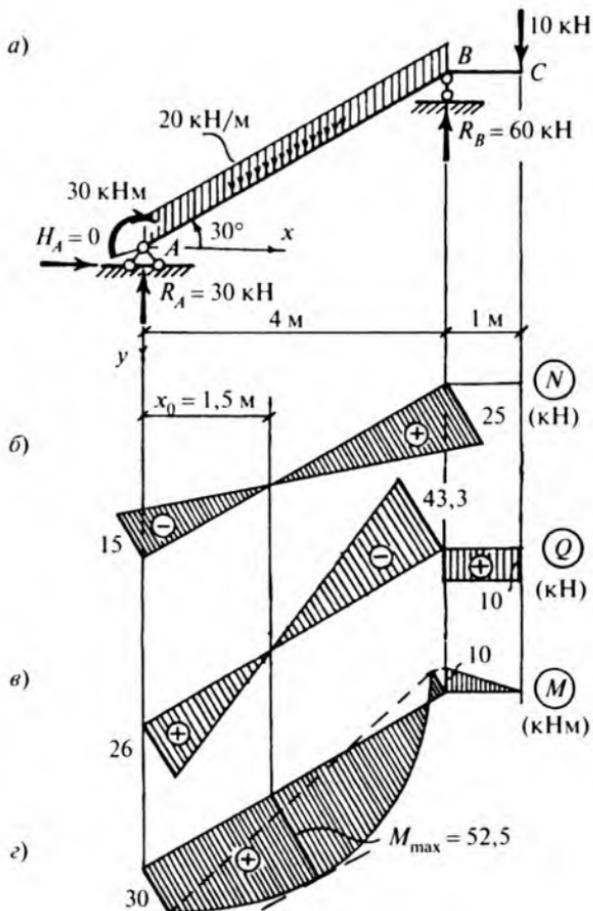


Рис. 5.10

При определении N и Q в сечениях на наклонном участке составляем проекции нагрузки и опорных реакций на ось балки и на нормаль к оси в характерных сечениях.

1. Сечение C , $Q = 10$ кН, $M = 0$, $N = 0$.
2. Сечение B , $Q_{\text{прав}} = 10$ кН, $Q_{\text{лев}} = (10 - 60)\cos 30^\circ = -43,3$ кН,
 $N_{\text{прав}} = 0$, $N_{\text{лев}} = (-10 + 60)\sin 30^\circ = 25$ кН
 (растяжение),
 $M = -10 \cdot 1 = -10$ кНм
 (растянуты верхние волокна).
3. Сечение A , $Q = R_A \cos 30^\circ = 30 \cos 30^\circ = 26$ кН, $M = 30$ кНм,
 $N = -R_A \sin 30^\circ = -30 \sin 30^\circ = -15$ кН (сжатие).

На наклонном участке балки поперечная и продольная силы изменяются по линейному закону, а изгибающий момент — по закону квадратной параболы. Определяем положение сечения, где поперечная сила обращается в нуль, и вычисляем значение экстремального момента:

$$Q(x) = (R_A - 20x) \cos 30^\circ = 0, \quad x_0 = 1,5 \text{ м},$$

$$M_{\max} = 30 + 30 \cdot 1,5 - 20 \cdot 1,5 \cdot \frac{1,5}{2} = 52,5 \text{ кНм}$$

(растянуты нижние волокна).

Эпюры внутренних усилий приведены на рис. 5.10, в, г.

Задача 5.7

Построить эпюры внутренних усилий для консольного ломаного стержня (рис. 5.11, а). Стержни соединены между собой с помощью жестких узлов, не допускающих взаимного поворота сечений.

Предварительное определение опорных реакций не обязательно. Вычисляем внутренние усилия в каждом стержне, начиная со свободного конца.

Стержень *AB*

1. Сечение *A*, $Q = 40 \text{ кН}$, $N = M = 0$.
2. Сечение *B*, $Q = 40 \text{ кН}$, $N = 0$,
 $M = 40 \cdot 1,5 = 60 \text{ кНм}$
 (растянуты нижние волокна).

Стержень *BC*

3. Сечение *B*, $M = 60 \text{ кНм}$, $Q = 0$
 (растянуты наружные волокна),
 $N = -40 \text{ кН}$ (сжатие).
4. Сечение *C*, $Q = 18 \cdot 2 = 36 \text{ кН}$, $N = -40 \text{ кН}$,
 $M = 60 + 18 \cdot 2 \cdot 1 = 96 \text{ кНм}$.

В пределах стержня *BC* изгибающий момент изменяется по закону квадратной параболы и вызывает растяжение наружных волокон.

Стержень *CE*

5. Сечение *C*, $Q = -40 \text{ кН}$, $M = 96 \text{ кНм}$
 (растянуты верхние волокна),
 $N = -18 \cdot 2 = -36 \text{ кН}$ (сжатие).

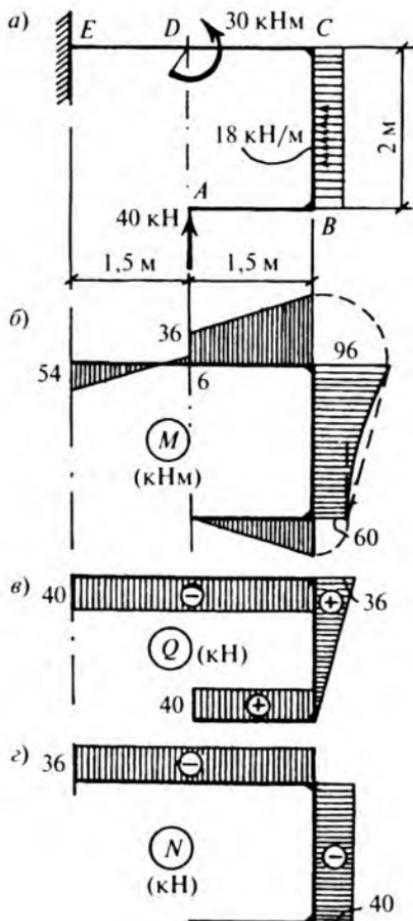


Рис. 5.11

6. Сечение D , $Q = -40$ кН, $N = -36$ кН,
 $M_{\text{прав}} = 18 \cdot 2 \cdot 1 - 40 \cdot 0 = 36$ кНм,
 $M_{\text{лев}} = 36 - 30 = 6$ кНм
 (растянуты верхние волокна).
7. Сечение E , $Q = -40$ кН, $N = -36$ кН,
 $M = 18 \cdot 2 \cdot 1 - 30 - 40 \cdot 1,5 = -54$ кНм
 (растянуты нижние волокна).

Отметим, что при определении изгибающих моментов в стержневых системах (ломаные стержни, рамы и т.п.) требуется установить растягиваемые нагрузкой волокна. При этом на эпюре M

ординаты откладываются со стороны растянутых волокон, а знак не ставится.

Эпюры внутренних усилий приведены на рис. 5.11, б, в, г.

Задача 5.8

Для балки с криволинейным участком (рис. 5.12, а) построить эпюры M , Q и N .

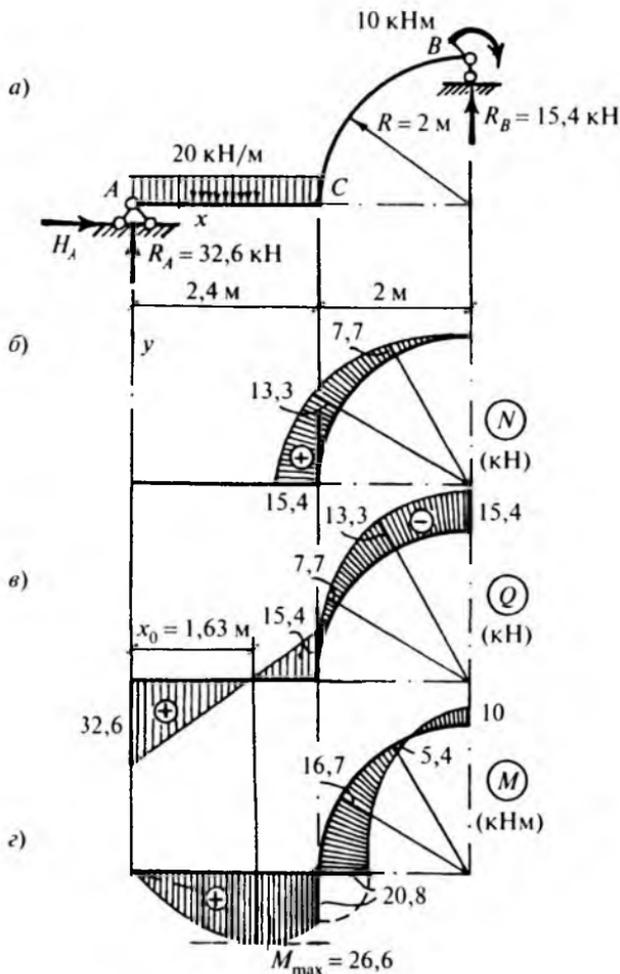


Рис. 5.12

Определяем опорные реакции:

$$\sum X = 0, \quad H_A = 0.$$

$$\sum M_A = 0, \quad 20 \cdot 2,4 \cdot 1,2 + 10 = 4,4R_B, \quad R_B = 15,4 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0, \quad 20 \cdot 2,4 \cdot 3,2 - 10 = 4,4R_A, \quad R_A = 32,6 \text{ кН}.$$

$$\sum Y = 0 \text{ (проверка)}, \quad 20 \cdot 2,4 - 32,6 - 15,4 = 0.$$

С помощью метода сечений определяем законы изменения внутренних усилий на криволинейном участке (рис. 5.13):

$$\sum t = 0, \quad Q = -15,4 \cos \varphi.$$

$$\sum n = 0, \quad N = 15,4 \sin \varphi.$$

$$\sum M_K = 0, \quad M = 15,4R \sin \varphi - 10,$$

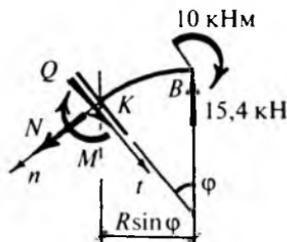


Рис. 5.13

где K — центр тяжести сечения.

Последовательно вычисляем:

$$\varphi = 0, \quad N = 0, \quad Q = -15,4 \text{ кН}, \quad M = -10 \text{ кНм}.$$

$$\varphi = 30^\circ, \quad N = 7,7 \text{ кН}, \quad Q = -13,3 \text{ кН}, \quad M = 5,4 \text{ кНм}.$$

$$\varphi = 60^\circ, \quad N = 13,3 \text{ кН}, \quad Q = -7,7 \text{ кН}, \quad M = 16,7 \text{ кНм}.$$

$$\varphi = 90^\circ, \quad N = 15,4 \text{ кН}, \quad Q = 0, \quad M = 20,8 \text{ кНм}.$$

На криволинейном участке BC внутренние усилия изменяются по синусоиде. Продольная сила является растягивающей, а знак изгибающего момента в пределах участка изменяется на противоположный. Вычисляем внутренние усилия в характерных сечениях горизонтального участка AC .

$$\text{Сечение } A, \quad N = 0, \quad Q = R_A = 32,6 \text{ кН}, \quad M = 0.$$

$$\text{Сечение } C, \quad N = 0, \quad Q = 32,6 - 20 \cdot 2,4 = -15,4 \text{ кН}, \\ M = 32,6 \cdot 2,4 - 20 \cdot 2,4 \cdot 1,2 = 20,8 \text{ кНм} \\ \text{(растянуты нижние волокна).}$$

Вычисляем значение экстремального момента на участке AC :

$$Q(x) = 32,6 - 20x = 0, \quad x_0 = 1,63 \text{ м},$$

$$M_{\max} = 32,6 \cdot 1,63 - 20 \cdot 1,63 \cdot \frac{1,63}{2} = 26,6 \text{ кНм}.$$

На участке AC изгибающий момент изменяется по закону квадратной параболы. Эпюры внутренних усилий приведены на рис. 5.12, б, в, г.

Задача 5.9

Для шарнирно-опертой рамы (рис. 5.14) построить эпюры внутренних усилий.

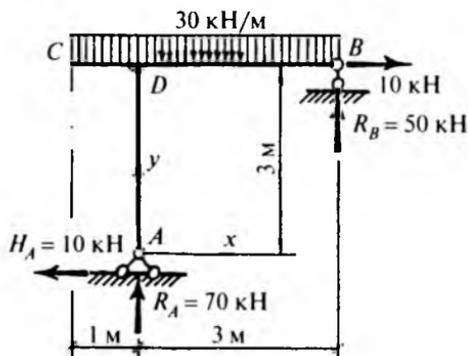


Рис. 5.14

Расчет рамы начинаем с определения опорных реакций:

$$\sum X = 0, \quad H_A = 10 \text{ кН.}$$

$$\sum M_A = 0, \quad 30 \cdot 4 \cdot 1 + 10 \cdot 3 = 3R_B, \quad R_B = 50 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B = 0, \quad 30 \cdot 4 \cdot 2 - 10 \cdot 3 = 3R_A, \quad R_A = 70 \text{ кН.}$$

$$\sum Y = 0 \text{ (проверка), } -30 \cdot 4 + 50 + 70 = 0.$$

Вычисляем внутренние усилия в характерных сечениях стержней рамы.

Стержень AC (стойка)

1. Сечение A , $N = -R_A = -70 \text{ кН}$ (сжатие),
 $Q = H_A = 10 \text{ кН}$, $M = 0$.
2. Сечение D , $N = -70 \text{ кН}$, $Q = 10 \text{ кН}$, $M = 10 \cdot 3 = 30 \text{ кНм}$
(растянуты внутренние волокна стойки).

Стержень BC (ригель рамы)

3. Сечение C , $N = 0$, $Q = 0$, $M = 0$.
4. Сечение B , $N = 10 \text{ кН}$ (растяжение), $Q = -R_B = -50 \text{ кН}$,
 $M = 0$.

5. Сечение D , $N_{\text{лев}} = 0$, $N_{\text{прав}} = H_A = 10$ кН (растяжение),
 $Q_{\text{лев}} = -30 \cdot 1 = -30$ кН,
 $Q_{\text{прав}} = -30 + R_A = -30 + 70 = 40$ кН,
 $M_{\text{лев}} = -30 \cdot 1 \cdot 0,5 = -15$ кНм
(растянуты верхние волокна),
 $M_{\text{прав}} = 50 \cdot 3 - 30 \cdot 3 \cdot 1,5 = 15$ кНм
(растянуты нижние волокна).

В пределах ригеля рамы BC изгибающий момент изменяется по закону квадратной параболы. Определяем положение сечения в пролете BD , где поперечная сила обращается в нуль, и вычисляем значение экстремального момента:

$$Q(x) = 40 - 30x = 0, \quad x_0 = 1,33 \text{ м,}$$

$$M_{\text{max}} = 50 \cdot 1,67 - 30 \cdot 1,67 \cdot \frac{1,67}{2} = 41,7 \text{ кНм.}$$

Эпюры внутренних усилий приведены на рис. 5.15, a , b , $в$.

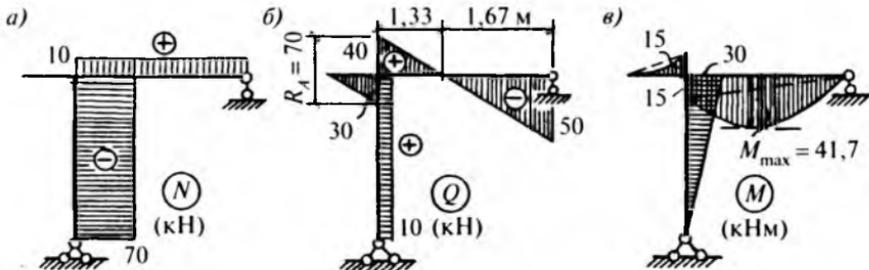


Рис. 5.15

Вырежем мысленно жесткий узел D , приложим к сходящимся в этом узле стержням внутренние усилия и проверим его равновесие (рис. 5.16). Нетрудно видеть, что узел D находится в равновесии, так как для него выполняются все три уравнения статики:

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum M_D = 0.$$

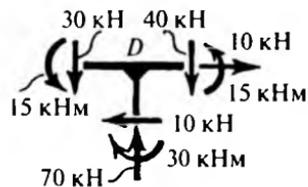


Рис. 5.16

Задача 5.10

Для шарнирно-опертой рамы (рис. 5.17) построить эпюры внутренних усилий.

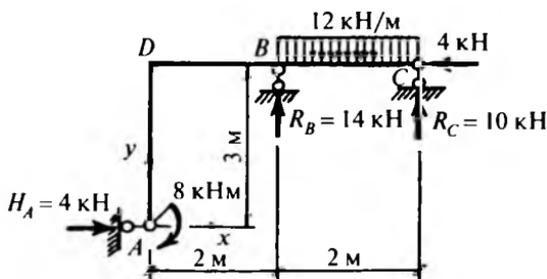


Рис. 5.17

Рама является статически определимой и геометрически неизменяемой, так как три опорных стержня не параллельны и не пересекаются в одной точке.

Определяем опорные реакции:

$$\sum X = 0, \quad H_A = 4 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B = 0, \quad R_C = \frac{12 \cdot 2 \cdot 1 - 4 \cdot 3 + 8}{2} = 10 \text{ кН.}$$

$$\sum M_C = 0, \quad R_B = \frac{12 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 - 8}{2} = 14 \text{ кН.}$$

$$\sum Y = 0 \text{ (проверка)}, \quad -12 \cdot 2 + 10 + 14 = 0.$$

Вычисляем внутренние усилия в характерных сечениях стержней.

Стержень AD

$$N = 0, \quad Q = -H_A = -4 \text{ кН,}$$

$$M_A = 8 \text{ кНм (растянуты правые волокна),}$$

$$M_D = 8 - 4 \cdot 3 = -4 \text{ кНм (растянуты левые волокна).}$$

Изгибающий момент изменяется по линейному закону.

Стержень DC

$$N = -H_A = -4 \text{ кН (сжатие),} \quad Q_D = Q_B^{\text{лев}} = 0, \quad Q_B^{\text{прав}} = R_B = 14 \text{ кН,}$$

$$Q_C = -R_C = -10 \text{ кН,} \quad M_D = M_B = -4 \text{ кНм (растянуты верхние волокна).}$$

Изгибающий момент в пролете BC изменяется по квадратной параболе. Вычисляем значение экстремального изгибающего момента:

$$M_{\max} = M_B + \frac{Q_B^2}{2q} = -4 + \frac{14^2}{2 \cdot 12} = 4,17 \text{ кНм}$$

(растянуты нижние волокна).

Эпюры внутренних усилий приведены на рис. 5.18, a , b , $в$.

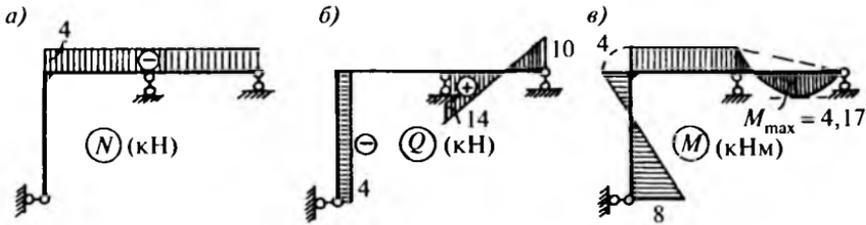


Рис. 5.18

Задача 5.11

Для рамы с промежуточным шарниром (рис. 5.19) построить эпюры внутренних усилий.

Данная рама статически определима. Для определения четырех опорных реакций R_A , H_A , R_B и H_B составляем три уравнения равно-

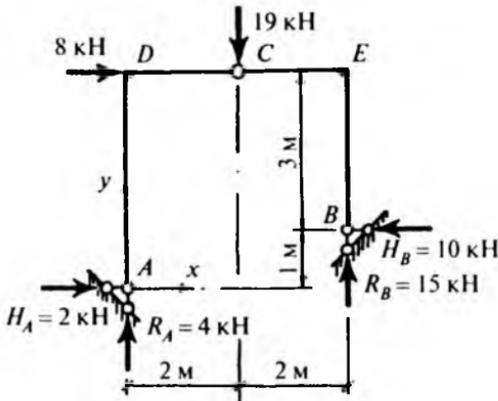


Рис. 5.19

весия и используем дополнительное условие в промежуточном шарнире $M_C = 0$.

$$\sum M_C^{\text{прав}} = 0, \quad 2R_B = 3H_B.$$

$$\sum M_A = 0, \quad 4R_B + H_B = 19 \cdot 2 + 8 \cdot 4 = 70 \text{ кНм},$$

$$H_B = 10 \text{ кН}, \quad H_A = 15 \text{ кН}.$$

$$\sum X = 0, \quad H_A + 8 = H_B, \quad H_A = 2 \text{ кН}.$$

$$\sum Y = 0, \quad R_A + R_B = 19 \text{ кН}, \quad R_A = 4 \text{ кН}.$$

Отметим, что данная рама относится к категории распорных систем, для которых характерно наличие горизонтальных опорных реакций (распора) при действии вертикальных нагрузок. Вычисляем внутренние усилия в стержнях рамы.

Стержень AD

$$N = -R_A = -4 \text{ кН (сжатие)}, \quad Q = -H_A = -2 \text{ кН}, \quad M_A = 0, \\ M_D = -2 \cdot 4 = -8 \text{ кНм (растянуты левые волокна)}.$$

Стержень DE

$$N = -H_A - 8 = -10 \text{ кН (сжатие)}, \quad Q_D = Q_C^{\text{лев}} = R_A = 4 \text{ кН}, \\ Q_C^{\text{прав}} = Q_E = -R_B = -15 \text{ кН}, \quad M_D = -8 \text{ кНм} \\ \text{(растянуты верхние волокна)}, \\ M_E = -10 \cdot 3 = -30 \text{ кНм (растянуты верхние волокна)}.$$

Стержень BE

$$N = -R_B = -15 \text{ кН (сжатие)}, \quad Q = H_B = 10 \text{ кН}, \quad M_B = 0, \\ M_E = -10 \cdot 3 = -30 \text{ кНм (растянуты правые волокна)}.$$

Эпюры внутренних усилий приведены на рис. 5.20, а, б, в.

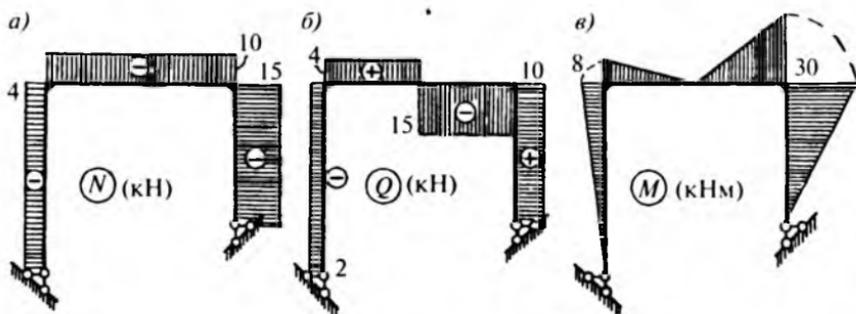


Рис. 5.20

Задача 5.12

Для консольного ломаного пространственного стержня (рис. 5.21) требуется построить эпюры внутренних усилий.

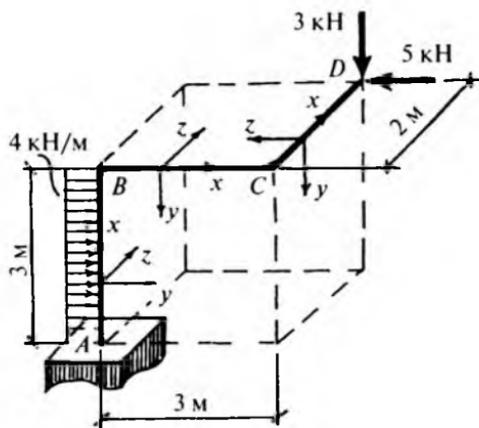


Рис. 5.21

Стержневую систему можно назвать пространственной, если составляющие ее стержни не расположены в одной плоскости. Стержни пространственных систем могут одновременно испытывать растяжение-сжатие, изгиб и кручение, и в их поперечных сечениях могут действовать шесть внутренних усилий — продольная сила, два изгибающих момента, две поперечные силы и крутящий момент.

Внутренние усилия в каждом стержне определяются с помощью метода сечений, причем для пространственного стержня используются шесть уравнений равновесия.

Для каждого стержня принимается подвижная система координат, причем обычно ось Ox считается совпадающей с осью стержня, а оси Oy и Oz являются главными центральными осями инерции поперечных сечений (рис. 5.21). При такой системе координат изгибающие моменты и поперечные силы в стержнях обозначаются M_z , M_y , Q_z и Q_y , а крутящий момент $M_k = M_x$. Правило знаков для внутренних усилий остается прежним. При построении эпюр изгибающих моментов их ординаты надо откладывать со стороны растянутых волокон.

Наиболее просто производится расчет консольных пространственных ломаных стержней, поскольку для них предварительное определение опорных реакций не обязательно. При этом внутренние усилия последовательно вычисляются в характерных сечениях каждого стержня, начиная с имеющего свободный конец.

В нашей задаче расчет начинаем со стержня CD .

Стержень CD

$$N=0, \quad Q_y=3 \text{ кН}, \quad Q_z=-5 \text{ кН}, \quad M_z^D=M_y^D=0, \\ M_z^C=3 \cdot 2=6 \text{ кНм}, \quad M_y^C=5 \cdot 2=10 \text{ кНм}, \quad M_x=0.$$

Стержень BC

$$N=-5 \text{ кН}, \quad Q_y=3 \text{ кН}, \quad Q_z=0, \quad M_y^C=M_y^B=10 \text{ кНм}, \\ M_z^C=0, \quad M_z^B=3 \cdot 3=9 \text{ кНм}, \quad M_x=3 \cdot 2=6 \text{ кНм}.$$

Стержень AB

$$N=-3 \text{ кН}, \quad Q_z=0, \quad Q_y^B=-5 \text{ кН}, \quad Q_y^A=-5+4 \cdot 3=7 \text{ кН}, \\ M_y^B=M_y^A=3 \cdot 2=6 \text{ кНм}, \quad M_z^B=3 \cdot 3=9 \text{ кНм}, \\ M_z^A=9+4 \cdot 3 \cdot 1,5-5 \cdot 3=12 \text{ кНм}, \quad M_x=-5 \cdot 2=-10 \text{ кНм}.$$

Изгибающий момент M_z в стержне AB изменяется по закону квадратной параболы. Вычисляем его экстремальное значение:

$$M_z^{\max} = 9 - \frac{5^2}{2 \cdot 4} = 5,875 \text{ кНм}.$$

Эпюры внутренних усилий приведены на рис. 5.22.

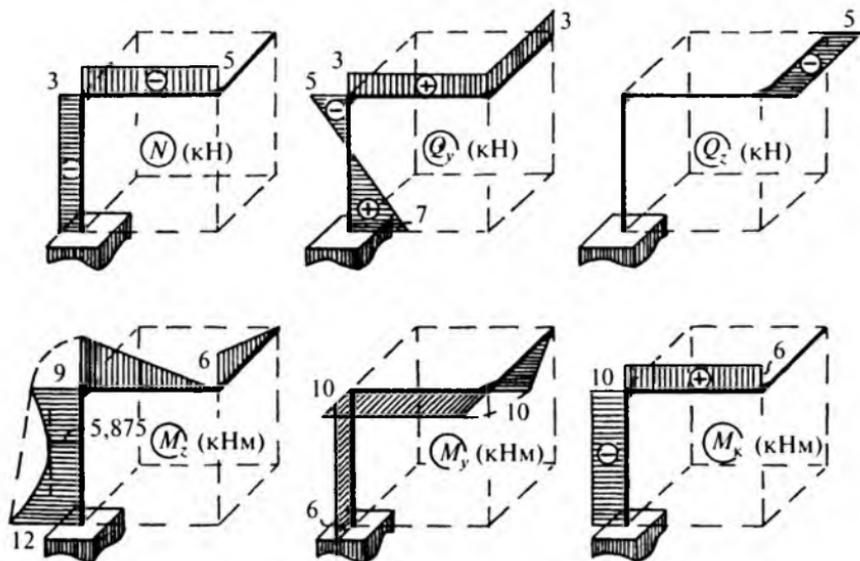


Рис. 5.22

Задача 5.13

Для шарнирно-опертой балки, нагруженной поперечной нагрузкой с интенсивностью $q(x) = q \sin \frac{\pi x}{l}$ (рис. 5.23, а), требуется построить эпюры Q и M .

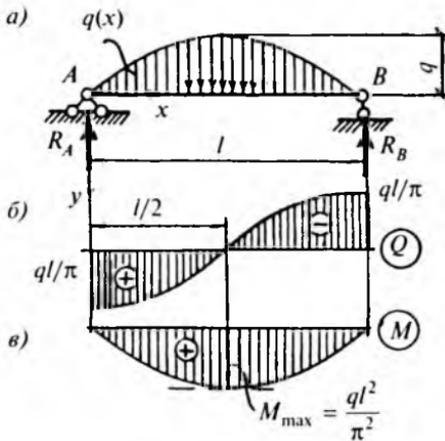


Рис. 5.23

В силу симметрии нагрузки относительно середины балки опорные реакции равны между собой: $R_A = R_B$. Вычисляем равнодействующую распределенной нагрузки, равную грузовой площади:

$$R = \int_0^l q(x) dx = \int_0^l q \sin \frac{\pi x}{l} dx = -q \frac{l}{\pi} \cos \frac{\pi x}{l} \Big|_0^l = \frac{2ql}{\pi}.$$

Определяем величины опорных реакций:

$$\sum Y = 0, \quad R_A + R_B = R, \quad R_A = R_B = \frac{R}{2} = \frac{ql}{\pi}.$$

Устанавливаем закон изменения поперечных сил по длине балки:

$$\begin{aligned} Q(x) &= R_A - \int_0^x q(t) dt = \frac{ql}{\pi} - \int_0^x q \sin \frac{\pi t}{l} dt = \frac{ql}{\pi} + \frac{ql}{\pi} \cos \frac{\pi t}{l} \Big|_0^x = \\ &= \frac{ql}{\pi} \cos \frac{\pi x}{l}, \end{aligned}$$

где t — переменная в пределах $0 \leq t \leq x$, а x является параметром и верхним пределом интеграла.

Для определения закона изменения изгибающих моментов используем зависимость Д.И. Журавского:

$$\frac{dM}{dx} = Q,$$

$$M(x) = M_0 + \int_0^x Q(t)dt = \int_0^x \frac{ql}{\pi} \cos \frac{\pi t}{l} dt = \frac{ql}{\pi} \cdot \frac{l}{\pi} \sin \frac{\pi t}{l} \Big|_0^x = \frac{ql^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{l},$$

где $M_0 = 0$ — значение изгибающего момента в начальном сечении балки при $x = 0$. Внутренние усилия в балке изменяются по синусоиде. Вычисляем значения M и Q в характерных сечениях:

$$x = 0, \quad Q = R_A = \frac{ql}{\pi}, \quad M = 0,$$

$$x = l/2, \quad Q = 0, \quad M = M_{\max} = \frac{ql^2}{\pi^2},$$

$$x = l, \quad Q = -R_B = -\frac{ql}{\pi}, \quad M = 0.$$

Эпюры внутренних усилий приведены на рис. 5.23, б, в.

Задача 5.14

Для шарнирно-опертой балки (рис. 5.4, а) требуется построить эпюры Q и M . На консольном участке балки действует равномерно распределенная моментная нагрузка.

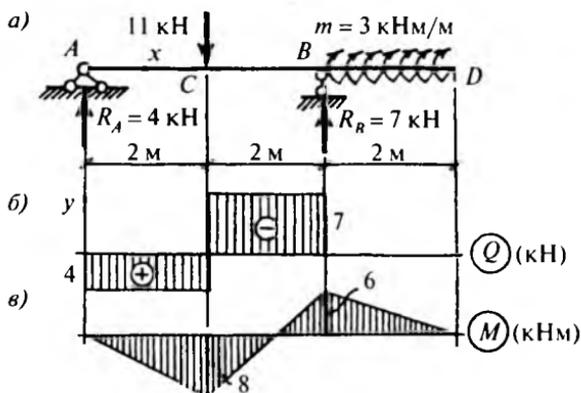


Рис. 5.24

Определяем величины опорных реакций:

$$\sum M_A = 0, \quad R_B = \frac{11 \cdot 2 + 3 \cdot 2}{4} = 7 \text{ кН},$$

$$\sum M_B = 0, \quad R_A = \frac{11 \cdot 2 - 3 \cdot 2}{4} = 4 \text{ кН},$$

где $M = 3 \cdot 2 = 6 \text{ кНм}$ — равнодействующая равномерно распределенной моментной нагрузки.

Вычисляем значения Q и M в характерных сечениях балки.

1. Сечение A , $Q = R_A = 4 \text{ кН}$, $M = 0$.

2. Сечение C , $Q_{\text{лев}} = 4 \text{ кН}$, $Q_{\text{прав}} = 4 - 11 = -7 \text{ кН}$,
 $M = 4 \cdot 2 = 8 \text{ кНм}$ (растянуты нижние волокна).

3. Сечение D , $Q = 0$, $M = 0$.

4. Сечение B , $Q_{\text{лев}} = -R_B = -7 \text{ кН}$, $Q_{\text{прав}} = 0$,
 $M = -3 \cdot 2 = -6 \text{ кНм}$
 (растянуты верхние волокна).

Эпюры Q и M приведены на рис. 5.24, б, в. Отметим, что на консольном участке балки поперечная сила равна нулю, а изгибающий момент изменяется по линейному закону. Это объясняется тем, что на участках балки с распределенной моментной нагрузкой вместо зависимости Д.И. Журавского (5.1) имеет место более общее дифференциальное соотношение:

$$\frac{dM}{dx} = Q + m(x), \quad (5.2)$$

где $m(x)$ — интенсивность распределенной моментной нагрузки.

Задача 5.15

Для шарнирно-опертой балки (рис. 5.25, а) требуется определить величину параметра k , при котором изгибающие моменты в пролете балки и на опоре B равны по величине и противоположны по знаку.

Определяем величину опорной реакции R_A :

$$\sum M_B = 0, \quad R_A = \frac{P \cdot 2a + Pa - kPa}{3a} = \frac{P(3 - k)}{3}.$$

Проанализируем характер эпюры M в зависимости от величины параметра k . При $k = 0$ $R_A = P$ и $M_B = 0$. Эпюра изгибающих моментов для этого случая приведена на рис. 5.25, б. При $k = 3$ $R_A = 0$ и $M_C = 0$. Соответствующая эпюра M приведена на рис. 5.25, в. Оче-

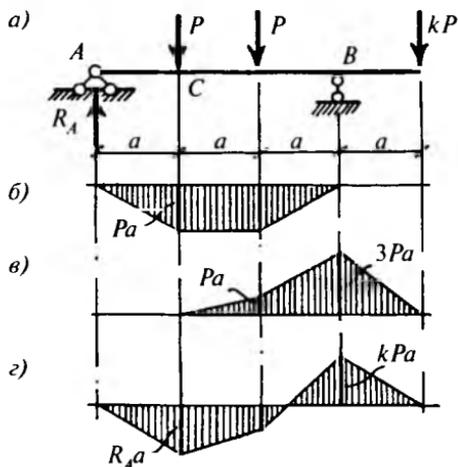


Рис. 5.25

видно, что для выполнения требуемого условия параметр k должен находиться в пределах $0 < k < 3$, причем наибольший изгибающий момент в пролете будет действовать в сечении C . Характер эпюры M , соответствующий выполнению требуемого условия, приведен на рис. 5.25, з.

Приравниваем изгибающие моменты в сечениях C и D и определяем величину параметра k :

$$M_C = |M_B|, \quad \frac{P(3-k)}{3}a = kPa, \quad k = 0,75.$$

Задача 5.16

Для шарнирно-опертой балки (рис. 5.26, а) требуется определить длину консоли a из условия равенства нулю изгибающего момента в сечении C .

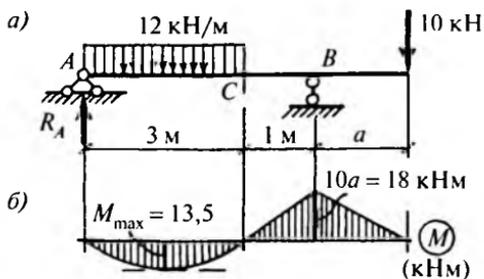


Рис. 5.26

Определяем опорную реакцию R_A :

$$\sum M_B = 0, \quad R_A = \frac{12 \cdot 3 \cdot 2,5 - 10a}{4} = 22,5 - 2,5a.$$

Записываем выражение для изгибающего момента в сечении C , приравняем его к нулю и определяем величину a :

$$M_C = R_A \cdot 3 - 12 \cdot 3 \cdot 1,5 = (22,5 - 2,5a) \cdot 3 - 54 = 0, \quad a = 1,8 \text{ м.}$$

Эпюра M , соответствующая требуемому условию, приведена на рис. 5.26, б.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 5.17. Для консольных балок (рис. 5.27) требуется построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.

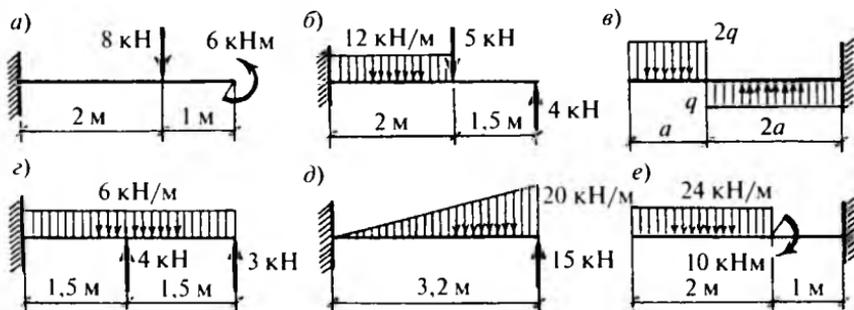


Рис. 5.27

Ответ: наибольшие значения Q и M с учетом знаков приведены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Схема	а	б	в	г	д	е
Q	8 кН	25 кН	$-2qa$	11 кН	17 кН	-48 кН
M	-10 кНм	-20 кНм	$-3qa^2$	-12 кНм	-20,27 кНм	-86 кНм

Задача 5.18. Для шарнирно-опертых балок (рис. 5.28) требуется построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.

Ответ: наибольшие значения Q и M с учетом знаков приведены в табл. 5.2.

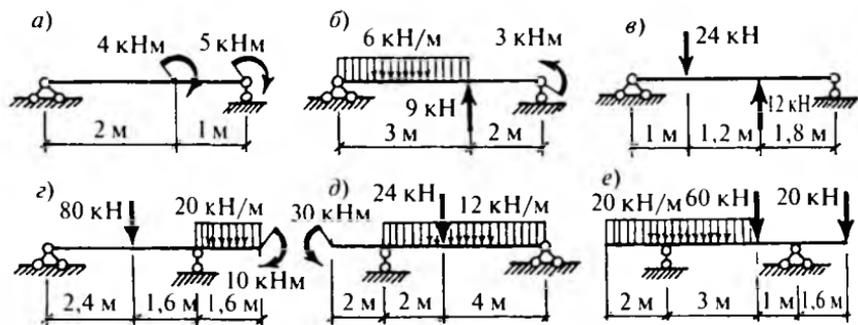


Рис. 5.28

Таблица 5.2

Схема	а	б	в	г	д	е
Q , кН	-3,0	9,6	12,6	-56,9	57,0	-65,5
M , кНм	-6,0	7,68	12,6	55,44	63,375	-40,0

Задача 5.19. Для балок с промежуточными шарнирами (рис. 5.29) требуется построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.

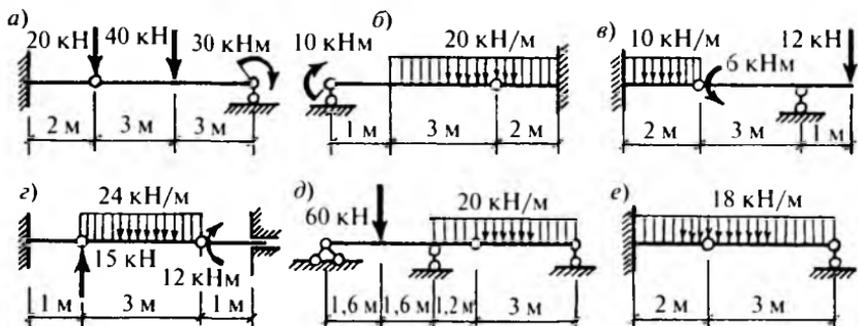


Рис. 5.29

Ответ: наибольшие значения Q и M с учетом знаков приведены в табл. 5.3.

Таблица 5.3

Схема	а	б	в	г	д	е
Q , кН	35	-80,0	18,0	36,0	54,0	63,0
M , кНм	-70,0	-120,0	-16,0	27,0	-50,4	-90,0

Задача 5.20. Для балок на рис. 5.30 требуется установить законы изменения $Q(x)$ и $M(x)$ и построить эпюры этих величин.

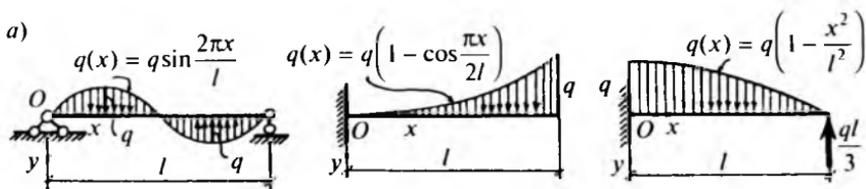


Рис. 5.30

Ответ: наибольшие значения Q и M равны

а) $Q = \pm \frac{ql}{2\pi}$, $M = \pm \frac{ql^2}{4\pi^2}$;

б) $Q = 0,3634ql$, $M = -0,2687ql^2$;

в) $Q = 0,333ql$, $M = M_{\max} = 0,14ql^2$ (при $x = 0,3473l$).

Задача 5.21. Для балок на рис. 5.31, нагруженных распределенной моментной нагрузкой, требуется построить эпюры Q и M .

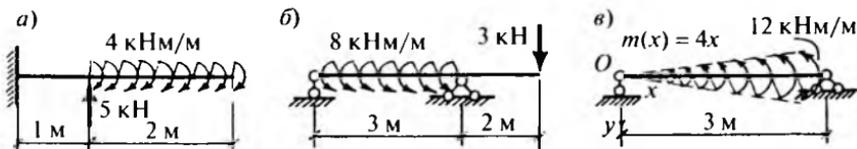


Рис. 5.31

Ответ: наибольшие значения Q и M с учетом знаков равны:

а) $M = -8$ кНМ, $Q = -5$ кН;

б) $M = -6$ кНМ, $Q = 6$ кН;

в) $M = 4,5$ кНМ, $Q = 6$ кН.

Задача 5.22. Для балок на рис. 5.32 требуется определить:

а) величину параметра k из условия $M_{\max} = |M_B|$;

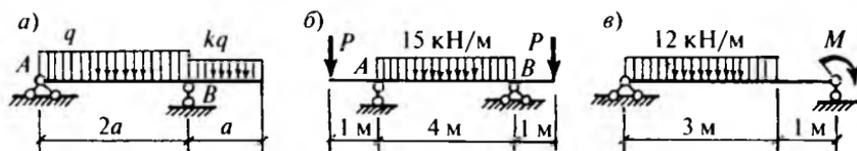


Рис. 5.32

- б) величину сил P из условия $M_{\max} = 2|M_A| = 2|M_B|$;
 в) величину изгибающего момента M из условия $M_{\max} = 1,5M$,
 где M_{\max} — значение экстремального изгибающего момента в пролете балок, растягивающего нижние волокна.
 Ответ: а) $k = 0,6863$; б) $P = 10$ кН; в) $M = 10,87$ кНм.

Задача 5.23. Для рам на рис. 5.33 требуется построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил.

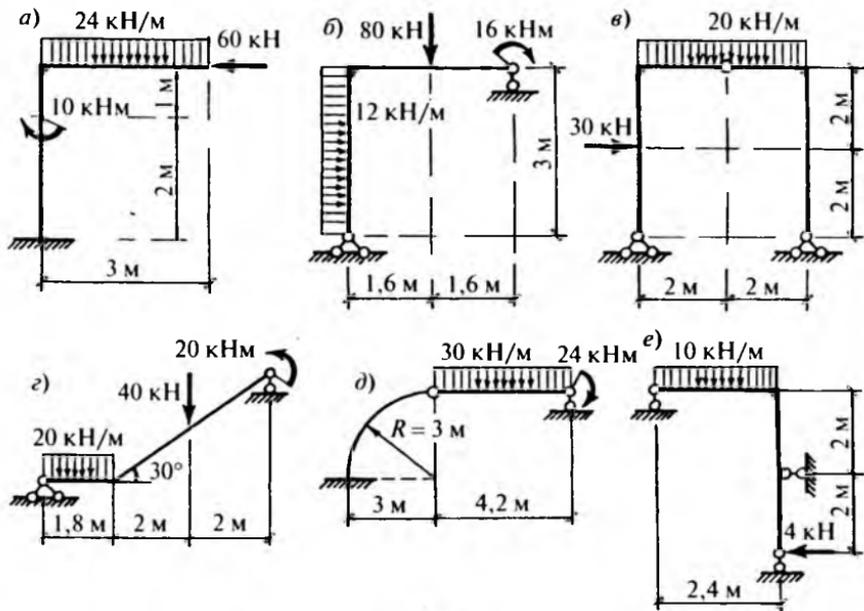


Рис. 5.33

Ответ: наибольшие значения M , Q и N приведены в табл. 5.4.

Таблица 5.4

Схема	а	б	в	г	д	е
M , кНм	108,0	83,0	70,0	76,69	171,9	8,0
Q , кН	72,0	-61,875	55,0	47,66	-68,7	-15,33
N , кН	-72,0	-18,125	-55,0	14,17	-57,3	-15,33

Глава 6

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В БАЛКАХ ПРИ ПРЯМОМ ИЗГИБЕ И РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

При прямом изгибе балка изгибается в плоскости действия поперечных нагрузок, и ее деформированное состояние характеризуется искривлением оси и поворотом поперечных сечений (рис. 6.1). Для случая так называемого чистого изгиба ($Q = 0$, $M = \text{const}$) принимается, что поперечные сечения остаются плоскими и перпендикулярными к оси балки (гипотеза плоских сечений).

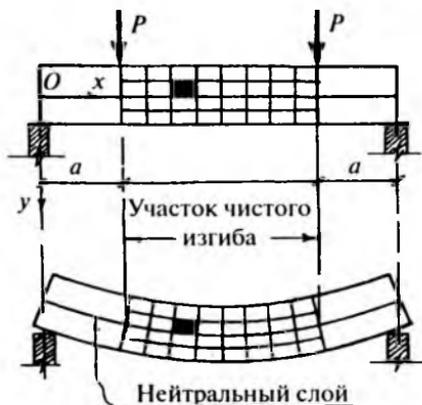


Рис. 6.1

Кривизна балки при чистом изгибе в плоскости Oxy определяется по формуле

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ_z}, \quad (6.1)$$

где EJ_z — жесткость балки при изгибе, $M = M_z$ — изгибающий момент, ρ — радиус кривизны балки в плоскости Oxy .

Формулу (6.1) обычно распространяют и на случай так называемого поперечного изгиба (когда $Q \neq 0$, $M \neq \text{const}$), пренебрегая искривлением поперечных сечений за счет сдвигов.

Изгиб балки сопровождается растяжением одной части ее продольных волокон и сжатием другой части волокон. Длина волокон нейтрального слоя не изменяется, и их линейные деформации равны нулю. При прямом изгибе нейтральный слой представляет собой плоскость, перпендикулярную к плоскости действия поперечных нагрузок и содержащую ось балки. Взаимное давление между продольными слоями и волокнами балки при изгибе обычно полагается отсутствующим, что позволяет принять $\sigma_y = 0$.

При изгибе балки в ее поперечных сечениях действуют нормальные и касательные напряжения (рис. 6.2). При прямом изгибе в плоскости Oxy напряжения определяются по формулам

$$\sigma_x = \sigma = \frac{M_z}{J_z} y, \quad (6.2)$$

$$\tau_{yx} = \tau = \frac{Q_y S_z^{\text{отс}}}{J_z b}, \quad (6.3)$$

где $M = M_z$ и $Q = Q_y$ — изгибающий момент и поперечная сила в балке, $S_z^{\text{отс}}$ — статический момент площади отсеченной части сечения $F_{\text{отс}}$ (рис. 6.2) относительно нейтральной оси и b — ширина сечения.

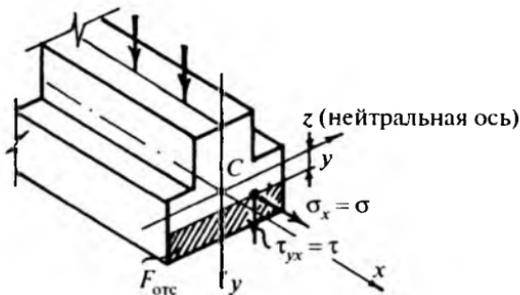


Рис. 6.2

Нейтральная ось при изгибе в упругой стадии проходит через центр тяжести сечения и делит его на зоны растяжения и сжатия.

Знак нормальных напряжений определяется в соответствии с характером действия изгибающего момента. Знак касательных напряжений обычно принимается соответствующим знаком поперечной силы.

Нормальные напряжения изменяются по высоте сечения по линейному закону (рис. 6.3), достигая наибольших значений в крайних волокнах балки. Наибольшие напряжения определяются по формулам

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{M_z}{W_{z\text{н}}}, \quad \sigma_{\text{нм}} = \frac{M_z}{W_{z\text{в}}}, \quad (6.4)$$

где $W_{z\text{н}}$ и $W_{z\text{в}}$ — моменты сопротивления сечения:

$$W_{z\text{н}} = \frac{J_z}{h_{\text{н}}}, \quad W_{z\text{в}} = \frac{J_z}{h_{\text{в}}}. \quad (6.5)$$

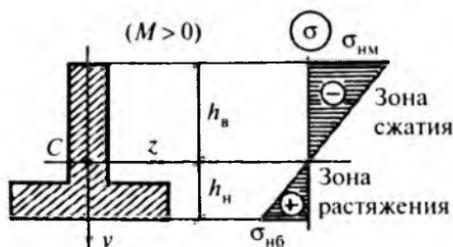


Рис. 6.3

Для балок с несимметричными относительно нейтральной оси поперечными сечениями (рис. 6.3) нормальные напряжения в крайних по высоте волокнах, как правило, различны: $\sigma_{\text{нб}} \neq |\sigma_{\text{нм}}|$. В частном случае для балок, у которых поперечное сечение симметрично относительно нейтральной оси (рис. 6.4), имеем:

$$\left. \begin{aligned} h_{\text{н}} &= h_{\text{в}} = \frac{h}{2}, \\ W_{z\text{н}} &= W_{z\text{в}} = W_z = \frac{J_z}{h/2}, \\ \sigma_{\text{нб}} &= |\sigma_{\text{нм}}| = \frac{M_z}{W_z}. \end{aligned} \right\} (6.6)$$

Моменты сопротивления прямоугольного и круглого сечений определяются по формулам, приведенным на рис. 6.5 и 6.6. Моменты сопротивлений сечений прокатных двутавров и швеллеров приведены в сортаменте.

Расчет балок на прочность при изгибе проводится, как правило, по сечениям с наибольшими изгибающими моментами (опасные

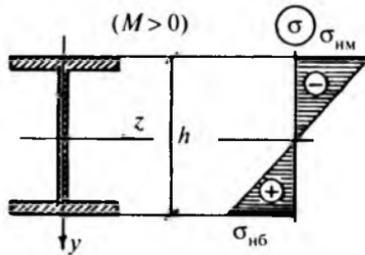
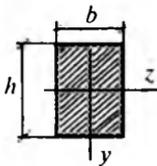


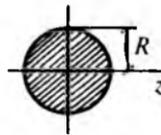
Рис. 6.4



$$W_z = \frac{bh^2}{6}$$

$$W_y = \frac{hb^2}{6}$$

Рис. 6.5



$$W_z = \frac{\pi R^3}{4} = \frac{\pi D^3}{32}$$

Рис. 6.6

сечения). При этом в опасных сечениях должны выполняться условия прочности в зонах растяжения и сжатия:

$$\sigma_{нб} = \frac{M_z}{W_{zn}} \leq \gamma_c R_p, \quad |\sigma_{нм}| = \frac{M_z}{W_{zb}} \leq \gamma_c R_c, \quad (6.7)$$

где $M = M_z$ — изгибающий момент в опасном сечении балки, вычисленный от действия расчетных нагрузок, R_p , R_c — расчетные сопротивления материала балки на растяжение и сжатие, γ_c — коэффициент условий работы. В общем случае $R_p \neq R_c$.

Если материал балки одинаково сопротивляется растяжению и сжатию (например, сталь), то сечения таких балок целесообразно проектировать симметричными относительно нейтральной оси (рис. 6.4). Для этого частного случая остается только одно условие прочности.

При $R_p = R_c = R$

$$\sigma_{нб} = |\sigma_{нм}| = \frac{M_z}{W_z} \leq \gamma_c R. \quad (6.8)$$

Подбор сечения балки при этом производится по формуле

$$W_z \geq \frac{M_z}{\gamma_c R}. \quad (6.9)$$

Для прокатных балок (например, двутавров и швеллеров) подбор сечения выполняется по сортаменту. Если балка является непрокатной, то при подборе ее сечения надо момент сопротивления выразить через один из размеров. Подбор сечения можно произвести по формуле

$$W_z = ka^3 \geq \frac{M_z}{\gamma_c R}, \quad (6.10)$$

где a — один из размеров сечения (параметр размеров), k — числовой безразмерный коэффициент.

Величину нагрузки на балку для частного случая (6.8) можно определить из условия

$$M_z = kP \leq \gamma_c RW_z, \quad (6.11)$$

где k — параметр нагрузки, определяемый из уравнений равновесия.

При проектировании поперечных сечений балок необходимо стремиться к увеличению момента сопротивления при заданной площади сечения. Для этого надо большую часть этой площади расположить возможно дальше от нейтральной оси.

Касательные напряжения в балках изменяются по высоте сечения в зависимости от отношения $S_z^{\text{отс}}/b$ (6.3) и в крайних по высоте точках при отсутствии сдвигающих нагрузок равны нулю. Для постоянных по ширине сечений касательные напряжения изменяются по квадратичному закону (рис. 6.7, а), а в местах скачкообразного изменения ширины они имеют скачки или разрывы (рис. 6.7, б).

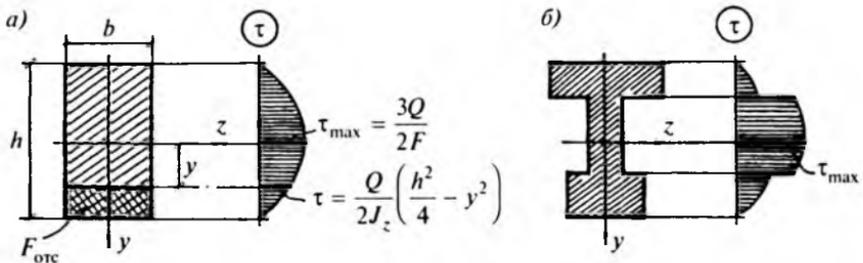


Рис. 6.7

При изгибе тонкостенных стержней принимается, что касательные напряжения направлены вдоль осевых (контурных) линий эле-

ментов сечений стержней и постоянны по их толщине. Характер распределения касательных напряжений в двутавре и швеллере при изгибе в плоскости Oxy показан на рис. 6.8, *a*, *б*. В стенках стержней действуют вертикальные касательные напряжения τ_{yx} , изменяющиеся по квадратичному закону, а в полках — горизонтальные касательные напряжения τ_{xy} , изменяющиеся по линейному закону.

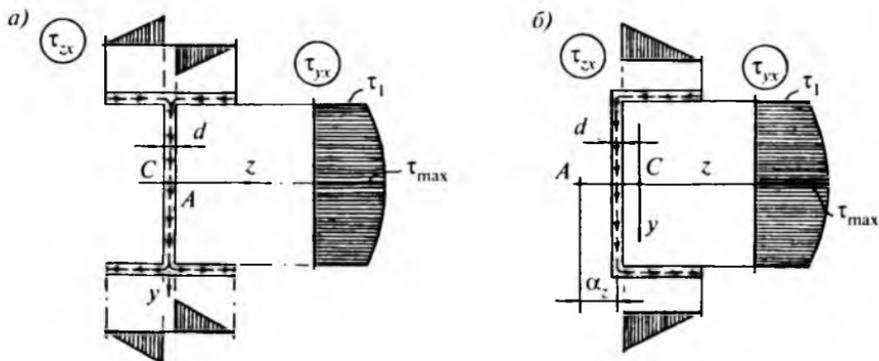


Рис. 6.8

Характерные значения касательных напряжений τ_{yx} в стенках двутавра и швеллера определяются по формулам

$$\tau_1 = \frac{QS_z^{II}}{J_z d}, \quad \tau_{\max} = \frac{QS_z^{1/2}}{J_z d}, \quad (6.12)$$

где $S_z^{1/2}$ — статический момент половины сечения (полусечения) относительно нейтральной оси, S_z^{II} — статический момент площади сечения полки относительно нейтральной оси, d — толщина стенки.

В сечениях тонкостенных стержней касательные напряжения при изгибе образуют, образно говоря, сплошной поток, который в некоторых случаях может вызвать закручивание стержня. Для того чтобы этого не происходило, плоскость действия поперечных нагрузок должна проходить через линию особых точек — центров изгиба сечения.

Для тонкостенных стержней с двумя плоскостями симметрии (например, двутавры) линия центров изгиба совпадает с осью стержня.

Если плоскость действия поперечных нагрузок не является плоскостью симметрии стержня, как, например, для швеллера (рис. 6.8, б), то линия центров изгиба может не совпадать с осью стержня. В этом случае положение центра изгиба поперечного сечения A можно определить из условия равенства нулю момента касательных напряжений относительно этой точки.

При относительно больших поперечных силах требуется проверка выполнения условия прочности балки на сдвиг:

$$\tau_{\max} \leq \gamma_c R_s, \quad (6.13)$$

где R_s — расчетное сопротивление материала балки на сдвиг.

На сдвиг (срез, скалывание) выполняется расчет на прочность элементов соединений составных балок — заклепок, сварных швов, болтов, шпонок и т.п.

Главные напряжения в балках при изгибе и углы наклона главных площадок можно определить по формулам плоского напряженного состояния (2.16) и (2.17), положив $\sigma_x = \sigma$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{yx} = \tau$.

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha_{1,2} = -\frac{\tau}{\sigma_{1,2}}. \quad (6.14)$$

В крайних по высоте точках балки напряженное состояние является одноосным, а в точках нейтрального слоя оно имеет характер чистого сдвига. Характер напряженного состояния в произвольной точке балки и положение главных площадок в трех характерных точках по ее высоте показаны на рис. 6.9.

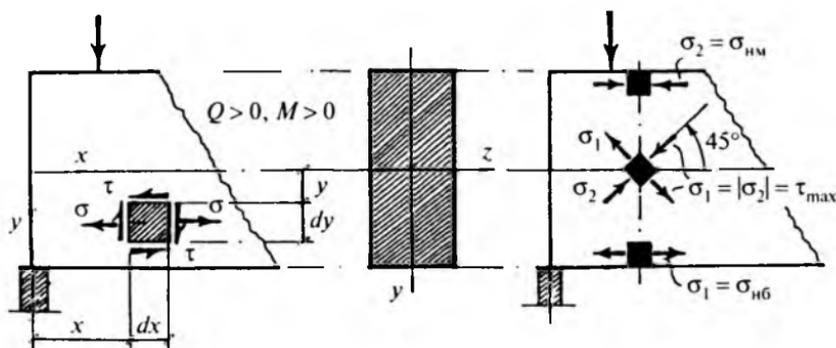


Рис. 6.9

Потенциальная энергия деформации балки при изгибе определяется по формуле

$$U = \int_0^l \frac{M_z^2}{2EJ_z} dx + \eta \int_0^l \frac{Q^2}{2GF} dx, \quad (6.15)$$

где η — числовой безразмерный коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения балки.

Как правило, второе слагаемое в формуле (6.15) не учитывается.

Работа балки за пределом упругости материала зависит от вида диаграммы растяжения-сжатия. Если в качестве этой диаграммы принята схематизированная диаграмма Прандтля (рис. 6.10), то постепенное увеличение нагрузки приводит к образованию в опасном сечении балки пластических зон с напряжениями, равными пределу текучести.

В момент, когда пластические зоны охватят все сечение, образуется так называемый пластический шарнир (рис. 6.11), что соответствует исчерпанию несущей способности балки. Нагрузка, соответствующая образованию пластического шарнира, называется разрушающей (предельной).

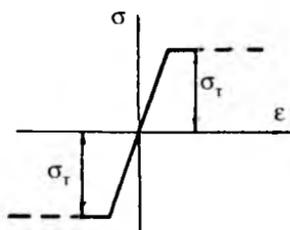


Рис. 6.10



Рис. 6.11

Разрушающий (предельный) момент в пластическом шарнире определяется по формуле

$$M_{\text{разр}} = M_{\text{пред}} = \sigma_T W_{\text{пл}}, \quad (6.16)$$

где $W_{\text{пл}}$ — пластический момент сопротивления сечения, σ_T — предел текучести материала балки.

Для сечений, симметричных относительно нейтральной оси (рис. 6.11), пластический момент сопротивления определяется по формуле

$$W_{\text{пл}} = 2S_z^{1/2}, \quad (6.17)$$

Для таких сечений нейтральные оси в упругой и пластической стадиях совпадают. Если нейтральная ось поперечного сечения балки не является осью симметрии (рис. 6.12), то в пластической стадии она не проходит через центр тяжести сечения. Положение нейтральной оси z_1 в этом случае определяется из условия равенства площадей сжатой и растянутой частей сечения: $F_c = F_p$.

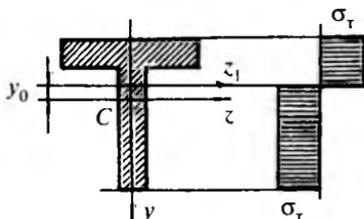


Рис. 6.12

Пластический момент сопротивления сечения при этом определяется по формуле

$$W_{\text{пл}} = S_{z_1}^c + S_{z_1}^p, \quad (6.18)$$

где $S_{z_1}^c$ и $S_{z_1}^p$ — статические моменты площадей сжатой и растянутой частей сечения относительно нейтральной оси z_1 в пластической стадии.

По величине разрушающего момента можно определить значение разрушающей нагрузки.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 6.1

Для шарнирно-опертой балки (рис. 6.13, а) требуется:

1. Построить эпюры M и Q .
2. Подобрать сечение балки в виде стального прокатного двутавра. Нагрузку считать нормативной, коэффициент надежности по нагрузке $\gamma_f = 1,2$. Расчетное сопротивление $R = 210 \text{ МПа} = 21 \text{ кН/см}^2$, $\gamma_c = 1,0$.
3. Построить эпюры σ и τ в опасном сечении балки.
4. Для опасного сечения вычислить значения главных напряжений и углы наклона главных площадок в точке на уровне сопряжения полки и стенки двутавра.

5. Вычислить значение разрушающего момента, приняв $\sigma_T = 230$ МПа.

Определяем опорные реакции:

$$\sum M_A = 0, \quad 60 \cdot 2,4 + 20 \cdot 6 = 4,8R_B, \quad R_B = 55 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B = 0, \quad 60 \cdot 2,4 - 20 \cdot 1,2 = 4,8R_A, \quad R_A = 25 \text{ кН.}$$

$$\sum Y = 0 \text{ (проверка),} \quad 60 + 20 - 25 - 55 = 0.$$

Эпюры M и Q приведены на рис. 6.13, б, в. Опасным является сечение в середине пролета, где изгибающий момент имеет наибольшее значение. Вычисляем требуемый момент сопротивления сечения:

$$M_p = M_n \gamma_f = 60 \cdot 1,2 = 72 \text{ кНм,}$$

$$W_c \geq \frac{M_p}{\gamma_c R} = \frac{72 \cdot 10^2}{1,0 \cdot 21} = 343 \text{ см}^3.$$

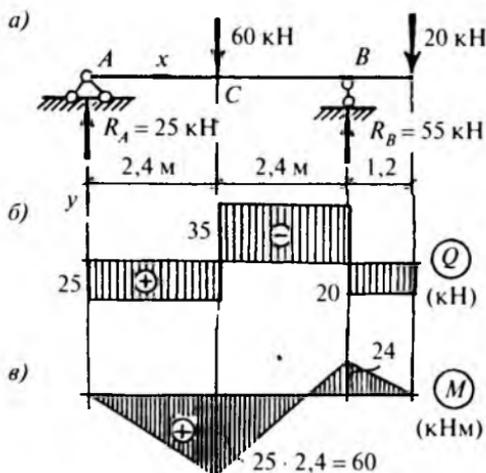
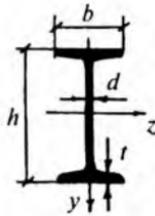


Рис. 6.13

Принимаем по сортаменту двутавр I27 и выписываем необходимые геометрические характеристики сечения (рис. 6.14).

Вычисляем значения наибольших нормальных напряжений в опасном сечении:

$$\sigma_{нб} = |\sigma_{нм}| = \frac{72 \cdot 10^2}{371} = 19,4 \text{ кН/см}^2 = 194 \text{ МПа.}$$



$$\begin{aligned}
 h &= 27 \text{ см} \\
 b &= 12,5 \text{ см} \\
 d &= 0,6 \text{ см} \\
 t &= 0,98 \text{ см} \\
 J_z &= 5010 \text{ см}^4 \\
 W_z &= 371 \text{ см}^3 \\
 S_z^{1/2} &= 210 \text{ см}^3
 \end{aligned}$$

Рис. 6.14

В опасном сечении растянуты нижние волокна балки. Вычисляем значения нормальных напряжений в волокнах на уровне сопряжения полки и стенки двутавра.

При $y = 27/2 - 0,98 = 12,52 \text{ см}$

$$\sigma = \frac{M_z}{J_z} y = \frac{72 \cdot 10^2}{5010} 12,52 = 18 \text{ кН/см}^2 = 180 \text{ МПа}.$$

Касательные напряжения в балке максимальны на участке, где действует наибольшая по величине поперечная сила $|Q| = 35 \text{ кН}$. Вычисляем в сечениях на этом участке характерные значения вертикальных касательных напряжений τ_{yx} от действия расчетной поперечной силы $Q_p = 35 \cdot 1,2 = 42 \text{ кН}$.

а) На уровне нейтральной оси

$$\tau_{\max} = \frac{QS_z^{1/2}}{J_z d} = \frac{42 \cdot 210}{5010 \cdot 0,6} = 2,93 \text{ кН/см}^2 = 29,3 \text{ МПа}.$$

б) На уровне сопряжения полки и стенки

$$\tau_1 = \frac{QS_z^n}{J_z d} = \frac{42 \cdot 159,4}{5010 \cdot 0,6} = 2,23 \text{ кН/см}^2 = 22,3 \text{ МПа},$$

где S_z^n — статический момент площади сечения полки относительно нейтральной оси, при определении которого поперечное сечение полки приближенно считаем прямоугольным (рис. 6.15).

$$S_z^n = 12,5 \cdot 0,98 \left(13,5 - \frac{0,98}{2} \right) = 159,4 \text{ см}^3.$$

Знак касательных напряжений принимается соответствующим знаком поперечной силы. Эпюры нормальных и касательных напряжений в опасном сечении балки приведены на рис. 6.15.

Вычисляем значения главных напряжений и углы наклона главных площадок в опасном сечении балки в точке на уровне сопряжения полки и стенки в зоне растяжения.

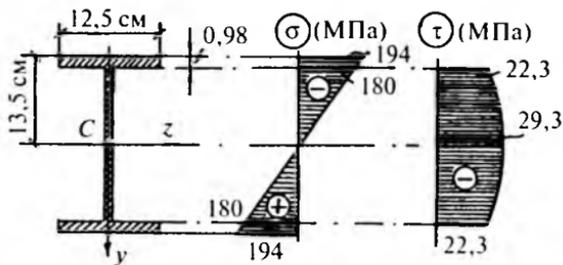


Рис. 6.15

При $x = 2,4$ м, $y = 12,52$ см, $\sigma_x = \sigma = 180$ МПа, $\tau_{yx} = \tau_1 = -22,3$ МПа,

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{180}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{180}{2}\right)^2 + (-22,3)^2} = 90 \pm 92,7,$$

$$\sigma_1 = 183 \text{ МПа}, \quad \sigma_2 = -3 \text{ МПа},$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = -\frac{\tau}{\sigma_1} = -\frac{-22,3}{183} = 0,122, \quad \alpha_1 = 6^\circ 57',$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{\tau}{\sigma_2} = -\frac{22,3}{-3} = 8,19, \quad \alpha_2 = -83^\circ 02'.$$

Положение главных площадок показано на рис. 6.16.

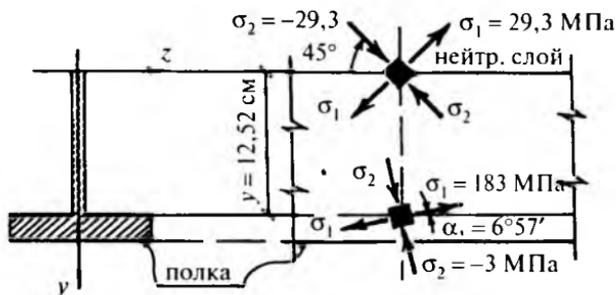


Рис. 6.16

Вычисляем значение разрушающего (предельного) момента в пластическом шарнире:

$$M_{\text{разр}} = M_{\text{пред}} = \sigma_T \cdot 2S_z^{1/2} = 23 \cdot 2 \cdot 210 = 9,66 \cdot 10^3 \text{ кНсм} = 96,6 \text{ кНм}.$$

Пластический шарнир образуется в сечении, где действует наибольший изгибающий момент, то есть в середине пролета балки.

Задача 6.2

Для деревянной балки прямоугольного сечения (рис. 6.17, а) требуется:

1. Построить эпюры M и Q .
2. Определить высоту сечения балки h из условия прочности, приняв $R = 14 \text{ МПа} = 1,4 \text{ кН/см}^2$, $\gamma_c = 1,0$. Нагрузку считать расчетной.
3. Проверить выполнение условия прочности балки на скалывание по нейтральному слою, приняв $R_s = 2 \text{ МПа}$ (расчетное сопротивление на скалывание вдоль волокон).

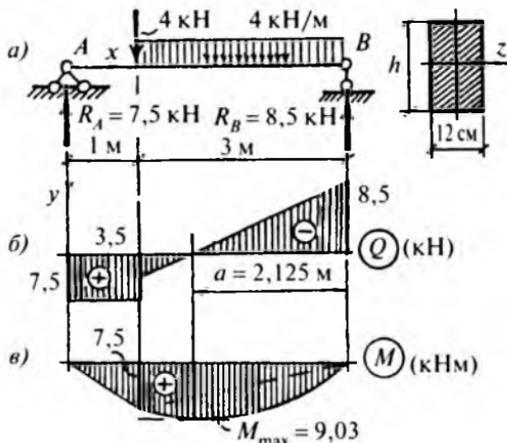


Рис. 6.17

Определяем опорные реакции:

$$\sum M_A = 0, \quad 4 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 2,5 = 4R_B, \quad R_B = 8,5 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B = 0, \quad 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 1,5 = 4R_A, \quad R_A = 7,5 \text{ кН,}$$

$$\sum Y = 0 \text{ (проверка),} \quad 4 + 4 \cdot 3 - 7,5 - 8,5 = 0.$$

Эпюры M и Q приведены на рис. 6.17, б, в. Определяем экстремальное значение изгибающего момента в пролете:

$$a = \frac{8,5}{4} = 2,125 \text{ м,} \quad M_{\max} = 8,5 \cdot 2,125 - 4 \cdot 2,125 \frac{2,125}{4} = 9,03 \text{ кНм.}$$

Выражаем момент сопротивления сечения через его высоту h и определяем ее из условия прочности по опасному сечению:

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{12h^2}{6} = 2h^2 \geq \frac{M_p}{\gamma_c R} = \frac{9,03 \cdot 10^2}{1,0 \cdot 1,4} = 645 \text{ см}^3,$$

$$h \geq \sqrt{\frac{645}{2}} = 17,96 \text{ см.}$$

Принимаем сечение деревянной балки 12×18 см и определяем его геометрические характеристики:

$$J_z = \frac{12 \cdot 18^3}{12} = 5832 \text{ см}^4, \quad W_z = \frac{12 \cdot 18^2}{6} = 648 \text{ см}^3,$$

$$S_z^{1/2} = 12 \cdot 9 \cdot 4,5 = 486 \text{ см}^3.$$

Определяем наибольшие нормальные напряжения в опасном сечении балки и проверяем выполнение условия ее прочности:

$$\sigma_{\text{нб}} = |\sigma_{\text{нм}}| = \frac{M_z}{W_z} = \frac{9,03 \cdot 10^2}{648} = 1,39 \text{ кН/см}^2 =$$

$$= 13,9 \text{ МПа} < \gamma_c R = 14 \text{ МПа.}$$

Прочность балки на скалывание вдоль волокон проверяем в сечении на опоре B , где действует наибольшая поперечная сила:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{QS_z^{1/2}}{J_z b} = \frac{8,5 \cdot 486}{5832 \cdot 12} = 0,06 \text{ кН/см}^2 =$$

$$= 0,6 \text{ МПа} < \gamma_c R_s = 2 \text{ МПа.}$$

Прочность балки на изгиб и скалывание обеспечена.

Задача 6.3

В стальном двутавре, нагруженном сосредоточенной силой (рис. 6.18, a), с помощью тензодатчика определена линейная деформация верхних волокон в сечении $x = 1,5$ м. Требуется определить величину приложенной силы и наибольшие напряжения в двутавровой балке. В расчетах принять $\epsilon_x = \epsilon = -4,6 \cdot 10^{-4}$, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2,1 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$.

С помощью закона Гука определяем нормальные напряжения в верхних волокнах балки в месте установки тензодатчика:

$$\sigma = E\epsilon = 2,1 \cdot 10^5 \cdot (-4,6 \cdot 10^{-4}) = -96,6 \text{ МПа} =$$

$$= -9,66 \text{ кН/см}^2 \text{ (сжатие).}$$

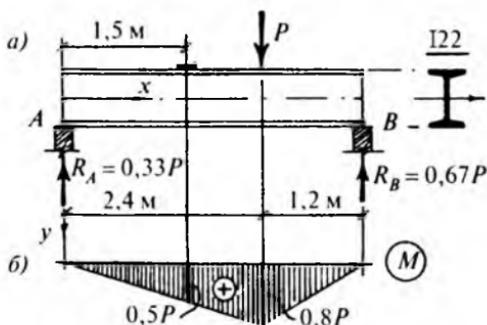


Рис. 6.18

Эти напряжения соответствуют действию в данном сечении балки следующего изгибающего момента:

$$M = |\sigma_{\text{нм}}| W_z = 9,66 \cdot 232 = 2,24 \cdot 10^3 \text{ кНсм} = 22,4 \text{ кНм},$$

где $W_z = 232 \text{ см}^3$ — момент сопротивления сечения двутавра I22.

Для определения величины силы P выражаем изгибающий момент в сечении, где установлен тензодатчик, через эту силу (рис. 6.18, б) и приравниваем его полученному выше значению M :

$$x = 1,5 \text{ м}, \quad M = 0,33P \cdot 1,5 = 0,5P = 22,4 \text{ кНм}, \quad P = 44,8 \text{ кН}.$$

Определяем наибольшие нормальные напряжения в сечении, где приложена сосредоточенная сила:

$$\sigma_{\text{нб}} = |\sigma_{\text{нм}}| = \frac{M_z}{W_z} = \frac{0,8 \cdot 44,8 \cdot 10^2}{232} = 15,45 \text{ кН/см}^2 = 154,5 \text{ МПа}.$$

Определяем максимальные касательные напряжения в сечениях балки на участке между сосредоточенной силой и опорой B:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{QS_z^{1/2}}{J_z d} = \frac{0,67 \cdot 44,8 \cdot 131}{2550 \cdot 0,54} = 2,86 \text{ кН/см}^2 = 28,6 \text{ МПа},$$

где $J_z = 2550 \text{ см}^4$ — момент инерции сечения, $S_z^{1/2} = 131 \text{ см}^3$ — статический момент полусечения и $d = 0,54 \text{ см}$ — толщина стенки двутавра.

Задача 6.4

Для стальной балки коробчатого сечения (рис. 6.19, а) требуется:

1. Определить величины расчетной и нормативной нагрузок из условия прочности балки, приняв $R = 210$ МПа, $\gamma_f = 1,3$, $\gamma_c = 1,0$.
2. Вычислить значения максимальных касательных напряжений в балке и построить эпюру τ .
3. Определить величину разрушающей (предельной) нагрузки, приняв $\sigma_T = 230$ МПа.

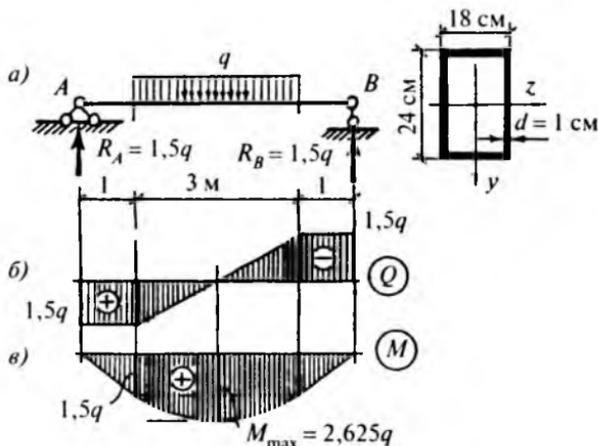


Рис. 6.19

Выполняем статический расчет балки и строим эпюры M и Q (рис. 6.19, б, в). Максимальный изгибающий момент в середине балки равен

$$M_{\max} = 1,5q \cdot 2,5 - q \cdot 1,5 \frac{1,5}{2} = 2,625q.$$

Определяем геометрические характеристики поперечного сечения балки, рассматривая его как разность двух прямоугольников:

$$J_z = \frac{18 \cdot 24^3}{12} - \frac{16 \cdot 22^3}{12} = 6539 \text{ см}^4, \quad W_z = \frac{6539}{12} = 545 \text{ см}^3,$$

$$S_z^{1/2} = 18 \cdot 12 \cdot 6 - 16 \cdot 11 \cdot 5,5 = 328 \text{ см}^3 \text{ (статический момент полусечения)}.$$

Определяем из условия прочности наибольший изгибающий момент для данной балки:

$$M = \gamma_c R W_z = 1,0 \cdot 21 \cdot 545 = 11,44 \cdot 10^3 \text{ кНсм} = 114,4 \text{ кНм}.$$

Определяем значения расчетной и нормативной нагрузок:

$$M_p = 2,625 q_p = 114,4 \text{ кНм}, \quad q_p = 43,6 \text{ кН/м},$$

$$q_{н} = \frac{q_p}{\gamma_f} = \frac{43,6}{1,3} = 33,5 \text{ кН/м}.$$

Наибольшая поперечная сила действует на участках балки вблизи опор, где она равна по абсолютной величине $1,5q$. Определяем в сечениях балки на этих участках значения вертикальных касательных напряжений от действия расчетной нагрузки:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_p S_z^{1/2}}{J_z 2d} = \frac{1,5 \cdot 43,6 \cdot 328}{6539 \cdot 2 \cdot 1,0} = 1,64 \text{ кН/см}^2 = 16,4 \text{ МПа},$$

$$\tau_1 = \frac{Q_p S_z^{\text{II}}}{J_z 2d} = \frac{1,5 \cdot 43,6 \cdot 207}{6539 \cdot 2 \cdot 1,0} = 1,04 \text{ кН/см}^2 = 10,4 \text{ МПа},$$

где $S_z^{\text{II}} = 18 \cdot 1 \cdot 11,5 = 207 \text{ см}^3$ — статический момент площади сечения полки относительно нейтральной оси. Эпюра τ в стенке приведена на рис. 6.20.

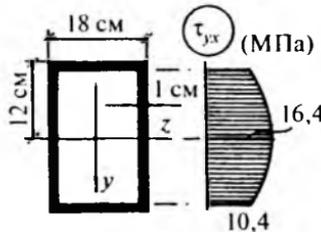


Рис. 6.20

Вычисляем значение разрушающего (предельного) момента, вызывающего появление пластического шарнира в опасном сечении балки:

$$M_{\text{разр}} = M_{\text{пред}} = \sigma_T W_{\text{пл}} = \sigma_T 2 S_z^{1/2} = 23 \cdot 2 \cdot 328 = 15,1 \cdot 10^3 \text{ кНсм} = 151 \text{ кНм}.$$

Приравниваем разрушающий момент к наибольшему изгибающему моменту в опасном сечении балки и определяем интенсивность разрушающей нагрузки:

$$M_{\max} = 2,625q = M_{\text{разр}} = 151 \text{ кНм}, \quad q_{\text{разр}} = 57,5 \text{ кН/м}.$$

Коэффициент запаса по отношению к нормативной нагрузке равен

$$n = \frac{q_{\text{разр}}}{q_{\text{н}}} = \frac{57,5}{33,5} = 1,72.$$

Задача 6.5

Для консольной чугунной балки несимметричного сечения (рис. 6.21) требуется определить величину силы P из условий прочности и построить эпюры напряжений σ и τ в опасном сечении. Допускаемые напряжения материала на растяжение и сжатие равны $[\sigma_p] = 50 \text{ МПа} = 5 \text{ кН/см}^2$, $[\sigma_c] = 140 \text{ МПа} = 14 \text{ кН/см}^2$.

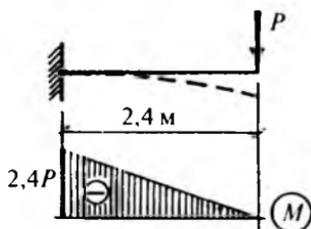


Рис. 6.21

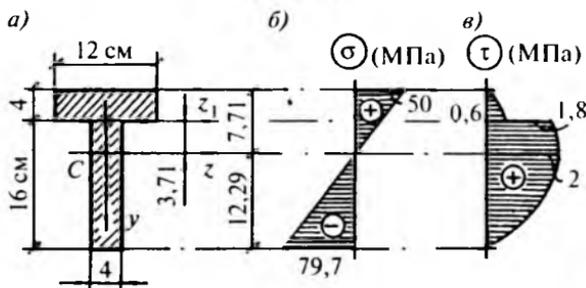


Рис. 6.22

Определяем положение центра тяжести сечения (рис. 6.22, а):

$$y_C = \frac{S_{z_1}}{F} = \frac{12 \cdot 4 \cdot (-2) + 16 \cdot 4 \cdot 8}{12 \cdot 4 + 16 \cdot 4} = \frac{416}{112} = 3,71 \text{ см}.$$

Вычисляем осевой момент инерции и моменты сопротивления сечения:

$$J_z = J_z - a^2 F = \left[\frac{12 \cdot 4^3}{3} + \frac{4 \cdot 16^3}{3} \right] - 3,71^2 \cdot 112 = 4176 \text{ см}^4,$$

$$W_{зв} = \frac{J_z}{h_n} = \frac{4176}{7,71} = 542 \text{ см}^3, \quad W_{зн} = \frac{J_z}{h_n} = \frac{4176}{12,29} = 340 \text{ см}^3.$$

Вычисляем статические моменты полусечения и полки относительно нейтральной оси:

$$S_z^{1/2} = 4 \cdot 12,29 \frac{12,29}{2} = 302 \text{ см}^3, \quad |S_z^n| = 12 \cdot 4(2 + 3,71) = 274 \text{ см}^3.$$

Для определения величины силы P используем условия прочности балки в сечении, где действует наибольший изгибающий момент (рис. 6.21).

а) По зоне растяжения

$$M = 2,4P \leq [\sigma_p] W_{зв}, \quad P \leq \frac{5 \cdot 542}{240} = 11,3 \text{ кН}.$$

б) По зоне сжатия

$$M = 2,4P \leq [\sigma_c] W_{зн}, \quad P \leq \frac{14 \cdot 340}{240} = 19,8 \text{ кН}.$$

Чтобы обеспечить выполнение условий прочности в обеих зонах сечения балки, надо принять меньшую силу $P = 11,3 \text{ кН}$.

Вычисляем значения нормальных и касательных напряжений в опасном сечении балки:

$$\sigma_{нб} = \frac{2,4 \cdot 10^2 \cdot 11,3}{542} = 5 \text{ кН/см}^2 = 50 \text{ МПа},$$

$$|\sigma_{нм}| = \frac{2,4 \cdot 10^2 \cdot 11,3}{340} = 7,97 \text{ кН/см}^2 = 79,7 \text{ МПа},$$

$$\tau_1 = \frac{QS_z^n}{J_z b_1} = \frac{11,3 \cdot 274}{4176 \cdot 12} = 0,06 \text{ кН/см}^2 = 0,6 \text{ МПа},$$

$$\tau_2 = \frac{QS_z^n}{J_z b_2} = \frac{11,3 \cdot 274}{4176 \cdot 4} = 0,18 \text{ кН/см}^2 = 1,8 \text{ МПа},$$

$$\tau_{\max} = \frac{QS_z^{1/2}}{J_z b_2} = \frac{11,3 \cdot 302}{4176 \cdot 4} = 0,2 \text{ кН/см}^2 = 2 \text{ МПа}.$$

Эпюры напряжений приведены на рис. 6.22, б, в.

Задача 6.6

Деревянная балка круглого сечения диаметром $D = 16$ см перекрывает пролет l и нагружена в середине сосредоточенной силой $P_H = Q = 4$ кН (рис. 6.23, а). Коэффициент надежности по нагрузке $\gamma_f = 1,3$. Требуется определить предельную по условию прочности длину пролета. Расчетное сопротивление принять $R = 14$ МПа = $1,4$ кН/см², $\gamma_c = 1,0$.

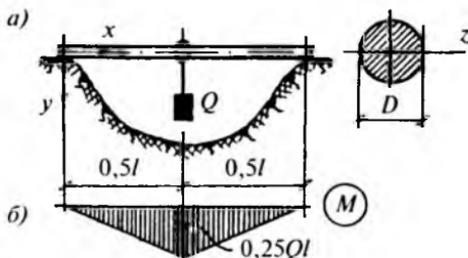


Рис. 6.23

Наибольший изгибающий момент в балке действует в сечении под грузом (рис. 6.23, б). Выражаем этот момент через длину l и приравниваем его к моменту, который может выдержать балка по условию прочности:

$$P_p = 4 \cdot 1,3 = 5,2 \text{ кН}, \quad M_p = 0,5 \cdot 5,2 \cdot 0,5l = 1,3l,$$

$$M_p = 1,3l \leq \gamma_c R W_z = \gamma_c R \cdot \frac{\pi D^3}{32} = 1,0 \cdot 1,4 \frac{\pi \cdot 16^3}{32},$$

$$l \leq 433 \text{ см} = 4,33 \text{ м}.$$

Задача 6.7

Для балочной системы (рис. 6.24, а) требуется определить величину нагрузки q из условий прочности обеих балок. Материал балок — сталь марки ВСт.3 с расчетным сопротивлением $R = 210$ МПа = 21 кН/см², $\gamma_c = 1,0$.

Балка AB опирается на нижнюю балку CD , передавая на нее в сечениях A и B сосредоточенные силы (рис. 6.24, б, в). На этих рисунках приведены эпюры изгибающих моментов.

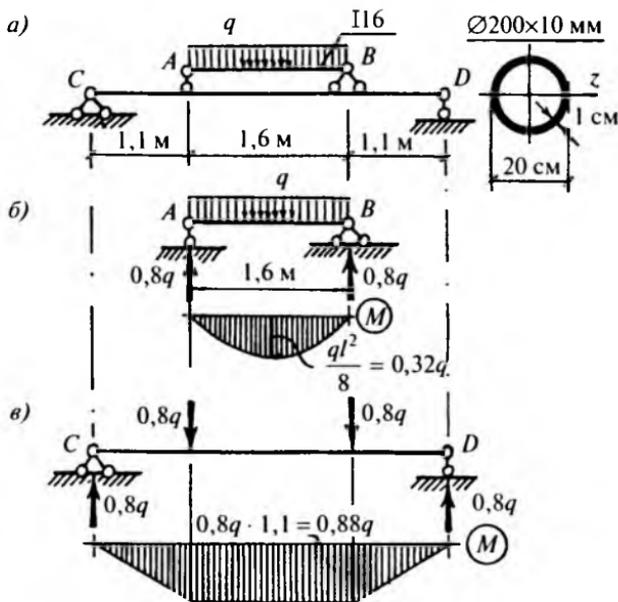


Рис. 6.24

Выражаем наибольшие изгибающие моменты в балках через параметр q и вычисляем значения нагрузки из условий прочности каждой из них.

Балка AB (I16), $W_z = 109 \text{ см}^3$,

$$M = 0,32 \cdot 10^4 q \leq \gamma_c R W_z = 1,0 \cdot 21 \cdot 109 = 2289 \text{ кНсм},$$

$$q \leq 0,716 \text{ кН/см} = 71,6 \text{ кН/м}.$$

Балка CD ($\varnothing 200 \times 10 \text{ мм}$)

$$J_z = \frac{\pi}{4} (R_2^4 - R_1^4) = \frac{\pi}{4} (10^4 - 9^4) = 2701 \text{ см}^4,$$

$$W_z = \frac{J_z}{R_2} = \frac{2701}{10} = 270,1 \text{ см}^3,$$

$$M = 0,88 \cdot 10^4 q \leq \gamma_c R W_z = 1,0 \cdot 21 \cdot 270,1 = 5672 \text{ кНсм},$$

$$q \leq 0,645 \text{ кН/см} = 64,5 \text{ кН/м}.$$

Принимаем меньшее значение нагрузки $q = 64,5 \text{ кН/м}$.

Задача 6.8

Шарнирно-опертая балка (рис. 6.25) состоит из деревянного бруса 12×18 см и двух стальных листов 120×10 мм. Совместная работа элементов балки обеспечивается соединениями. Требуется определить нормальные и касательные напряжения в стальных листах и деревянном бруске, приняв модули упругости $E_{ст} = 2 \times 10^5$ МПа, $E_{д} = 0,1 \cdot 10^5$ МПа.

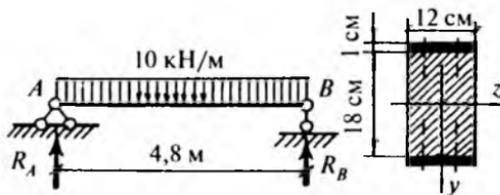


Рис. 6.25

Изгибающий момент в балке M воспринимается стальными листами и деревянным брусом. На каждый элемент балки приходится своя часть изгибающего момента, соответственно $M_{ст}$ и $M_{д}$, причем $M = M_{ст} + M_{д}$. Соотношение между ними можно получить, используя условие жесткого соединения элементов балки и гипотезу плоских сечений, согласно которым кривизны элементов должны быть одинаковыми:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_{ст}}{(EJ)_{ст}} = \frac{M_{д}}{(EJ)_{д}}, \quad M_{ст} = M_{д} \frac{(EJ)_{ст}}{(EJ)_{д}}.$$

Изгибающие моменты, воспринимаемые элементами балки, распределяются пропорционально их изгибным жесткостям.

Положение нейтральной оси поперечных сечений составной балки из разномодульных материалов в общем случае подлежит определению из условия равенства нулю продольной силы при изгибе. В нашей задаче в силу симметричного расположения стальных листов нейтральная ось сечения совпадает с центральной осью сечения деревянного бруса.

Вычисляем значения изгибных жесткостей элементов балки и действующих в них изгибающих моментов в середине пролета:

$$\begin{aligned} (EJ)_{ст} &= 2 \cdot 10^4 \cdot 2 \left(\frac{12 \cdot 1^3}{12} + 12 \cdot 9,5^2 \right) = 2 \cdot 10^4 \cdot 2168 = \\ &= 4,336 \cdot 10^7 \text{ кНсм}^2 = 4,336 \cdot 10^3 \text{ кНм}^2; \end{aligned}$$

$$(EJ)_д = 0,1 \cdot 10^4 \cdot \frac{12 \cdot 18^3}{12} = 0,1 \cdot 10^4 \cdot 5832 = 5,832 \cdot 10^6 \text{ кНсм}^2 =$$

$$= 5,832 \cdot 10^2 \text{ кНм}^2;$$

$$M_{ст} = M_д \frac{4,336 \cdot 10^3}{5,832 \cdot 10^2} = 7,435 M_д,$$

$$M_{ст} + M_д = M_{\max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{10 \cdot 4,8^2}{8} = 28,8 \text{ кНм},$$

$$M_{ст} = 25,4 \text{ кНм}, \quad M_д = 3,4 \text{ кНм}.$$

Вычисляем значения наибольших нормальных напряжений в элементах балки в середине пролета:

$$\sigma_{ст} = \frac{M_{ст}}{J_{ст}} y = \frac{25,4 \cdot 10^2}{2168} \cdot 10 = 11,7 \text{ кН/см}^2 = 117 \text{ МПа},$$

$$\sigma_д = \frac{M_д}{J_д} y = \frac{3,4 \cdot 10^2}{5832} \cdot 9 = 0,53 \text{ кН/см}^2 = 5,3 \text{ МПа}.$$

Эпюра нормальных напряжений приведена на рис. 6.26. Отметим наличие скачка в эпюре σ на уровне сопряжения элементов балки.

При определении касательных напряжений в поперечных сечениях составной балки из разномодульных материалов можно принять, что поперечная сила распределяется по элементам балки также пропорционально их изгибным жесткостям. Тогда для сечения балки вблизи опоры A будем иметь

$$Q_{ст} = Q_д \frac{(EJ)_{ст}}{(EJ)_д} = Q_д \frac{4,336 \cdot 10^3}{5,832 \cdot 10^2} = 7,435 Q_д,$$

$$Q_{ст} + Q_д = Q_A = R_A = \frac{10 \cdot 4,8}{2} = 24 \text{ кН},$$

$$Q_{ст} = 21,16 \text{ кН}, \quad Q_д = 2,84 \text{ кН}.$$

Вычисляем значения касательных напряжений на уровне сопряжения стальных листов и деревянного бруса и на уровне нейтральной оси сечения вблизи опоры A с учетом жесткого соединения элементов:

$$\tau_1 = \frac{Q_{ст} S_z^{ст}}{J_{ст} b} = \frac{21,16 \cdot 12 \cdot 1 \cdot 9,5}{2168 \cdot 12} = 0,093 \text{ кН/см}^2 = 0,93 \text{ МПа},$$

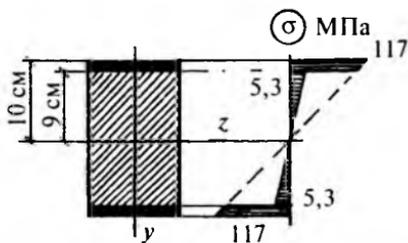


Рис. 6.26

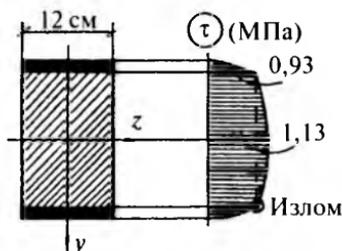


Рис. 6.27

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \tau_1 + \frac{Q_d S_z^d}{J_d b} = 0,093 + \frac{2,84 \cdot 12 \cdot 9 \cdot 4,5}{5832 \cdot 12} = 0,113 \text{ кН/см}^2 = \\ &= 1,13 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

Эпюра касательных напряжений приведена на рис. 6.27. Отметим наличие излома в эпюре на уровне сопряжения стальных листов и деревянного бруса.

Соединения, обеспечивающие совместную работу элементов балки, должны рассчитываться на действие распределенной по длине сдвигающей силы с интенсивностью на опорах:

$$T = \tau b = 0,093 \cdot 12 = 1,12 \text{ кН/см} = 112 \text{ кН/м.}$$

Задача 6.9

Для стальной составной двутавровой балки (рис. 6.28) требуется:

1. Определить значение силы P , при действии которой в опасном сечении балки нормальные напряжения в полках постоянны и равны пределу текучести.
2. Определить длину участка балки с пластическими деформациями.
3. Определить остаточные нормальные напряжения в опасном сечении балки при ее полной разгрузке.

Деформирование материала балки следует диаграмме Прандтля (рис. 6.10) с равными значениями предела текучести при растяжении и сжатии $\sigma_T = 24 \text{ кН/см}^2 = 240 \text{ МПа}$.

Вычисляем геометрические характеристики сечения балки:

$$J_z = \frac{1 \cdot 18^3}{12} + 2 \left(\frac{12 \cdot 2^3}{12} + 12 \cdot 2 \cdot 10^2 \right) = 5302 \text{ см}^4,$$

$$W_z = \frac{5302}{11} = 482 \text{ см}^3.$$

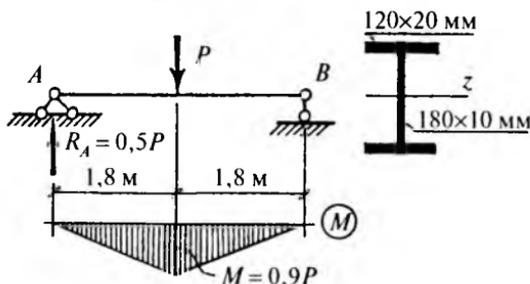


Рис. 6.28

Эпюра нормальных напряжений в опасном сечении балки, соответствующая пластической работе материала полки, приведена на рис. 6.29, а,

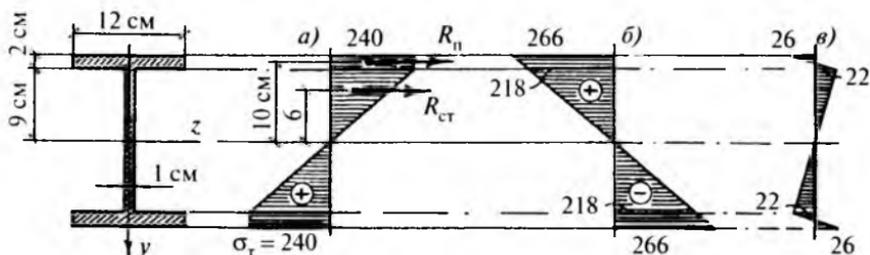


Рис. 6.29

Определяем значения равнодействующих нормальных напряжений в полке и в половине стенки двутавра:

$$R_n = \sigma_T F_n = 24 \cdot 12 \cdot 2 = 5,76 \cdot 10^2 \text{ кН},$$

$$R_{ct} = \frac{1}{2} \sigma_T F_{ct} = \frac{1}{2} 24 \cdot 9 \cdot 1 = 1,08 \cdot 10^2 \text{ кН}.$$

Изгибающий момент, соответствующий эпюре нормальных напряжений на рис. 6.29, а, определяем как равнодействующий момент этих напряжений:

$$\begin{aligned} M &= 2(R_n y_n + R_{ct} y_{ct}) = 2(5,76 \cdot 10^2 \cdot 10 + 1,08 \cdot 10^2 \cdot 6) = \\ &= 12,82 \cdot 10^3 \text{ кНсм} = 128,2 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

Вычисляем значение сосредоточенной силы в середине балки, соответствующей действию этого изгибающего момента:

$$M = 0,9P = 128,2 \text{ кНм}, \quad P = 142,4 \text{ кН}.$$

Определяем координату сечения балки, соответствующую появлению пластических деформаций в крайних по высоте волокнах:

$$M = 0,5Px = \sigma_T W_z, \quad 0,5 \cdot 142,4x = 24 \cdot 482, \quad x = 162,5 \text{ см}.$$

Длина зон пластических деформаций в полках составляет

$$a = 2(180 - 162,5) = 35 \text{ см}.$$

При приближении к точке приложения силы пластические деформации охватывают все волокна полки (рис. 6.30).



Рис. 6.30

При разгрузке балки предполагается, что зависимость $\sigma - \epsilon$ является линейной с первоначальным углом наклона диаграммы Прандтля.

Для определения остаточных нормальных напряжений при полной разгрузке балки вычисляем значения σ от действия изгибающего момента $M = 128,2 \text{ кНм}$ обратного направления (суммарный изгибающий момент в балке после разгрузки должен быть равен нулю):

$$\sigma_{\text{нб}} = |\sigma_{\text{нм}}| = \frac{M}{W_z} = \frac{128,2 \cdot 10^2}{482} = 26,6 \text{ кН/см}^2 = 266 \text{ МПа},$$

$$\sigma(9) = \frac{M}{J_z} y = \frac{128,2 \cdot 10^2}{5302} \cdot 9 = 21,8 \text{ кН/см}^2 = 218 \text{ МПа}.$$

Соответствующая эпюра σ приведена на рис. 6.29, б. Сложив ее с эпюрой на рис. 6.29, а, получим эпюру остаточных нормальных напряжений в балке после разгрузки (рис. 6.29, в). Остаточные напряжения образуют взаимно уравновешенную систему.

Задача 6.10

Для составной балки указанного на рис. 6.31 сечения требуется определить из условия прочности величину силы P , построить эпюру σ в опасном сечении и вычислить значение максимальных касательных напряжений и интенсивность сдвигающей силы между листом и полкой каждого двутавра. В расчетах принять $R = 210$ МПа, $\gamma_c = 1,0$.

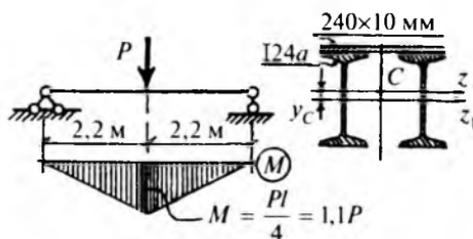


Рис. 6.31

Вычисляем необходимые геометрические характеристики сечения:

$$I24a: J_z = 3800 \text{ см}^4, F = 37,5 \text{ см}^2, b = 12,5 \text{ см}, d = 0,56 \text{ см}, t = 0,98 \text{ см},$$

$$y_C = \frac{S_{z_1}}{F} = \frac{24 \cdot 1 \cdot 12,5}{24 \cdot 1 + 2 \cdot 37,5} = 3,03 \text{ см},$$

$$J_z = 2(3800 + 3,03^2 \cdot 37,5) + \frac{24 \cdot 1^3}{12} + (12,5 - 3,03)^2 \cdot 24 = 10\,443 \text{ см}^4,$$

$$W_{zn} = \frac{10\,443}{12 + 3,03} = 694,8 \text{ см}^3, W_{zb} = \frac{10\,443}{13 - 3,03} = 1047 \text{ см}^3.$$

Выполняем условие прочности по нижним более напряженным волокнам балки в сечении с наибольшим изгибающим моментом (рис. 6.31):

$$M = 1,1 \cdot 10^2 P \leq \gamma_c R W_{zn} = 1,0 \cdot 21 \cdot 694,8 = 14591 \text{ кНсм},$$

$$P \leq 132,6 \text{ кН}.$$

Принимаем $P = 130 \text{ кН}$ и вычисляем значения нормальных напряжений в крайних волокнах балки в опасном сечении:

$$\sigma_{\text{н}} = -\frac{M}{W_{zn}} = -\frac{1,1 \cdot 10^2 \cdot 130}{1047} = -13,7 \text{ кН/см}^2 = -137 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{\text{н}} = \frac{M}{W_{zn}} = \frac{1,1 \cdot 10^2 \cdot 130}{694,8} = 20,6 \text{ кН/см}^2 = 206 \text{ МПа}.$$

Эпюра нормальных напряжений приведена на рис. 6.32. Вычисляем значение максимальных касательных напряжений в балке:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{QS_z^{1/2}}{J_z 2d} = \frac{0,5 \cdot 130 \cdot 466,8}{10443 \cdot 2 \cdot 0,56} = 2,59 \text{ кН/см}^2 = 25,9 \text{ МПа},$$

где $S_z^{1/2}$ — статический момент полусечения. При его вычислении рассматриваем нижнюю часть сечения, а поперечные сечения полков приближенно считаем прямоугольными.

$$S_z^{1/2} = 2 \left[12,5 \cdot 0,98 \left(15,03 - \frac{0,98}{2} \right) + \right. \\ \left. + (15,03 - 0,98) \cdot 0,56 \left(\frac{15,03 - 0,98}{2} \right) \right] = 466,8 \text{ см}^3.$$

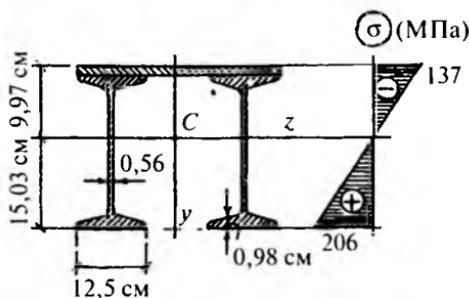


Рис. 6.32

Максимальные касательные напряжения действуют на уровне нейтральной оси. Определяем интенсивность сдвигающей силы между листом и полкой каждого двутавра:

$$T = \frac{QS_z^{\text{II}}}{2J_z} = \frac{0,5 \cdot 130 \cdot 227,3}{2 \cdot 10443} = 0,707 \text{ кН/см} = 70,7 \text{ кН/м},$$

где $S_z^n = 24 \cdot 1 \cdot \left(9,97 - \frac{1,0}{2}\right) = 227,3 \text{ см}^3$ — статический момент площади поперечного сечения листа относительно нейтральной оси. На действие сдвигающей силы должен производиться расчет сварных швов или заклепок, обеспечивающих совместную работу элементов балки.

Задача 6.11

Для стальной консольной балки в виде горизонтально расположенного швеллера [16 (рис. 6.33) требуется определить из условия прочности значение нагрузки q и построить эпюры σ и τ в опасном сечении. В расчетах принять $R = 210 \text{ МПа}$, $\gamma_c = 1,0$.

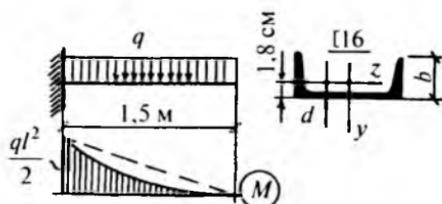


Рис. 6.33

Выписываем из сортамента геометрические характеристики швеллера [16: $J_z = 63,6 \text{ см}^4$, $h = 16 \text{ см}$, $b = 6,4 \text{ см}$, $d = 0,5 \text{ см}$, $t = 0,84 \text{ см}$, $W_z = 13,8 \text{ см}^3$. Выполняем условие прочности балки в сечении вблизи заделки:

$$M = \frac{ql^2}{2} = \frac{q150^2}{2} \leq \gamma_c R W_z = 1,0 \cdot 21 \cdot 13,8 = 289,8 \text{ кНсм},$$

$$q \leq 0,0258 \text{ кН/см} = 2,58 \text{ кН/м}.$$

Вычисляем значения наибольших нормальных напряжений в балке:

$$M = \frac{2,58 \cdot 1,5^2}{2} = 2,9 \text{ кНм},$$

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{2,9 \cdot 10^2}{13,8} = 21 \text{ кН/см}^2 = 210 \text{ МПа},$$

$$|\sigma_{\text{нм}}| = \frac{2,9 \cdot 10^2}{63,6} \cdot 1,8 = 8,2 \text{ кН/см}^2 = 82 \text{ МПа}.$$

Для определения касательных напряжений τ_{yx} в полках швеллера вычисляем статические моменты полусечения и площади стенки швеллера относительно нейтральной оси. Поперечные сечения полок и стенки приближенно считаем прямоугольными.

$$S_z^{1/2} = 2 \cdot 4,6 \cdot 0,84 \cdot \frac{4,6}{2} = 17,78 \text{ см}^3 \text{ (верхняя часть сечения),}$$

$$S_z^{\text{ст}} = 16 \cdot 0,5 \left(1,8 - \frac{0,5}{2}\right) = 12,4 \text{ см}^3.$$

Вычисляем значения касательных напряжений в полках:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{1,5 \cdot 2,58 \cdot 17,78}{63,6 \cdot 2 \cdot 0,84} = 0,64 \text{ кН/см}^2 = 6,4 \text{ МПа},$$

$$\tau_1 = \frac{1,5 \cdot 2,58 \cdot 12,4}{63,6 \cdot 2 \cdot 0,84} = 0,45 \text{ кН/см}^2 = 4,5 \text{ МПа}.$$

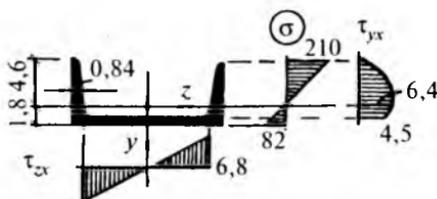


Рис. 6.34

Касательные напряжения в полках изменяются по квадратичному закону. В стенке швеллера действуют горизонтальные касательные напряжения τ_{zx} , изменяющиеся по линейному закону от нуля на оси симметрии Oy до наибольших значений в местах сопряжения стенки с полками. Направления этих напряжений для левой и правой половин стенки противоположны друг другу. Наибольшие напряжения равны

$$\tau_{zx} = \frac{1,5 \cdot 2,58 \cdot 5,549}{63,6 \cdot 0,5} = 0,68 \text{ кН/см}^2 = 6,8 \text{ МПа},$$

где $S_z^{\text{отс}} = (8 - 0,84) \cdot 0,5 \left(1,8 - \frac{0,5}{2}\right) = 5,549 \text{ см}^3$ — статический момент площади половины сечения стенки швеллера относительно нейтральной оси. Эпюры σ и τ приведены на рис. 6.34.

Задача 6.12

Для стержневой системы (рис. 6.35, а), состоящей из стальной составной балки AB , поддерживаемой двумя стальными стержнями, требуется определить из условий прочности величину силы P и вычислить значения наибольших нормальных и касательных напряжений в балке и интенсивность сдвигающей силы между листами и швеллером. В расчетах принять $R = 210$ МПа, $\gamma_c = 1,0$.

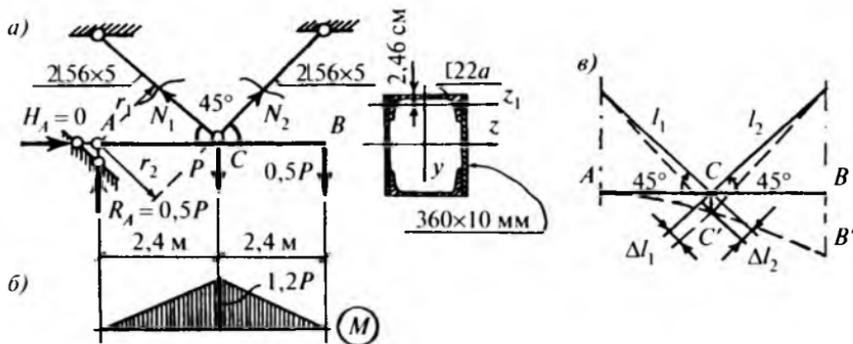


Рис. 6.35

Вычисляем геометрические характеристики сечения балки:

$$[22a: J_z = 187 \text{ см}^4, F = 28,8 \text{ см}^2.$$

$$2\cdot 156 \times 5: F = 2 \cdot 5,41 = 10,82 \text{ см}^2.$$

$$J_z = 2 \left[\frac{1 \cdot 36^3}{12} + 187 + (18 - 2,46)^2 \cdot 28,8 \right] = 22\,060 \text{ см}^4,$$

$$W_z = \frac{22\,060}{18} = 1226 \text{ см}^3.$$

Строим эпюру изгибающих моментов (рис. 6.35, б) и определяем величину силы P из условия прочности балки в опасном сечении C :

$$M = 1,2 \cdot 10^2 P \leq \gamma_c R W_z = 1,0 \cdot 21 \cdot 1226 = 25\,746 \text{ кНсм},$$

$$P \leq 215 \text{ кН}.$$

Для определения усилий в стержнях рассмотрим схему деформации системы. При изгибе балки AB сечение C получает прогиб v_C , связанный с удлинениями стержней (рис. 6.35, в). Используя схему деформации, получаем

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = 1, \quad \Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF_1}, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EF_2}.$$

Поскольку в нашей задаче $l_1 = l_2$ и $F_1 = F_2$, усилия в стержнях одинаковы: $N_1 = N_2$. Составляем уравнение равновесия:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0, \quad 1,697N_1 + 1,697N_2 = 2,4P + 4,8 \cdot 0,5P, \\ N_1 = N_2 = 1,414P, \end{aligned}$$

где $r_1 = r_2 = 2,4 \cdot \sin 45^\circ = 1,697$ м — плечи усилий.

Отметим, что при равенстве усилий в стержнях опорная реакция $H_A = 0$, и в балке отсутствуют продольные силы. Определяем величину силы P из условия прочности стержней:

$$\begin{aligned} N_1 = N_2 = 1,414P \leq \gamma_c RF = 1,0 \cdot 21 \cdot 10,82 = 227,2 \text{ кН}, \\ P \leq 160,7 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Принимаем с округлением меньшую силу $P = 160$ кН и вычисляем значения наибольших нормальных и касательных напряжений в балке:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{нб}} = |\sigma_{\text{нм}}| = \frac{1,2 \cdot 10^2 \cdot 160}{1226} = 15,7 \text{ кН/см}^2 = 157 \text{ МПа}, \\ \tau_{\text{max}} = \frac{0,5 \cdot 160 \cdot 771,6}{22060 \cdot 2 \cdot 1,0} = 1,4 \text{ кН/см}^2 = 14 \text{ МПа}, \end{aligned}$$

где $S_z^{1/2} = 2 \cdot 18 \cdot 1,0 \cdot 9 + 28,8(18 - 2,46) = 771,6$ см³ — статический момент полусечения.

Определяем интенсивность сдвигающей силы между листом и полками швеллера:

$$T = \frac{0,5 \cdot 160 \cdot 447,6}{22060 \cdot 2} = 0,81 \text{ кН/см} = 81 \text{ кН/м},$$

где $S_z^{\text{отс}} = 28,8(18 - 2,46) = 447,6$ см³ — статический момент площади сечения швеллера относительно нейтральной оси.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 6.13. Для стальной консольной составной балки (рис. 6.36) требуется построить эпюры M и Q , построить эпюры σ и τ в опасном сечении балки и определить в этом сечении значения главных напряжений и углы наклона главных площадок в точке стенки на уровне ее сопряжения с полками.

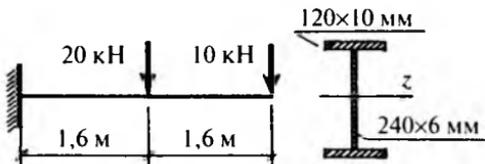


Рис. 6.36

Ответ: $\sigma_{\text{нб}} = |\sigma_{\text{нм}}| = 187,2 \text{ МПа}$, $\tau_{\text{max}} = 21,7 \text{ МПа}$, $\sigma_1 = 174 \text{ МПа}$, $\sigma_2 = -1,6 \text{ МПа}$, $\alpha_1 = -5^\circ 32'$, $\alpha_2 = 84^\circ 28'$.

Задача 6.14. Для чугунной балки (рис. 6.37) требуется построить эпюры σ и τ в опасном сечении.

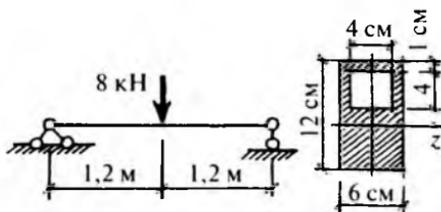


Рис. 6.37

Ответ: $\sigma_{\text{нб}} = 37,5 \text{ МПа}$, $\sigma_{\text{нм}} = -50,1 \text{ МПа}$, $\tau_{\text{max}} = 2,1 \text{ МПа}$.

Задача 6.15. Для стальной составной балки (рис. 6.38) требуется построить эпюры σ и τ в сечениях балки с наибольшими M и Q и определить наибольшую интенсивность сдвигающей силы между листом и полкой двутавра.

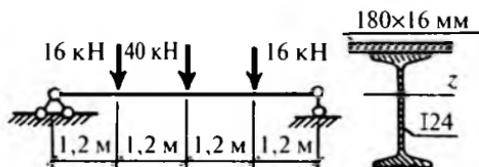


Рис. 6.38

Ответ: $\sigma_{\text{нб}} = 197,8 \text{ МПа}$, $\sigma_{\text{нм}} = -86,7 \text{ МПа}$, $\tau_{\text{max}} = 28,6 \text{ МПа}$, $T_{\text{нб}} = 120 \text{ кН/м}$ (на участках, примыкающих к опорам).

Задача 6.16. При испытании на изгиб стального двутавра (рис. 6.39) была определена относительная линейная деформация в ней-

тральном слое под углом $\alpha = 45^\circ$ к оси: $\varepsilon_\alpha = 0,8 \cdot 10^{-4}$. Требуется определить величину силы P и значения наибольших нормальных и касательных напряжений в двутавре. В расчетах принять $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0,3$.

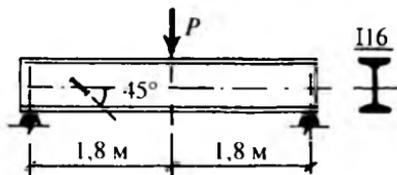


Рис. 6.39

Ответ: $P = 18,1$ кН, $\sigma_{нб} = |\sigma_{нм}| = 149,5$ МПа, $\tau_{max} = 12,9$ МПа.

Задача 6.17. Для биметаллической балки (рис. 6.40), состоящей из стального двутавра и алюминиевых ластов 240×20 мм, требуется построить эпюру σ в опасном сечении и определить интенсивность сдвигающей силы между листом и полкой двутавра. В расчетах принять $E_{ст} = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, $E_{ал} = 0,7 \cdot 10^5$ МПа.

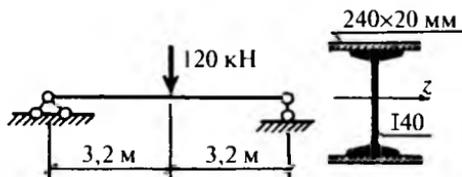


Рис. 6.40

Ответ: $\sigma_{нб}^{ст} = 115,7$ МПа, $\sigma_{нб}^{ал} = 42,4$ МПа, $T = 60,8$ кН/м.

Задача 6.18. Для деревянного бруса сечением 18×24 см, усиленного четырьмя стальными равнобокими уголками $\angle 70 \times 6$ (рис. 6.41), требуется определить величину сил P из условия прочности балки,

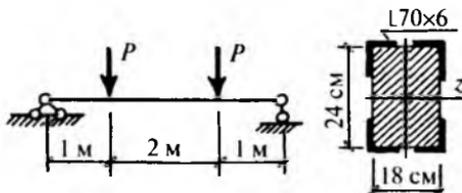


Рис. 6.41

построить эпюру σ в опасном сечении и вычислить интенсивность сдвигающей силы между каждым уголком и брусом. В расчетах принять $E_{ст} = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, $E_{д} = 1 \cdot 10^4$ МПа, $R_{ст} = 210$ МПа, $R_{д} = 14$ МПа, $\gamma_c = 1,0$.

Ответ: $P = 80,7$ кН, $\sigma_{нб}^{ст} = 210$ МПа, $\sigma_{нб}^д = 9,5$ МПа, $T = 145$ кН/м.

Задача 6.19. Для шарнирно-опертой балки (рис. 6.42) требуется построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил, подобрать сечение балки в виде стального прокатного двутавра и построить эпюры σ и τ в сечениях с наибольшими M и Q . В расчетах принять коэффициент надежности по нагрузке $\gamma_f = 1,3$, расчетное сопротивление $R = 210$ МПа и $\gamma_c = 1,0$.

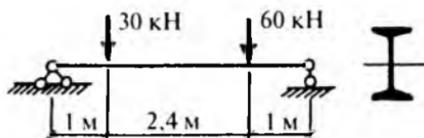


Рис. 6.42

Ответ: I27, $\sigma_{нб} = |\sigma_{нм}| = 186,4$ МПа, $\tau_{max} = 48,3$ МПа.

Задача 6.20. Для деревянной балки прямоугольного сечения (бруса) (рис. 6.43) требуется построить эпюры M и Q и определить из условия прочности необходимые размеры сечения, приняв $b = 0,6h$. В расчетах принять $\gamma_f = 1,2$, $R = 14$ МПа и $\gamma_c = 1,0$.

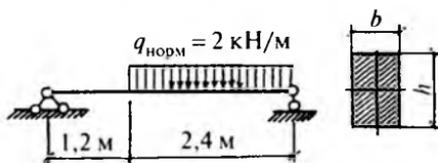


Рис. 6.43

Ответ: брус сечением 8×13 см.

Задача 6.21. Для стальной балки трубчатого сечения (рис. 6.44) требуется определить величину момента M из условия прочности балки и величину разрушающего (предельного) момента в пластической стадии. В расчетах принять $R = 210$ МПа, $\gamma_c = 1,0$, $\sigma_T = 240$ МПа.

Ответ: $M = 12,25$ кНм, $M_{разр} = 18,73$ кНм.

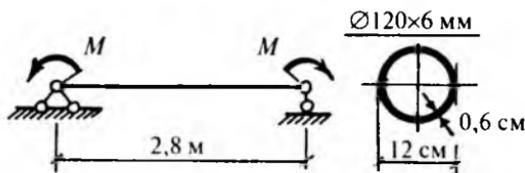


Рис. 6.44

Задача 6.22. Для стальной балки из двух прокатных неравнобоких уголков (рис. 6.45) требуется определить величину сил P из условия прочности балки и построить эпюры σ и τ в сечениях над опорами. В расчетах принять $R = 210$ МПа, $\gamma_c = 1,0$.

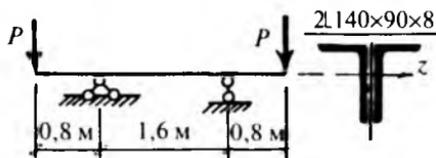


Рис. 6.45

Ответ: $P = 20,1$ кН, $\sigma_{нб} = 99$ МПа, $\sigma_{нм} = -210$ МПа, $\tau_{max} = 12,5$ МПа.

Задача 6.23. Для стальной консольной балки, представляющей собой разрезанную вдоль трубу $\varnothing 160 \times 6$ мм (рис. 6.46), требуется определить величину допустимой расчетной нагрузки из условия прочности и построить эпюру σ в опасном сечении. В расчетах принять $R = 210$ МПа = 21 кН/см², $\gamma_c = 1,0$.

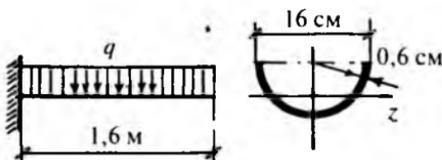


Рис. 6.46

Ответ: $q = 2,74$ кН/м, $\sigma_{нб} = 210$ МПа, $\sigma_{нм} = -132,7$ МПа.

Задача 6.24. Для чугунной балки (рис. 6.47) требуется определить величину допустимой нагрузки из условий прочности в зонах растяжения и сжатия и построить эпюры σ и τ в сечениях с наибольшими M и Q . В расчетах принять допускаемые напряжения чугуна на растяжение и сжатие $[\sigma_p] = 60$ МПа, $[\sigma_c] = 180$ МПа.

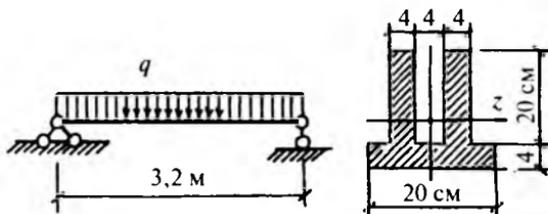


Рис. 6.47

Ответ: $q = 61,5$ кН/м, $\sigma_{\text{нб}} = 60$ МПа, $\sigma_{\text{нм}} = -84$ МПа, $\tau_{\text{max}} = 7,35$ МПа.

Задача 6.25. Для стержневой системы (рис. 6.48) требуется определить величину допустимой расчетной силы из условий прочности деревянной балки AB , состоящей из четырех бревен $D = 16$ см, и стального стержня CB сечением $2\text{Ø}12$ мм. В расчетах принять расчетные сопротивления стали и дерева $R_{\text{ст}} = 280$ МПа, $R_{\text{д}} = 15$ МПа.

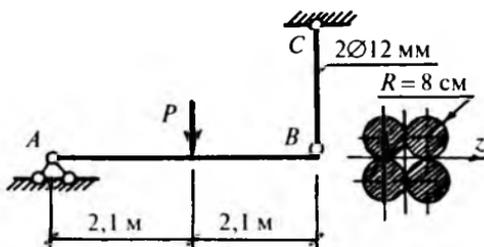


Рис. 6.48

Ответ: $P = 57,4$ кН.

Задача 6.26. Для стальной балки (рис. 6.49) требуется определить величину силы P_{T} вызывающей появление текучести в крайних волокнах, величину разрушающей силы $P_{\text{разр}}$ в пластической стадии и значения остаточных нормальных напряжений в опасном сечении балки при полной ее разгрузке после нагружения силой $P = 0,5(P_{\text{T}} + P_{\text{разр}})$. В расчетах принять $\sigma_{\text{T}} = 240$ МПа. Материал балки деформируется согласно диаграмме Прандтля (рис. 6.10).

Ответ: $P_{\text{T}} = 23,03$ кН, $P_{\text{разр}} = 28,46$ кН, $\sigma_{\text{нб}}^{\text{ост}} = 34,8$ МПа, $\sigma_{\text{нм}}^{\text{ост}} = -28,3$ МПа.

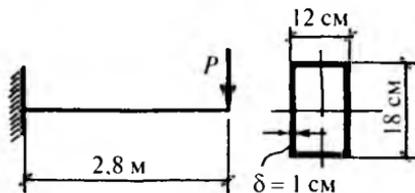


Рис. 6.49

Задача 6.27. Деревянный брус 10×15 см длиной 2 м, нагруженный в середине силой P , опирается на два стальных консольных двутавра $\Pi 16$ (рис. 6.50). Опирание бруса считать шарнирным. Требуется определить величину допустимой силы из условий прочности бруса и двутавра и возникающие в них наибольшие нормальные напряжения. В расчетах принять $R_{ст} = 21$ кН/см², $R_{д} = 1,4$ кН/см², $\gamma_c = 1,0$.

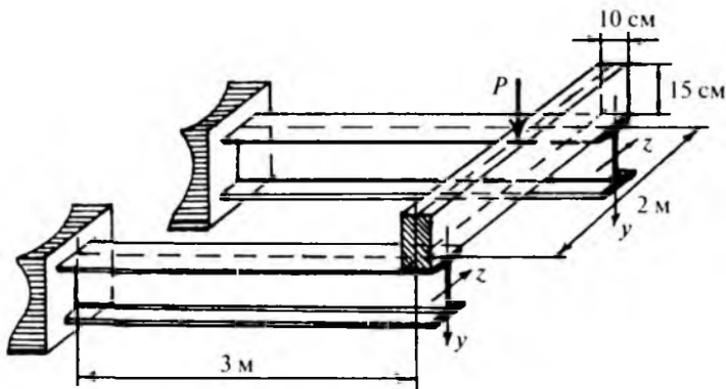


Рис. 6.50

Ответ: $P = 10,5$ кН, $\sigma_{ст} = 14,4$ кН/см², $\sigma_{д} = 1,4$ кН/см².

Глава 7

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В БАЛКАХ И РАМАХ ПРИ ПРЯМОМ ИЗГИБЕ

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Изгиб балки сопровождается искривлением ее оси. При прямом изгибе в плоскости Oxy (рис. 7.1) ось балки превращается в плоскую кривую. Точки оси получают вертикальные перемещения или прогибы $v(x)$, а поперечные сечения поворачиваются относительно своих нейтральных осей. Эти углы поворота в соответствии с гипотезой плоских сечений принимаются равными углом наклона касательной к изогнутой оси балки $\varphi(x)$. Прогиб считается положительным, если его направление совпадает с направлением оси Oy . Угол поворота считается положительным, если поворот касательной к изогнутой оси происходит по ходу часовой стрелки.

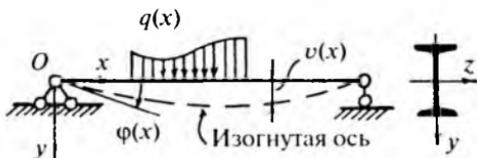


Рис. 7.1

Прогибы и углы поворота в балке являются переменными величинами, то есть функциями координаты x .

В большинстве случаев изогнутая ось балки является очень полой кривой, кривизна которой может быть определена по приближенной формуле

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{d^2v}{dx^2} = \pm v''(x). \quad (7.1)$$

При этом угол поворота поперечных сечений принимается равным тангенсу угла наклона касательной к изогнутой оси балки или производной первого порядка от прогиба:

$$\varphi(x) = \operatorname{tg} \varphi(x) = \frac{dv}{dx} = v'(x). \quad (7.2)$$

При условии (7.1) прогиб балки удовлетворяет приближенному дифференциальному уравнению ее изогнутой оси:

$$EJv''(x) = -M(x), \quad (7.3)$$

где $J = J_z$ — момент инерции поперечного сечения балки относительно его нейтральной оси, E — модуль упругости материала при растяжении-сжатии, $M(x)$ — изгибающий момент в балке.

Произведение EJ называется жесткостью балки при изгибе. В строительных конструкциях она чаще бывает постоянной или ступенчато-постоянной по длине.

При изгибе стержневых систем, например рам, возможны не только поперечные, но и осевые перемещения точек оси стержня (рис. 7.2). При этом удлинения или укорочения стержней обычно не учитываются.

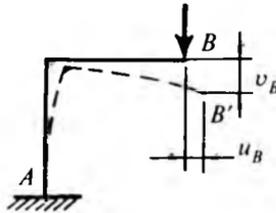


Рис. 7.2

Для определения линейных и угловых перемещений в балках и стержневых системах используются различные методы.

Метод непосредственного интегрирования

Этот метод сводится к интегрированию дифференциального уравнения (7.3) при известном законе изменения изгибающих моментов $M(x)$ в балке. Последовательно интегрируя уравнение (7.3) при $EJ = \text{const}$, получаем:

$$\left. \begin{aligned} EJv''(x) &= -M(x), \\ EJv'(x) &= EJ\varphi(x) = -\int M(x)dx + C_1, \\ EJv(x) &= -\int dx \int M(x)dx + C_1x + C_2. \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 подлежат определению из кинематических граничных условий и условий сопряжения участков. Кинематические граничные условия отражают характер закрепления (опирания) балки и ставятся с помощью прогибов и углов поворота.

В жесткой заделке (рис. 7.3) равны нулю прогиб и угол поворота поперечного сечения: при $x = 0$, $v = 0$, $\varphi = 0$. На шарнирных опорах (рис. 7.4) поворот сечения может происходить свободно ($\varphi \neq 0$), и граничные условия ставятся относительно прогиба: при $x = 0, l$, $v = 0$.

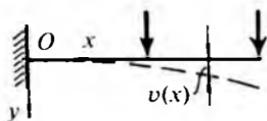


Рис. 7.3

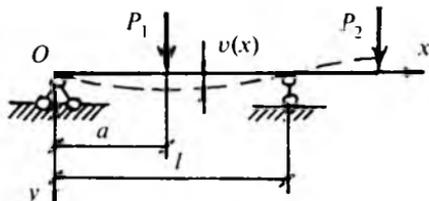


Рис. 7.4

Условия сопряжения ставятся на границах участков с различными законами изменения $M(x)$. При отсутствии промежуточных шарниров они характеризуют гладкость и непрерывность изогнутой оси балки (рис. 7.4): при $x = a$, $v_{\text{прав}} = v_{\text{лев}}$, $\varphi_{\text{прав}} = \varphi_{\text{лев}}$.

При наличии n участков с различными законами изменения $M(x)$ решения (7.4) будут содержать $2n$ постоянных интегрирования. Раскрывая граничные условия и условия сопряжения участков, можно получить систему $2n$ линейных алгебраических уравнений 1-го порядка относительно этих постоянных.

Метод начальных параметров

Продифференцировав два раза уравнение (7.3) при $EJ = \text{const}$, получим дифференциальное уравнение изогнутой оси балки 4-го порядка:

$$EJv^{IV}(x) = q(x), \quad (7.5)$$

где $q(x)$ — распределенная поперечная нагрузка.

Решение соответствующего (7.5) однородного дифференциального уравнения $EJv^{IV}(x) = 0$ можно представить в следующем виде:

$$v(x) = v_0 + \varphi_0 x - \frac{M_0 x^2}{2! EJ} - \frac{Q_0 x^3}{3! EJ}. \quad (7.6)$$

Величины v_0 , φ_0 , M_0 и Q_0 называются начальными параметрами. Они представляют собой прогиб, угол поворота, изгибающий момент и поперечную силу в начальном сечении балки при $x = 0$.

При наличии нагрузок или промежуточных шарниров в пределах длины балки к решению (7.6) надо на основании принципа суперпозиции добавить функции, вид которых соответствует частным интегралам в решении (7.6). Приведем выражение для прогиба балки при наличии наиболее распространенных нагрузок и промежуточного шарнира (рис. 7.5).

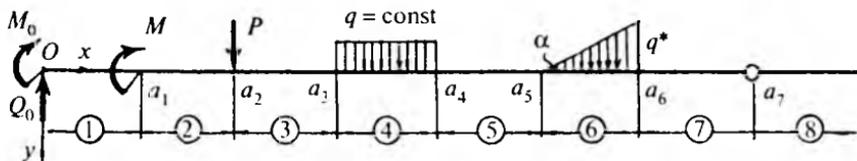


Рис. 7.5

$$\begin{aligned}
 v(x) = & v_0 + \varphi_0 x - \frac{M_0 x^2}{2! EJ} - \frac{Q_0 x^3}{3! EJ} \Big|_1 - \frac{M(x - a_1)^2}{2! EJ} \Big|_2 + \\
 & + \frac{P(x - a_2)^3}{3! EJ} \Big|_3 + \frac{q(x - a_3)^4}{4! EJ} \Big|_4 - \frac{q(x - a_4)^4}{4! EJ} \Big|_5 + \\
 & + \frac{k(x - a_5)^5}{5! EJ} \Big|_6 - \frac{k(x - a_6)^5}{5! EJ} - \frac{q^*(x - a_6)^4}{4! EJ} \Big|_7 + \Delta\varphi(x - a_7) \Big|_8,
 \end{aligned} \quad (7.7)$$

где $k = \text{tg } \alpha$.

Уравнение (7.7) является аналитическим выражением для прогиба балки $v(x)$ на всех ее участках, границы которых обозначены вертикальной чертой с номером участка.

Входящие в выражение (7.7) начальные параметры v_0 , φ_0 , M_0 и Q_0 , а также скачки угла поворота в промежуточных шарнирах не всегда бывают известны в начале расчета. Для определения неизвестных начальных параметров и величин $\Delta\varphi$ необходимо использовать соответствующие граничные условия.

При определении v и φ в статически определимых балках удобно вначале выполнить статический расчет и определить статические начальные параметры M_0 и Q_0 . Неизвестные кинематические начальные параметры v_0 и φ_0 , а также величины $\Delta\varphi$ подлежат определению из кинематических граничных условий.

1. Заделка в начальном сечении (рис. 7.6).

После статического расчета все начальные параметры будут известны: $v_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$, $M_0 = -M_A$, $Q_0 = R_A$.

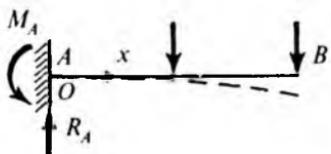


Рис. 7.6

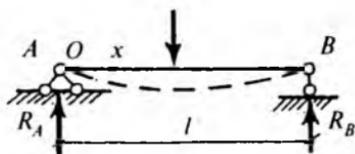


Рис. 7.7

2. Шарнирная опора в начальном сечении (рис. 7.7).

Начальные параметры равны: $v_0 = 0$, $M_0 = 0$, $Q_0 = R_A$. Неизвестный начальный параметр φ_0 подлежит определению из граничного условия: при $x = l$, $v = 0$.

3. Свободный конец в начальном сечении (рис. 7.8).

В начале расчета известны два начальных параметра: $M_0 = 0$, $Q_0 = -P$. Для определения v_0 и φ_0 используем граничные условия: при $x = a$, $v = 0$, при $x = a + l$, $v = 0$.

4. Балка с промежуточным шарниром (рис. 7.9).

В начальном сечении имеем: $v_0 = 0$, $M_0 = M$, $Q_0 = R_A$. Неизвестные величины φ_0 и $\Delta\varphi_B$ подлежат определению из условий: при $x = l + a$, $v = 0$, $\varphi = 0$.

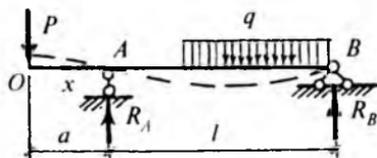


Рис. 7.8

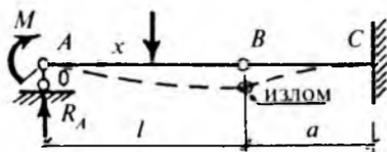


Рис. 7.9

При расчете статически неопределимых балок могут быть неизвестны статические начальные параметры M_0 и Q_0 . Для решения таких задач ставятся как кинематические, так и статические граничные условия (рис. 7.10). В начальном сечении имеем: $v_0 = \varphi_0 = 0$, $M_0 = -M_A$, $Q_0 = R_A$.

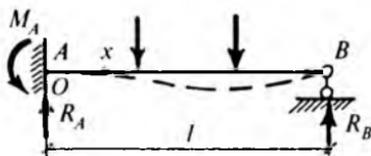


Рис. 7.10

Для определения неизвестных величин M_A и R_A используем граничные условия: при $x = l$, $v = 0$, $M = 0$.

Используя граничные условия, можно получить необходимое число линейных алгебраических уравнений относительно всех неизвестных величин. После их определения можно с помощью уравнения (7.7) записать выражения для прогибов и углов поворота в балке. Вычислив значения v и φ в характерных сечениях балки, можно построить эпюры этих величин. Для правильного построения эпюр надо использовать дифференциальные зависимости при изгибе:

$$Q'(x) = -q(x), \quad M' = Q, \quad EJv''(x) = -M(x), \quad v'(x) = \varphi(x). \quad (7.8)$$

Соотношения (7.8) позволяют установить наличие особенностей на эпюрах Q , M , φ и v , а именно скачков, изломов, экстремумов и точек перегиба.

Для определения экстремального значения прогиба балки необходимо установить координату сечения x_0 , где $\varphi = 0$, и вычислить значение $v(x_0) = v_{\max}$ или v_{\min} .

Метод Мора

Для определения перемещений в балках и стержневых системах с помощью метода Мора необходимо по направлению искомого перемещения приложить силу $\bar{P} = 1$ для определения линейных перемещений (прогибов) и момент $\bar{M} = 1$ для определения угловых перемещений (углов поворота). Они считаются безразмерными величинами. От действия заданных и единичных нагрузок строятся грузовые и единичные эпюры внутренних усилий (чаще всего изгибающих моментов). Например, на рис. 7.11 приведены еди-

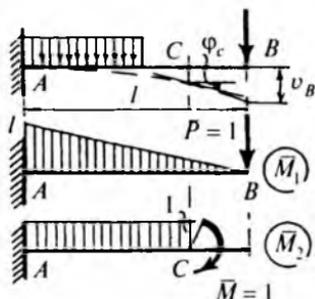


Рис. 7.11

ничные эпюры изгибающих моментов, необходимые для определения прогиба балки в сечении B и угла поворота в сечении C .

Для определения взаимного перемещения точек или взаимного угла поворота сечений необходимо приложить парную единичную нагрузку. Например, для определения взаимного угла поворота сечений балки в промежуточном шарнире C , то есть скачка $\Delta\varphi_C$ (рис. 7.12), необходимо в сечении C приложить парный единичный момент и построить соответствующую единичную эпюру \bar{M} .

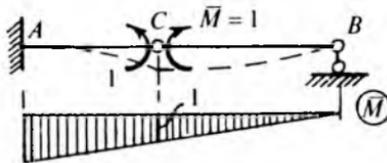


Рис. 7.12

Определение перемещений заключается в вычислении интегралов Мора. Для систем, работающих в основном на изгиб (балки, рамы), обычно используются интегралы Мора, содержащие изгибающие моменты:

$$\Delta_{kP} = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{\bar{M}_k M_P}{EJ} dx, \quad (7.9)$$

где Δ_{kP} — линейное или угловое перемещение по направлению действия единичной силы $\bar{P} = 1$ или единичного момента $\bar{M} = 1$, \bar{M}_k , M_P — изгибающие моменты от действия единичных и заданных нагрузок, i — номер стержня, l_i — его длина, k — номер перемещения.

Интегрирование в формуле (7.9) распространяется на все стержни системы. Для прямых стержней с постоянной по длине жесткостью EJ вычисление интегралов Мора обычно производится с помощью правила А.К. Верещагина. Согласно этому правилу вычисление интегралов (7.9) в случае, когда одна из эпюр является линейной, производится по формуле

$$\Delta_{kP} = \frac{1}{EJ} \int_0^{l_i} \bar{M}_k M_P dx = \frac{1}{EJ} y_C \Omega, \quad (7.10)$$

где Ω — площадь нелинейной эпюры, y_C — ордината под ее центром тяжести в линейной эпюре (рис. 7.13).

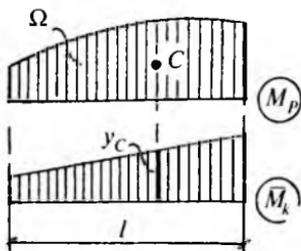


Рис. 7.13

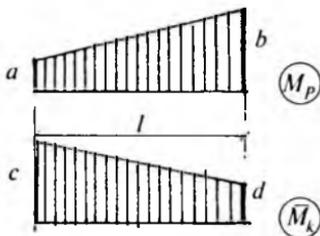


Рис. 7.14

Для прямых стержней единичные эпюры являются линейными. Грузовая эпюра M_P может быть произвольной. Если она также является линейной, то правило А.К. Верещагина становится перестановочным, то есть можно подставлять площадь любой из эпюр.

Применение правила А.К. Верещагина обычно называется «перемножением» эпюр. Результат «перемножения» однозначных эпюр является положительным, а разнозначных — отрицательным.

Если грузовая и единичная эпюры изгибающих моментов являются линейными и представляют собой трапеции (рис. 7.14), то при вычислении интеграла Мора можно использовать так называемую формулу «перемножения» трапеций:

$$\Delta_{kP} = \frac{1}{EJ} \int_0^l \bar{M}_k M_P dx = \frac{l}{6EJ} (2ac + 2bd + ad + bc). \quad (7.11)$$

Формулу А.К. Верещагина нельзя применять для стержней с криволинейной осью или с переменной по длине жесткостью $EJ = f(x)$. В этих случаях производится аналитическое или численное вычисление интегралов в формуле (7.9). Для численного интегрирования можно использовать формулу Симпсона.

При использовании правила А.К. Верещагина сложные эпюры надо разбить на простые фигуры, как показано на рис. 7.15.

Сведения о площадях и центрах тяжести некоторых эпюр изгибающих моментов приведены в табл. 7.1.

Если при вычислении интеграла Мора величина Δ_{kP} оказалась положительной, то перемещение совпадает с направлением единичной нагрузки, а если отрицательной — то оно противоположно этому направлению.

В качестве справочного материала приведем формулы для определения прогибов и углов поворота в балках при простой нагрузке (табл. 7.2).

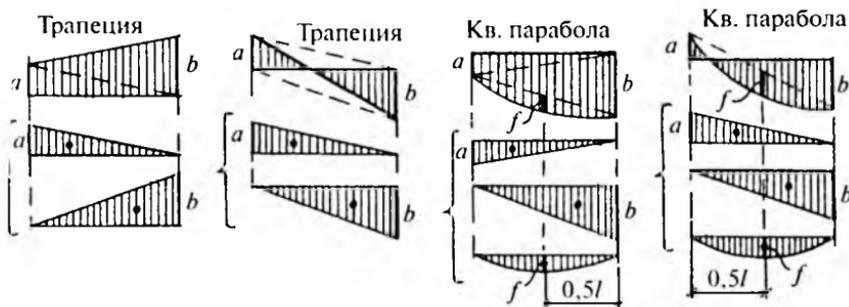


Рис. 7.15

Таблица 7.1

Схема балки и нагрузки, характер эпюры M			
$f = Pl,$ $\Omega = \frac{1}{2} fl = \frac{Pl^2}{2},$ $x_0 = \frac{2}{3} l$	$f = \frac{ql^2}{2},$ $\Omega = \frac{1}{3} fl = \frac{ql^3}{6},$ $x_0 = \frac{3}{4} l$	$f = \frac{q^* l^2}{6},$ $\Omega = \frac{1}{4} fl = \frac{q^* l^3}{24},$ $x_0 = \frac{4}{5} l$	$f = \frac{ql^2}{8},$ $\Omega = \frac{2}{3} fl = \frac{ql^3}{12},$ $x_0 = 0,5l$

Таблица 7.2

	$v_B = \frac{Ml^2}{2EJ}$ $\varphi_B = \frac{Ml}{EJ}$		$f = v_C = \frac{Pl^3}{48EJ}$ $\varphi_A = -\varphi_B = \frac{Pl^2}{16EJ}$
	$v_B = \frac{ql^4}{8EJ}$ $\varphi_B = \frac{ql^3}{6EJ}$		$\varphi_A = \frac{Ml}{3EJ}$ $\varphi_B = -\frac{Ml}{6EJ}$
	$v_B = \frac{Pl^3}{3EJ}$ $\varphi_B = \frac{Pl^2}{2EJ}$		$f = \frac{5ql^4}{384EJ}$ $\varphi_A = -\varphi_B = \frac{ql^3}{24EJ}$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 7.1

Для балки на рис. 7.16, а требуется построить эпюры Q и M и определить с помощью метода начальных параметров прогиб балки в сечении B и угол поворота в сечении C .

Эпюры Q и M приведены на рис. 7.16, б, в. Начальные параметры равны: $v_0 = \varphi_0 = 0$, $M_0 = -28$ кНм, $Q_0 = 20$ кН.

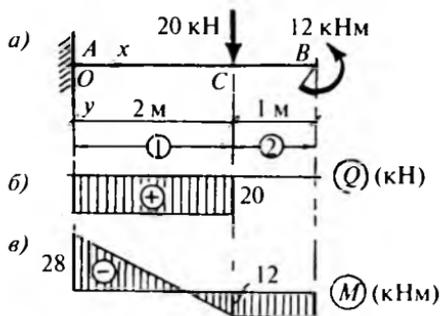


Рис. 7.16

В балке два участка с различными законами изменения прогибов и углов поворота. С помощью уравнения (7.7) записываем выражения для $v(x)$ и $\varphi(x)$ на каждом участке балки:

$$v(x) = \frac{28x^2}{2!EJ} - \frac{20x^3}{3!EJ} \Big|_1 + \frac{20(x-2)^3}{3!EJ} \Big|_2,$$

$$\varphi(x) = \frac{28x}{EJ} - \frac{20x^2}{2!EJ} \Big|_1 + \frac{20(x-2)^2}{2!EJ} \Big|_2.$$

Вычисляем требуемые значения прогиба и угла поворота:

$$v_B = v(3) = \frac{1}{EJ} \left(\frac{28 \cdot 3^2}{2} - \frac{20 \cdot 3^3}{6} + \frac{20 \cdot 1^3}{6} \right) = \frac{39,3}{EJ},$$

$$\varphi_C = \varphi(2) = \frac{1}{EJ} \left(28 \cdot 2 - \frac{20 \cdot 2^2}{2} \right) = \frac{16}{EJ}.$$

Точка B перемещается вниз, сечение C поворачивается по ходу часовой стрелки.

Задача 7.2

Для балки на рис. 7.17, а требуется построить эпюры Q и M и определить с помощью метода начальных параметров прогиб балки в сечении C и угол поворота на опоре B .

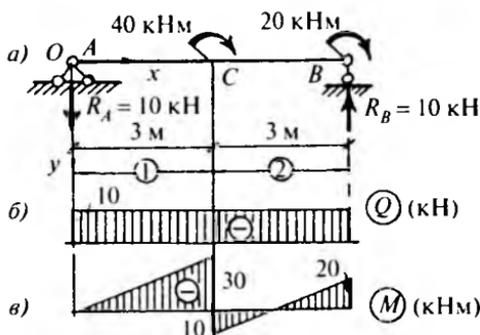


Рис. 7.17

Определяем опорные реакции:

$$\sum M_A = 0, \quad 40 + 20 = 6R_B, \quad R_B = R_A = 10 \text{ кН.}$$

Эпюры Q и M приведены на рис. 7.17, б, в. Начальные параметры равны: $v_0 = 0$, $M_0 = 0$, $Q_0 = -10 \text{ кН}$.

Записываем выражение для прогиба балки в пределах двух ее участков:

$$v(x) = \varphi_0 x + \frac{10x^3}{3!EJ} \Big|_1 - \frac{40(x-3)^2}{2!EJ} \Big|_2.$$

Неизвестный начальный параметр φ_0 определяем из граничного условия в сечении B : при $x = 6 \text{ м}$, $v = 0$.

$$v(6) = 6\varphi_0 + \frac{10 \cdot 6^3}{6EJ} - \frac{40 \cdot 3^2}{2EJ} = 0, \quad \varphi_0 = -\frac{30}{EJ}.$$

Записываем окончательные выражения для $v(x)$ и $\varphi(x)$:

$$v(x) = -\frac{30x}{EJ} + \frac{10x^3}{3!EJ} \Big|_1 - \frac{40(x-3)^2}{2!EJ} \Big|_2,$$

$$\varphi(x) = v'(x) = -\frac{30}{EJ} + \frac{10x^2}{2!EJ} \Big|_1 - \frac{40(x-3)}{EJ} \Big|_2.$$

Вычисляем требуемые значения прогиба и угла поворота:

$$v_C = v(3) = \frac{1}{EJ} \left(-30 \cdot 3 + \frac{10 \cdot 3^3}{6} \right) = -\frac{45}{EJ},$$

$$\varphi_B = \varphi(6) = \frac{1}{EJ} \left(-30 + \frac{10 \cdot 6^2}{2} - 40 \cdot 3 \right) = \frac{30}{EJ}.$$

Точка C перемещается вверх, сечение на опоре B поворачивается по ходу часовой стрелки.

Задача 7.3

Для балки на рис. 7.18, a требуется:

1. Построить эпюры Q и M и подобрать сечение балки в виде стального прокатного двутавра. В расчетах принять $\gamma_f = 1,3$, $R = 210 \text{ МПа} = 21 \text{ кН/см}^2$, $\gamma_c = 1,0$, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2,1 \times 10^4 \text{ кН/см}^2$.
2. Определить с помощью метода начальных параметров значения прогибов и углов поворота в характерных сечениях балки и

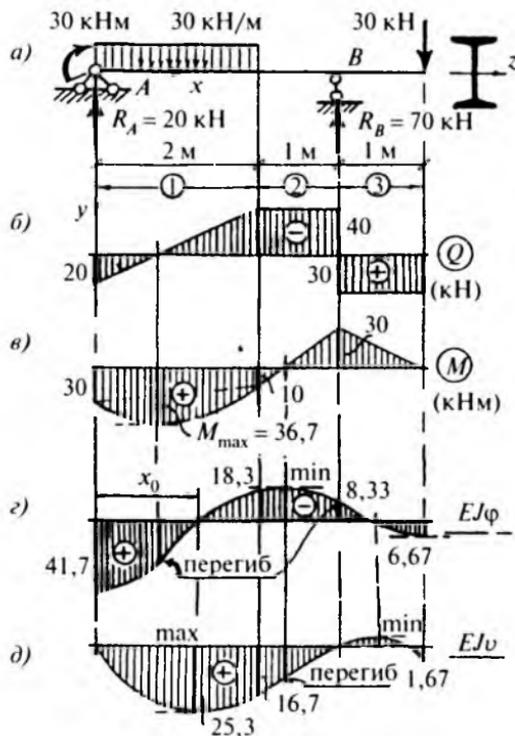


Рис. 7.18

построить эпюры v и φ . Определить числовые значения наибольших прогиба и угла поворота.

Определяем опорные реакции в балке:

$$R_B = \frac{30 \cdot 2 \cdot 1 + 30 \cdot 4 + 30}{3} = 70 \text{ кН},$$

$$R_A = \frac{30 \cdot 2 \cdot 2 - 30 - 30 \cdot 1}{3} = 20 \text{ кН}.$$

Эпюры Q и M приведены на рис. 7.18, б, в. Опасным является сечение балки с наибольшим изгибающим моментом в пролете:

$$M_{\max} = 30 + \frac{20^2}{2 \cdot 30} = 36,7 \text{ кНм}.$$

Вычисляем значение расчетного изгибающего момента и подбираем сечение балки:

$$M_{\text{расч}} = 1,3 \cdot 36,7 = 47,7 \text{ кНм},$$

$$W_z \geq \frac{M}{\gamma_c R} = \frac{47,7 \cdot 10^2}{1,0 \cdot 21} = 227 \text{ см}^3.$$

Принимаем по сортаменту двутавр I22 со следующими характеристиками: $W_z = 232 \text{ см}^3$, $J_z = 2550 \text{ см}^4$. Жесткость балки при изгибе равна $EJ_z = 2,1 \cdot 10^4 \cdot 2550 = 5,36 \cdot 10^7 \text{ кНсм}^2$.

Записываем уравнение изогнутой оси балки с учетом значений начальных параметров и характера внешней нагрузки. Начальные параметры равны $v_0 = 0$, $M_0 = 30 \text{ кНм}$, $Q_0 = 20 \text{ кН}$.

$$v(x) = \varphi_0 x - \frac{30x^2}{2!EJ} - \frac{20x^3}{3!EJ} + \frac{30x^4}{4!EJ} \Big|_1 - \frac{30(x-2)^4}{4!EJ} \Big|_2 - \frac{70(x-3)^3}{3!EJ} \Big|_3.$$

Для определения неизвестного начального параметра φ_0 используем граничное условие на опоре B : при $x = 3 \text{ м}$, $v = 0$.

$$v_B = v(3) = 3\varphi_0 - \frac{30 \cdot 3^2}{2EJ} - \frac{20 \cdot 3^3}{6EJ} + \frac{30 \cdot 3^4}{24EJ} - \frac{30 \cdot 1^4}{24EJ} = 0, \quad \varphi_0 = \frac{41,7}{EJ}.$$

Записываем окончательные выражения для $v(x)$ и $\varphi(x)$:

$$v(x) = \frac{41,7x}{EJ} - \frac{30x^2}{2!EJ} - \frac{20x^3}{3!EJ} + \frac{30x^4}{4!EJ} \Big|_1 - \frac{30(x-2)^4}{4!EJ} \Big|_2 - \frac{70(x-3)^3}{3!EJ} \Big|_3,$$

$$\varphi(x) = v'(x) = \frac{41,7}{EJ} - \frac{30x}{EJ} - \frac{20x^2}{2!EJ} + \frac{30x^3}{3!EJ} \Big|_1 - \frac{30(x-2)^3}{3!EJ} \Big|_2 - \frac{70(x-3)^2}{2!EJ} \Big|_3.$$

Вычисляем значения v и φ в характерных сечениях балки:

$$1. \quad x=0 \quad v = v_0 = 0, \quad \varphi = \varphi_0 = \frac{41,7}{EJ}.$$

$$2. \quad x=2 \text{ м} \quad v = \frac{1}{EJ} \left(41,7 \cdot 2 - \frac{30 \cdot 2^2}{2} - \frac{20 \cdot 2^3}{6} + \frac{30 \cdot 2^4}{24} \right) = \frac{16,7}{EJ};$$

$$\varphi = \frac{1}{EJ} \left(41,7 - 30 \cdot 2 - \frac{20 \cdot 2^2}{2} + \frac{30 \cdot 2^3}{6} \right) = -\frac{18,3}{EJ}.$$

$$3. \quad x=3 \text{ м} \quad v_B = 0;$$

$$\varphi_B = \frac{1}{EJ} \left(41,7 - 30 \cdot 3 - \frac{20 \cdot 3^2}{2} + \frac{30 \cdot 3^3}{6} - \frac{30 \cdot 1^3}{6} \right) = -\frac{8,33}{EJ}.$$

$$4. \quad x=4 \text{ м} \quad v = \frac{1}{EJ} \left(41,7 \cdot 4 - \frac{30 \cdot 4^2}{2} - \frac{20 \cdot 4^3}{6} + \frac{30 \cdot 4^4}{24} - \frac{30 \cdot 2^4}{24} - \frac{70 \cdot 1^3}{6} \right) = \frac{1,67}{EJ};$$

$$\varphi = \frac{1}{EJ} \left(41,7 - 30 \cdot 4 - \frac{20 \cdot 4^2}{2} + \frac{30 \cdot 4^3}{6} - \frac{30 \cdot 2^3}{6} - \frac{70 \cdot 1^2}{2} \right) = \frac{6,67}{EJ}.$$

В пределах первого участка знак угла поворота изменяется на противоположный. Определяем координату сечения x_0 , где угол поворота равен нулю:

$$\varphi(x) = \frac{1}{EJ} \left(41,7 - 30x - \frac{20x^2}{2} + \frac{30x^3}{6} \right) = 0,$$

$$x^3 - 2x^2 - 6x + 8,33 = 0.$$

Решая кубическое уравнение, находим $x_0 = 1,2$ м и вычисляем максимальное значение прогиба в пролете балки:

$$v_{\max} = v(1,2) = \frac{1}{EJ} \left(41,7 \cdot 1,2 - \frac{30 \cdot 1,2^2}{2} - \frac{20 \cdot 1,2^3}{6} + \frac{30 \cdot 1,2^4}{24} \right) = \frac{25,3}{EJ}.$$

Откладываем на оси балки вычисленные значения прогибов и углов поворота и строим эпюры v и φ . При построении отмечаем особенности эпюр — экстремумы и точки перегиба.

Функции $v(x)$ и $\varphi(x)$ являются на всем протяжении балки гладкими и непрерывными. Эпюра φ имеет экстремум в сечении, где $M=0$, и две точки перегиба в сечениях, где $Q=0$ и где Q имеет скачок со сменой знака (сечение на опоре B). В сечении на свободном конце касательная к эпюре φ параллельна к оси.

Эпюра v имеет два экстремума в сечениях, где $\varphi=0$ и одну точку перегиба в сечении, где $M=0$. Второе экстремальное значение прогиба на консольном участке балки может быть вычислено так же, как и в пролете. Эпюры v и φ приведены на рис. 7.18, z, d .

Определим числовые значения наибольших прогиба и угла поворота балки. Размерность длины в числителе переведем в сантиметры:

$$v_{\max} = \frac{25,3}{EJ} = \frac{25,3 \cdot 10^6}{5,36 \cdot 10^7} = 0,47 \text{ см};$$

$$\varphi_0 = \frac{41,7}{EJ} = \frac{41,7 \cdot 10^4}{5,36 \cdot 10^7} = 7,78 \cdot 10^{-3} \text{ рад} = 0^\circ 27'.$$

Задача 7.4

Для балки на рис. 7.19, a требуется определить с помощью метода начальных параметров значения поперечных сил, изгибающих моментов, углов поворота и прогибов в характерных сечениях и построить эпюры Q , M , φ и v .

Данная балка один раз статически неопределима, так как число опорных реакций (пять) превышает число уравнений равновесия, которые можно составить для их определения: $n = 5 - 3 - 1 = 1$, где n — степень статической неопределимости, 3 — число уравнений равновесия и 1 — дополнительное условие в шарнире B : $M_B = 0$.

Начальные параметры равны: $v_0 = \varphi_0 = 0$, $M_0 = -M_A$, $Q_0 = R_A$.

Статические начальные параметры M_0 и Q_0 , равные опорным реакциям в заделке A , неизвестны в начале расчета. Записываем выражения для $v(x)$ и $\varphi(x)$:

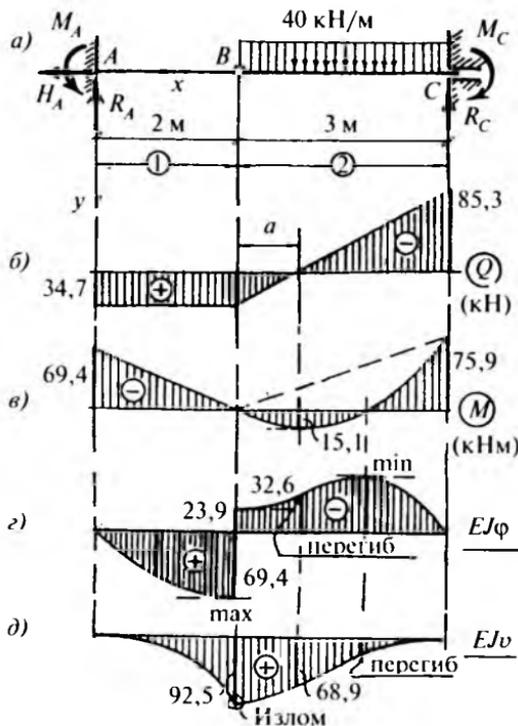


Рис. 7.19

$$v(x) = \frac{M_A x^2}{2! EJ} - \frac{R_A x^3}{3! EJ} \Big|_1 + \Delta\varphi_B (x-2) + \frac{40(x-2)^4}{4! EJ} \Big|_2,$$

$$\varphi(x) = \frac{M_A x}{EJ} - \frac{R_A x^2}{2! EJ} \Big|_1 + \Delta\varphi_B + \frac{40(x-2)^3}{3! EJ} \Big|_2.$$

Используя дополнительное условие в шарнире B , связываем неизвестные опорные реакции M_A и R_A между собой:

$$M_B^{\text{лев}} = -M_A + 2R_A = 0, \quad M_A = 2R_A.$$

Для определения неизвестных величин R_A и $\Delta\varphi_B$ используем граничные условия в заделке C : при $x = 5$ м, $v = 0$, $\varphi = 0$.

$$v(5) = \frac{1}{EJ} \left(\frac{2R_A \cdot 5^2}{2} - \frac{R_A \cdot 5^3}{6} + 3\Delta\varphi_B + \frac{40 \cdot 3^4}{24} \right) = 0,$$

$$\varphi(5) = \frac{1}{EJ} \left(2R_A \cdot 5 - \frac{R_A \cdot 5^2}{2} + \Delta\varphi_B + \frac{40 \cdot 3^3}{6} \right) = 0.$$

Получаем систему двух линейных алгебраических уравнений относительно R_A и $\Delta\varphi_B$, решив которую, находим значения этих величин:

$$\left. \begin{aligned} 3\Delta\varphi_B + \frac{4,17R_A}{EJ} &= -\frac{135}{EJ}, \\ \Delta\varphi_B - \frac{2,5R_A}{EJ} &= -\frac{180}{EJ}, \end{aligned} \right\} \Delta\varphi_B = -\frac{93,25}{EJ}, \quad R_A = 34,7 \text{ кН.}$$

Вычисляем значения Q и M в характерных сечениях балки:

$$Q_A = Q_B = R_A = 34,7 \text{ кН}, \quad Q_C = 34,7 - 3 \cdot 40 = -85,3 \text{ кН},$$

$$M_A = -2 \cdot 34,7 = -69,4 \text{ кНм (растянуты верхние волокна)},$$

$$M_C = 34,7 \cdot 5 - 69,4 - 40 \cdot 3 \cdot 1,5 = -75,9 \text{ кНм (растянуты верхние волокна)}.$$

Вычисляем значение экстремального момента на втором участке:

$$a = \frac{34,7}{40} = 0,87 \text{ м}, \quad M_{\max} = \frac{34,7^2}{2 \cdot 40} = 15,1 \text{ кНм (растянуты нижние волокна)}.$$

Эпюры Q и M приведены на рис. 7.19, б, в. Записываем выражения для прогибов и углов поворота:

$$v(x) = \frac{69,4x^2}{2!EJ} - \frac{34,7x^3}{3!EJ} \Big|_1 - \frac{93,25(x-2)}{EJ} + \frac{40(x-2)^4}{4!EJ} \Big|_2,$$

$$\varphi(x) = v'(x) = \frac{69,4x}{EJ} - \frac{34,7x^2}{2!EJ} \Big|_1 - \frac{93,25}{EJ} + \frac{40(x-2)^3}{3!EJ} \Big|_2.$$

Вычисляем v и φ в характерных сечениях балки:

$$1. \quad x = 0 \quad v = v_0 = 0, \quad \varphi = \varphi_0 = 0.$$

$$2. \quad x = 2 \text{ м} \quad v = \frac{1}{EJ} \left(\frac{69,4 \cdot 2^2}{2} - \frac{34,7 \cdot 2^3}{6} \right) = \frac{92,5}{EJ};$$

$$\varphi_{\text{лев}} = \frac{1}{EJ} \left(69,4 \cdot 2 - \frac{34,7 \cdot 2^2}{2} \right) = \frac{69,4}{EJ};$$

$$\varphi_{\text{прав}} = \varphi_{\text{лев}} + \Delta\varphi_B = \frac{69,4}{EJ} - \frac{93,25}{EJ} = -\frac{23,9}{EJ}.$$

$$3. \quad x = 2,87 \text{ м} \quad v = \frac{1}{EJ} \left(\frac{69,4 \cdot 2,87^2}{2} - \frac{34,7 \cdot 2,87^3}{6} - 93,25 \cdot 0,87 + \frac{40 \cdot 0,87^4}{24} \right) = \frac{68,9}{EJ},$$

$$\varphi = \frac{1}{EJ} \left(69,4 \cdot 2,87 - \frac{34,7 \cdot 2,87^2}{2} - 93,25 + \frac{40 \cdot 0,87^3}{6} \right) = -\frac{32,6}{EJ}.$$

$$4. \quad x = 5 \text{ м} \quad v = 0, \quad \varphi = 0.$$

По полученным значениям строим эпюры v и φ (рис. 7.19, z , d). Отметим особенности этих эпюр. На эпюре φ имеется экстремум в сечении, где $M = 0$, скачок со сменой знака в сечении B и точка перегиба в сечении $x = 2,87 \text{ м}$, где $Q = 0$. В сечении B касательные к эпюре параллельны к оси.

На эпюре v в сечениях A и C касательные параллельны к оси. В сечении B имеется излом и смена знака кривизны. В сечении, где $M = 0$, имеется точка перегиба.

Задача 7.5

Для балки на рис. 7.20, a требуется определить с помощью метода Мора прогибы в сечениях D и C и угол поворота на опоре B .

Эпюра изгибающих моментов от действия заданных нагрузок (грузовая эпюра M_p) приведена на рис. 7.20, b . Для определения требуемых v и φ приложим в сечениях D и C единичную силу и в сечении B единичный момент и построим единичные эпюры изгибающих моментов \bar{M}_1 , \bar{M}_2 и \bar{M}_3 (рис. 7.20, $в$, $г$, $д$). «Перемножая» по правилу А.К. Верещагина эпюру M_p с единичными эпюрами, получаем

$$v_D = \Delta_{1P} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M_p}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1,5 - \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1,5 \right) = 0.$$

Этот результат очевиден, поскольку в пролете AB эпюра \bar{M}_1 является симметричной, а эпюра M_p — кососимметричной.

$$\varphi_B = \Delta_{2P} = \int_0^l \frac{\bar{M}_2 M_p}{EJ} dx = \frac{6}{6EJ} (2 \cdot 30 \cdot 1 - 30 \cdot 1) = \frac{30}{EJ},$$

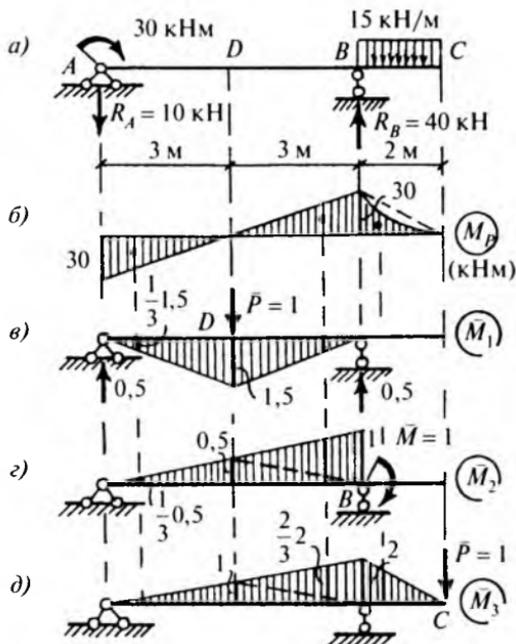


Рис. 7.20

$$v_C = \Delta_{3P} = \int_0^l \frac{\bar{M}_3 M_P}{EJ} dx =$$

$$= \frac{1}{EJ} \left[\frac{6}{6} (2 \cdot 30 \cdot 2 - 30 \cdot 2) + \frac{1}{2} 30 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{15 \cdot 2^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \right] = \frac{90}{EJ}.$$

При определении φ_B и v_C использована формула (7.11) «перемножения» трапеций.

Прогиб v_C следует направлению действия единичной силы, то есть происходит вниз. Направление угла поворота φ_B совпадает с направлением действия единичного момента, то есть сечение B поворачивается по ходу часовой стрелки.

Задача 7.6

Для балки ступенчато-постоянной жесткости (рис. 7.21, а) требуется определить с помощью метода Мора прогиб и взаимный угол поворота сечений в шарнире B .

Эпюра M_P от действия заданных нагрузок (грузовая эпюра) приведена на рис. 7.21, б. Для определения искомым перемещений

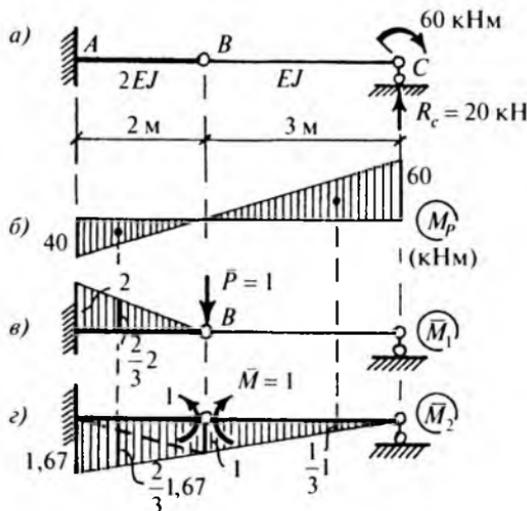


Рис. 7.21

приложим в шарнире B единичную силу и парный единичный момент. Соответствующие единичные эпюры изгибающих моментов приведены на рис. 7.21, δ , ϵ .

«Перемножая» эпюру M_P с единичными эпюрами по правилу А.К. Верещагина, получаем

$$v_B = \Delta_{1P} = \sum_i \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M_P}{EJ} dx = -\frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = -\frac{26,7}{EJ},$$

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_B = \Delta_{2P} &= \sum_i \int_0^l \frac{\bar{M}_2 M_P}{EJ} dx = \\ &= \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{2}{6} (2 \cdot 40 \cdot 1,67 + 40 \cdot 1) - \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = -\frac{1,11}{EJ}. \end{aligned}$$

Задача 7.7

Для балки на рис. 7.22, a требуется определить с помощью метода Мора угол поворота на опоре A и прогиб в сечении C .

Определяем опорные реакции:

$$\sum M_A = 0 \quad R_B = \frac{30 \cdot 2 \cdot 1 + 12 \cdot 2 - 9}{3} = 25 \text{ кН},$$

$$\sum M_B = 0 \quad R_A = \frac{30 \cdot 2 \cdot 2 + 12 \cdot 1 + 9}{3} = 47 \text{ кН.}$$

Строим грузовую эпюру изгибающих моментов M_p и соответствующие единичные эпюры (рис. 7.22, б, в, г). «Перемножая» эпюру M_p с единичными эпюрами по правилу А.К. Верещагина, получаем

$$\Delta_{1P} = \varphi_A = \frac{1}{EJ} \left[\frac{2}{6} (2 \cdot 34 \cdot 0,33 + 34 \cdot 1) + \frac{30 \cdot 2^3}{12} \cdot \frac{(1 + 0,33)}{2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{6} (2 \cdot 34 \cdot 0,33 + 9 \cdot 0,33) \right] = \frac{36,5}{EJ},$$

$$\Delta_{2P} = v_C = \frac{1}{EJ} \left[\frac{2}{6} \cdot 2 \cdot 34 \cdot 0,67 + \frac{30 \cdot 2^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,67 + \right. \\ \left. + \frac{1}{6} (2 \cdot 34 \cdot 0,67 + 9 \cdot 0,67) \right] = \frac{30,3}{EJ}.$$

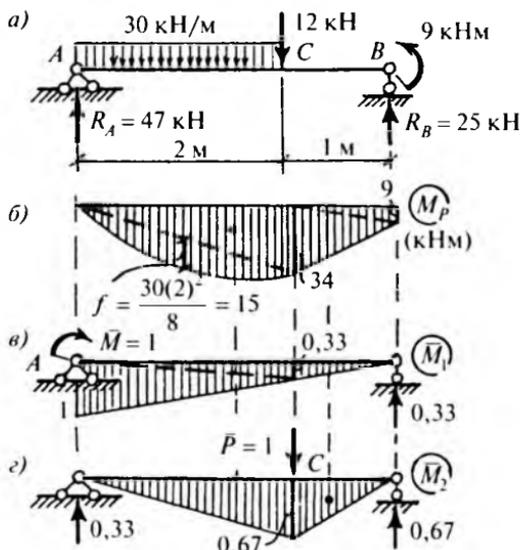


Рис. 7.22

Задача 7.8

Для рамы на рис. 7.23 требуется определить с помощью метода Мора угол поворота жесткого узла C , вертикальное перемещение сечения B и горизонтальное перемещение сечения D . Изгибная жесткость стойки AC в три раза больше жесткости ригеля BD .

Строим грузовую и единичные эпюры изгибающих моментов (рис. 7.24). «Перемножая» грузовую эпюру M_p с единичными эпюрами, получаем

$$\varphi_C = \Delta_{1P} = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{\bar{M}_1 M_p}{EJ} dx = \frac{1}{3EJ} 60 \cdot 4 \cdot 1 = \frac{80}{EJ},$$

$$v_B = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{\bar{M}_2 M_p}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 30 - \frac{1}{3EJ} \cdot 60 \cdot 4 \cdot 2 = -\frac{100}{EJ},$$

$$u_D = \Delta_{3P} = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{\bar{M}_3 M_p}{EJ} dx = -\frac{1}{3EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 60 = -\frac{160}{EJ}.$$

Узел C поворачивается в направлении действия единичного момента, то есть по ходу часовой стрелки. Сечения B и D перемещаются в направлениях, противоположных действию единичных сил.

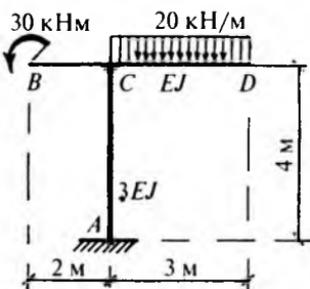


Рис. 7.23

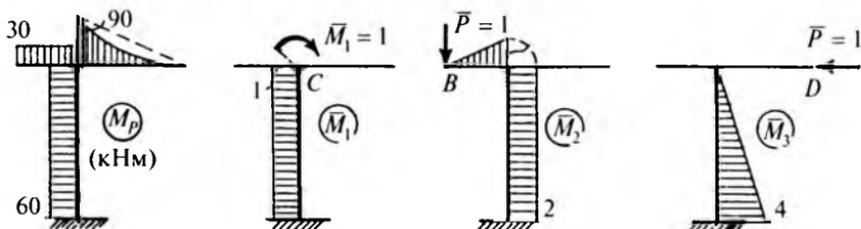


Рис. 7.24

Задача 7.9

Для рамы на рис. 7.25 требуется определить с помощью метода Мора горизонтальное перемещение опоры B и угол поворота сечения на опоре A . Изгибная жесткость стойки AC в два раза больше жесткости ригеля CB .

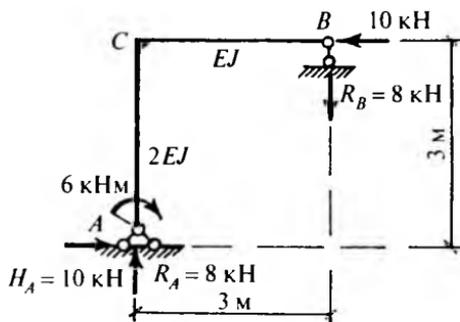


Рис. 7.25

Определяем опорные реакции:

$$H_A = 10 \text{ кН}, \quad R_A = R_B = \frac{10 \cdot 3 - 6}{3} = 8 \text{ кН}.$$

Эпюра изгибающих моментов от действия заданных нагрузок и единичные эпюры приведены на рис. 7.26, a , b , $в$.

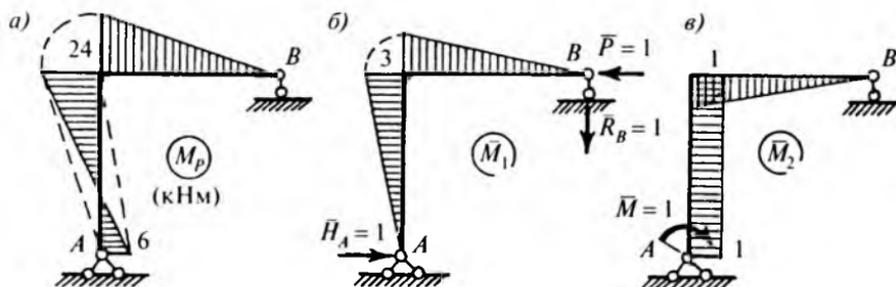


Рис. 7.26

«Перемножая» по правилу А.К. Верещагина грузовую и единичные эпюры в пределах каждого стержня, определяем искомые перемещения:

$$\begin{aligned}
 u_B = \Delta_{1P} &= \sum_i \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M_P}{EJ} dx = \\
 &= \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{3}{6} (2 \cdot 24 \cdot 3 - 6 \cdot 3) + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 = \frac{103,5}{EJ}, \\
 \varphi_A = \Delta_{2P} &= \sum_i \int_0^l \frac{\bar{M}_2 M_P}{EJ} dx = \\
 &= -\frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{2} (24 - 6) \cdot 3 \cdot 1 - \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = -\frac{37,5}{EJ}.
 \end{aligned}$$

Поворот сечения A происходит в направлении, противоположном действию единичного момента, то есть против хода часовой стрелки. Опора B перемещается влево.

Задача 7.10

Для стальной балки на рис. 7.27, a требуется определить величину сил P из условия, что прогиб в середине пролета не должен превышать значение $[f] = 0,9$ см. Приняв $\gamma_f = 1,2$, $R = 210$ МПа = $= 21$ кН/см² и $\gamma_c = 1,0$, проверить прочность балки. Модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа = $2,1 \cdot 10^4$ кН/см².

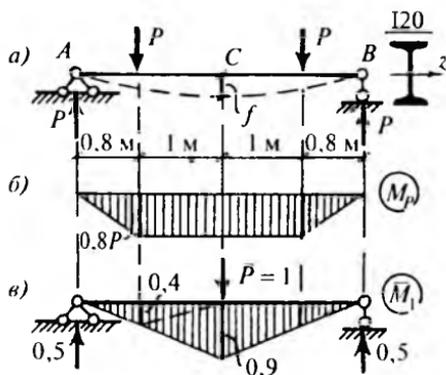


Рис. 7.27

Грузовая эпюра изгибающих моментов M_P приведена на рис. 7.27, b . Приложим в середине балки единичную силу, построим единичную эпюру изгибающих моментов (рис. 7.27, $в$) и

определим с помощью метода Мора прогиб в середине, выраженный через параметр сил P :

$$v_C = \Delta_{1P} = 2 \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} \cdot 0,8P \cdot 0,8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,4 + \frac{1}{2} (0,4 + 0,9) \cdot 1 \cdot 0,8P \right] = \frac{1,21P}{EJ}.$$

«Перемножение» произведено на половине длины балки, а результат удвоен. Выполняем условие жесткости балки:

$$v_C = \frac{1,21P}{EJ} \leq [f] = 0,9 \text{ см}, \quad P \leq \frac{0,9 \cdot 2,1 \cdot 10^4 \cdot 1840}{1,21 \cdot 10^6} = 28,7 \text{ кН}.$$

Проверяем выполнение условия прочности балки:

$$P_p = 28,7 \cdot 1,2 = 34,5 \text{ кН}, \quad M_p = 0,8 \cdot 34,5 = 27,6 \text{ кНм},$$

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{M_p}{W_z} = \frac{27,6 \cdot 10^2}{184} = 15 \text{ кН/см}^2 = 150 \text{ МПа} < \gamma_c R = 210 \text{ МПа},$$

где $J_z = 1840 \text{ см}^4$ и $W_z = 184 \text{ см}^3$ — момент инерции и момент сопротивления сечения двутавра I20. Условие прочности выполняется.

Задача 7.11

В стальной балке трубчатого сечения, нагруженной по схеме на рис. 7.28, а, с помощью индикатора часового типа определен прогиб в середине пролета: $f = 0,4 \text{ см}$. Требуется определить величину силы P и наибольшие нормальные напряжения в балке. Модуль упругости материала балки $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2,1 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$.

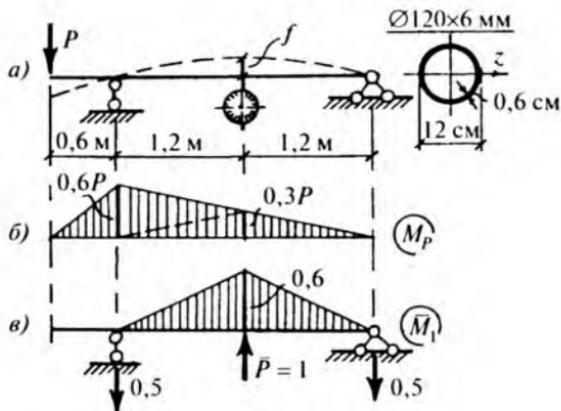


Рис. 7.28

Выразим прогиб балки в середине пролета через силу P . Для этого используем метод Мора и построим грузовую и единичную эпюры изгибающих моментов (рис. 7.28, б, в). «Перемножая» эти эпюры между собой по правилу А.К. Верещагина, получаем

$$f = \Delta_{1P} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,6 \cdot 2,4 \cdot 0,3P = \frac{0,216P}{EJ}.$$

Определяем жесткость балки при изгибе:

$$J_z = \frac{\pi}{64} (12^4 - 10,8^4) = 350 \text{ см}^4,$$

$$EJ_z = 2,1 \cdot 10^4 \cdot 350 = 7,35 \cdot 10^6 \text{ кНсм}^2.$$

Определяем величину силы P и наибольшие нормальные напряжения в балке:

$$f = \frac{0,216P}{EJ} = 0,4 \text{ см}, \quad P = \frac{0,4 \cdot 7,35 \cdot 10^6}{0,216 \cdot 10^6} = 13,6 \text{ кН},$$

$$M = 0,6 \cdot 13,6 = 8,16 \text{ кНм},$$

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{8,16 \cdot 10^2}{350} \cdot 6 = 14 \text{ кН/см}^2 = 140 \text{ МПа}.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 7.12. Для балок на рис. 7.29 требуется определить с помощью метода начальных параметров значения прогибов и углов поворота в характерных сечениях и построить эпюры Q , M , φ и v .

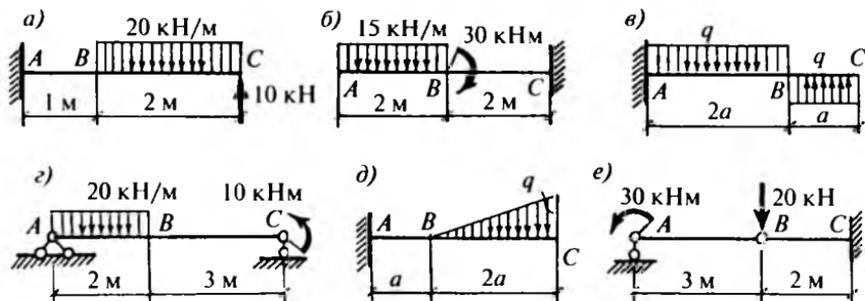


Рис. 7.29

Ответ:

Таблица 7.3

Схема	EJv_A	$EJ\varphi_A$	EJv_B	$EJ\varphi_B$	EJv_C	$EJ\varphi_C$
а	0	0	20,0	35,0	103,3	41,67
б	230,0	-80,0	80,0	-60,0	0	0
в	0	0	$-1,67qa^4$	$-1,67qa^3$	$-3,46qa^4$	$-1,83qa^3$
г	0	51,0	70,0	9,67	0	-47,3
д	0	0	qa^4	$1,83qa^3$	$6,13qa^4$	$2,83qa^3$
е	0	-21,1	26,7	$\begin{matrix} 23,9 \\ -20,0 \end{matrix}$	0	0

Задача 7.13. Для балок на рис. 7.30 требуется определить с помощью метода начальных параметров значение максимального прогиба в пролете и сравнить его со значением прогиба в середине пролета.

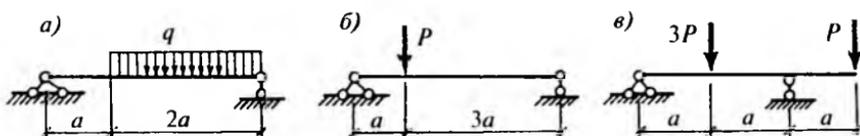


Рис. 7.30

Ответ:

$$а) v_{\max} = \frac{0,7956qa^4}{EJ} \quad \text{при } x = 1,555a, \quad v(1,5a) = \frac{0,7942qa^4}{EJ};$$

$$б) v_{\max} = \frac{0,9317Pa^3}{EJ} \quad \text{при } x = 1,764a, \quad v(2a) = \frac{0,9167Pa^3}{EJ};$$

$$в) v_{\max} = \frac{0,2536Pa^3}{EJ} \quad \text{при } x = 0,9129a, \quad v(a) = \frac{0,25Pa^3}{EJ}.$$

Задача 7.14. Для балок на рис. 7.31 требуется определить значение параметра нагрузки k из условий равенства нулю прогиба в сечении B (рис. 7.31, а) и угла поворота на опоре A (рис. 7.31, б, в).

Ответ: а) $k = 0,6328$; б) $k = 2$; в) $k = 4,5$.

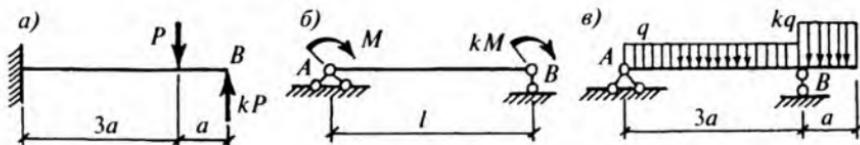


Рис. 7.31

Задача 7.15. Для статически неопределимых балок (рис. 7.32) требуется определить с помощью метода начальных параметров значения опорных реакций, прогибов и углов поворота в характерных сечениях и построить эпюры Q , M , φ и v .

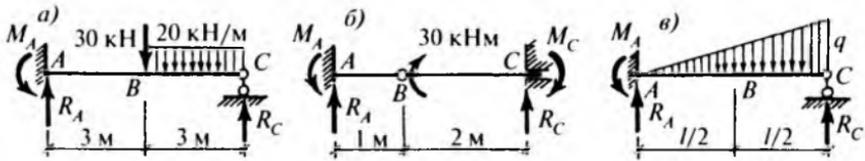


Рис. 7.32

Ответ:

Таблица 7.4

Схема	R_A	M_A	R_C	M_C	EJv_B	$EJ\varphi_B$	$EJ\varphi_C$
а	42,2 кН	73,1 кНм	47,8 кН	0	139,22	29,53	-95,63
б	-20 кН	-20 кНм	20 кН	10 кНм	-6,67	-10 / 20	0
в	$0,225ql$	$0,058ql^2$	$0,275ql$	0	$2,86 \cdot 10^{-3}ql^4$	$3,65 \cdot 10^{-3}ql^3$	$-0,0125ql^3$

Задача 7.16. Для балок на рис. 7.33 требуется определить с помощью метода Мора значения прогибов в сечениях A , углов поворота сечений B и скачков углов поворота в промежуточных шарнирах (рис. 7.33, г, д).

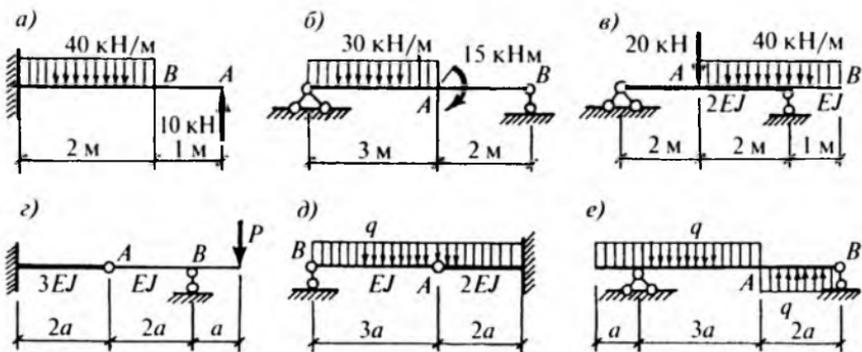


Рис. 7.33

Ответ:

Таблица 7.5

Схема	а	б	в	г	д	е
EJv_A	43,33	142,5	36,67	$-0,444Pa^3$	$3qa^4$	$1,45qa^4$
$EJ\varphi_B$	13,33	$-91,25$	-20	$0,888Pa^2$	$2,125qa^3$	$-0,525qa^3$
$EJ\Delta\varphi_A$	—	—	—	$0,222Pa^2$	$-2,042qa^3$	—

Задача 7.17. Для рам на рис. 7.34 требуется определить с помощью метода Мора вертикальное перемещение сечения A , горизонтальное перемещение сечения B и угол поворота сечения C .

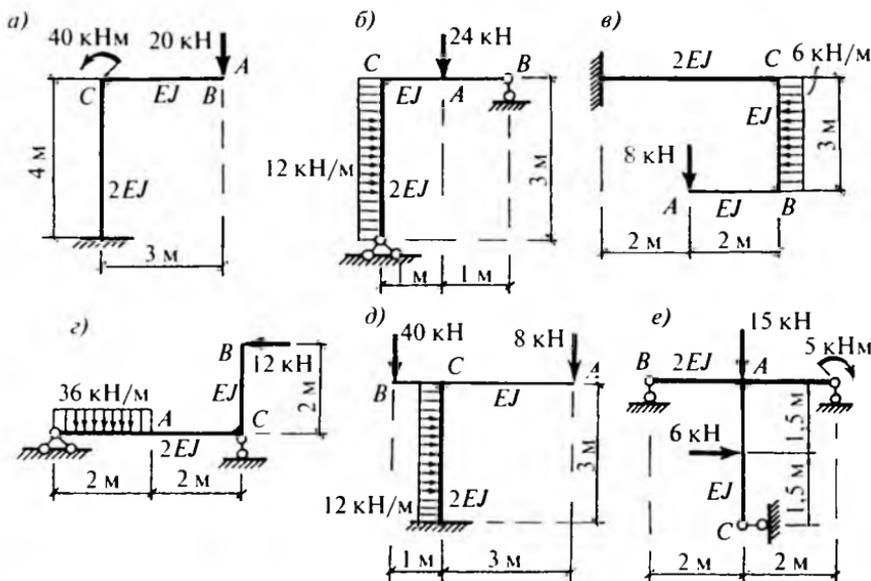


Рис. 7.34

Ответ:

Таблица 7.6

Схема	а	б	в	г	д	е
EJv_A	300,0	17,5	84,67	42,0	81,0	7,5
EJv_B	80,0	227,25	$-150,75$	$-106,0$	24,75	40,375
$EJ\varphi_C$	40,0	42,0	54,0	$-37,0$	3,0	21,33

Задача 7.18. Для балки на рис. 7.35 требуется подобрать сечение в виде стального прокатного двутавра из условия, что максималь-

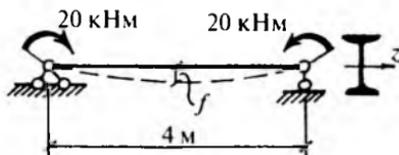


Рис. 7.35

ный прогиб в середине пролета не должен превышать значение $[f] = 0,8$ см. Вычислить значения наибольших нормальных напряжений в балке. Модуль упругости принять равным $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа.

Ответ: I_{22} , $\sigma_{н6} = 112,2$ МПа.

Задача 7.19. Для стальной балки трубчатого сечения (рис. 7.36) требуется определить максимально допустимое значение нагрузки из условия, что углы поворота сечений на опорах не должны превосходить величину $[\varphi] = 0^\circ 30'$. Вычислить значения наибольших нормальных напряжений в балке. Модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа.

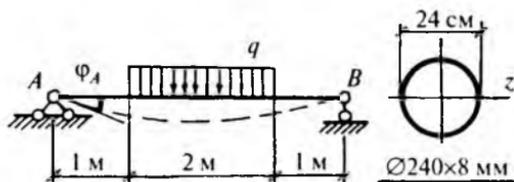


Рис. 7.36

Ответ: $q = 39,26$ кН/м, $\sigma_{н6} = 180$ МПа.

Задача 7.20. Для балки на рис. 7.37 требуется определить длину консоли a , при которой прогиб в середине пролета (сечение C) равен нулю.

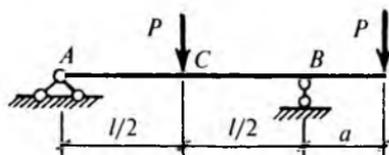


Рис. 7.37

Ответ: $a = \frac{1}{3}l$.

Глава 8

ОСНОВЫ РАСЧЕТА СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК И ПЛОСКИХ РАМ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА СИЛ

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

В статически неопределимых стержневых системах число неизвестных опорных реакций или внутренних усилий превышает число уравнений равновесия, которые можно составить для их определения. Разность между ними характеризует степень статической неопределимости системы n , то есть число избыточных или «лишних» связей (рис. 8.1, 8.2).

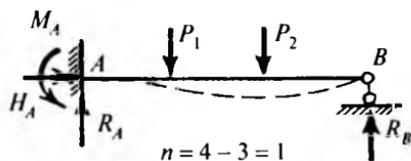


Рис. 8.1

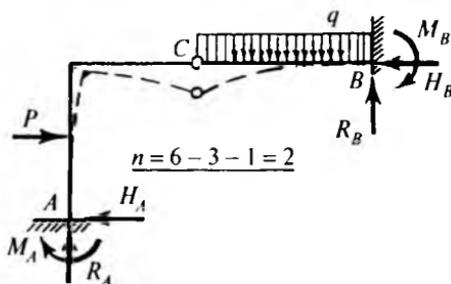


Рис. 8.2

Наличие одиночного промежуточного шарнира (то есть соединяющего два стержня) понижает степень статической неопределимости на единицу (рис. 8.2). Наличие шарнира, соединяющего k стержней, понижает степень статической неопределимости системы на величину $k - 1$, поскольку такой шарнир эквивалентен $k - 1$ одиночным шарнирам.

Для расчета статически неопределимой системы с помощью метода сил надо отбросить «лишние» связи и образовать так называемую основную систему. Основная система должна быть ста-

тически определима и геометрически неизменяема. Основных систем может быть несколько; выбирается наиболее удобная для расчета.

В основной системе по направлению реакции в отброшенных связях прикладываются неизвестные силы или моменты X_1, X_2, \dots, X_n . Поставив условие, что основная система должна деформироваться как заданная, надо приравнять к нулю линейные и угловые перемещения по направлению реакций в отброшенных связях от совместного действия нагрузки и неизвестных. Таким образом можно составить дополнительные уравнения (уравнения деформаций), которые позволяют определить неизвестные X_1, X_2, \dots, X_n , то есть раскрыть статическую неопределимость задачи.

В качестве примера приведены основные системы и дополнительные уравнения для один раз статически неопределимой балки (рис. 8.3, а).

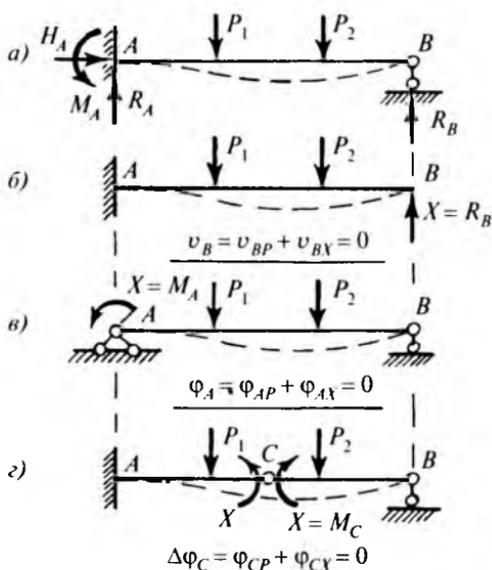


Рис. 8.3

Для образования первой основной системы (рис. 8.3, б) отброшена шарнирная опора B . Дополнительное уравнение характеризует отсутствие прогиба в сечении B от совместного действия нагрузки (v_{BP}) и неизвестной силы X (v_{BX}).

Для определения коэффициентов и грузовых членов системы (8.1) обычно используется метод Мора. Для систем, работающих в основном на изгиб (балки, рамы), имеем:

$$\delta_{ik} = \sum_i \int_0^l \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k}{EJ} dx, \quad \Delta_{iP} = \sum_i \int_0^l \frac{\bar{M}_i M_P}{EJ} dx, \quad (8.2)$$

где \bar{M}_i, \bar{M}_k — изгибающие моменты в основной системе от действия единичных сил или единичных моментов, M_P — изгибающий момент в основной системе от действия заданных нагрузок.

Для прямых стержней с постоянной жесткостью вычисление интегралов (8.2) производится с помощью правила А.К. Верещагина («перемножение» эпюр).

Коэффициенты δ_{ii} ($i = k$) называются главными коэффициентами. Они расположены на главной диагонали системы (8.1) и всегда положительны. Коэффициенты δ_{ik} ($i \neq k$) называются побочными коэффициентами. Для них на основании теоремы Бетти о взаимности работ справедливо равенство $\delta_{ik} = \delta_{ki}$.

Побочные коэффициенты и грузовые члены могут быть положительными, отрицательными и равными нулю. Для упрощения расчета последнее всегда является желательным, что зависит от выбора основной системы.

Вид канонических уравнений не зависит от выбора основной системы, а их число равно степени статической неопределимости заданной системы.

В качестве примера на рис. 8.4 приведены основная система и канонические уравнения метода сил для два раза статически неопределимой рамы (рис. 8.2). Для образования основной системы жесткая заделка A заменена шарнирно-подвижной опорой.

$$\left. \begin{aligned} u_A = \Delta_1 = \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0, \\ \varphi_A = \Delta_2 = \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0. \end{aligned} \right\}$$

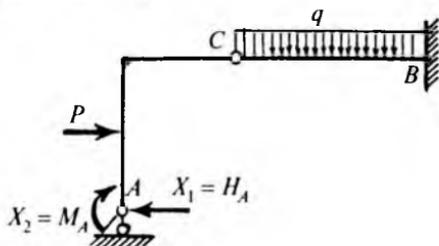


Рис. 8.4

Порядок расчета статически неопределимой системы с помощью метода сил является следующим:

1. В заданной системе отбрасываются «лишние» связи и образуется наиболее удобная для расчета основная система.

2. В основной системе по направлению реакции в отброшенных связях прикладываются единичные силы или моменты \bar{X}_i и строятся единичные эпюры изгибающих моментов \bar{M}_i и грузовая эпюра M_p .

3. Составляются канонические уравнения метода сил и вычисляются коэффициенты δ_{ik} и грузовые члены $\Delta_{i,p}$ этих уравнений.

Для прямых стержней с постоянной жесткостью вычисление коэффициентов и грузовых членов сводится к «перемножению» по правилу А.К. Верещагина единичных и грузовой эпюр изгибающих моментов.

4. Решается система канонических уравнений и определяются неизвестные X_i .

5. Производится расчет основной системы на суммарное действие всех неизвестных и заданной нагрузки. Обычно вначале строится эпюра изгибающих моментов M , а затем эпюры Q и N . Для сложных стержневых систем эпюра изгибающих моментов может быть построена путем суммирования эпюр по формуле

$$M = M_p + \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_n X_n. \quad (8.3)$$

Эпюра поперечных сил строится с помощью дифференциальной зависимости $M' = Q$, а эпюра продольных сил — с помощью уравнений равновесия узлов системы или ее частей.

Построенные эпюры внутренних усилий M , Q и N должны соответствовать статическим условиям равновесия всей системы в целом и каждого ее узла. Для этого надо выполнить статическую проверку.

Кроме того, надо убедиться в том, что перемещения в основной системе по направлению реакций в отброшенных связях действительно равны нулю. Для кинематической проверки надо окончательную эпюру M «перемножить» с каждой из единичных эпюр \bar{M}_i . Все результаты «перемножения» должны быть равны нулю.

Определение линейных и угловых перемещений в статически неопределимой системе производится с помощью окончательной эпюры M и соответствующей единичной эпюры в любой основной системе метода сил.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 8.1

Для статически неопределимой балки (рис. 8.5, а) требуется построить эпюры M и Q и определить прогиб в сечении C и угол поворота на правой опоре B .

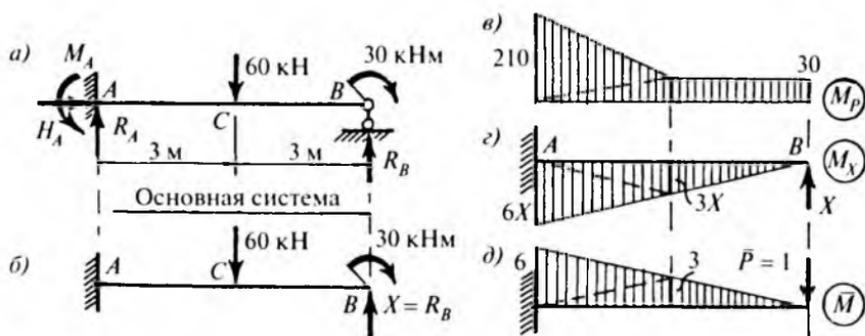


Рис. 8.5

Данная балка один раз статически неопределима ($n = 4 - 3 = 1$). Отбрасываем опору B и образуем основную систему (рис. 8.5, б). Запишем условие ее деформации: $v_B = v_{BP} + v_{BX} = 0$.

Для определения прогиба основной системы в сечении B от действия заданной нагрузки (v_{BP}) и неизвестной силы X (v_{BX}) используем метод Мора. Строим эпюры изгибающих моментов в основной системе от действия заданной нагрузки (M_P), неизвестной силы X (M_X) и единичной силы (\bar{M}). Эти эпюры приведены на рис. 8.5, в, г, д. «Перемножая» эпюры по правилу А.К. Верещагина, получаем:

$$v_{BP} = \int_0^l \frac{M_P \bar{M}}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[\frac{3}{6} (2 \cdot 210 \cdot 6 + 2 \cdot 30 \cdot 3 + 210 \cdot 3 + 30 \cdot 6) + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 30 \right] = \frac{1890}{EJ},$$

$$v_{BX} = \int_0^l \frac{M_X \bar{M}}{EJ} dx = -\frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6X \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = -\frac{720}{EJ} X.$$

Решаем дополнительное уравнение

$$v_B = \frac{1}{EJ}(1890 - 720X) = 0, \quad X = R_B = 26,25 \text{ кН.}$$

Производим расчет основной системы на действие силы $X = R_B$

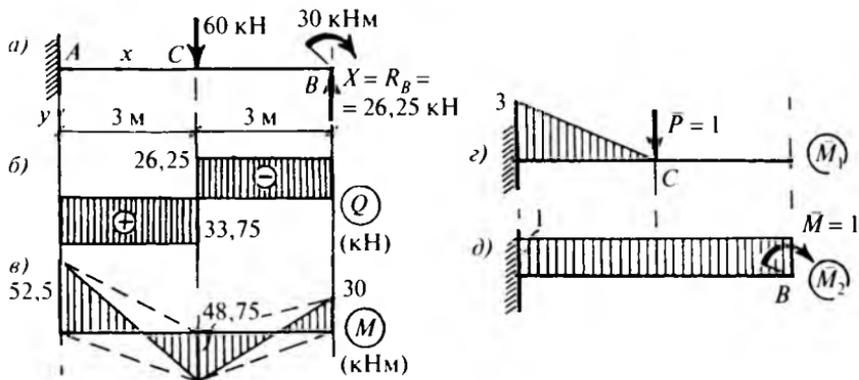


Рис. 8.6

и заданных нагрузок (рис. 8.6, а). Окончательные эпюры M и Q приведены на рис. 8.6, б, в.

Произведем кинематическую проверку. Для этого убедимся, что прогиб в сечении B основной системы действительно равен нулю.

$$\begin{aligned} v_B &= \int_0^l \frac{\bar{M}M}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[\frac{3}{6} (2 \cdot 52,5 \cdot 6 - 2 \cdot 48,75 \cdot 3 + 52,5 \cdot 3 - \right. \\ &\quad \left. - 48,75 \cdot 6) + \frac{3}{6} (-2 \cdot 48,75 \cdot 3 + 30 \cdot 3) \right] = \\ &= \frac{1}{EJ} (438,75 - 438,75) = 0. \end{aligned}$$

При вычислении интеграла Мора в пределах первого участка использована формула «перемножения» трапеций.

Задача решена правильно. Для определения v_C и φ_B приложим в сечениях C и B основной системы единичные силу и момент, построим единичные эпюры изгибающих моментов (рис. 8.6, з, д) и «перемножим» их с окончательной эпюрой M .

$$v_C = \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{3}{6} (2 \cdot 52,5 \cdot 3 - 48,75 \cdot 3) = \frac{84,4}{EJ},$$

$$\varphi_B = \int_0^l \frac{\bar{M}_2 M}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} (52,5 - 48,75) \cdot 3 \cdot 1 - \frac{1}{2} (48,75 - 30) \cdot 3 \cdot 1 \right] =$$

$$= -\frac{22,5}{EJ}.$$

Поворот сечения на опоре B происходит против хода часовой стрелки.

Задача 8.2

Для двухпролетной неразрезной балки (рис. 8.7, a) требуется построить эпюры Q и M и определить угол поворота на промежуточной опоре B и прогиб в середине левого пролета. Балка имеет ступенчато-постоянную изгибную жесткость.

Данная балка один раз статически неопределима ($n = 4 - 3 = 1$). Для образования основной системы введем в сечении B промежуточный шарнир и приложим в этом сечении парный момент $X_1 = M_B$ (рис. 8.7, b). Запишем каноническое уравнение метода сил:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

Физический смысл этого уравнения заключается в том, что в заданной балке взаимный угол поворота сечений над опорой B равен нулю.

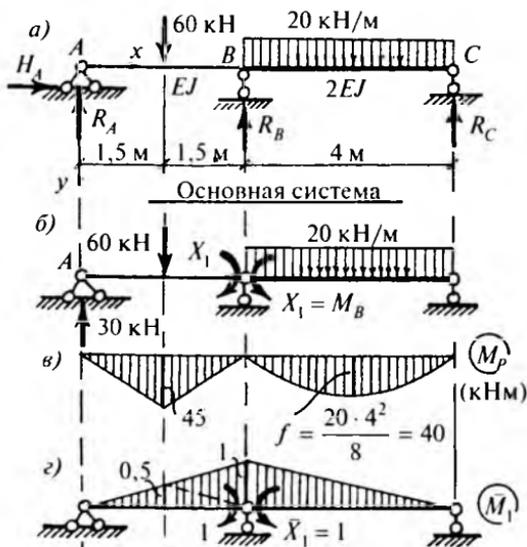


Рис. 8.7

Выполним расчет основной системы на действие заданных нагрузок и парного единичного момента $\bar{X}_1 = 1$ и построим эпюры M_P и \bar{M}_1 (рис. 8.7, в, з). Вычисляем коэффициент и грузовой член канонического уравнения:

$$\delta_{11} = \sum_i \int_0^l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{1,67}{EJ},$$

$$\Delta_{1P} = \sum_i \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M_P}{EJ} dx = -\frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 45 \cdot 3 \cdot 0,5 - \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{20 \cdot 4^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 =$$

$$= -\frac{60,4}{EJ}.$$

Решаем каноническое уравнение:

$$\frac{1}{EJ} (1,67X_1 - 60,4) = 0, \quad X_1 = M_B = 36,25 \text{ кНм}.$$

Направление парного неизвестного $X_1 = M_B$ принято в начале расчета правильно. Производим расчет основной системы на совместное действие заданных нагрузок и моментов $M_B = 36,25$ кНм (рис. 8.8, а). Расчет балок AB и BC производим раздельно.

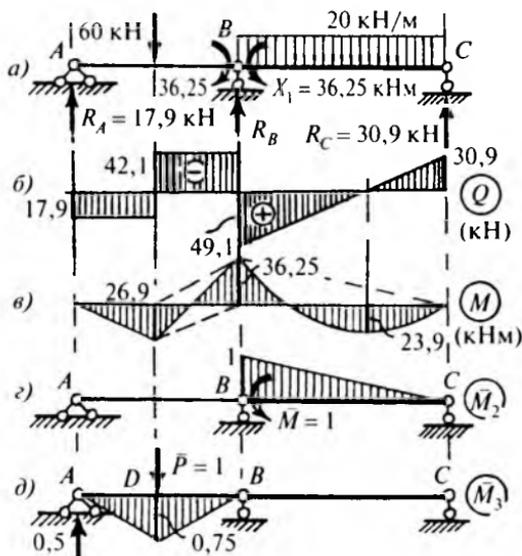


Рис. 8.8

$$\sum M_B^{лсв} = 0, \quad 3R_A - 60 \cdot 1,5 + 36,25 = 0, \quad R_A = 17,9 \text{ кН};$$

$$\sum M_B^{\text{прав}} = 0, \quad -4R_C + 20 \cdot 4 \cdot 2 - 36,25 = 0, \quad R_C = 30,9 \text{ кН.}$$

Эпюры Q и M приведены на рис. 8.8, б, в. Опорная реакция R_B на промежуточной опоре B равна $R_B = 42,1 + 49,1 = 91,2$ кН. Вычисляем значение максимального изгибающего момента в пределах правого пролета:

$$M_{\max} = \frac{Q_C^2}{2q} = \frac{30,9^2}{2 \cdot 20} = 23,9 \text{ кНм.}$$

Для кинематической проверки правильности решения «перемножим» окончательную эпюру M с единичной эпюрой \bar{M}_1 .

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_B &= \sum_i \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[-\frac{1}{2} \cdot 26,9 \cdot 1,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1,5}{6} (-2 \cdot 26,9 \cdot 0,5 + 2 \cdot 36,25 \cdot 1 - 26,9 \cdot 1 + 36,25 \cdot 0,5) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{2EJ} \left(\frac{1}{2} \cdot 36,25 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{20 \cdot 4^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \right) = \frac{1}{EJ} (46,8 - 46,84) = \\ &= -\frac{0,04}{EJ}. \end{aligned}$$

Относительная погрешность равна

$$\Delta\% = \frac{0,04}{46,8} \cdot 100\% = 0,085\%.$$

Такая относительная погрешность вполне допустима.

Для определения угла поворота сечения балки на опоре B и прогиба в середине левого пролета приложим к основной системе в сечениях B и D единичный момент и единичную силу, построим единичные эпюры \bar{M}_2 и \bar{M}_3 (рис. 8.8, г, д) и «перемножим» их с окончательной эпюрой M .

$$\begin{aligned} \varphi_B &= \sum_i \int_0^l \frac{\bar{M}_2 M}{EJ} dx = \frac{1}{2EJ} \left(\frac{1}{2} \cdot 36,25 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{20 \cdot 4^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \right) = -\frac{2,5}{EJ}, \\ \nu_D &= \sum_i \int_0^l \frac{\bar{M}_3 M}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} \cdot 0,75 \cdot 1,5 \left(2 \frac{2}{3} \cdot 26,9 - \frac{1}{3} \cdot 36,25 \right) \right] = \frac{13,4}{EJ}. \end{aligned}$$

Поворот сечения B происходит в направлении, противоположном действию единичного момента, то есть по ходу часовой стрелки. Прогиб балки в сечении D происходит вниз.

Задача 8.3

Для статически неопределимой рамы (рис. 8.9) требуется построить эпюры M , Q , N и определить горизонтальное перемещение опоры B и угол поворота жесткого узла C . Жесткость стойки AC в три раза больше жесткости ригеля BC .

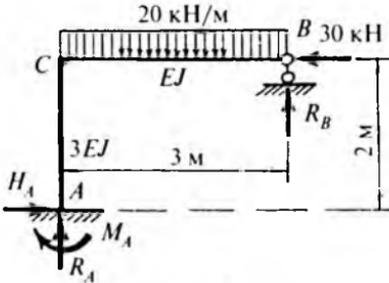


Рис. 8.9

Данная рама один раз статически неопределима ($n = 4 - 3 = 1$). Для образования основной системы отбросим опору B (рис. 8.10, а). Неизвестная опорная реакция подлежит определению из канонического уравнения метода сил: $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0$, характеризующего отсутствие вертикального перемещения на опоре B .

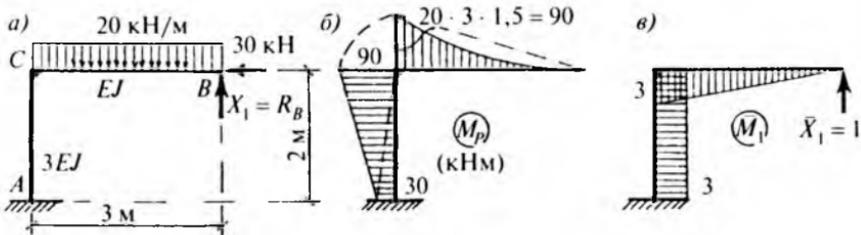


Рис. 8.10

Построим эпюры изгибающих моментов в основной системе от действия заданных нагрузок и единичной силы, приложенной в сечении B по направлению реакции R_B (рис. 8.10, б и 8.10, в). «Перемножая» эти эпюры между собой, определим коэффициент и грузовой член канонического уравнения:

$$\delta_{11} = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EJ} dx = \frac{1}{3EJ} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 = \frac{15}{EJ},$$

$$\Delta_{1P} = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{\bar{M}_1 M_P}{EJ} dx = -\frac{1}{3EJ} \cdot \frac{1}{2} (90 + 30) \cdot 2 \cdot 3 -$$

$$-\frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{3} \cdot 90 \cdot 3 \cdot \frac{3}{4} \cdot 3 = -\frac{322,5}{EJ}.$$

Решаем каноническое уравнение и раскрываем статическую неопределимость задачи.

$$\frac{1}{EJ} (15X_1 - 322,5) = 0, \quad X_1 = R_B = 21,5 \text{ кН}.$$

Произведем расчет основной системы на суммарное действие заданных нагрузок и найденной силы $X_1 = R_B$ (рис. 8.11, а). Значения изгибающих моментов в характерных сечениях стержней равны

$$M_C = 20 \cdot 3 \cdot 1,5 - 21,5 \cdot 3 = 25,5 \text{ кНм (растянуты верхние волокна),}$$

$$M_A = 25,5 - 30 \cdot 2 = -34,5 \text{ кНм (растянуты правые волокна),}$$

$$M_{\max} = \frac{Q_B^2}{2q} = \frac{21,5^2}{2 \cdot 20} = 11,6 \text{ кНм (растянуты нижние волокна).}$$

Эпюры M , Q и N приведены на рис. 8.11, б, в, г.

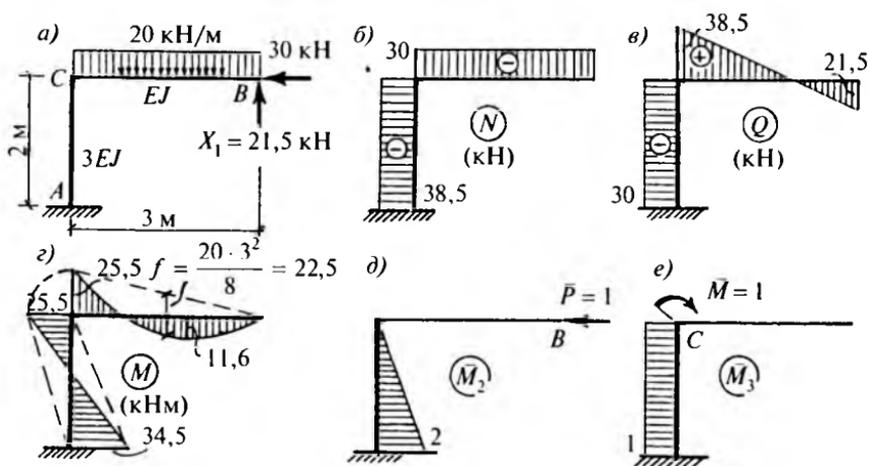


Рис. 8.11

Для кинематической проверки «перемножим» окончательную эпюру M с единичной эпюрой \bar{M}_1 ,

$$v_B = \Delta_1 = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{\bar{M}_1 M}{EJ} dx = \frac{1}{3EJ} \cdot \frac{1}{2} (34,5 - 25,5) \cdot 2 \cdot 3 + \\ + \frac{1}{EJ} \left(\frac{2}{3} \cdot 22,5 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 25,5 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right) = \frac{1}{EJ} (76,5 - 76,5) = 0.$$

Задача решена правильно. Для определения горизонтального перемещения опоры B и угла поворота узла C приложим в этих сечениях основной системы единичные силу и момент и построим единичные эпюры (рис. 8.11, d , e). «Перемножая» эти эпюры с эпюрой M , получаем

$$u_B = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{\bar{M}_2 M}{EJ} dx = \frac{1}{3EJ} \cdot \frac{2}{6} (2 \cdot 34,5 \cdot 2 - 25,5 \cdot 2) = \frac{9,67}{EJ},$$

$$\varphi_C = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{\bar{M}_3 M}{EJ} dx = -\frac{1}{3EJ} \cdot \frac{1}{2} (34,5 - 25,5) \cdot 2 \cdot 1 = -\frac{3}{EJ}.$$

Опора B перемещается влево, узел C поворачивается против хода часовой стрелки.

Задача 8.4

Для стального прокатного двутавра I36, нагруженного по схеме на рис. 8.12, a , требуется построить эпюры M и Q . Между балкой и

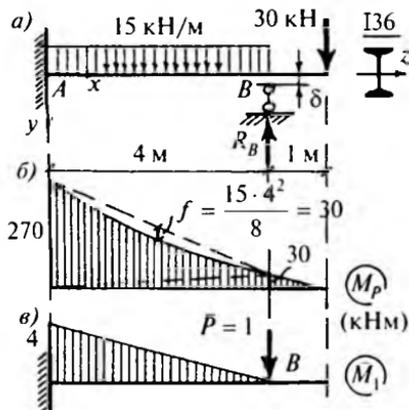


Рис. 8.12

промежуточной опорой B в ненагруженном состоянии имеется зазор $\delta = 1,2$ см. Модуль упругости стали $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа = $2,1 \cdot 10^4$ кН/см².

Отбросим опору B и определим в этом сечении прогиб балки от действия заданных нагрузок. Для этого используем метод Мора и построим грузовую и единичную эпюры изгибающих моментов (рис. 8.12, б, в). «Перемножая» эти эпюры по правилу А.К. Верещагина, получаем

$$\begin{aligned} v_{BP} &= \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M_P}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \left(\frac{2}{3} \cdot 270 + \frac{1}{3} \cdot 30 \right) - \frac{2}{3} \cdot 30 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \right] = \\ &= \frac{1360}{EJ} = \frac{1360 \cdot 10^6}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 13380} = 4,84 \text{ см,} \end{aligned}$$

где $J_z = 13380$ см⁴ — момент инерции сечения двутавра 136.

При «перемножении» эпюра M_P разбита на два треугольника и квадратную параболу.

Поскольку $v_{BP} > \delta = 1,2$ см, при действии нагрузок зазор между балкой и опорой будет выбран, и балка будет работать как один раз статически неопределимая. Для решения задачи введем в сечении B взамен отброшенной опоры неизвестную силу $X_1 = R_B$. Для ее определения составим каноническое уравнение метода сил, характеризующее равенство прогиба в сечении B начальному зазору: $v_B = \delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = \delta = 1,2$ см, где $\Delta_{1P} = v_{BP} = 4,84$ см. Определяем коэффициент уравнения:

$$\delta_{11} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{21,33}{EJ}.$$

Решаем каноническое уравнение:

$$\frac{21,33}{EJ} X_1 + 4,84 = 1,2 \text{ см,}$$

$$X_1 = -\frac{(4,84 - 1,2) \cdot 2,1 \cdot 10^4 \cdot 13380}{21,33 \cdot 10^6} = -47,9 \text{ кН.}$$

Знак минус указывает, что сила $X_1 = R_B$ направлена в сторону, противоположную действию единичной силы, то есть вверх. Производим расчет основной системы на действие силы X_1 и заданных нагрузок (рис. 8.13, а). Значения изгибающего момента в характерных сечениях балки равны

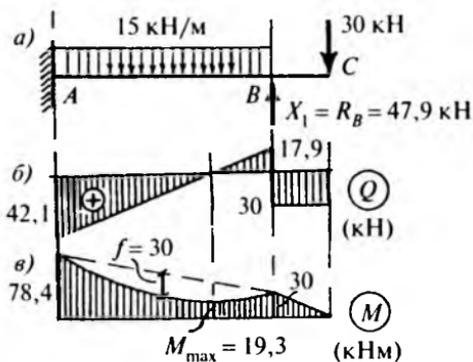


Рис. 8.13

$M_A = 47,9 \cdot 4 - 30 \cdot 5 - 15 \cdot 4 \cdot 2 = -78,4$ кНм (растянуты верхние волокна),

$M_{\max} = M_B + \frac{Q_B^2}{2q} = -30 + \frac{17,9^2}{2 \cdot 15} = -19,3$ кНм (растянуты верхние волокна).

Эпюры внутренних усилий приведены на рис. 8.13, б, в.

Для кинематической проверки правильности решения «перемножим» окончательную эпюру M и единичную эпюру M_1 .

$$\begin{aligned} v_B &= \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \left(\frac{2}{3} \cdot 78,4 + \frac{1}{3} \cdot 30 \right) - \frac{2}{3} \cdot 30 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \right] = \\ &= \frac{338}{EJ} = \frac{338 \cdot 10^6}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 13380} = 1,2 \text{ см} = \delta. \end{aligned}$$

Задача решена правильно. Определяем наибольшие нормальные напряжения в балке:

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{78,4 \cdot 10^2}{13380} \cdot 18 = 10,55 \text{ кН/см}^2 = 105,5 \text{ МПа}.$$

Задача 8.5

Для балки на рис. 8.14, а требуется построить эпюры Q и M и определить угол поворота на опоре B . Опора B является упругой с жесткостью $c = 8$ кН/см. Модуль упругости материала балки $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа $= 2,1 \cdot 10^4$ кН/см².

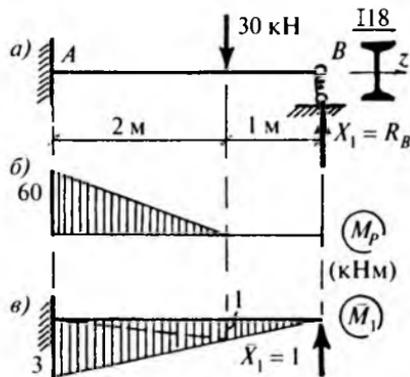


Рис. 8.14

Балка является один раз статически неопределимой. Отбросим опору B и введем в этом сечении балки неизвестную силу $X_1 = R_B$. Поскольку опора B является упругой, она допускает вертикальное перемещение (осадку), равное $\delta = S/c$, где $S = -X_1$ — сила, передаваемая балкой на опору B . С учетом осадки опоры B каноническое уравнение метода сил имеет следующий вид:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = \delta = -\frac{X_1}{c}, \quad \left(\delta_{11} + \frac{1}{c}\right)X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

Используем для решения задачи метод Мора и построим грузовую и единичную эпюры изгибающих моментов (рис. 8.14, б, в). «Перемножая» эти эпюры по правилу А.К. Верещагина, получаем

$$\delta_{11} = \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 = \frac{9}{EJ},$$

$$\Delta_{1P} = \int \frac{\bar{M}_1 M_P}{EJ} dx = -\frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 2 \left(\frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) = -\frac{140}{EJ}.$$

Решаем каноническое уравнение:

$$\left(\frac{9 \cdot 10^6}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 1290} + \frac{1}{8} \right) X_1 - \frac{140 \cdot 10^6}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 1290} = 0, \quad X_1 = R_B = 11,3 \text{ кН},$$

где $J_z = 1290 \text{ см}^4$ — момент инерции сечения двутавра I18.

Статическая неопределимость задачи раскрыта. Эпюры изгибающих моментов и поперечных сил приведены на рис. 8.15, б, в. В качестве проверки правильности решения определим осадку опоры B .

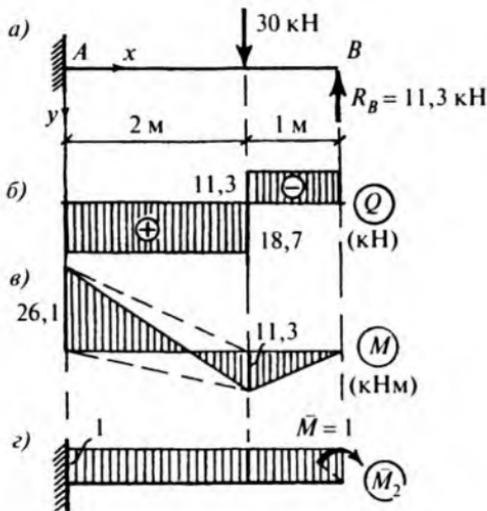


Рис. 8.15

$$\delta = \frac{X_1}{c} = \frac{11,3}{8} = 1,41 \text{ см.}$$

Эта величина должна быть равна прогибу балки в сечении *B*. «Перемножая» по правилу А.К. Верещагина эпюры *M* и \bar{M}_1 , получаем

$$\begin{aligned} v_B &= \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[\frac{2}{6} (-2 \cdot 26,1 \cdot 3 + 2 \cdot 11,3 \cdot 1 - 26,1 \cdot 1 + 11,3 \cdot 3) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \cdot 11,3 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right] = -\frac{38,3}{EJ} = -\frac{38,3 \cdot 10^6}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 1290} = -1,41 \text{ см.} \end{aligned}$$

Знак минус указывает, что направление перемещения точки *B* противоположно направлению действия единичной силы, то есть перемещение происходит вниз. Задача решена правильно. Наибольшие нормальные напряжения в балке равны

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{26,1 \cdot 10^2}{1290} \cdot 9 = 18,2 \text{ кН/см}^2 = 182 \text{ МПа.}$$

Для определения угла поворота сечения балки на опоре *B* приложим в этом сечении единичный момент, построим единичную эпюру \bar{M}_2 (рис. 8.15, *z*) и «перемножим» ее с эпюрой *M*.

$$\varphi_B = \int_0^l \frac{\bar{M}_2 M}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} (26,1 - 11,3) \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 11,3 \cdot 1 \right] \cdot 1 = \frac{9,15}{EJ}.$$

Задача 8.6

Стальная консольная труба $\varnothing 120 \times 6$ мм нагружена на конце сосредоточенной силой и опирается в средней части на стальную двутавровую балку II6 (рис. 8.16). Требуется определить величину силы, передаваемой трубой на двутавр, построить эпюры изгибающих моментов для обеих балок и определить в каждой из них наибольшие нормальные напряжения. Модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа $= 2,1 \cdot 10^4$ кН/см².

Данная задача является один раз статически неопределимой. Обозначим силу взаимодействия между балками X_1 (парное неизвестное). Каноническое уравнение метода сил имеет обычный вид: $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0$. В данной задаче это уравнение выражает условие равенства прогибов обеих балок в месте их контакта, то есть отсутствие взаимного перемещения по направлению сил X_1 .

Произведем расчет балок на действие нагрузки и единичных сил $\bar{X}_1 = 1$ и построим грузовую и единичные эпюры изгибающих моментов (рис. 8.17 и 8.18). «Перемножая» эти эпюры по правилу А.К. Верещагина, получаем

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{1}{EJ_{z_1}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,8 \cdot 1,8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,8 + \\ &+ \frac{1}{EJ_{z_2}} \left(\frac{1}{2} \cdot 0,96 \cdot 2,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,96 + \frac{1}{2} \cdot 0,96 \cdot 1,6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,96 \right) = \\ &= \frac{1,944}{EJ_{z_1}} + \frac{1,23}{EJ_{z_2}}, \\ \Delta_{1P} &= -\frac{1}{EJ_{z_1}} \cdot \frac{1,8}{6} (2 \cdot 32,4 \cdot 1,8 + 10,8 \cdot 1,8) = -\frac{40,82}{EJ_{z_1}}, \end{aligned}$$

где J_{z_1} и J_{z_2} — моменты инерции поперечных сечений обеих балок:

$$J_{z_1} = \frac{\pi}{4} [6^4 - 5,4^4] = 350 \text{ см}^4, \quad J_{z_2} = 873 \text{ см}^4.$$

Решаем каноническое уравнение и определяем силу взаимодействия между балками:

$$\frac{1}{E} \left[\left(\frac{1,944 \cdot 10^6}{350} + \frac{1,23 \cdot 10^6}{873} \right) X_1 - \frac{40,82 \cdot 10^6}{350} \right] = 0, \quad X_1 = 16,75 \text{ кН}.$$

Построим эпюры изгибающих моментов и определим наибольшие нормальные напряжения в балках (рис. 8.19 и 8.20).

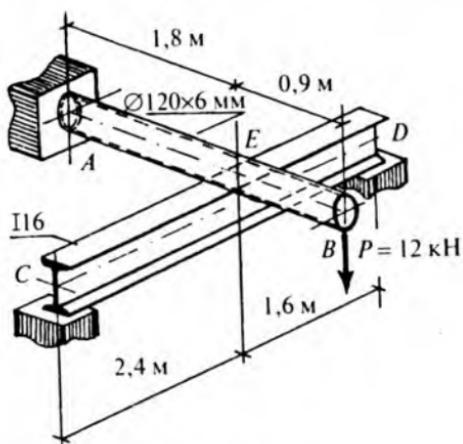


Рис. 8.16

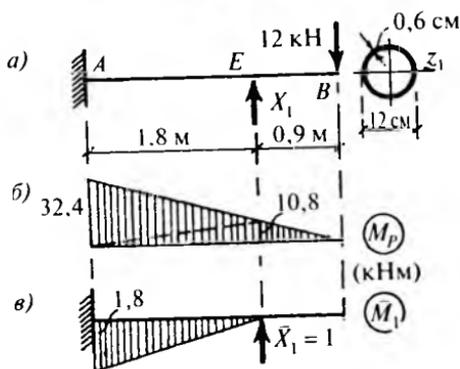


Рис. 8.17

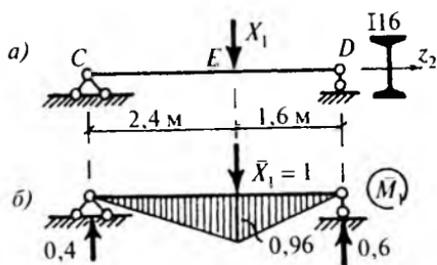


Рис. 8.18

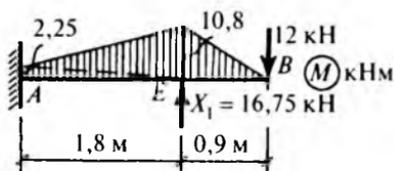


Рис. 8.19

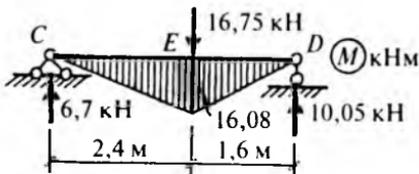


Рис. 8.20

Балка AB (труба $\varnothing 120 \times 6$ мм)

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{10,8 \cdot 10^2}{350} \cdot 6 = 18,5 \text{ кН/см}^2 = 185 \text{ МПа.}$$

Балка CD (двутавр II6)

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{16,08 \cdot 10^2}{873} \cdot 8 = 14,7 \text{ кН/см}^2 = 147 \text{ МПа.}$$

Определим вертикальное перемещение точки контакта балок (сечение E). Для этого «перемножим» эпюру M в балке CD (рис. 8.20) с единичной эпюрой \bar{M}_1 в этой балке (рис. 8.18, б).

$$\begin{aligned} v_E &= \frac{1}{EJ_z} \left(\frac{1}{2} \cdot 16,08 \cdot 2,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,96 + \frac{1}{2} \cdot 16,08 \cdot 1,6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,96 \right) = \\ &= \frac{20,6}{EJ_z} = \frac{20,6 \cdot 10^6}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 873} = 1,12 \text{ см.} \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 8.7. Для балок на рис. 8.21 требуется раскрыть статическую неопределенность с помощью метода сил, определить опорные реакции, построить эпюры Q и M и определить значения прогиба в сечениях C и углов поворота сечений B .

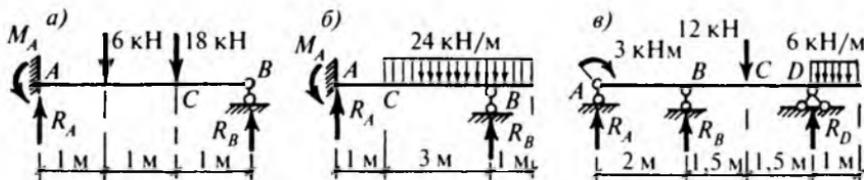


Рис. 8.21

Ответ:

Таблица 8.1

Схема	Опорные реакции				Перемещения	
	R_A , кН	R_B , кН	R_D , кН	M_A , кНм	EJv_C	$EJ\varphi_B$
а	13,78	10,22	—	11,33	4,48	-7,0
б	32,20	63,8	—	32,8	11,03	-18,4
в	-3,375	9,625	11,75	—	2,95	1,5

Задача 8.8. Для стальных балок на рис. 8.22, имеющих начальные зазоры δ на опорах B , требуется определить опорные реакции, построить эпюры Q и M и определить прогиб в сечениях C и углы поворота сечений B . Модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа.

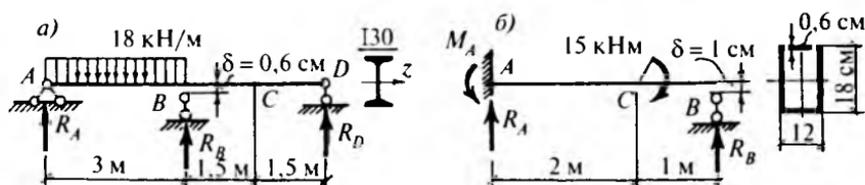


Рис. 8.22

Ответ:

Таблица 8.2

Схема	Опорные реакции				Перемещения	
	R_A , кН	R_B , кН	R_D , кН	M_A , кНм	v_C , см	φ_B
а	33,535	13,93	6,535	—	0,374	-0°02'
б	-3,015	3,015	—	5,955	0,485	0°17'

Задача 8.9. Для стальных балок на рис. 8.23, имеющих пружинную опору B с жесткостью $c = 12$ кН/см, требуется определить опорные реакции, построить эпюры Q и M и вычислить значения прогиба в сечениях C (схема a) и B (схема b), угла поворота сече-

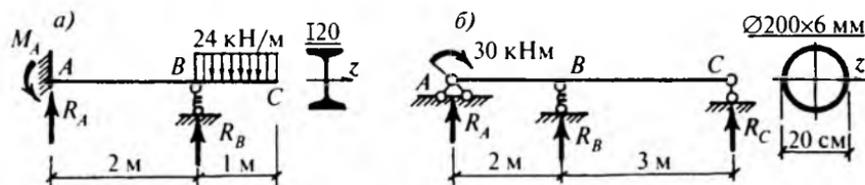


Рис. 8.23

ний V и наибольших нормальных напряжений. Модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа.

Ответ:

Таблица 8.3

Схема	Опорные реакции				Перемещения		$\sigma_{\text{нб.}}$, МПа
	R_A , кН	R_B , кН	R_C , кН	M_A , кНм	v , см	φ_B	
а	9,05	14,95	—	30,1	$v_C = 2,41$	$0^\circ 37'$	164
б	-11,33	8,87	2,45	—	$v_B = 0,74$	$-0^\circ 12'$	174

Задача 8.10. Для рам на рис. 8.24 требуется раскрыть статическую неопределимость с помощью метода сил, построить эпюры Q и M и определить значения углов поворота сечений A , вертикальных перемещений сечений C (рис. 8.24, а, в) и горизонтального перемещения сечения B (рис. 8.24, б).

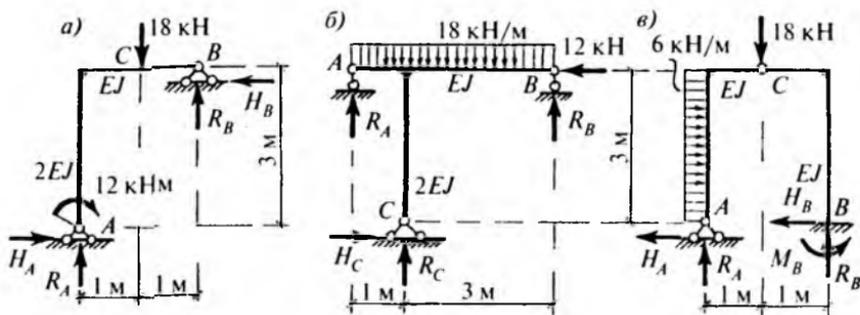


Рис. 8.24

Ответ:

Таблица 8.4

Схема	Опорные реакции, кН, кНм			Перемещения и углы поворота		
	Опора А	Опора В	Опора С	$EJ\varphi_A$	EJv_C	$EJ\mu_B$
а	$R_A = 12,21$ $H_A = 6,14$	$R_B = 5,79$ $H_B = 6,14$	—	4,395	1,385 (вниз)	0
б	$R_A = 20,25$	$R_B = 18,75$	$R_C = 33,0$ $H_C = 12,0$	2,208	0	66,25 (влево)
в	$R_A = 3,03$ $H_A = 7,99$	$R_B = 14,97$ $H_B = 10,01$ $M_B = 15,06$	—	12,8	4,855 (вниз)	0

Глава 9

РАСЧЕТ БАЛОК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Балка, расположенная на упругом основании, находится под действием заданных нагрузок и реактивного отпора основания (рис. 9.1). Реактивный отпор равен нагрузке, передаваемой балкой на поверхность основания. Закон изменения реактивного отпора основания не может быть определен из уравнений равновесия. Для расчета балки необходимо ввести предположение о зависимости между реактивным отпором основания и прогибом балки, то есть построить расчетную схему или модель упругого основания. В инженерной практике наиболее часто используется модель основания Е. Винклера, для которой принимается линейная зависимость между нагрузкой на основание и осадкой его поверхности. Деформация упругого основания Е. Винклера происходит только в области приложенной к нему нагрузки.

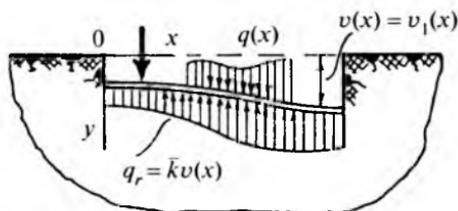


Рис. 9.1

При расчете балки на упругом основании обычно принимается, что прогиб балки $v(x)$ равен осадке поверхности основания $v_1(x)$ (рис. 9.1). Реактивное давление (отпор) основания Е. Винклера под балкой определяется по формуле

$$q_r = \bar{k}v(x) = kbv(x), \quad (9.1)$$

где k — коэффициент пропорциональности, характеризующий жесткость основания (коэффициент постели). Этот коэффициент определяется экспериментально и имеет размерность силы, отнесенной к единице длины в третьей степени, b — ширина подошвы балки.

Изгиб балки на основании Е. Винклера описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$EJv^{IV}(x) + kbv(x) = q(x), \quad (9.2)$$

где EJ — жесткость балки при изгибе, которая принимается постоянной ($EJ = \text{const}$), $q(x)$ — распределенная поперечная нагрузка.

Для удобства интегрирования уравнения (9.2) обычно вводится безразмерная переменная $\xi = \lambda x$, где

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{kb}{4EJ}}. \quad (9.3)$$

Общее решение уравнения (9.2) можно представить в следующем виде:

$$v(\xi) = C_1 e^{\xi} \sin \xi + C_2 e^{\xi} \cos \xi + C_3 e^{-\xi} \sin \xi + C_4 e^{-\xi} \cos \xi + v^*(\xi), \quad (9.4)$$

где C_1, C_2, C_3 и C_4 — постоянные интегрирования и $v^*(\xi)$ — частное решение уравнения (9.2).

Угол поворота поперечных сечений балки, изгибающий момент и поперечная сила определяются по формулам теории изгиба балок:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\xi) &= \lambda v'(\xi), \\ M(\xi) &= -EJ\lambda^2 v''(\xi) = -EJ\lambda \varphi'(\xi), \\ Q(\xi) &= -EJ\lambda^3 v'''(\xi) = \lambda M'(\xi). \end{aligned} \right\} \quad (9.5)$$

Наличие в этих формулах параметра λ связано с заменой переменной $\xi = \lambda x$.

Если балка является достаточно длинной, а приложенная к ней нагрузка занимает небольшой участок, удаленный от одного или от обоих концов балки, то ее можно отнести к категории так называемых бесконечно длинных и полубесконечных балок. Изгиб таких балок на упругом основании Е. Винклера описывается однородным дифференциальным уравнением $EJv^{IV}(x) + kbv = 0$ и решением (9.4), в котором надо положить $v^*(\xi) = 0$ и отбросить возрастающие ветви.

Рассмотрим длинную балку, нагруженную сосредоточенной силой на достаточном удалении от обоих концов (рис. 9.2). Сохранив для правой части ($\xi > 0$) экспоненты в отрицательной степени (затухающие ветви решения (9.4)) и использовав условия в точке приложения силы: $\xi = 0, \varphi = 0, Q_{\text{прав}} = -P/2$, получим:

$$\left. \begin{aligned} v(\xi) &= \frac{P}{8EJ\lambda^3} e^{-\xi} (\cos \xi + \sin \xi), \\ \varphi(\xi) &= \frac{P}{4EJ\lambda^2} e^{-\xi} \sin \xi, \\ M(\xi) &= \frac{P}{4\lambda} e^{-\xi} (\cos \xi - \sin \xi), \\ Q(\xi) &= -\frac{P}{2} e^{-\xi} \cos \xi. \end{aligned} \right\} \quad (9.6)$$

Для длинной балки, нагруженной сосредоточенной силой на конце (рис. 9.3), используем условия: $\xi = 0$, $M = 0$, $Q = -P$ и получим:

$$\left. \begin{aligned} v(\xi) &= \frac{P}{2EJ\lambda^3} e^{-\xi} \cos \xi, \\ \varphi(\xi) &= -\frac{P}{2EJ\lambda^2} e^{-\xi} (\cos \xi + \sin \xi), \\ M(\xi) &= -\frac{P}{\lambda} e^{-\xi} \sin \xi, \\ Q(\xi) &= -Pe^{-\xi} (\cos \xi - \sin \xi). \end{aligned} \right\} \quad (9.7)$$

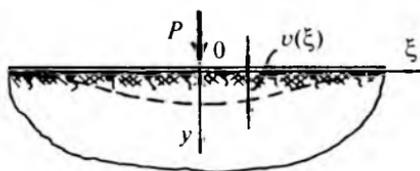


Рис. 9.2

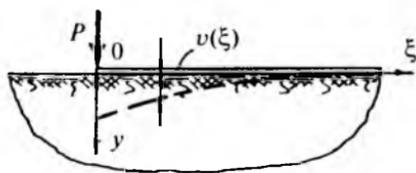


Рис. 9.3

При $\xi \rightarrow \infty$ все величины в формулах (9.6) и (9.7) стремятся к нулю (затухают).

Решения (9.6) и (9.7) при $\bar{P} = 1$ можно рассматривать как функции влияния. С их помощью можно произвести расчет длинных балок на одновременное действие системы сосредоточенных сил и распределенных поперечных нагрузок, достаточно удаленных от концов балки (рис. 9.4). При этом балку можно отнести к категории длинных, если расстояние от нагрузки до концов балки превышает следующее значение:

$$l_0 = \frac{1,5\pi}{\lambda} = 1,5\pi\sqrt[4]{\frac{4EJ}{kb}}. \quad (9.8)$$

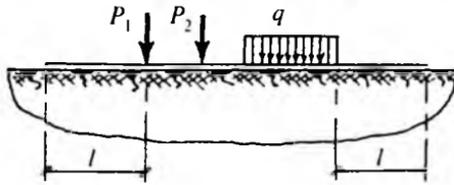


Рис. 9.4

При расчете коротких балок на упругом основании необходимо учитывать взаимное влияние напряженного и деформированного состояний балки на ее обоих концах, в силу чего в общем решении (9.4) надо удерживать и возрастающие, и затухающие ветви. Решение для коротких балок на упругом основании удобно записать в форме метода начальных параметров. При этом решение однородного дифференциального уравнения, соответствующего (9.2), имеет следующий вид:

$$v(\xi) = v_0 Y_1(\xi) + \frac{\varphi_0}{\lambda} Y_2(\xi) - \frac{M_0}{EJ\lambda^2} Y_3(\xi) - \frac{Q_0}{EJ\lambda^3} Y_4(\xi). \quad (9.9)$$

В решении (9.9) величины v_0 , φ_0 , M_0 и Q_0 являются начальными параметрами. Они представляют собой прогиб, угол поворота, изгибающий момент и поперечную силу в начальном сечении балки при $\xi = 0$. Функции Y_1 , Y_2 , Y_3 и Y_4 имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} Y_1(\xi) &= \operatorname{ch} \xi \cos \xi, \\ Y_2(\xi) &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch} \xi \sin \xi + \operatorname{sh} \xi \cos \xi), \\ Y_3(\xi) &= \frac{1}{2} \operatorname{sh} \xi \sin \xi, \\ Y_4(\xi) &= \frac{1}{4}(\operatorname{ch} \xi \sin \xi - \operatorname{sh} \xi \cos \xi), \end{aligned} \right\} \quad (9.10)$$

где $\operatorname{sh} \xi$ и $\operatorname{ch} \xi$ — гиперболические функции, определяемые по формулам

$$\operatorname{sh} \xi = \frac{e^\xi - e^{-\xi}}{2}, \quad \operatorname{ch} \xi = \frac{e^\xi + e^{-\xi}}{2}.$$

Функции (9.10) обычно называются функциями А.Н. Крылова. Для них справедливы следующие дифференциальные зависимости:

$$\frac{dY_1}{d\xi} = -4Y_4, \quad \frac{dY_2}{d\xi} = Y_1, \quad \frac{dY_3}{d\xi} = Y_2, \quad \frac{dY_4}{d\xi} = Y_3. \quad (9.11)$$

При $\xi = 0$ имеем $Y_1 = 1, Y_2 = Y_3 = Y_4 = 0$.

Продифференцировав решение (9.9) в соответствии с формулами (9.5), получим выражения для углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил в балке на упругом основании:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\xi) &= -4\lambda v_0 Y_4 + \varphi_0 Y_1 - \frac{M_0}{EJ\lambda} Y_2 - \frac{Q_0}{EJ\lambda^2} Y_3, \\ M(\xi) &= 4EJ\lambda^2 v_0 Y_3 + 4EJ\lambda\varphi_0 Y_4 + M_0 Y_1 + \frac{Q_0}{\lambda} Y_2, \\ Q(\xi) &= 4EJ\lambda^3 v_0 Y_2 + 4EJ\lambda^2\varphi_0 Y_3 - 4\lambda M_0 Y_4 + Q_0 Y_1. \end{aligned} \right\} \quad (9.12)$$

Учет влияния нагрузок, приложенных в пределах длины балки, наиболее просто произвести с помощью принципа независимости действия сил (принципа суперпозиции). При этом к выражению для прогиба (9.9) надо добавить функции, вид которых соответствует частным интегралам в решении (9.9). Приведем выражение для прогиба балки при наличии трех основных типов нагрузки и промежуточного шарнира (рис. 9.5).

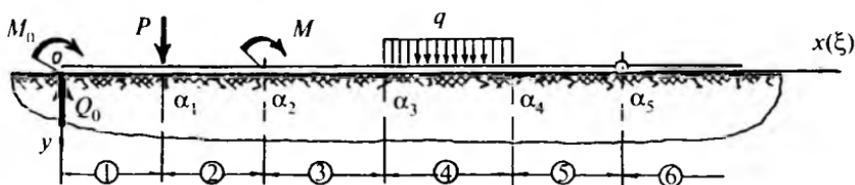


Рис. 9.5

$$\begin{aligned} v(\xi) &= v_0 Y_1(\xi) + \frac{\varphi_0}{\lambda} Y_2(\xi) - \frac{M_0}{EJ\lambda^2} Y_3(\xi) - \frac{Q_0}{EJ\lambda^3} Y_4(\xi) \Big|_1 + \\ &+ \frac{P}{EJ\lambda^3} Y_4(\xi - \alpha_1) \Big|_2 - \frac{M}{EJ\lambda^2} Y_3(\xi - \alpha_2) \Big|_3 + \\ &+ \frac{q}{4EJ\lambda^4} [1 - Y_1(\xi - \alpha_3)] \Big|_4 - \frac{q}{4EJ\lambda^4} [1 - Y_1(\xi - \alpha_4)] \Big|_5 + \\ &+ \frac{\Delta\varphi}{\lambda} Y_2(\xi - \alpha_5) \Big|_6, \end{aligned} \quad (9.13)$$

где вертикальная черта с соответствующей цифрой означает границы участков с различными законами изменения прогиба.

В начале расчета всегда известны два начальных параметра. Другие два начальных параметра, а также скачки $\Delta\varphi$ в промежуточном шарнире подлежат определению из соответствующих граничных условий, примеры постановки которых рассмотрены ниже.

1. Свободно расположенная балка (рис. 9.6).

В начальном сечении $M_0 = 0$, $Q_0 = -P$. Для определения v_0 и φ_0 используем граничные условия: при $x = l$ ($\xi = \xi_1$), $M = 0$, $Q = 0$.

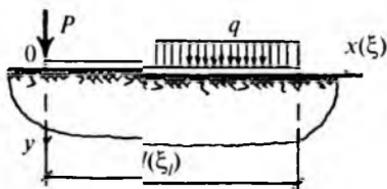


Рис. 9.6

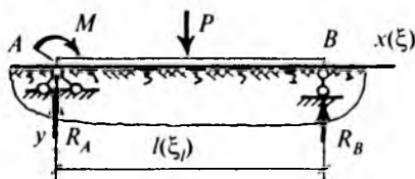


Рис. 9.7

2. Балка с шарнирными опорами (рис. 9.7).

В начальном сечении $v_0 = 0$, $M_0 = M$. Для определения φ_0 и Q_0 используем граничные условия: при $\xi = \xi_1$, $v = 0$, $M = 0$.

3. Балка с жесткой заделкой (рис. 9.8).

В начальном сечении $v_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$. Для определения M_0 и Q_0 используем граничные условия: при $x = l$ ($\xi = \xi_1$), $M = -M$, $Q = 0$.

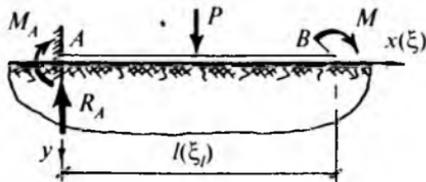


Рис. 9.8

4. Балка с промежуточным шарниром (рис. 9.9).

В начальном сечении $M_0 = -M$, $Q = 0$. Для определения v_0 , φ_0 и скачка $\Delta\varphi$ используем условия: при $x = a$ ($\xi = \alpha$), $M = 0$; при $x = l$ ($\xi = \xi_1$), $M = 0$, $Q = P_2$.

Используя граничные условия и дополнительные условия в промежуточных шарнирах, получим систему алгебраических уравне-

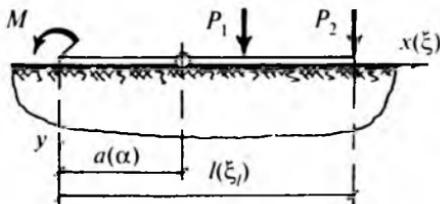


Рис. 9.9

ний относительно всех неизвестных величин. После их определения расчет балки на упругом основании сводится к вычислению v , φ , M и Q с помощью уравнения (9.13) и формул (9.5) в различных сечениях балки и к построению соответствующих эпюр. В сечении с наибольшим изгибающим моментом надо определить наибольшие нормальные напряжения и проверить выполнение условия прочности балки.

Расчет балки на упругом основании существенно упрощается, если балку считать жесткой и при определении реактивных давлений основания не учитывать ее изгиб. В этом случае реактивный отпор основания E . Винклера изменяется по линейному закону, а эпюра реактивного отпора представляет собой в общем случае трапецию (рис. 9.10). Ординаты реактивных давлений на краях балки q_A и q_B определяются из уравнений ее равновесия.

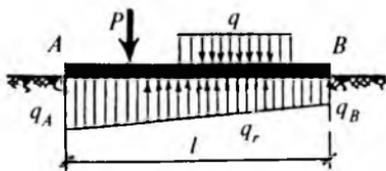


Рис. 9.10

Балку можно отнести к категории жестких, если ее длина l меньше следующего значения:

$$l_0 = \frac{1,2}{\lambda} = 1,2\sqrt{\frac{4EJ}{kb}}. \quad (9.14)$$

Осадка жесткой балки определяется по формуле

$$v = \frac{q_r}{k} = \frac{q_r}{kb}. \quad (9.15)$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 9.1

Стальной рельс Р65 длиной 12,5 м, расположенный на упругом основании, нагружен на конце сосредоточенной силой $P = 120$ кН (рис. 9.11). Приведенный (погонный) коэффициент постели $\bar{k} = 30$ МПа = 3 кН/см². Геометрические характеристики сечения рельса $J_z = 3573$ см⁴, $W_z = 363$ см³, модуль упругости $E = 2,1 \times 10^5$ МПа = $2,1 \cdot 10^4$ кН/см².

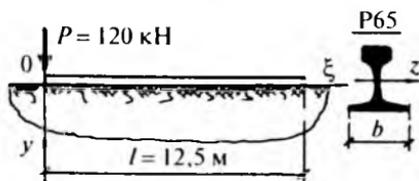


Рис. 9.11

Требуется построить эпюры изгибающих моментов и прогибов рельса и определить наибольшие нормальные напряжения.

Вычисляем параметр λ и устанавливаем категорию балки.

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{\bar{k}}{4EJ}} = \sqrt[4]{\frac{3}{4 \cdot 2,1 \cdot 10^4 \cdot 3573}} = 0,01 \text{ см}^{-1}.$$

Поскольку длина балки $l = 1250$ см превышает значение

$$l_0 = \frac{1,5\pi}{\lambda} = \frac{1,5\pi}{0,01} = 471 \text{ см},$$

балку можно отнести к категории длинных и для ее расчета использовать формулы (9.7). Вычисляем по первой и третьей формулам (9.7) значения v и M в сечениях балки с шагом 1 м, начиная с нагруженного конца. Результаты расчета приведены в табл. 9.1. По этим результатам построены эпюры M и v (рис. 9.12). При $x > 6$ м прогиб и изгибающий момент практически равны нулю.

Вычисляем значения наибольших нормальных напряжений в сечении балки с наибольшим изгибающим моментом:

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{M_{\text{нб}}}{W_z} = \frac{37,14 \cdot 10^2}{363} = 10,2 \text{ кН/см}^2 = 102 \text{ МПа}.$$

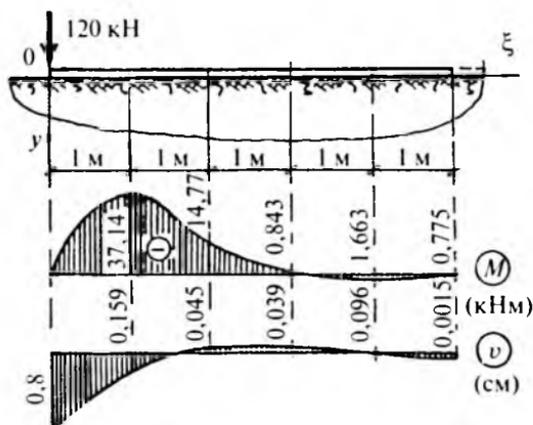


Рис. 9.12

Таблица 9.1

№ п/п	x, см	ξ	M, кНм	v, см
1	0	0,0	0	0,8
2	100	1,0	-37,14	0,159
3	200	2,0	-14,77	-0,045
4	300	3,0	-0,843	-0,039
5	400	4,0	1,663	-0,0096
6	500	5,0	0,775	0,0015
7	600	6,0	0,083	0,0019

Задача 9.2

Стальной рельс P50 длиной $l = 25$ м, расположенный на упругом основании, нагружен в центральной части шестью сосредоточенными силами $P = 100$ кН (рис. 9.13, а). Приведенный коэффициент постели основания $\bar{k} = 26$ МПа = 2,6 кН/см². Геометрические характеристики сечения рельса $J_z = 2016$ см², $W_z = 265$ см³, модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа = 2,1 · 10⁴ кН/см².

Требуется определить изгибающий момент и наибольшие нормальные напряжения в сечении рельса под третьей силой.

Вычисляем параметр λ и устанавливаем категорию балки.

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{\bar{k}}{4EJ}} = \sqrt[4]{\frac{2,6}{4 \cdot 2,1 \cdot 10^4 \cdot 2016}} = 0,0111 \text{ см}^{-1},$$

$$l_0 = \frac{1,5\pi}{\lambda} = \frac{1,5\pi}{0,0111} = 425 \text{ см.}$$

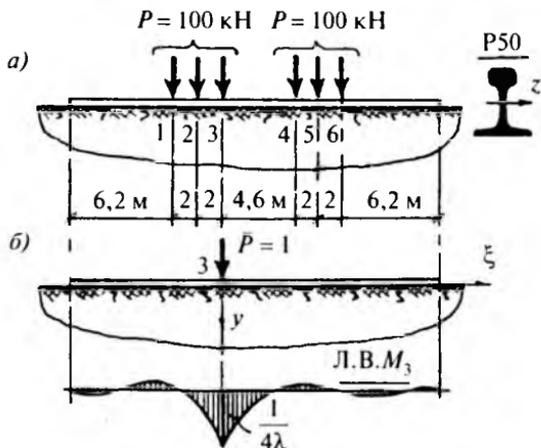


Рис. 9.13

Поскольку расстояния от крайних сил до концов балки превышают значение l_0 , балку можно отнести к категории длинных и для ее расчета использовать решения (9.6). Выше было отмечено, что эти решения при $\bar{P} = 1$ представляют собой функции влияния, а соответствующие эпюры являются линиями влияния.

Для определения изгибающего момента в сечении K длинной балки от действия нескольких сосредоточенных сил надо в этом сечении приложить единичную силу $\bar{P} = 1$ и построить единичную эпюру \bar{M}_K . Эта эпюра и является линией влияния M_K , с помощью которой изгибающий момент M_K можно определить по формуле

$$M_K = M_{1K} P_1 + M_{2K} P_2 + \dots + M_{nK} P_n = \frac{1}{4\lambda} \sum P_n \eta(\xi), \quad (9.16)$$

где $\eta(\xi) = e^{-\xi}(\cos \xi - \sin \xi)$.

В формуле (9.16) M_{1K} , M_{2K} , ..., M_{nK} — ординаты линии влияния M_K в сечениях, где приложены силы P_1 , P_2 , ..., P_n . Функция $\eta(\xi)$ должна вычисляться в этих сечениях.

В нашей задаче для определения изгибающего момента в сечении рельса под третьей силой примем начало отсчета в этом сечении и построим линию влияния M_3 (рис. 9.13, б). При определении M_3 по формуле (9.16) учтем симметрию линии влияния изгибающих моментов, то есть свойство $M(-\xi) = M(\xi)$, в силу чего знак ξ

не влияет на знак изгибающего момента. Результаты вычислений приведены в табл. 9.2.

Таблица 9.2

№ п/п	Номер сечения	x , см	$\xi = \lambda x$	$\eta(\xi)$	P , кН	M_3^i , кНм
1	1	400	4,44	0,0082	100	0,186
2	2	200	2,22	-0,1522	100	-3,459
3	3	0	0	1,0	100	22,730
4	4	460	5,106	0,0079	100	0,180
5	5	660	7,326	-0,0002	100	-0,005
6	6	860	9,546	-0,0001	100	-0,001

$$M_3 = \sum M_3^i = 19,63 \text{ кНм}$$

Нетрудно видеть, что силы, приложенные в сечениях 5 и 6, практически не влияют на величину изгибающего момента в сечении 3. Наибольшие нормальные напряжения в этом сечении равны

$$\sigma_{н6} = \frac{M_3}{W_z} = \frac{19,63 \cdot 10^2}{265} = 7,41 \text{ кН/см}^2 = 74,1 \text{ МПа.}$$

Задача 9.3

Стальная балка сечением I20, расположенная на упругом основании, находится под действием показанной на рис. 9.14 нагрузки. Правый конец балки имеет шарнирную опору. Коэффициент постели (жесткости основания) $k = 3,2 \cdot 10^{-2} \text{ кН/см}^3$. Геометрические характеристики сечения $J_z = 1840 \text{ см}^4$, $W_z = 184 \text{ см}^3$, $b = 10 \text{ см}$, модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2,1 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$.

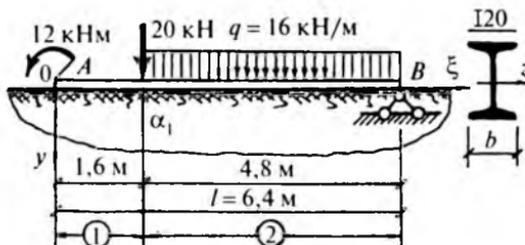


Рис. 9.14

Требуется определить значения M , Q , v и φ в сечениях балки с шагом $l/8 = 0,8$ м, построить эпюры этих величин и вычислить наибольшие нормальные напряжения в балке.

Вычисляем параметр λ и устанавливаем категорию балки:

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{kb}{4EJ}} = \sqrt[4]{\frac{3,2 \cdot 10^{-2} \cdot 10}{4 \cdot 2,1 \cdot 10^4 \cdot 1840}} = 6,745 \cdot 10^{-3} \text{ л/см},$$

$$\xi_l = \lambda l = 6,745 \cdot 10^{-3} \cdot 640 = 4,317.$$

Поскольку приведенная длина ξ_l находится в пределах $1,2 \leq \xi_l \leq 1,5\pi$, балку надо рассматривать как имеющую конечную длину. Нагрузка разбивает балку на два участка (рис. 9.14). Используя метод начальных параметров, записываем с помощью уравнений (9.13), (9.5) и (9.12) выражения для прогибов, углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил в балке:

$$v(\xi) = v_0 Y_1(\xi) + \frac{\varphi_0}{\lambda} Y_2(\xi) - \frac{M_0}{EJ\lambda^2} Y_3(\xi) - \frac{Q_0}{EJ\lambda^3} Y_4(\xi) \Big|_1 + \\ + \frac{P}{EJ\lambda^3} Y_4(\xi - \alpha_1) + \frac{q}{4EJ\lambda^4} |1 - Y_1(\xi - \alpha_1)| \Big|_2,$$

$$\varphi(\xi) = -4\lambda v_0 Y_4(\xi) + \varphi_0 Y_1(\xi) - \frac{M_0}{EJ\lambda} Y_2(\xi) - \frac{Q_0}{EJ\lambda^2} Y_3(\xi) \Big|_1 + \\ + \frac{P}{EJ\lambda^2} Y_3(\xi - \alpha_1) + \frac{q}{EJ\lambda^3} Y_4(\xi - \alpha_1) \Big|_2,$$

$$M(\xi) = 4EJ\lambda^2 v_0 Y_3(\xi) + 4EJ\lambda \varphi_0 Y_4(\xi) + M_0 Y_1(\xi) + \frac{Q_0}{\lambda} Y_2(\xi) \Big|_1 - \\ - \frac{P}{\lambda} Y_2(\xi - \alpha_1) - \frac{q}{\lambda^2} Y_3(\xi - \alpha_1) \Big|_2,$$

$$Q(\xi) = 4EJ\lambda^3 v_0 Y_2(\xi) + 4EJ\lambda^2 \varphi_0 Y_3(\xi) - 4\lambda M_0 Y_4(\xi) + Q_0 Y_1(\xi) \Big|_1 - \\ - P Y_1(\xi - \alpha_1) - \frac{q}{\lambda} Y_2(\xi - \alpha_1) \Big|_2,$$

где ξ — безразмерная переменная, изменяющаяся в пределах $0 \leq \xi \leq 4,317$, α_1 — безразмерная координата границы участков, равная $\alpha_1 = \lambda x_1 = 6,745 \cdot 10^{-3} \cdot 160 = 1,079$.

Начальные параметры равны: $M_0 = -12 \cdot 10^2$ кНсм, $Q_0 = 0$.

Для определения неизвестных начальных параметров v_0 и φ_0 используем граничные условия на правом конце балки (шарнирная опора B): при $x = 6,4$ м ($\xi = \xi_l = 4,317$), $v = 0$, $M = 0$.

Последовательно вычисляем:

$$\lambda = 6,745 \cdot 10^{-3} \text{ 1/см}, \quad EJ = 2,1 \cdot 10^4 \cdot 1840 = 3,864 \cdot 10^7 \text{ кН/см}^2,$$

$$EJ\lambda = 2,606 \cdot 10^5 \text{ кНсм}, \quad EJ\lambda^2 = 1,76 \cdot 10^3 \text{ кН},$$

$$EJ\lambda^3 = 11,86 \text{ кН/см}, \quad EJ\lambda^4 = 7,998 \cdot 10^{-2} \text{ кН/см}^2.$$

Вычислив значения функций А.Н. Крылова (9.10) при $\xi_l = 4,317$ и $\xi_l - \alpha_1 = 3,238$, раскрываем граничные условия:

$$v(4,317) = (-14,44)v_0 + \frac{-24,52}{6,745 \cdot 10^{-3}}\varphi_0 - \frac{-12 \cdot 10^2}{1,76 \cdot 10^3}(-17,29) + \\ + \frac{20}{11,86} \cdot 2,859 + \frac{16 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 7,998 \cdot 10^{-2}} \cdot 13,70 = 0,$$

$$M(4,317) = 4 \cdot 1,76 \cdot 10^3(-17,29)v_0 + 4 \cdot 2,606 \cdot 10^5(-5,04)\varphi_0 + \\ + (-12 \cdot 10^2)(-14,44) - \frac{20}{6,745 \cdot 10^{-3}}(-6,946) - \\ - \frac{16 \cdot 10^{-2}}{(6,745 \cdot 10^{-3})^2}(-0,6123) = 0.$$

Решив систему двух алгебраических уравнений, находим значения начальных параметров v_0 и φ_0 :

$$\left. \begin{aligned} 14,44v_0 + 3635\varphi_0 &= -0,1157, \\ 1,217v_0 + 52,54\varphi_0 &= 0,4008, \end{aligned} \right\} \\ v_0 = 0,399 \text{ см}, \quad \varphi_0 = -1,618 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

С учетом числовых значений начальных параметров, нагрузок и характеристик жесткости балки и упругого основания запишем окончательные выражения для всех компонентов напряженного и деформированного состояний балки:

$$v(\xi) = 0,399Y_1(\xi) - 2,398Y_2(\xi) + 0,6818Y_3(\xi)\Big|_1 + 1,686Y_4(\xi - \alpha_1) + \\ + 0,5001[1 - Y_1(\xi - \alpha_1)]\Big|_2, \\ \varphi(\xi) = [-10,77Y_4(\xi) - 1,618Y_1(\xi) + 4,605Y_2(\xi)]\Big|_1 + 11,36Y_3(\xi - \alpha_1) + \\ + 13,49Y_4(\xi - \alpha_1)\Big|_2 \cdot 10^{-3},$$

$$M(\xi) = \left[2,81 Y_3(\xi) - 1,686 Y_4(\xi) - 1,2 Y_1(\xi) \right]_1 - 2,965 Y_2(\xi - \alpha_1) - 3,517 Y_3(\xi - \alpha_1) \Big|_2 \cdot 10^3,$$

$$Q(\xi) = 18,94 Y_2(\xi) - 11,39 Y_3(\xi) + 32,38 Y_4(\xi) \Big|_1 - 20 Y_1(\xi - \alpha_1) - 23,72 Y_2(\xi - \alpha_1) \Big|_2.$$

Разбиваем балку на восемь равных участков длиной 0,8 м ($\xi = 0,5396$) и вычисляем значения функций А.Н. Крылова (9.10) при аргументах ξ , соответствующих границам участков (табл. 9.3). С помощью этой таблицы определяем по полученным выше формулам значения v , φ , M и Q в сечениях балки с заданным шагом. Результаты расчета приведены в табл. 9.4.

Таблица 9.3

№ п/п	x , м	ξ	$Y_1(\xi)$	$Y_2(\xi)$	$Y_3(\xi)$	$Y_4(\xi)$	$1 - Y_1(\xi)$
1	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0
2	0,8	0,5396	0,9859	0,5381	0,1454	0,0262	0,0141
3	1,6	1,079	0,7748	1,030	0,5734	0,208	0,2252
4	2,4	1,619	-0,1264	1,252	1,211	0,6842	1,1264
5	3,2	2,158	-2,429	0,6425	1,777	1,504	3,429
6	4,0	2,698	-6,737	-1,737	1,586	2,469	7,737
7	4,8	3,238	-12,70	-6,946	-0,6123	2,859	13,7000
8	5,6	3,777	-17,59	-15,27	-6,478	1,150	18,590
9	6,4	4,317	-14,44	-24,52	-17,29	-5,040	15,440

Таблица 9.4

№ п/п	x , м	ξ	v , см	$\varphi \cdot 10^{-3}$, рад	M , кНм	Q , кН	q_r , кН/м	\bar{q} , кН/м
1	0,0	0,0	0,399	-1,618	-12,0	0,0	12,77	-12,77
2	0,8	0,5396	0,363	0,601	-8,19	9,38	11,62	-11,62
3	1,6	1,079	0,453	1,251	3,31	19,72 -0,28	14,50	-14,5 1,5
4	2,4	1,619	0,526	0,606	2,94	-0,409	16,84	-0,84
5	3,2	2,158	0,552	0,011	3,01	0,694	17,65	-1,65
6	4,0	2,698	0,527	-0,702	4,07	1,813	16,85	-0,85
7	4,8	3,238	0,431	-1,753	5,44	1,331	13,81	2,19
8	5,6	3,777	0,259	-2,919	5,38	-2,251	8,29	7,71
9	6,4	4,317	0,0	-3,658	0,0	-11,91	0,0	16,0

Величины реактивных давлений основания и суммарной распределенной нагрузки на балку определялись по формулам

$$q_r = kbv, \quad \bar{q} = q - q_r.$$

По результатам табл. 9.4 построены эпюры q_r , \bar{q} , Q , M , φ и v (рис. 9.15), на которых отмечены экстремумы, точки перегиба, скачки и изломы.

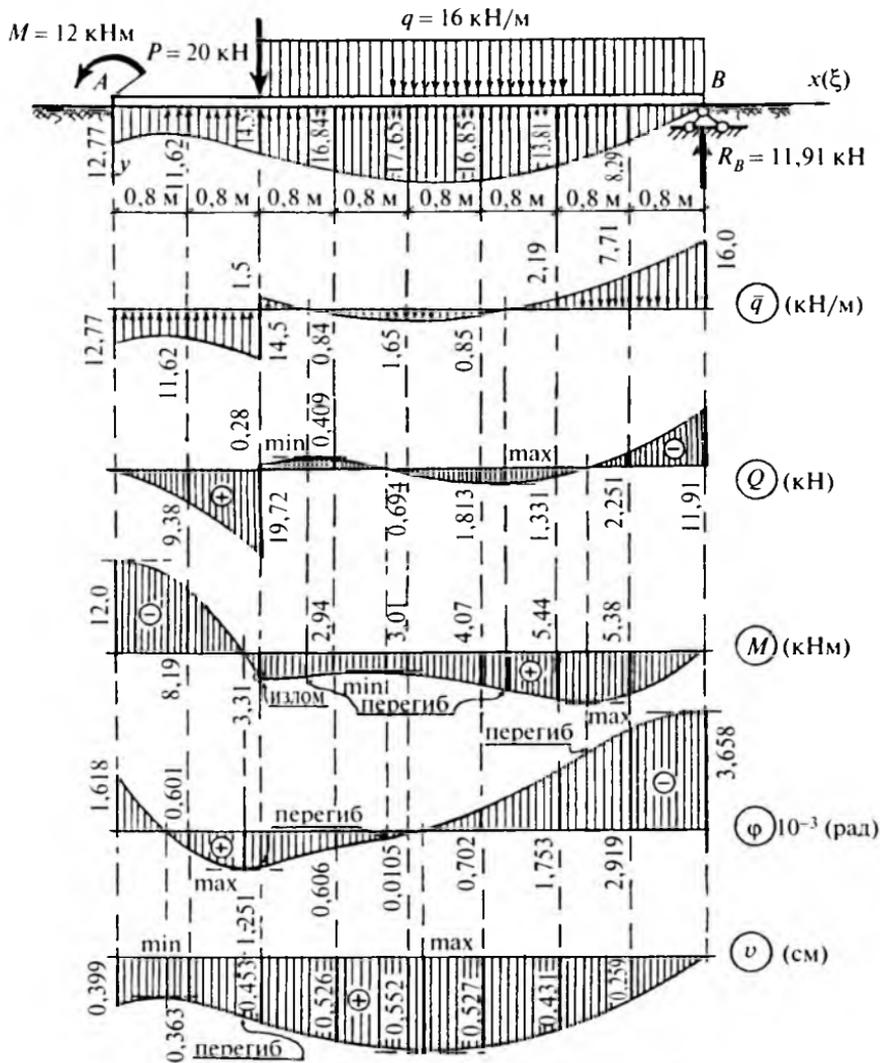


Рис. 9.15

Сумма проекций на ось Oy равнодействующей реактивных давлений основания и опорной реакции на шарнирной опоре B должна быть равна сумме проекций заданных нагрузок. Проверим выполнение этого условия, считая, что реактивные давления основания в пределах каждого участка разбиения изменяются по линейному закону. При этом равнодействующая реактивных давлений, равная площади эпюры q , приближенно равна

$$R = \frac{0,8}{2} [12,77 + 2(11,62 + 14,5 + 16,84 + 17,65 + 16,85 + 13,81 + 8,29)] = 84,76 \text{ кН.}$$

Составляем уравнение равновесия:

$$\sum Y = 0, \quad 20 + 16 \cdot 4,8 - 84,76 - 11,91 = 96,8 - 96,67 = 0,13 \text{ кН} \neq 0.$$

Относительная погрешность равна

$$\Delta\% = \frac{0,13}{96,67} \cdot 100\% = 0,13\%.$$

Вычисляем наибольшие нормальные напряжения в балке:

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{M_{\text{нб}}}{W_z} = \frac{12 \cdot 10^2}{184} = 6,52 \text{ кН/см}^2 = 65,2 \text{ МПа.}$$

Задача 9.4

Железобетонная фундаментная балка прямоугольного сечения длиной $l = 2,6$ м, расположенная на упругом основании, нагружена двумя сосредоточенными силами (рис. 9.16, *a*). Коэффициент постели $k = 3 \cdot 10^{-2}$ кН/см³. Модуль упругости материала балки $E = 2 \cdot 10^4$ МПа.

Требуется определить реактивные давления основания и построить эпюры Q и M .

Вычисляем параметр λ и устанавливаем категорию балки:

$$J_z = \frac{40 \cdot 50^3}{12} = 4,17 \cdot 10^5 \text{ см}^4,$$

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{3 \cdot 10^{-2} \cdot 40}{4 \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 4,17 \cdot 10^5}} = 4,356 \cdot 10^{-3} \text{ 1/см,}$$

$$\xi_l = \lambda l = 4,356 \cdot 10^{-3} \cdot 260 = 1,13.$$

Поскольку приведенная длина балки ξ_l меньше 1,2, балку при определении реактивных давлений основания можно рассматривать как жесткую и не учитывать ее изгиб. В силу симметрии нагрузки относительно середины балки реактивные давления основания постоянны по величине (рис. 9.16, а) и их интенсивность равна

$$q_r = \frac{2P}{l} = \frac{2 \cdot 30}{2,6} = 23,1 \text{ кН/м.}$$

Определение изгибающих моментов и поперечных сил в балке и построение эпюр M и Q производится обычными методами расчета балок при изгибе. Эпюры M и Q приведены на рис. 9.16, б, в. Величина экстремального момента в середине балки равна

$$M_{\min} = 5,65 - \frac{13,8^2}{2 \cdot 23,1} = 1,5 \text{ кНм.}$$

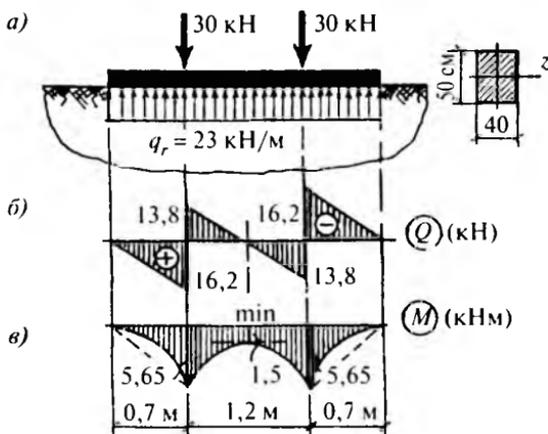


Рис. 9.16

Изгибающие моменты вызывают растяжение нижних волокон балки. Осадка балки постоянна и равна

$$v = \frac{q_r}{kb} = \frac{23,1 \cdot 10^{-2}}{3 \cdot 10^{-2} \cdot 40} = 0,192 \text{ см.}$$

В заключение приведем ориентировочные значения коэффициента жесткости (коэффициента постели) некоторых грунтовых оснований (табл. 9.5).

Таблица 9.5

№ п/п	Материал основания	k , кН/см ³
1	Песок свеженасыпанный Глина мокрая, размягченная	0,001–0,005
2	Песок слежавшийся Гравий насыпной Глина влажная	0,005–0,05
3	Песок и гравий плотно слежавшиеся Щебень Глина малой влажности	0,05–0,1
4	Грунт песчано-глинистый, искусственно уплотненный Глина твердая	0,1–0,2
5	Известняк, песчаник, мерзлота	0,2–1,0
6	Кирпич, бутовая кладка	4,0–6,0
7	Бетон и железобетон	8,0–15,0
8	Твердая скала	1,0–15,0
9	Искусственное свайное основание	0,05–0,15

Глава 10

СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Сложное сопротивление стержня имеет место при действии произвольных нагрузок, которые можно разложить на осевые, поперечные и скручивающие нагрузки. При этом в поперечных сечениях стержня действуют три напряжения — одно нормальное и два касательных (рис. 10.1).

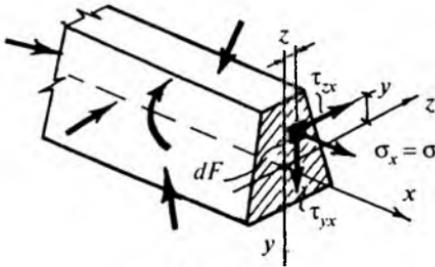


Рис. 10.1

Равнодействующими этих напряжений в системе главных центральных осей $Oxuz$ стержня сплошного сечения являются шесть внутренних усилий в поперечных сечениях.

Равнодействующими нормальных напряжений являются продольная сила N и изгибающие моменты M_z и M_y (рис. 10.2):

$$N = \iint_F \sigma dF, \quad M_z = \iint_F \sigma y dF, \quad M_y = \iint_F \sigma z dF. \quad (10.1)$$

Равнодействующими касательных напряжений являются поперечные силы Q_y, Q_z и крутящий момент M_k (рис. 10.3):

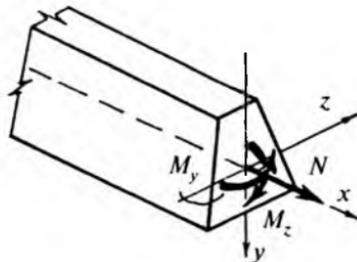


Рис. 10.2

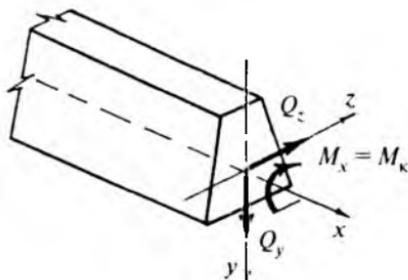


Рис. 10.3

$$Q_y = \iint_F \tau_{yx} dF, \quad Q_z = \iint_F \tau_{zx} dF, \quad M_k = \iint_F (\tau_{yx}z \pm \tau_{zx}y) dF. \quad (10.2)$$

В общем случае внутренние усилия изменяются по длине стержня, то есть являются функциями координаты x . Как правило, они определяются с помощью метода сечений.

Определение напряжений в поперечных сечениях стержней при сложном сопротивлении в большинстве случаев производится на основании принципа независимости действия сил. Напряжения вычисляются отдельно от действия соответствующего внутреннего усилия по формулам растяжения-сжатия, изгиба и кручения стержней. При этом нормальные напряжения суммируются алгебраически, а касательные — геометрически.

Знаки нормальных напряжений обычно устанавливаются по характеру деформации стержня. Растягивающие напряжения считаются положительными, а сжимающие — отрицательными.

Нормальные напряжения в общем случае сопротивления стержня сплошного сечения определяются по формуле

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z, \quad (10.3)$$

где F , J_z и J_y — площадь и главные моменты инерции поперечного сечения стержня относительно центральных осей.

Внутренние усилия N , M_z и M_y считаются положительными, если в точках 1-й четверти сечения они вызывают растяжение.

Нормальные напряжения в поперечном сечении изменяются по линейному закону в зависимости от координат y и z . Приравняв σ к нулю, получим уравнение нулевой линии (нейтральной оси). Положение этой линии устанавливается по координатам точек ее пересечения с осями:

$$y_0 = -\frac{N J_z}{F M_z}, \quad z_0 = -\frac{N J_y}{F M_y}. \quad (10.4)$$

Угол наклона нулевой линии φ_0 к оси Oz определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{J_z M_y}{J_y M_z}. \quad (10.5)$$

В общем случае нулевая линия не проходит через центр тяжести сечения и является наклонной к осям. В зависимости от величин y_0 и z_0 нулевая линия может пересекать сечение, не пересекать сечение и проходить по касательной к сечению. В первом случае нормальные напряжения в поперечном сечении являются разнозначными, а во втором и третьем — однозначными.

Полное касательное напряжение в точке поперечного сечения стержня определяется по формуле

$$\tau = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{yx}^2}. \quad (10.6)$$

Составляющие τ_{zx} и τ_{yx} вычисляются отдельно от действия поперечных сил Q_z и Q_y и крутящего момента M_k .

Рассмотрим частные случаи сложного сопротивления.

Плоский косой и пространственный изгибы стержня

Плоский косой изгиб вызывается действием поперечных нагрузок, расположенных в плоскости, не совпадающей с главными плоскостями инерции стержня. Например, на рис. 10.4 плоскость

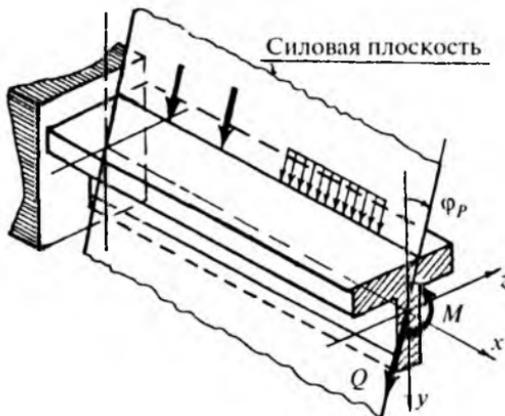


Рис. 10.4

действия нагрузок (силовая плоскость) составляет с главной плоскостью инерции стержня Oxy угол φ_p .

Разложив поперечную нагрузку по главным плоскостям инерции, можно представить кривой изгиб как совокупность двух прямых изгибов. При этом нормальные напряжения в поперечных сечениях стержня определяются по формуле

$$\sigma = \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z, \quad (10.7)$$

где $M_z = M \cos \varphi_p$, $M_y = M \sin \varphi_p$ и M — суммарный изгибающий момент, действующий в силовой плоскости.

При этом выполняется условие

$$\frac{M_y}{M_z} = \operatorname{tg} \varphi_p = \operatorname{const}.$$

Нулевая линия проходит через центр тяжести сечения, и угол ее наклона к оси Oz определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{J_z}{J_y} \frac{M_y}{M_z} = -\frac{J_z}{J_y} \operatorname{tg} \varphi_p.$$

Углы φ_p и φ_0 откладываются от главных осей инерции поперечного сечения стержня в одну и ту же сторону. Поскольку в общем случае главные моменты инерции сечения различны ($J_z \neq J_y$), нулевая и силовая линии не ортогональны (что всегда имеет место при прямом изгибе).

Нулевая линия делит сечение на зоны растяжения и сжатия. Наибольшие нормальные напряжения действуют в точках сечения, наиболее удаленных от нулевой линии (рис. 10.5).

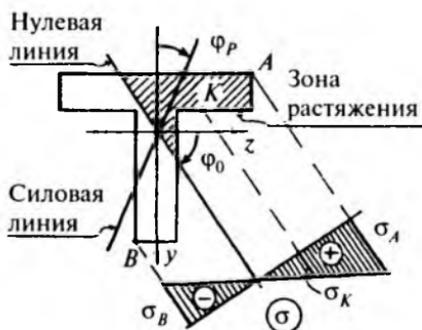


Рис. 10.5

Они определяются по формулам

$$\sigma_A = \frac{M_z}{J_z} y_A + \frac{M_y}{J_y} z_A,$$

$$\sigma_B = \frac{M_z}{J_z} y_B + \frac{M_y}{J_y} z_B,$$

где y_A, z_A и y_B, z_B — координаты наиболее удаленных от нулевой линии точек сечения в зонах растяжения и сжатия. В общем случае эти координаты различны по величине, следовательно, $\sigma_A \neq |\sigma_B|$. В частном случае для сечений с двумя осями симметрии наибольшие нормальные напряжения в обеих зонах равны по величине. Если при этом сечение имеет только четыре угловые точки (рис. 10.6), то наибольшие нормальные напряжения действуют в противоположных угловых точках сечения и определяются по формуле

$$\sigma_{\text{нб}} = |\sigma_{\text{нм}}| = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y}, \quad (10.8)$$

где W_z и W_y — моменты сопротивления сечения.

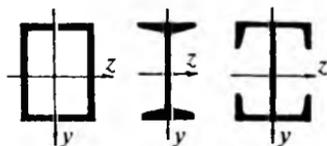


Рис. 10.6

При расчетах стержней на прочность при косом изгибе необходимо обеспечить выполнение условий прочности в зонах растяжения и сжатия:

$$\sigma_{\text{нб}} \leq \gamma_c R_p, \quad |\sigma_{\text{нм}}| \leq \gamma_c R_c, \quad (10.9)$$

где R_p и R_c — расчетные сопротивления материала стержня при растяжении и сжатии, γ_c — коэффициент условий работы. В общем случае $R_p \neq R_c$.

В частном случае при $R_p = R_c = R$ и для сечений с двумя осями симметрии типа прямоугольника (рис. 10.6) остается только одно условие прочности:

$$\sigma_{\text{нб}} = |\sigma_{\text{нм}}| = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq \gamma_c R. \quad (10.10)$$

Приняв соотношение между моментами сопротивления сечения $k = W_z/W_y$, можно произвести его подбор по одной из формул

$$W_y \geq \frac{M_z + M_y}{\gamma_c R}, \quad W_z \geq \frac{M_z + kM_y}{\gamma_c R}. \quad (10.11)$$

Для прокатных двутавров k находится в пределах 6+14, для прямоугольного сечения k равно отношению сторон. Подбор сечения обычно производится с помощью нескольких приближений.

Касательные напряжения в поперечных сечениях стержня при косом изгибе определяются по формуле Д.И. Журавского:

$$\tau_{yx} = \frac{Q_y S_z^{\text{отс}}}{J_z b(y)}, \quad \tau_{zx} = \frac{Q_z S_y^{\text{отс}}}{J_y b(z)}, \quad (10.12)$$

где $Q_y = Q \cos \varphi_p$, $Q_z = Q \sin \varphi_p$ — составляющие суммарной поперечной силы Q по главным осям инерции сечения, $S_z^{\text{отс}}$, $S_y^{\text{отс}}$ — статические моменты отсеченных частей сечения и $b(y)$, $b(z)$ — ширина сечения в направлении осей Oz и Oy .

Суммарные изгибающий момент M и поперечная сила Q , действующие в силовой плоскости (рис. 10.4), определяются с помощью метода сечений.

Определение прогибов и углов поворота сечений стержня при плоском косом изгибе производится отдельно от составляющих поперечной нагрузки по главным плоскостям инерции стержня. При этом можно использовать либо метод Мора, либо дифференциальные уравнения прямого изгиба в главных плоскостях:

$$\left. \begin{aligned} EJ_z v''(x) &= -M_z, \\ EJ_y w''(x) &= -M_y, \end{aligned} \right\} \quad (10.13)$$

где $v(x)$, $w(x)$ — поперечные перемещения (прогибы) точек оси стержня и M_z , M_y — составляющие суммарного изгибающего момента $M_z = M \cos \varphi_p$, $M_y = M \sin \varphi_p$.

Направление суммарного прогиба $f = \sqrt{v^2 + w^2}$ (рис. 10.7) перпендикулярно к нулевой линии. Изогнутая ось стержня является плоской кривой, расположенной в плоскости изгиба, не совпадающей с силовой плоскостью. Эти плоскости наклонены друг к другу под углом $\beta = \varphi_0 - \varphi_p$. В частном случае, когда главные моменты инерции сечения равны между собой ($J_z = J_y$), плоскость изгиба и силовая плоскость совпадают, поскольку $\beta = 0$. В этом случае изгиб является по существу прямым.

быть несколько опасных сечений, поскольку изгибающие моменты M_z и M_y могут достигать наибольших значений в различных точках по длине стержня. Касательные напряжения определяются по формулам (10.12).

Определение поперечных перемещений точек оси стержня (прогибов) и углов поворота поперечных сечений производится отдельно от действия составляющих нагрузки по главным плоскостям инерции стержня. Направление суммарного прогиба стержня изменяется по его длине. Изогнутая ось стержня является пространственной кривой.

Растяжение и сжатие с изгибом

Растяжение и сжатие с изгибом вызывается одновременным действием осевых и поперечных нагрузок (рис. 10.9). Нормальные напряжения в поперечных сечениях стержня определяются по общей формуле (10.3), где продольная сила N и изгибающие моменты M_z и M_y могут иметь различные законы изменения по длине стержня. Знак каждого члена в этой формуле соответствует характеру действия внутренних усилий N , M_z и M_y , вызывающих растяжение или сжатие продольных волокон стержня.

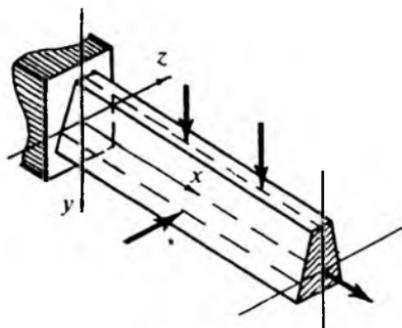


Рис. 10.9

Положение нулевой линии устанавливается по величинам y_0 и z_0 (10.4). Эпюра нормальных напряжений может быть однозначной или разнозначной.

Наибольшие нормальные напряжения действуют в точках сечения, наиболее удаленных от нулевой линии, как это показано на рис. 10.10 для разнозначной эпюры σ . Наибольшие нормальные напряжения определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} \sigma_A &= \frac{N}{F} + \frac{M_z}{J_z} y_A + \frac{M_y}{J_y} z_A, \\ \sigma_B &= \frac{N}{F} + \frac{M_z}{J_z} y_B + \frac{M_y}{J_y} z_B, \end{aligned} \right\}$$

где y_A, z_A и y_B, z_B — координаты наиболее напряженных точек сечения.

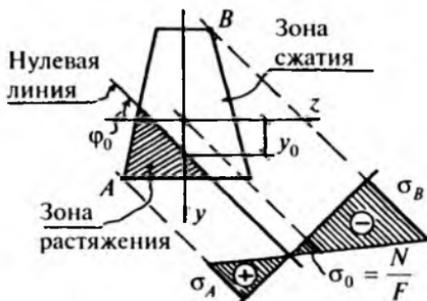


Рис. 10.10

Для сечений с двумя осями симметрии типа прямоугольника (рис. 10.6) наибольшие нормальные напряжения определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{нб} &= \frac{N}{F} + \left(\frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \right), \\ \sigma_{нм} &= \frac{N}{F} - \left(\frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (10.14)$$

При расчетах на прочность в случае разнозначной эпюры σ необходимо обеспечить выполнение двух условий прочности (10.9). При однозначной эпюре σ , а также в случае равенства расчетных сопротивлений материала стержня при растяжении и сжатии ($R_p = R_c = R$) остается одно условие прочности по наиболее напряженной точке.

На практике чаще имеет место сочетание прямого изгиба и центрального растяжения или сжатия (рис. 10.11). В этом случае наибольшие нормальные напряжения определяются по двухчленной формуле, поскольку один из изгибающих моментов равен

нулю. Например, для случая на рис. 10.11 наибольшие нормальные напряжения равны

$$\sigma_A = -\frac{P}{F} + \frac{M_z}{W_z}, \quad \sigma_B = -\frac{P}{F} - \frac{M_z}{W_z}.$$

Характер эпюр нормальных напряжений от действия продольной силы $N = -P$ и изгибающего момента M_z , а также суммарной эпюры σ показан на рис. 10.11.

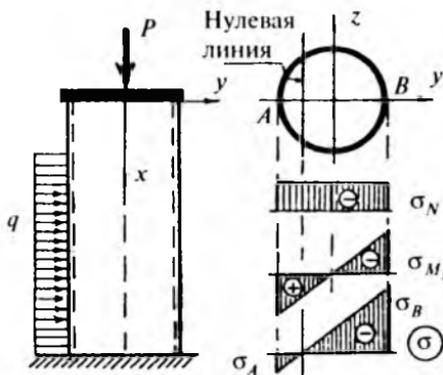


Рис. 10.11

Внецентренное растяжение или сжатие стержня

Внецентренное растяжение или сжатие стержня вызывается действием продольной силы, точка приложения которой не совпадает с центром тяжести сечения (рис. 10.12). Для строительных конструкций характерно внецентренное сжатие. В поперечных сечениях стержня действуют постоянные по величине внутренние усилия

$$N = \pm P, \quad M_z = \pm P y_p, \quad M_y = \pm P z_p, \quad (10.15)$$

где y_p, z_p — координаты точки приложения силы. Касательные напряжения в поперечных сечениях отсутствуют, а нормальные определяются по формуле

$$\sigma = \pm \frac{P}{F} \left(1 + \frac{y_p}{i_z^2} y + \frac{z_p}{i_y^2} z \right), \quad (10.16)$$

где знак «плюс» соответствует внецентренному растяжению, а знак «минус» — внецентренному сжатию.

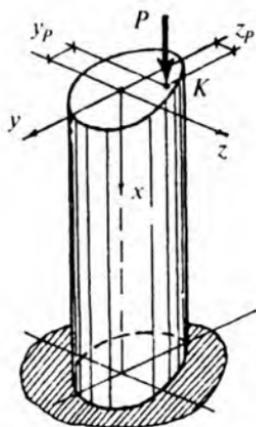


Рис. 10.12

В формуле (10.16) i_z и i_y — радиусы инерции сечения, определяемые по формулам

$$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{F}}; \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}. \quad (10.17)$$

Положение нулевой линии определяется по координатам точек ее пересечения с осями Oy и Oz :

$$z_0 = -\frac{i_y^2}{z_p}, \quad y_0 = -\frac{i_z^2}{y_p}. \quad (10.18)$$

Координаты z_0 , z_p и y_0 , y_p всегда имеют противоположные знаки.

В зависимости от координат точки приложения силы z_p , y_p нулевая линия может пересекать или не пересекать сечение, а в промежуточном случае — проходить по касательной к сечению. Эпюра σ является при этом разнозначной или однозначной.

При разнозначной эпюре σ в сечении имеются зоны растяжения и сжатия (рис. 10.13). Наибольшие нормальные напряжения действуют в точках сечения, наиболее удаленных от нулевой линии. При внецентренном сжатии они определяются по формулам

$$\sigma_A = -\frac{P}{F} \left(1 + \frac{y_p}{i_z^2} y_A + \frac{z_p}{i_y^2} z_A \right),$$

$$\sigma_B = -\frac{P}{F} \left(1 + \frac{y_p}{i_z^2} y_B + \frac{z_p}{i_y^2} z_B \right).$$



Рис. 10.13

Координаты наиболее напряженных точек A и B в общем случае определяются с помощью касательных к сечению, параллельных к нулевой линии. При прямолинейном контуре сечения наиболее напряженные точки в общем случае являются угловыми.

При расчетах на прочность необходимо обеспечить выполнение условий прочности (10.9) по наиболее напряженным точкам сечения в зонах растяжения и сжатия. С помощью этих условий можно решить задачу об определении величины силы P при заданных расчетных сопротивлениях материала при растяжении и сжатии R_p и R_c . При разнозначной эпюре σ и при $R_p \neq R_c$ надо определить два значения силы P :

$$\left. \begin{aligned}
 P_1 &\leq \frac{\gamma_c R_p F}{\left| 1 + \frac{y_P}{i_z^2} y_A + \frac{z_P}{i_y^2} z_A \right|}, \\
 P_2 &\leq \frac{\gamma_c R_c F}{\left| 1 + \frac{y_P}{i_z^2} y_B + \frac{z_P}{i_y^2} z_B \right|}.
 \end{aligned} \right\} \quad (10.19)$$

Из двух сил P_1 и P_2 надо принять меньшую силу.

В более простых случаях, когда материал стержня одинаково сопротивляется растяжению и сжатию ($R_p = R_c = R$) или когда эпюра σ является однозначной, ставится только одно условие прочности по наиболее напряженной точке сечения, с помощью которого можно определить значение силы P .

В инженерной практике чаще имеет место плоский случай внецентренного растяжения или сжатия, когда одна из координат

точки приложения силы равна нулю. Отличная от нуля координата иногда называется эксцентриситетом e силы P . В этом случае нормальные напряжения в поперечных сечениях стержня определяются по двухчленной формуле. Например, для случая, показанного на рис. 10.14, имеем

$$\sigma = -\frac{P}{F} \left(1 + \frac{y_p}{i_z^2} y \right).$$

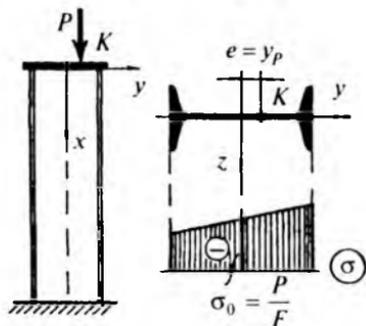


Рис. 10.14

При небольших эксцентриситетах эпюра σ является однозначной (рис. 10.14).

В задачах внецентренного растяжения или сжатия стержня весьма важным является определение ядра сечения. Ядром сечения называется замкнутая выпуклая фигура, содержащая центр тяжести сечения и обладающая следующим свойством. Если точка приложения силы находится внутри этой фигуры или на ее границе, то нормальные напряжения в поперечных сечениях стержня имеют один знак (эпюра σ является однозначной).

Для построения контура ядра сечения надо провести минимально необходимое число касательных к сечению, принять каждую касательную за нулевую линию и определить координаты соответствующих точек приложения силы по формулам

$$y_p = -\frac{i_z^2}{y_0}, \quad z_p = -\frac{i_y^2}{z_0}, \quad (10.20)$$

где z_0, y_0 — координаты точек пересечения касательных с осями.

Точки с координатами z_p, y_p принадлежат контуру ядра сечения. Эти точки надо соединить соответствующими линиями. Если ка-

сательные при переходе из одного положения в другое совершают поворот вокруг угловых точек сечения, то соответствующие линии контура ядра будут прямыми. В противном случае контур ядра будет криволинейным.

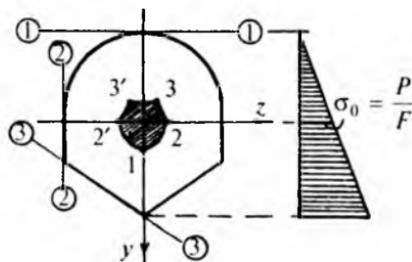


Рис. 10.15

Для построения контура ядра сечения, приведенного на рис. 10.15, надо провести три касательных и определить положение точек контура ядра 1, 2 и 3 (точки 2' и 3' расположены симметрично по отношению к точкам 2 и 3). Точки 2, 3, 3' и 2' надо соединить прямыми линиями. Участок контура 2—1—2' является криволинейным.

Если точка приложения силы находится на контуре ядра, то эпюра σ имеет вид треугольника, что показано на рис. 10.15 для случая приложения силы в точке 1.

Вид ядра сечения для прямоугольника, круга, двутавра и швеллера показан на рис. 10.16, а, б, в, г.

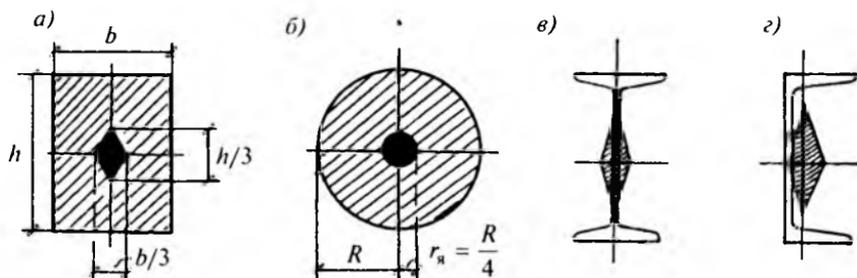


Рис. 10.16

Изгиб и растяжение-сжатие с кручением

Такой вид сложного сопротивления стержня характерен для элементов машиностроительных конструкций, например коленчатых валов, осей, кривошипов и т.п. Если стержень подвергается одновременному действию изгиба и кручения, то в его поперечных сечениях в общем случае действуют пять внутренних усилий — два изгибающих момента M_z и M_y , две поперечные силы Q_z и Q_y и крутящий момент M_k . Они являются равнодействующими нормальных и касательных напряжений, причем те и другие могут быть достаточно велики и опасны для прочности стержня.

Нормальные напряжения вызываются изгибом стержня и в общем случае определяются по формуле

$$\sigma = \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z.$$

Наибольшие нормальные напряжения действуют в точках, принадлежащих контуру сечения и наиболее удаленных от нулевой линии. Изгибающие моменты M_z и M_y могут иметь различные законы изменения по длине стержня.

Для стержней с круглым или кольцевым сечениями можно вычислить в различных точках по длине стержня суммарный изгибающий момент $M_{II} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}$ и построить его эпюру, которая в общем случае является нелинейной и пространственной.

При прямом изгибе в одной из главных плоскостей инерции стержня один из изгибающих моментов равен нулю и $M_{II} = M_z$ или $M_{II} = M_y$. Наибольшие нормальные напряжения при этом определяются по формулам

$$\sigma_{нб} = \frac{M_{II}}{W_B}, \quad |\sigma_{нм}| = \frac{M_{II}}{W_H},$$

где W_B и W_H — моменты сопротивления сечения для верхних и нижних волокон. Если нейтральная ось является осью симметрии, то $W_H = W_B$ и $\sigma_{нб} = |\sigma_{нм}|$.

Вызываемые изгибом касательные напряжения в поперечных сечениях стержня определяются по формуле Д. И. Журавского (10.12). В задачах изгиба с кручением стержней сплошного сечения эти напряжения, как правило, не учитываются, поскольку они мало влияют на оценку прочности стержня.

Касательные напряжения, вызываемые кручением стержня, зависят от величины крутящего момента M_k , а характер их распре-

деления по сечению определяется его формой. Эти напряжения также имеют наибольшие значения в точках контура поперечного сечения. Эпюры касательных напряжений в стержнях круглого и прямоугольного сечений при кручении и соответствующие формулы приведены на рис. 10.17 и 10.18.

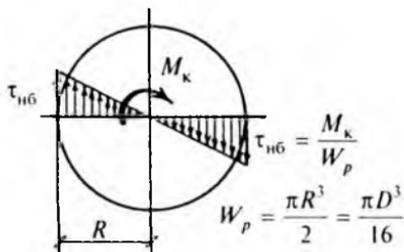


Рис. 10.17

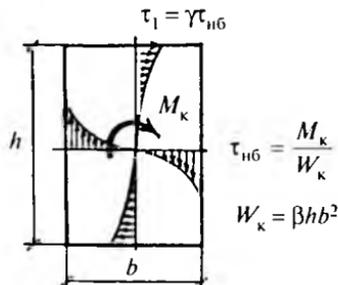


Рис. 10.18

Значения коэффициентов β и γ приведены в табл. 10.1.

Таблица 10.1

$n = h/b$	1,0	1,25	1,5	2,0	3,0	4,0	5,0	8,0	10,0	∞
β	0,208	0,221	0,23	0,246	0,27	0,28	0,291	0,31	0,31	0,33
γ	1,0	0,91	0,86	0,79	0,75	0,74	0,74	0,74	0,74	0,74

Опасными в смысле прочности являются сечения стержня, где изгибающие моменты M_x , M_y и крутящий момент M_k одновременно достигают наибольших значений или достаточно велики. В общем случае таких сечений может быть несколько.

В опасных сечениях вычисляются значения нормальных и касательных напряжений в точках контура сечения, где оба напряжения имеют наибольшие значения. Проверка прочности стержня производится по опасным точкам сечения с помощью соответствующей теории прочности. При этом вычисляется так называемое расчетное или эквивалентное напряжение, которое не должно превосходить предельного (опасного) для данного материала напряжения σ_0 , определяемого из опытов на одноосное растяжение или сжатие.

Приведем формулы проверки прочности стержня при изгибе с кручением по трем наиболее распространенным теориям прочности.

По теории наибольших касательных напряжений

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (10.21)$$

По энергетической теории

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (10.22)$$

По теории прочности Мора

$$\frac{1-k}{2}\sigma + \frac{1+k}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma], \quad (10.23)$$

где $[\sigma]$ — допускаемое напряжение.

Коэффициент k в формуле (10.23) позволяет учесть различное сопротивление материала стержня растяжению и сжатию. Он равен отношению

$$k = \frac{\sigma_0^p}{\sigma_0^c}. \quad (10.24)$$

При $k = 1$ формула (10.23) совпадает с формулой (10.21).

Если стержень испытывает центральное растяжение или сжатие с кручением, то нормальные напряжения в его поперечных сечениях являются постоянными по величине и равными $\sigma = N/F$. Опасной точкой сечения является точка с наибольшими касательными напряжениями. Проверка прочности стержня производится с помощью соответствующей теории прочности, например, по формулам (10.21)–(10.23).

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 10.1

Для консольной балки, находящейся в условиях плоского косоугольного изгиба (рис. 10.19), требуется подобрать сечение в виде стального прокатного двутавра, построить эпюру σ в опасном сечении и определить перемещения (прогибы) свободного конца. В расчетах принять коэффициент надежности по нагрузке $\gamma_f = 1,2$, $R = 210$ МПа = 21 кН/см², $\gamma_c = 1,0$, $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа.

Вычисляем значение расчетной нагрузки и величину суммарного расчетного изгибающего момента M (рис. 10.19) в заделке:

$$q_p = 8 \cdot 1,2 = 9,6 \text{ кН/м}, \quad M_A = \frac{9,6 \cdot 2,8^2}{2} = 37,6 \text{ кНм}.$$

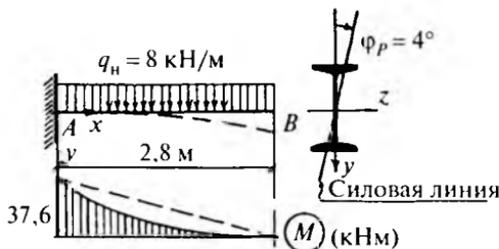


Рис. 10.19

Составляющие суммарного изгибающего момента равны

$$|M_z| = M \cos \varphi_p = 37,6 \cos 4^\circ = 37,51 \text{ кНм},$$

$$|M_y| = M \sin \varphi_p = 37,6 \sin 4^\circ = 2,62 \text{ кНм}.$$

По характеру нагружения видно, что в точках 1-й четверти сечения изгибающий момент M_z вызывает сжатие, а M_y — растяжение.

Сечение имеет две оси симметрии и четыре угловые точки. Наибольшие нормальные напряжения в балке равны по величине и действуют в противоположных угловых точках полков. Принимаем $k = W_z/W_y = 8$ и определяем по формуле (10.11) требуемый момент сопротивления:

$$W_z \geq \frac{M_z + kM_y}{\gamma_c R} = \frac{(37,51 + 8 \cdot 2,62) \cdot 10^2}{1,0 \cdot 21} = 278 \text{ см}^3.$$

По сортаменту принимаем I24, $W_z = 289 \text{ см}^3$, $W_y = 34,5 \text{ см}^3$ и проверяем выполнение условия прочности.

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{нб}} = |\sigma_{\text{нм}}| &= \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} = \left(\frac{37,51}{289} + \frac{2,62}{34,5} \right) \cdot 10^2 = \\ &= 20,6 \text{ кН/см}^2 = 206 \text{ МПа} < \gamma_c R = 210 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Условие прочности выполняется с небольшим запасом.

Принимаем двутавр I24 и определяем угол наклона нулевой линии к оси Oz . Для I24 $J_z = 3460 \text{ см}^4$, $J_y = 198 \text{ см}^4$.

$$|\text{tg} \varphi_0| = \frac{J_z}{J_y} \text{tg} \varphi_p = \frac{3460}{198} \text{tg} 4^\circ = 1,222, \quad |\varphi_0| = 50^\circ 42'.$$

Угол φ_0 отложим от оси Oz по ходу часовой стрелки (как и угол φ_p от оси Oy). Наибольшие нормальные напряжения действуют в угловых точках сечения, наиболее удаленных от нулевой линии.

Эпюра σ приведена на рис. 10.20. По характеру изгиба балки видно, что правая верхняя часть сечения находится в зоне растяжения, а левая нижняя — в зоне сжатия.

Разложим нагрузку по главным плоскостям инерции балки Oxz и Oxy и вычислим значения вертикального и горизонтального перемещений (прогибов) ее свободного конца (рис. 10.20). Для расчета используем формулу из табл. 7.5. Согласно СНиП определение перемещений производим от действия нормативной нагрузки.

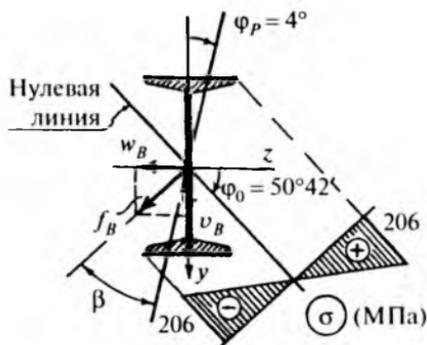


Рис. 10.20

$$q_y = q \cos \varphi_p = 8 \cos 4^\circ = 7,98 \text{ кН/м},$$

$$q_z = q \sin \varphi_p = 8 \sin 4^\circ = 0,558 \text{ кН/м},$$

$$v_B = \frac{q_y l^4}{8 E J_z} = \frac{7,98 \cdot 10^{-2} \cdot 280^4}{8 \cdot 2,1 \cdot 10^4 \cdot 3460} = 0,844 \text{ см},$$

$$w_B = \frac{q_z l^4}{8 E J_y} = \frac{0,558 \cdot 10^{-2} \cdot 280^4}{8 \cdot 2,1 \cdot 10^4 \cdot 198} = 1,031 \text{ см}.$$

Суммарный прогиб свободного конца балки равен

$$f_B = \sqrt{0,844^2 + 1,031^2} = 1,33 \text{ см}.$$

Изогнутая ось балки расположена в плоскости изгиба, которая составляет с силовой плоскостью угол $\beta = \varphi_0 - \varphi_p = 50^\circ 42' - 4^\circ = 46^\circ 42'$.

Задача 10.2

Для стальной шарнирно-опертой балки коробчатого сечения $120 \times 180 \times 8$ мм, находящейся в условиях плоского косоугольного изгиба (рис. 10.21, а), требуется определить из условия прочности величину сил P , построить эпюру σ в опасном сечении и вычислить значения перемещений (прогибов) в середине пролета. В расчетах принять $\gamma_f = 1,4$, $R = 210$ МПа = 21 кН/см², $\gamma_c = 1,0$, $E = 2,1 \times 10^5$ МПа = $2,1 \cdot 10^4$ кН/см².

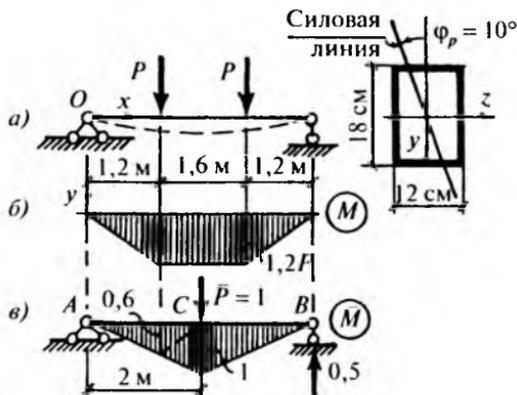


Рис. 10.21

Вычисляем геометрические характеристики сечения:

$$J_z = \frac{12 \cdot 18^3}{12} - \frac{10,4 \cdot 16,4^3}{12} = 2009 \text{ см}^4, \quad W_z = \frac{2009}{9} = 223 \text{ см}^3,$$

$$J_y = \frac{18 \cdot 12^3}{12} - \frac{16,4 \cdot 10,4^3}{12} = 1055 \text{ см}^4, \quad W_y = \frac{1055}{6} = 176 \text{ см}^3.$$

Строим эпюру изгибающих моментов (рис. 10.21, б). Наибольший суммарный изгибающий момент действует в сечениях под силами, где он равен $M = 1,2P$. Составляющие суммарного изгибающего момента равны: $M_z = 1,2P \cos 10^\circ = 1,18P$, $M_y = 1,2P \sin 10^\circ = 0,208P$. В точках 1-й четверти сечения оба изгибающих момента вызывают растяжение. Наибольшие нормальные напряжения действуют в противоположных угловых точках сечения. Ставим условие прочности по этим точкам и определяем значения расчетной и нормативной сил:

$$\sigma_{\text{нб}} = |\sigma_{\text{нм}}| = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} = P \left(\frac{1,18}{223} + \frac{0,208}{176} \right) \cdot 10^2 \leq \gamma_c R =$$

$$= 21 \text{ кН/см}^2,$$

$$P_p \leq 32,4 \text{ кН}, \quad P_{\text{н}} = \frac{P_p}{\gamma_f} = \frac{32,4}{1,4} = 23,1 \text{ кН}.$$

Примем с округлением $P_{\text{н}} = 23 \text{ кН}$ и определим наибольшие нормальные напряжения в балке:

$$\sigma_{\text{нб}} = |\sigma_{\text{нм}}| = \left(\frac{1,18 \cdot 23 \cdot 1,4}{223} + \frac{0,208 \cdot 23 \cdot 1,4}{176} \right) \cdot 10^2 =$$

$$= 20,8 \text{ кН/см}^2 = 208 \text{ МПа}.$$

Определяем угол наклона нулевой линии к оси Oz :

$$|\operatorname{tg} \varphi_0| = \frac{2009}{1055} \operatorname{tg} 10^\circ = 0,336, \quad |\varphi_0| = 18^\circ 34'.$$

Угол φ_0 надо отложить от оси Oz против хода часовой стрелки. Эпюра σ приведена на рис. 10.22. Знаки напряжений установлены в соответствии с характером изгиба балки. Верхняя часть сечения находится в зоне сжатия, а нижняя — в зоне растяжения.

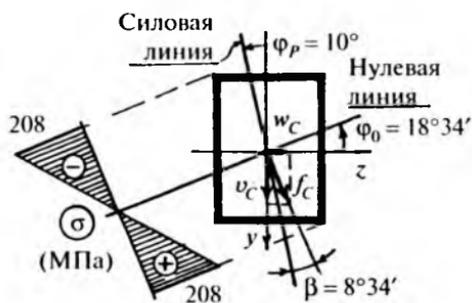


Рис. 10.22

Для определения вертикального и горизонтального перемещений (прогибов) балки в середине пролета C разложим силы по главным осям инерции поперечного сечения, построим единичную эпюру изгибающих моментов \bar{M} (рис. 10.21, θ) и «перемножим» ее по правилу А.К. Верещагина с эпюрой M . Вертикальное перемещение вызывается действием составляющей P_y , а горизонтальное — действием составляющей P_z .

$$P_y = P \cos \varphi_P = 23 \cos 10^\circ = 22,65 \text{ кН}, \quad P_z = 23 \sin 10^\circ = 3,99 \text{ кН},$$

$$v_C = 2 \frac{1}{EJ_z} \left[\frac{1}{2} \cdot 1,2 P_y \cdot 1,2 \frac{2}{3} \cdot 0,6 + \frac{1}{2} (0,6 + 1) \cdot 0,8 \cdot 1,2 P_y \right] =$$

$$= \frac{2,112 P_y}{EJ_z} = \frac{2,112 \cdot 10^6 \cdot 22,65}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 2009} = 1,13 \text{ см},$$

$$w_C = \frac{2,112 P_z}{EJ_y} = \frac{2,112 \cdot 10^6 \cdot 3,99}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 1055} = 0,38 \text{ см}.$$

Суммарный прогиб равен $f_C = \sqrt{1,13^2 + 0,38^2} = 1,19 \text{ см}$. Плоскость изгиба составляет с силовой плоскостью угол $\beta = \varphi_0 - \varphi_P = 18^\circ 34' - 10^\circ = 8^\circ 34'$.

Задача 10.3

Стальная консольная балка указанного сечения находится в условиях пространственного изгиба (рис. 10.23, а). Требуется построить эпюру нормальных напряжений в опасном сечении балки и определить значения перемещений (прогибов) ее свободного конца. Модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2,1 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$.

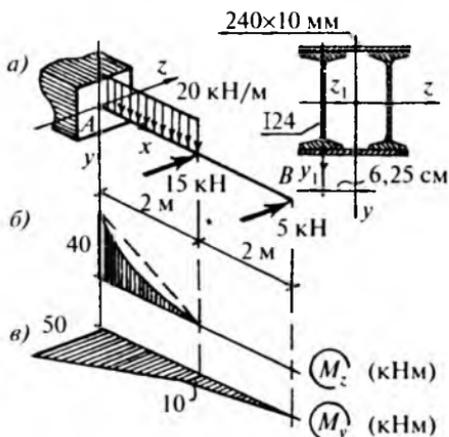


Рис. 10.23

Вычисляем геометрические характеристики сечения:

$$\text{I24}, \quad F = 34,8 \text{ см}^2, \quad J_z = 3460 \text{ см}^4, \quad J_y = 198 \text{ см}^4,$$

$$b = 11,5 \text{ см}, \quad h = 24 \text{ см},$$

$$J_z = 2 \cdot 3460 + 2 \left[\frac{24 \cdot 1^3}{12} + (12 + 0,5)^2 \cdot 24 \cdot 1 \right] = 14\,424 \text{ см}^4,$$

$$W_z = \frac{14\,424}{13} = 1109 \text{ см}^3,$$

$$J_y = 2 \frac{1 \cdot 24^3}{12} + 2(198 + 6,25^2 \cdot 34,8) = 5419 \text{ см}^4,$$

$$W_y = \frac{5419}{12} = 452 \text{ см}^3.$$

Строим эпюры изгибающих моментов M_z и M_y от нагрузок в главных плоскостях инерции балки (рис. 10.23, б, в). Опасным является сечение в заделке, где оба момента имеют наибольшие значения. Вычисляем значения наибольших нормальных напряжений в опасном сечении:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{нб}} = |\sigma_{\text{нм}}| &= \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{40 \cdot 10^2}{1109} + \frac{50 \cdot 10^2}{452} = 3,61 + 11,06 = \\ &= 14,7 \text{ кН/см}^2 = 147 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Напряжения от действия M_z и M_y суммируются в левой верхней четверти сечения (растяжение) и правой нижней четверти (сжатие). Определяем угол наклона нулевой линии к оси Oz в сечении вблизи заделки и строим эпюру σ (рис. 10.24).

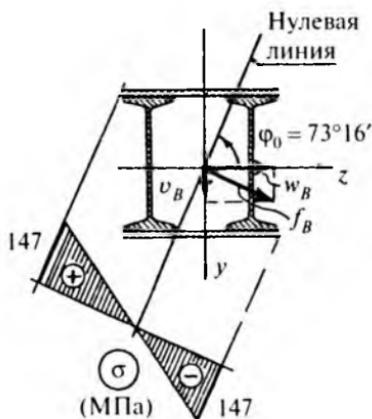


Рис. 10.24

$$|\operatorname{tg} \varphi_0| = \frac{J_z M_y}{J_y M_z} = \frac{14424}{5419} \cdot \frac{50}{40} = 3,327, \quad |\varphi_0| = 73^\circ 16'.$$

Угол φ_0 надо отложить от оси Oz против хода часовой стрелки.

Определяем с помощью метода Мора вертикальное и горизонтальное перемещения (прогибы) свободного конца балки от действия нагрузок в главных плоскостях инерции. Соответствующие грузовые и единичные эпюры изгибающих моментов в плоскостях Oxy и Oxz приведены на рис. 10.25 и 10.26.

$$v_B = \int_0^l \frac{\bar{M} M_z}{EJ_z} dx = \frac{1}{EJ_z} \cdot \frac{1}{3} \cdot 40 \cdot 2 \left(\frac{3}{4} \cdot 4 + \frac{1}{4} \cdot 2 \right) = \frac{93,3}{EJ_z} =$$

$$= \frac{93,3 \cdot 10^6}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 14424} = 0,31 \text{ см},$$

$$w_B = \int_0^l \frac{\bar{M} M_y}{EJ_y} dx = \frac{1}{EJ_y} \left[\frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 2 \left(\frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 2 \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2 \left(\frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 4 \right) + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right] = \frac{207}{EJ_y} =$$

$$= \frac{207 \cdot 10^6}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 5419} = 1,82 \text{ см}.$$

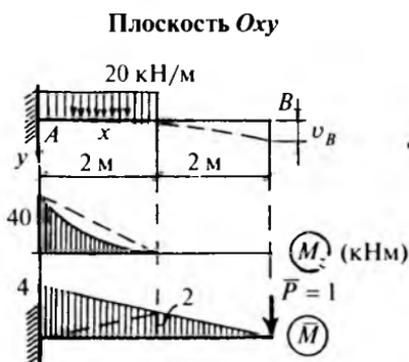


Рис. 10.25



Рис. 10.26

Суммарный прогиб свободного конца равен

$$f_B = \sqrt{0,31^2 + 1,82^2} = 1,85 \text{ см}.$$

Задача 10.4

Для деревянной балки прямоугольного сечения, шарнирно-опертой в главных плоскостях инерции и нагруженной вертикальной и горизонтальной силами (рис. 10.27, а), требуется определить из условия прочности размеры сечения, приняв $b = 0,6h$, и построить эпюру σ в опасном сечении. В расчетах принять $R = 14 \text{ МПа} = 1,4 \text{ кН/см}^2$, $\gamma_c = 1,0$.

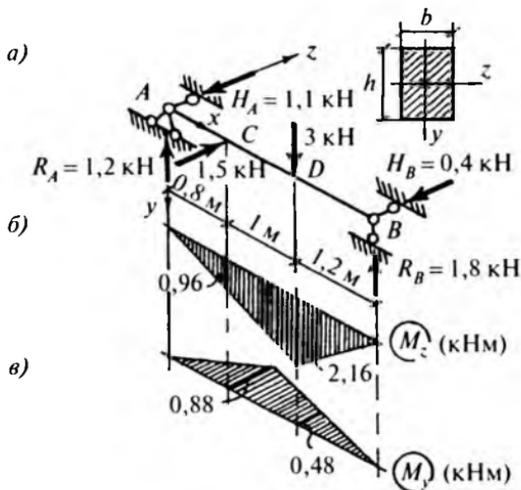


Рис. 10.27

Балка находится в условиях пространственного изгиба. Определяем опорные реакции в главных плоскостях инерции балки и строим эпюры изгибающих моментов M_z и M_y (рис. 10.27, б, в).

Оба изгибающих момента в точках 1-й четверти сечения вызывают растяжение. Из эпюр M_z и M_y видно, что они достигают наибольших значений в различных точках по длине балки (сечения C и D). При подборе сечения балки надо обеспечить ее прочность в обоих опасных сечениях.

Используя условие прочности (10.10) и соотношение между моментами сопротивления, получим формулу для определения требуемой высоты сечения:

$$W_z = \frac{bh^2}{6}, \quad W_y = \frac{hb^2}{6}, \quad k = \frac{W_z}{W_y} = \frac{h}{b}, \quad b = \frac{h}{k}$$

$$W_z = \frac{h^3}{6k} \geq \frac{M_z + kM_y}{\gamma_c R}, \quad h \geq \sqrt[3]{\frac{6k(M_z + kM_y)}{\gamma_c R}}$$

Определяем размеры сечения из условий прочности в сечениях *C* и *D*.

Сечение *C*

$$h \geq \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 1,67(0,96 + 1,67 \cdot 0,88) \cdot 10^2}{1,0 \cdot 1,4}} = 12,01 \text{ см},$$

$$b = 0,6 \cdot 12,01 = 7,21 \text{ см}.$$

Сечение *D*

$$h \geq \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 1,67(2,16 + 1,67 \cdot 0,48) \cdot 10^2}{1,0 \cdot 1,4}} = 12,8 \text{ см},$$

$$b = 0,6 \cdot 12,8 = 7,68 \text{ см}.$$

Сечение *D* является более опасным. Принимаем с округлением сечение 8×13 см и определяем его геометрические характеристики:

$$W_z = \frac{8 \cdot 13^2}{6} = 225,3 \text{ см}^3, \quad W_y = \frac{13 \cdot 8^2}{6} = 138,7 \text{ см}^3,$$

$$J_z = \frac{8 \cdot 13^3}{12} = 1465 \text{ см}^4, \quad J_y = \frac{13 \cdot 8^3}{12} = 555 \text{ см}^4.$$

Наибольшие напряжения в угловых точках сечения *D* равны

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{нб}} = |\sigma_{\text{нм}}| &= \frac{2,16 \cdot 10^2}{225,3} + \frac{0,48 \cdot 10^2}{138,7} = 0,96 + 0,34 = \\ &= 1,3 \text{ кН/см}^2 = 13 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Определяем угол наклона нулевой линии в сечении *D* к оси Oz :

$$|\operatorname{tg} \varphi_0| = \frac{J_z}{J_y} \frac{M_y}{M_z} = \frac{1465}{555} \cdot \frac{0,48}{2,16} = 0,587, \quad |\varphi_0| = 30^\circ 24'.$$

Напряжения от действия изгибающих моментов M_z и M_y в сечении *D* суммируются в левой верхней (сжатие) и правой нижней (растяжение) четвертях сечения. На рис. 10.28 приведены эпюры нормальных напряжений от действия каждого изгибающего момента и суммарная эпюра σ .

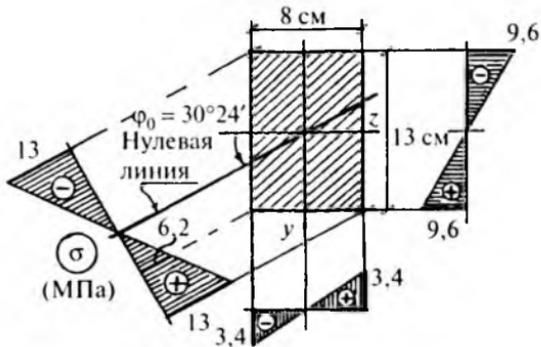


Рис. 10.28

Задача 10.5

Короткий стальной двутавр I18 находится в условиях центрального растяжения с изгибом в плоскости Oxy (рис. 10.29, а). Требуется построить эпюру нормальных напряжений в опасном сечении. Для двутавра I18 $F = 23,4 \text{ см}^2$, $W_z = 143 \text{ см}^3$.

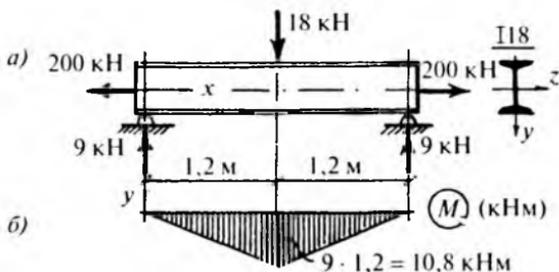


Рис. 10.29

Строим эпюру изгибающего момента M_z (рис. 10.29, б). Продольная сила постоянна по длине и равна $N = P = 200 \text{ кН}$. Опасным в смысле прочности является сечение в середине балки, где изгибающий момент имеет наибольшее значение. Вычисляем значения нормальных напряжений в крайних волокнах балки в опасном сечении:

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{N}{F} + \frac{M_z}{W_z} = \frac{200}{23,4} + \frac{10,8 \cdot 10^2}{143} = 8,55 + 7,55 = 16,1 \text{ кН/см}^2,$$

$$\sigma_{\text{нм}} = 8,55 - 7,55 = 1 \text{ кН/см}^2 = 10 \text{ МПа}.$$

Эпюры нормальных напряжений от действия N и M_z и суммарная эпюра σ приведены на рис. 10.30. Напряжения в балке являются однозначными, все волокна балки испытывают растяжение.

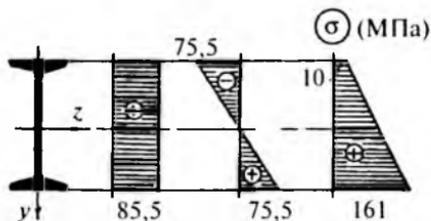


Рис. 10.30

Задача 10.6

Короткий деревянный столб круглого сечения диаметром $D = 18$ см находится в условиях центрального сжатия и изгиба в плоскости Oxz (рис. 10.31, а). Требуется построить эпюру нормальных напряжений в опасном сечении.

Вычисляем геометрические характеристики сечения:

$$F = \pi \cdot 9^2 = 254 \text{ см}^2, \quad W_z = W_y = \frac{\pi \cdot 9^3}{4} = 573 \text{ см}^3.$$

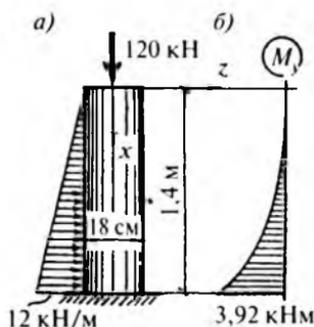


Рис. 10.31

Строим эпюру изгибающего момента M_y (рис. 10.31, б). Опасным является сечение в заделке, где изгибающий момент равен

$$M_y = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 1,4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1,4 = 3,92 \text{ кНм}.$$

Продольная сила является постоянной по длине стержня и равна $N = -P = -120$ кН. Вычисляем значения нормальных напряжений в опасном сечении:

$$\begin{aligned}\sigma_A &= \frac{N}{F} + \frac{M_y}{W_y} = -\frac{120}{254} + \frac{3,92 \cdot 10^2}{573} = -0,472 + 0,684 = \\ &= 0,212 \text{ кН/см}^2, \\ \sigma_B &= -0,472 - 0,684 = -1,156 \text{ кН/см}^2.\end{aligned}$$

Эпюры нормальных напряжений от действия N и M_y приведены на рис. 10.32. Напряжения суммируются в правой половине сечения. Суммарная эпюра σ является разнозначной.

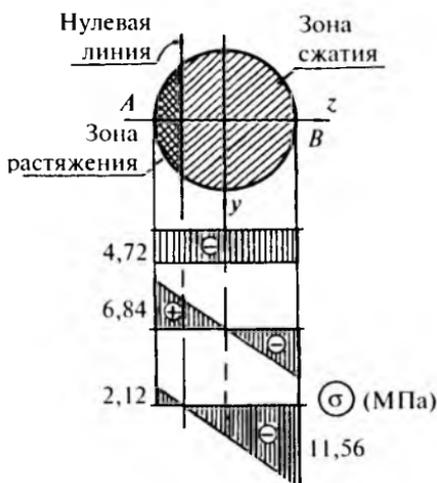


Рис. 10.32

Задача 10.7

Короткий стальной стержень коробчатого сечения $180 \times 240 \times 8$ мм находится в условиях внецентренного сжатия (рис. 10.33). Требуется построить эпюру нормальных напряжений в поперечном сечении стержня и ядро сечения.

Вычисляем геометрические характеристики сечения:

$$F = 18 \cdot 24 - 16,4 \cdot 22,4 = 64,64 \text{ см}^2,$$

$$J_y = \frac{18 \cdot 24^3}{12} - \frac{16,4 \cdot 22,4^3}{12} = 5375 \text{ см}^4,$$

$$J_z = \frac{24 \cdot 18^3}{12} - \frac{22,4 \cdot 16,4^3}{12} = 3430 \text{ см}^4,$$

$$i_y^2 = \frac{J_y}{F} = \frac{5375}{64,64} = 83,16 \text{ см}^2, \quad i_z^2 = \frac{J_z}{F} = \frac{3430}{64,64} = 53,07 \text{ см}^2.$$

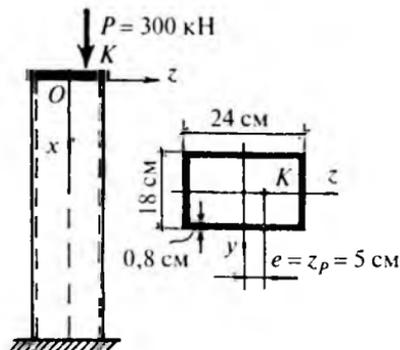


Рис. 10.33

Поскольку одна из координат точки приложения силы равна нулю ($y_p = 0$), имеет место плоский случай внецентренного сжатия. Определяем положение нулевой линии:

$$z_0 = -\frac{i_y^2}{z_p} = -\frac{83,16}{5} = -16,63 \text{ см}, \quad y_0 = -\frac{i_z^2}{y_p} = -\frac{53,07}{0} = \infty.$$

Нулевая линия параллельна оси Oy и не пересекает сечение. Следовательно, эпюра σ является однозначной и представляет собой трапецию. Вычисляем значения наибольших нормальных напряжений по двухчленной формуле.

$$\begin{aligned} \sigma_A &= -\frac{P}{F} \left(1 + \frac{z_p}{i_y^2} z_A \right) = -\frac{300}{64,64} \left[1 + \frac{5}{83,16} (-12) \right] = \\ &= -1,29 \text{ кН/см}^2 = -12,9 \text{ МПа}, \\ \sigma_B &= -\frac{P}{F} \left(1 + \frac{z_p}{i_y^2} z_B \right) = -\frac{300}{64,64} \left(1 + \frac{5}{83,16} \cdot 12 \right) = \\ &= -7,99 \text{ кН/см}^2 = -79,9 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Эпюра σ приведена на рис. 10.34.

Сечение стержня имеет две оси симметрии и прямоугольный контур. Следовательно, ядро сечения представляет собой ромб.

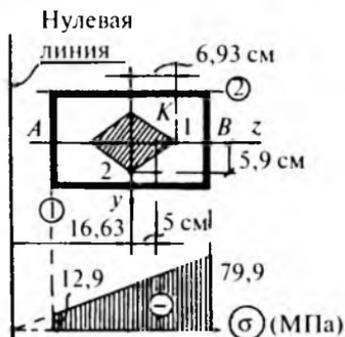


Рис. 10.34

Для определения координат его вершин проводим касательные к сечению 1 и 2, принимаем их за нулевые линии и определяем положение соответствующих точек приложения силы.

Касательная 1

$$y_0 = \infty, \quad z_0 = -12 \text{ см}, \quad y_p = 0, \quad z_p = -\frac{i_y^2}{z_0} = -\frac{83,16}{-12} = 6,93 \text{ см}.$$

Касательная 2

$$y_0 = -9 \text{ см}, \quad z_0 = \infty, \quad y_p = -\frac{i_z^2}{y_0} = -\frac{53,07}{-9} = 5,9 \text{ см}, \quad z_p = 0.$$

Точка приложения силы находится внутри ядра сечения.

Задача 10.8

Короткая чугунная балка П-образного сечения находится в условиях внецентренного сжатия (рис. 10.35). Требуется определить величину силы P из условий прочности балки и построить эпюру σ в поперечном сечении и ядро сечения. Допускаемые напряжения материала балки на растяжение и сжатие равны $[\sigma_p] = 50 \text{ МПа} = 5 \text{ кН/см}^2$, $[\sigma_c] = 150 \text{ МПа} = 15 \text{ кН/см}^2$.

Определяем геометрические характеристики сечения:

$$F = 12 \cdot 16 - 6 \cdot 12 = 120 \text{ см}^2,$$

$$S_{z_1} = 12 \cdot 16(-8) - 6 \cdot 12(-6) = -1104 \text{ см}^3,$$

$$y_c = \frac{S_{z_1}}{F} = \frac{-1104}{120} = -9,2 \text{ см},$$

$$J_z = J_{z_1} - a^2 F = \frac{12 \cdot 16^3}{3} - \frac{6 \cdot 12^3}{3} - 9,2^2 \cdot 120 = 2771 \text{ см}^4,$$

$$i_z^2 = \frac{2771}{120} = 23,09 \text{ см}^2,$$

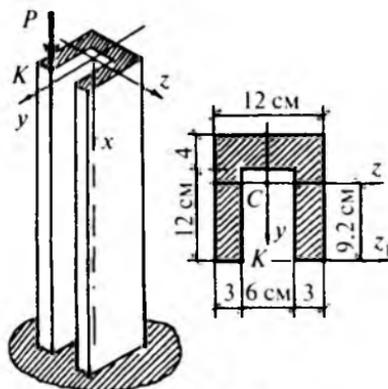


Рис. 10.35

$$J_y = \frac{16 \cdot 12^3}{12} - \frac{12 \cdot 6^3}{12} = 2088 \text{ см}^4, \quad i_y^2 = \frac{2088}{120} = 17,4 \text{ см}^2.$$

Координаты точки приложения силы равны $z_p = -3$ см, $y_p = 9,2$ см. Определяем положение нулевой линии:

$$y_0 = -\frac{i_z^2}{y_p} = -\frac{23,09}{9,2} = -2,51 \text{ см},$$

$$z_0 = -\frac{i_y^2}{z_p} = -\frac{17,4}{-3} = 5,8 \text{ см}.$$

Нулевая линия пересекает сечение, эпюра σ разнозначна (рис. 10.36). Наибольшие нормальные напряжения в зонах растяжения и сжатия действуют в угловых точках сечения (точки A и B). Определяем по формулам (10.19) два значения силы P:

$$P_1 \leq \frac{[\sigma_p] F}{\left| 1 + \frac{y_p}{i_z^2} y_A + \frac{z_p}{i_y^2} z_A \right|} = \frac{5 \cdot 120}{\left| 1 + \frac{9,2}{23,09} (-6,8) + \frac{-3}{17,4} \cdot 6 \right|} = 218,7 \text{ кН},$$

$$P_2 \leq \frac{[\sigma_c] F}{\left| 1 + \frac{y_p}{i_z^2} y_B + \frac{z_p}{i_y^2} z_B \right|} = \frac{15 \cdot 120}{\left| 1 + \frac{9,2}{23,09} \cdot 9,2 + \frac{-3}{17,4} (-6) \right|} = 315,8 \text{ кН}.$$

Принимаем с округлением меньшую силу $P = 218 \text{ кН}$ и вычисляем значения наибольших нормальных напряжений в зонах растяжения и сжатия:

$$\sigma_A = -\frac{218}{120} \left[1 + \frac{9,2}{23,09} (-6,8) + \frac{-3}{17,4} \cdot 6 \right] = 4,98 \text{ кН/см}^2 = 49,8 \text{ МПа},$$

$$\sigma_B = -\frac{218}{120} \left[1 + \frac{9,2}{23,09} \cdot 9,2 + \frac{-3}{17,4} (-6) \right] = -10,4 \text{ кН/см}^2 = -104 \text{ МПа}.$$

Прочность в обеих зонах обеспечена. Отметим, что в зоне сжатия имеется излишний запас прочности. Эпюра σ приведена на рис. 10.36.

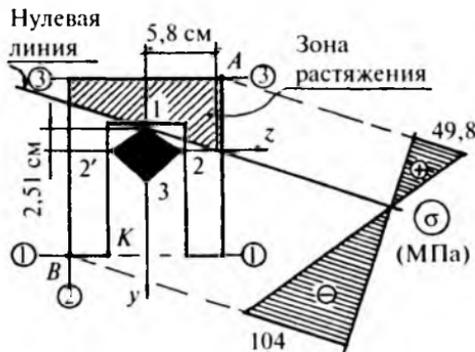


Рис. 10.36

Для построения контура ядра сечения проводим три касательных к сечению, принимаем каждую касательную за нулевую линию и определяем координаты соответствующей точки приложения силы. Эти точки принадлежат контуру ядра сечения.

Касательная 1

$$y_0 = 9,2 \text{ см}, \quad z_0 = \infty, \quad y_P = -\frac{23,09}{9,2} = -2,51 \text{ см}, \quad z_P = 0.$$

Касательная 2

$$y_0 = \infty, \quad z_0 = -6 \text{ см}, \quad y_P = 0, \quad z_P = -\frac{17,4}{-6} = 2,9 \text{ см}.$$

Касательная 3

$$y_0 = -6,8 \text{ см}, \quad z_0 = \infty, \quad y_P = -\frac{23,09}{-6,8} = 3,4 \text{ см}, \quad z_P = 0.$$

Точки контура ядра 1, 2, 2' и 3 надо соединить прямыми линиями. Ядро сечения симметрично относительно оси Oy . Поскольку точка приложения силы K находится на касательной 1, нулевая линия проходит через точку 1 контура ядра.

Задача 10.9

Короткая стальная колонна, состоящая из двух швеллеров [24, соединенных двутавром I30, находится под действием трех сил $P_1 = P_3 = 240$ кН и $P_2 = 180$ кН (рис. 10.37, а). Требуется построить эпюру нормальных напряжений в поперечном сечении нижней части колонны при действии всех трех сил и для случая, когда крайняя сила P_1 равна нулю.

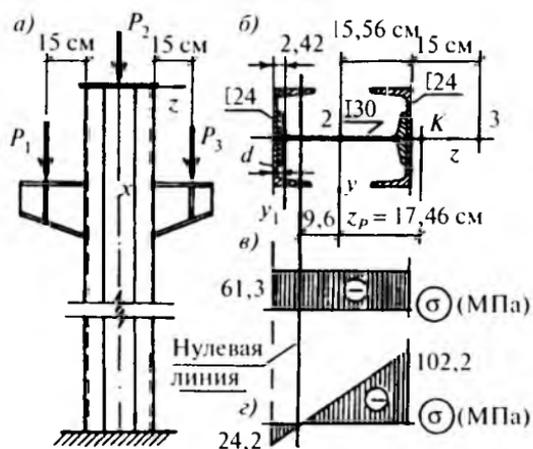


Рис. 10.37

Определяем геометрические характеристики поперечного сечения колонны:

$$[24, \quad F = 30,6 \text{ см}^2, \quad J_{y_1} = 208 \text{ см}^4, \quad z_0 = 2,42 \text{ см}, \quad d = 0,56 \text{ см},$$

$$I30, \quad F = 46,5 \text{ см}^2, \quad J_{y_2} = 7080 \text{ см}^4,$$

$$F = 2 \cdot 30,6 + 46,5 = 107,7 \text{ см}^2,$$

$$J_y = 2[208 + (15 + 0,56 - 2,42)^2 \cdot 30,6] + 7080 = 18\,063 \text{ см}^4,$$

$$i_y^2 = \frac{18\,063}{107,7} = 167,7 \text{ см}^2.$$

При одновременном действии всех трех сил нижняя часть колонны находится в условиях центрального сжатия силой $P = P_1 + P_2 + P_3 = 660$ кН. Нормальные напряжения в поперечных сечениях нижней части колонны постоянны по величине и равны

$$\sigma_0 = -\frac{P}{F} = -\frac{660}{107,7} = -6,13 \text{ кН/см}^2 = -61,3 \text{ МПа.}$$

Эпюра σ для этого случая нагружения приведена на рис. 10.37, в.

При действии двух сил P_2 и P_3 ($P_1 = 0$) нижняя часть колонны находится в условиях внецентренного сжатия силой $P = P_2 + P_3 = 420$ кН, приложенной в точке K (рис. 10.37, б), координата которой z_p определяется из уравнения равновесия.

$$\sum M_K = 0, \quad P_2 z_p = P_3 (30,56 - z_p), \quad z_p = 17,46 \text{ см.}$$

Определяем положение нулевой линии:

$$z_0 = -\frac{167,7}{17,46} = -9,6 \text{ см}, \quad y_0 = \infty.$$

Нулевая линия параллельна оси Oy и пересекает сечение. При втором варианте нагружения колонны напряжения в нижней части сечения разнозначны. Наибольшие напряжения действуют в крайних волокнах колонны при $z = \pm 15,56$ см. Вычисляем их значения по двухчленной формуле

$$\sigma_{\text{нб}} = -\frac{420}{107,7} \left[1 + \frac{17,46}{167,7} (-15,56) \right] = 2,42 \text{ кН/см}^2 = 24,2 \text{ МПа,}$$

$$\sigma_{\text{нм}} = -\frac{420}{107,7} \left(1 + \frac{17,46}{167,7} \cdot 15,56 \right) = -10,22 \text{ кН/см}^2 = -102,2 \text{ МПа.}$$

Эпюра σ приведена на рис. 10.37, г. Второй вариант нагружения является более опасным для прочности колонны.

Задача 10.10

Стержень из двух стальных прокатных неравнобоких уголков $\text{L}125 \times 80 \times 8$ испытывает растяжение с помощью стальных полос толщиной $\delta = 1,2$ см (рис. 10.38, а). Требуется определить величину силы P из условия прочности стержня и построить эпюру σ в его поперечном сечении. Расчетное сопротивление $R = 210$ МПа = 21 кН/см^2 , $\gamma_c = 1,0$.

Выписываем из сортамента геометрические характеристики сечения:

$$2\text{L}125 \times 80 \times 8, \quad F = 2 \cdot 16 = 32 \text{ см}^2, \quad J_z = 2 \cdot 256 = 512 \text{ см}^4, \quad i_z = 4 \text{ см}.$$

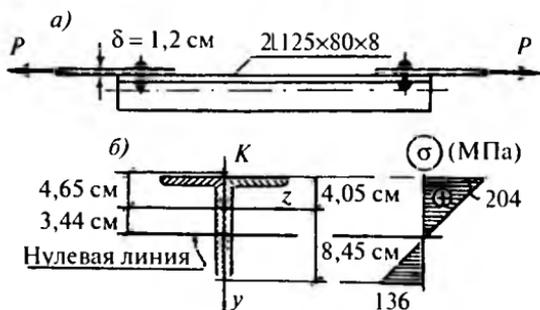


Рис. 10.38

Стержень находится в условиях внецентренного растяжения силами P , координаты точки приложения которых равны

$$y_P = -\left(4,05 + \frac{\delta}{2}\right) = -\left(4,05 + \frac{1,2}{2}\right) = -4,65 \text{ см}, \quad z_P = 0.$$

Определяем положение нулевой линии:

$$y_0 = -\frac{4^2}{-4,65} = 3,44 \text{ см}, \quad z_0 = \infty.$$

Нулевая линия пересекает сечение, эпюра σ разнозначна. Поскольку материал стержня одинаково сопротивляется растяжению и сжатию, достаточно обеспечить выполнение одного условия прочности по наиболее напряженной точке сечения. В нашей задаче наибольшие нормальные напряжения действуют в верхних волокнах полков уголков в зоне растяжения. Ставим условие прочности по этим волокнам ($y = -4,05$ см) и определяем величину силы P :

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{y_P}{i_z^2} y\right) \leq \gamma_c R, \quad P \leq \frac{2 \cdot 16 \cdot 21 \cdot 1,0}{\left|1 + \frac{-4,65}{4^2} (-4,05)\right|} = 308,7 \text{ кН}.$$

Принимаем с округлением $P = 300$ кН и вычисляем значения наибольших нормальных напряжений в зонах растяжения и сжатия:

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{300}{2 \cdot 16} \left[1 + \frac{-4,65}{4^2} (-4,05)\right] = 20,4 \text{ кН/см}^2 = 204 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{\text{нм}} = \frac{300}{2 \cdot 16} \left[1 + \frac{-4,65}{4^2} \cdot 8,45 \right] = -13,6 \text{ кН/см}^2 = -136 \text{ МПа.}$$

Эпюра σ приведена на рис. 10.38, б.

Задача 10.11

Для сечения на рис. 10.39 требуется построить контур ядра сечения.

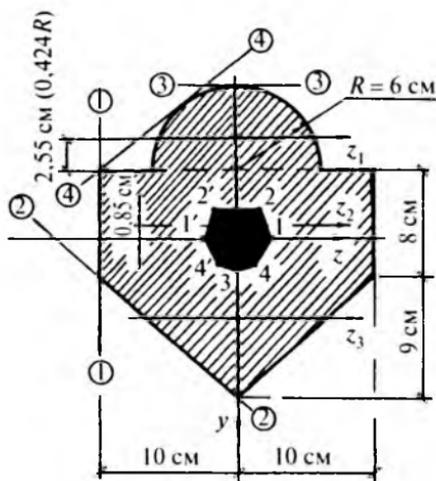


Рис. 10.39

Разбиваем сечение на полукруг, прямоугольник и треугольник и вычисляем его геометрические характеристики.

1. Площадь сечения.

$$F = \frac{\pi \cdot 6^2}{2} + 8 \cdot 20 + \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 9 = 306,5 \text{ см}^2.$$

2. Координата центра тяжести.

$$S_{z_2} = \frac{\pi \cdot 6^2}{2} (-4 - 2,55) + \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 9(4 + 3) = 259,6 \text{ см}^3,$$

$$y_C = \frac{S_{z_2}}{F} = \frac{259,6}{306,5} = 0,85 \text{ см,}$$

где Oy , Oz — главные центральные оси инерции сечения.

3. Главные моменты инерции и квадраты главных радиусов инерции сечения.

$$J_z = \left[0,11 \cdot 6^4 + (4 + 2,55 + 0,85)^2 \frac{1}{2} \pi \cdot 6^2 \right] + \\ + \left[\frac{20 \cdot 8^3}{12} + 0,85^2 \cdot 8 \cdot 20 \right] + \left[\frac{20 \cdot 9^3}{36} + (4 + 3 - 0,85)^2 \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 9 \right] = \\ = 8017 \text{ см}^4, \quad i_z^2 = \frac{8017}{306,5} = 26,16 \text{ см}^2,$$

$$J_y = \frac{\pi \cdot 6^4}{8} + \frac{8 \cdot 20^3}{12} + 2 \frac{9 \cdot 10^3}{12} = 7342 \text{ см}^4, \quad i_y^2 = \frac{7342}{306,5} = 23,96 \text{ см}^2.$$

Проводим четыре касательных к сечению, определяем величины отрезков, которые они отсекают на осях координат, и вычисляем координаты соответствующих точек контура ядра сечения.

Касательная 1–1

$$z_0 = -10 \text{ см}, \quad y_0 = \infty, \quad z_p = -\frac{23,96}{-10} = 2,4 \text{ см}, \quad y_p = 0.$$

Касательная 2–2

$$y_0 = 9 + 4 - 0,85 = 12,15 \text{ см}, \quad z_0 = -\frac{10 \cdot 12,15}{9} = -13,5 \text{ см},$$

$$y_p = -\frac{26,16}{12,15} = -2,15 \text{ см}, \quad z_p = -\frac{23,96}{-13,5} = 1,77 \text{ см}.$$

Касательная 3–3

$$y_0 = -(4 + 6 + 0,85) = -10,85 \text{ см}, \quad z_0 = \infty,$$

$$y_p = -\frac{26,16}{-10,85} = 2,41 \text{ см}, \quad z_p = 0.$$

Касательная 4–4

Длины отрезков z_0 и y_0 , отсекаемых этой касательной на осях координат, определяем графически:

$$y_0 = -12,5 \text{ см}, \quad z_0 = -16,6 \text{ см}, \quad y_p = -\frac{26,16}{-12,5} = 2,09 \text{ см},$$

$$z_p = -\frac{23,96}{-16,6} = 1,44 \text{ см}.$$

Получили необходимое число точек контура ядра сечения. Точки 1', 2' и 4' расположены симметрично по отношению к точкам 1,

2 и 4. Точки 4, 1, 2, 2', 1', 4' надо соединить прямыми линиями. Линия 4–3–4' является кривой. Ядро сечения показано на рис. 10.39.

Задача 10.12

Стальная консольная балка в виде прокатного двутавра I27а, усиленного листами 180×12 мм, находится в условиях внецентренного сжатия с изгибом (рис. 10.40, а).

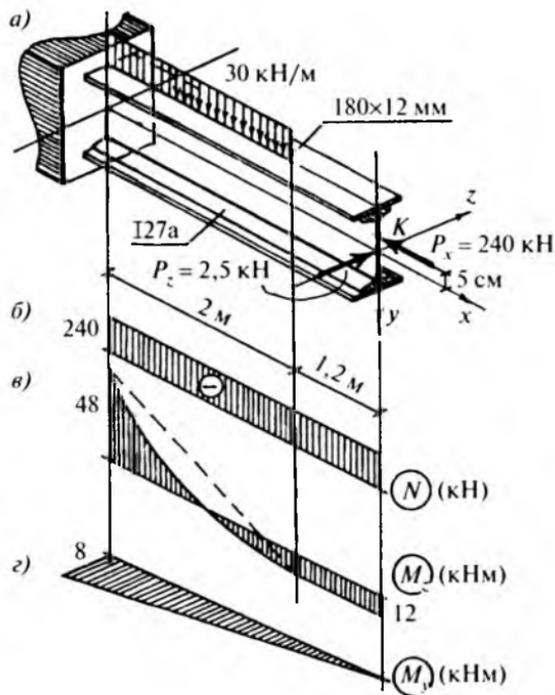


Рис. 10.40

Требуется построить эпюру σ в опасном сечении балки. Для двутавра I27а имеем $F = 43,2 \text{ см}^2$, $J_z = 5500 \text{ см}^4$, $J_y = 337 \text{ см}^4$.

Вычисляем геометрические характеристики сечения:

$$F = 43,2 + 2 \cdot 18 \cdot 1,2 = 86,4 \text{ см}^2,$$

$$J_z = 5500 + 2 \left(\frac{18 \cdot 1,2^3}{12} + 14,1^2 \cdot 18 \cdot 1,2 \right) = 14\,094 \text{ см}^4,$$

$$J_y = 337 + 2 \frac{1,2 \cdot 18^3}{12} = 1503 \text{ см}^4,$$

$$W_z = \frac{14\,094}{14,7} = 959 \text{ см}^3, \quad W_y = \frac{1503}{9} = 167 \text{ см}^3.$$

Перенесем продольную силу P_x в центр тяжести сечения и приложим по правилам статики сосредоточенный момент $M_z = 240 \times 0,05 = 12 \text{ кНм}$, растягивающий нижние волокна балки. Поперечная нагрузка вызывает изгиб балки в главных плоскостях Oxy и Oxz . Строим эпюры продольной силы N и изгибающих моментов M_z и M_y (рис. 10.40, б, в, г). Ординаты эпюр M_z и M_y отложены со стороны растянутых волокон.

Опасным является сечение в заделке, где оба изгибающих момента имеют наибольшие значения. Поскольку сечение имеет две оси симметрии и прямоугольный контур, наибольшие нормальные напряжения действуют в противоположных угловых точках сечения. Определяем их значения в опасном сечении по формуле (10.14)

$$\sigma_A = -\frac{N}{F} + \left(\frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \right) = -\frac{240}{86,4} + \left(\frac{48}{959} + \frac{8}{167} \right) \cdot 10^2 =$$

$$= -2,78 + (5,01 + 4,79) = 7,02 \text{ кН/см}^2,$$

$$\sigma_B = -\frac{N}{F} - \left(\frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \right) = -2,78 - (5,01 + 4,79) = -12,58 \text{ кН/см}^2.$$

Напряжения в сечении разнозначны. Строим эпюры σ от действия каждого внутреннего усилия (рис. 10.41). Напряжения от действия изгибающих моментов имеют одинаковый знак в левой верхней (растяжение) и правой нижней (сжатие) четвертях сечения. Наибольшие нормальные напряжения в зонах растяжения и сжатия опасного сечения действуют в угловых точках этих четвертей. Для построения суммарной эпюры σ определяем положение нулевой линии по углу ее наклона к оси Oz и по величине отрезка, который она отсекает на оси Oy :

$$|\operatorname{tg} \varphi_0| = \frac{J_z M_y}{J_y M_z} = \frac{14\,094}{1503} \cdot \frac{8}{48} = 1,563, \quad |\varphi_0| = 57^\circ 23',$$

$$y_0 = -\frac{N J_z}{M_z F} = -\frac{240}{48 \cdot 10^2} \cdot \frac{14\,094}{86,4} = -8,16 \text{ см}.$$

Суммарная эпюра σ приведена на рис. 10.41.

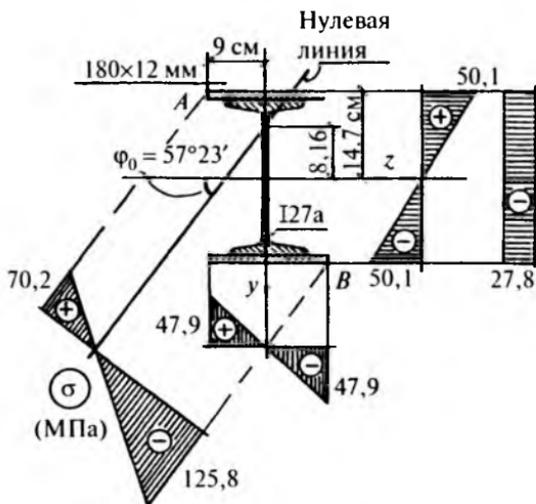


Рис. 10.41

Задача 10.13

Стальной консольный ломаный стержень круглого сечения находится в условиях изгиба с кручением (рис. 10.42, *a*). Требуется определить диаметр стержня из условия прочности по энергетической теории, приняв $[\sigma] = 180 \text{ МПа} = 18 \text{ кН/см}^2$, и построить эпюры нормальных и касательных напряжений в опасном сечении.

Вертикальная сила вызывает изгиб стержней *AB* и *BC* в плоскости *Oxy* и кручение стержня *AB*. Горизонтальная сила вызывает изгиб участка стержня *AB* в плоскости *Oxz*. Строим эпюры изгибающих моментов в главных плоскостях инерции каждого стержня и эпюру крутящего момента (рис. 10.42, *б, в, г*). Размерность ординат на эпюрах в кНсм. Опасным сечением является сечение стержня *AB* вблизи заделки, где все три момента имеют наибольшие значения.

Вычисляем суммарный изгибающий момент в заделке:

$$M_{\text{II}} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2} = \sqrt{120^2 + 90^2} = 150 \text{ кНсм.}$$

Опасными точками являются точки, принадлежащие контуру поперечного сечения. В этих точках нормальные напряжения от изгиба и касательные напряжения от кручения имеют наибольшие значения.

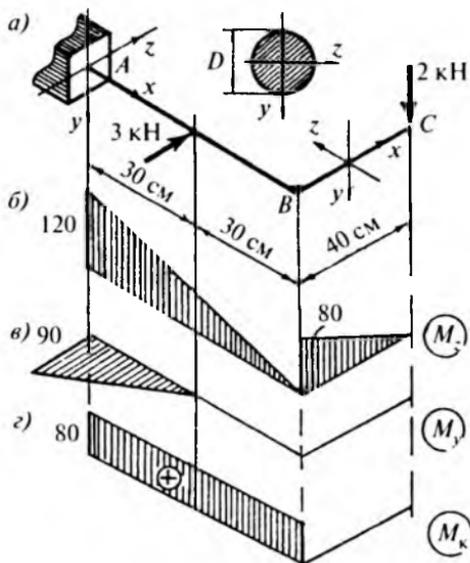


Рис. 10.42

Для стержней круглого сечения плоскость изгиба совпадает с плоскостью действия суммарного изгибающего момента, и наибольшие нормальные напряжения определяются по формуле

$$\sigma_{\text{нб}} = |\sigma_{\text{нм}}| = \frac{M_{\text{и}}}{W_{\text{и}}},$$

где $W_{\text{и}} = W_z = W_y = \frac{\pi R^3}{4} = \frac{\pi D^3}{32}$.

Наибольшие касательные напряжения от кручения равны

$$\tau_{\text{нб}} = \frac{M_{\text{к}}}{W_{\text{р}}},$$

где $W_{\text{р}} = \frac{\pi D^3}{16} = 2W_{\text{и}}$.

Запишем условие прочности в наиболее напряженных точках контура по энергетической теории прочности:

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma].$$

Подставляя сюда выражения для наибольших напряжений, получим

$$\frac{1}{W_{II}} \sqrt{M_{II}^2 + 0,75 M_K^2} \leq [\sigma].$$

Из этого условия определяем требуемый диаметр стержня:

$$W_{II} = \frac{\pi D^3}{32} \geq \frac{\sqrt{M_{II}^2 + 0,75 M_K^2}}{[\sigma]}, \quad D \geq \sqrt[3]{\frac{32 \sqrt{150^2 + 0,75 \cdot 80^2}}{\pi \cdot 18}} = 4,54 \text{ см.}$$

Принимаем $D = 4,6$ см и вычисляем значения наибольших напряжений:

$$W_{II} = \frac{\pi \cdot 4,6^3}{32} = 9,56 \text{ см}^3, \quad W_p = 2W_{II} = 19,12 \text{ см}^3,$$

$$\sigma_{\text{нб}} = |\sigma_{\text{нм}}| = \frac{M_{II}}{W_{II}} = \frac{150}{9,56} = 15,7 \text{ кН/см}^2 = 157 \text{ МПа},$$

$$\tau_{\text{нб}} = \frac{M_K}{W_p} = \frac{80}{19,12} = 4,18 \text{ кН/см}^2 = 41,8 \text{ МПа}.$$

Для правильного построения эпюры σ определяем положение нулевой линии (нейтральной оси) в сечении стержня AB вблизи заделки:

$$|\operatorname{tg} \varphi_0| = \frac{J_z M_y}{J_y M_z} = \frac{90}{120} = 0,75, \quad |\varphi_0| = 36^\circ 52'.$$

Нормальные напряжения от действия M_z и M_y суммируются в левой верхней (растяжение) и правой нижней (сжатие) четвертях сечения. Эпюры σ и τ приведены на рис. 10.43.

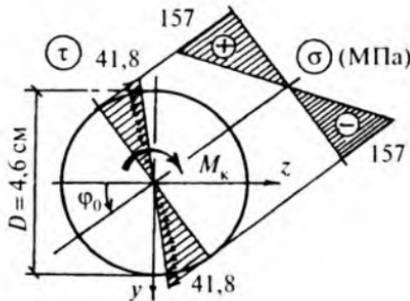


Рис. 10.43

Задача 10.14

Консольный чугунный стержень прямоугольного сечения 30×45 мм с помощью рычага подвергается изгибу и кручению (рис. 10.44). Требуется определить величину силы P из условия прочности по теории прочности Мора и вычислить значения наибольших напряжений. В расчетах принять $[\sigma] = 120 \text{ МПа} = 12 \text{ кН/см}^2$, $k = 0,3$.

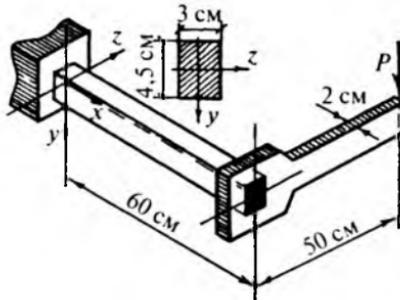


Рис. 10.44

Определяем геометрические характеристики сечения стержня:

$$W_k = \beta hb^2 = 0,23 \cdot 4,5 \cdot 3^2 = 9,32 \text{ см}^3, \quad W_z = \frac{3 \cdot 4,5^2}{6} = 10,1 \text{ см}^3,$$

где коэффициент β взят из табл. 10.1 при $n = 1,5$.

Опасным в смысле прочности стержня является сечение вблизи заделки. Выражаем изгибающий и крутящий моменты в этом сечении через силу P .

$$M_n = M_z = \left(60 - \frac{1}{2} \cdot 2\right) P = 59P, \quad M_k = 50P.$$

Опасными точками сечения являются точки A и B (рис. 10.45), где действуют наибольшие нормальные и касательные напряжения.

$$\sigma_A = \frac{M_z}{W_z} = \frac{59P}{10,1} = 5,84P, \quad \tau_B = \frac{M_k}{W_k} = \frac{50P}{9,32} = 5,36P,$$

$$\sigma_B = 0, \quad \tau_A = \tau_B \gamma = 5,36P \cdot 0,86 = 4,61P,$$

где значение коэффициента γ также взято из табл. 10.1.

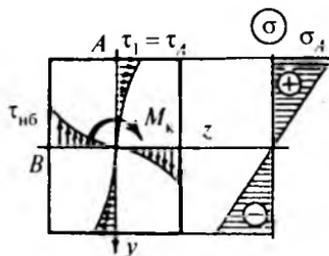


Рис. 10.45

Выполняем в точках A и B условие прочности по формуле (10.23) теории прочности Мора и определяем два значения силы P .

Точка A

$$\frac{1-k}{2} \sigma_A + \frac{1+k}{2} \sqrt{\sigma_A^2 + 4\tau_A^2} \leq [\sigma],$$

$$P \leq \frac{12}{\frac{1-0,3}{2} \cdot 5,84 + \frac{1+0,3}{2} \sqrt{5,84^2 + 4 \cdot 4,61^2}} = 1,31 \text{ кН.}$$

Точка B

$$P \leq \frac{12}{\frac{1-0,3}{2} \cdot 0 + \frac{1+0,3}{2} \sqrt{0 + 4 \cdot 5,36^2}} = 1,72 \text{ кН.}$$

Точка A является более опасной. Принимаем с округлением меньшую силу $P = 1,3$ кН и вычисляем значения наибольших напряжений в стержне:

$$\sigma_A = \sigma_{нб} = \frac{M_z}{W_z} = \frac{59 \cdot 1,3}{10,1} = 7,59 \text{ кН/см}^2 = 75,9 \text{ МПа,}$$

$$\tau_B = \tau_{нб} = \frac{M_k}{W_k} = \frac{50 \cdot 1,3}{9,32} = 6,97 \text{ кН/см}^2 = 69,7 \text{ МПа,}$$

$$\tau_A = \gamma \tau_{нб} = 0,86 \cdot 69,7 = 59,9 \text{ МПа.}$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 10.15. Для деревянной балки (рис. 10.46), находящейся в условиях плоского косоугольного изгиба, требуется определить размеры сечения из условия прочности, приняв $b = 0,5h$, $R = 14$ МПа, $\gamma_c = 1,0$. Нагрузка является расчетной. Определить положение нуле-

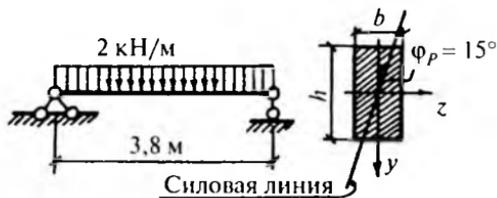


Рис. 10.46

вой линии и построить эпюру нормальных напряжений в опасном сечении.

Ответ: сечение 9×18 см, $\sigma_{нб} = |\sigma_{нм}| = 11$ МПа, $|\varphi_0| = 46^\circ 59'$.

Задача 10.16. Для стальной составной балки (рис. 10.47), находящейся в условиях плоского косоугольного изгиба, требуется определить из условия прочности величину силы P , приняв $R = 210$ МПа, $\gamma_c = 1,0$. Определить положение нулевой линии и построить эпюру σ в опасном сечении.



Рис. 10.47

Ответ: $P = 15,9$ кН, $\sigma_{нм} = -209$ МПа, $\sigma_{нб} = 158$ МПа, $|\varphi_0| = 17^\circ 02'$.

Задача 10.17. Для стальной составной балки (рис. 10.48), находящейся в условиях плоского косоугольного изгиба, требуется определить положение нулевой линии, построить эпюру σ в опасном сечении и вычислить значения вертикального и горизонтального перемещений.

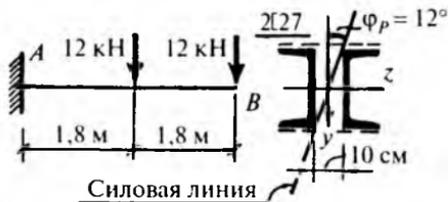


Рис. 10.48

щений свободного конца. Совместная работа швеллеров обеспечена соединениями. $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа.

Ответ: $|\varphi_0| = 21^\circ 40'$, $\sigma_{нб} = |\sigma_{нм}| = 147$ МПа, $v_B = 1,37$ см, $w_B = -0,55$ см.

Задача 10.18. Для стальных балок (рис. 10.49, а, б), находящихся в условиях пространственного изгиба, требуется определить положение нулевой линии в опасном сечении, построить эпюру σ и вычислить перемещения свободного конца (рис. 10.49, а) и середины пролета (рис. 10.49, б).

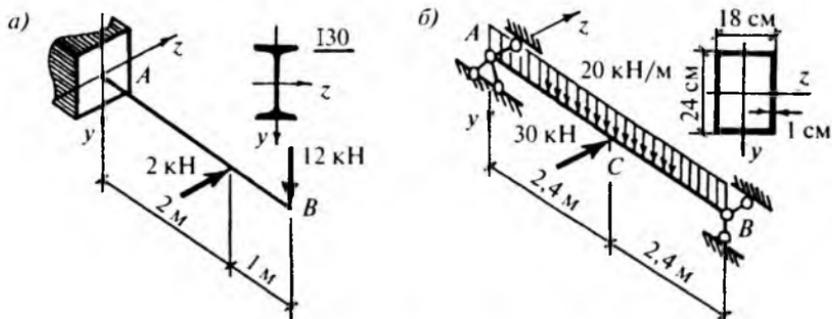


Рис. 10.49

Ответ: а) $|\varphi_0| = 66^\circ 49'$, $\sigma_{нб} = |\sigma_{нм}| = 156$ МПа, $v_B = 0,73$ см, $w_B = 1,32$ см;

б) $|\varphi_0| = 44^\circ 32'$, $\sigma_{нб} = |\sigma_{нм}| = 184$ МПа, $v_C = 1,01$ см, $w_C = 0,79$ см.

Задача 10.19. Для коротких стержней на рис. 10.50 и 10.51, находящихся в условиях центрального растяжения и сжатия с изгибом, требуется построить эпюру нормальных напряжений в опасном сечении.

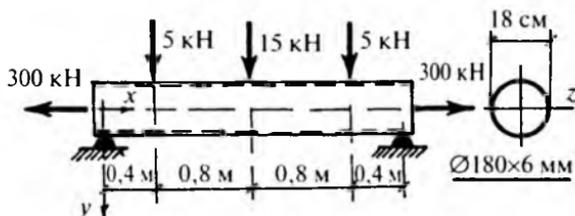


Рис. 10.50

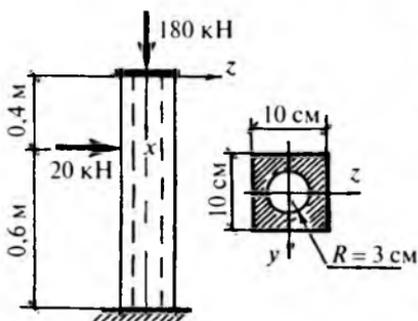


Рис. 10.51

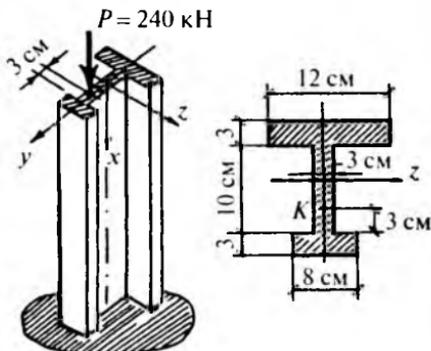


Рис. 10.52

Ответ: задача на рис. 10.50 — $\sigma_{\text{нб}} = 171 \text{ МПа}$, $\sigma_{\text{нм}} = 11,8 \text{ МПа}$;
задача на рис. 10.51 — $\sigma_{\text{нб}} = 52,8 \text{ МПа}$, $\sigma_{\text{нм}} = -103 \text{ МПа}$.

Задача 10.20. Для короткого стержня, находящегося в условиях внецентренного сжатия (рис. 10.52), требуется построить эпюру σ в поперечном сечении.

Ответ: $\sigma_{\text{нб}} = -8,9 \text{ МПа}$, $\sigma_{\text{нм}} = -48,8 \text{ МПа}$.

Задача 10.21. Для коротких стержней с поперечным сечением на рис. 10.53, а, б, находящихся в условиях внецентренного сжатия силой, приложенной в точке К, требуется определить из условий прочности величину силы P и построить эпюру σ в поперечном сечении. Расчетные сопротивления и допускаемые напряжения материала равны:

а) $R_p = R_c = 210 \text{ МПа}$, $\gamma_c = 1,0$.

б) $[\sigma_p] = 40 \text{ МПа}$, $[\sigma_c] = 120 \text{ МПа}$.

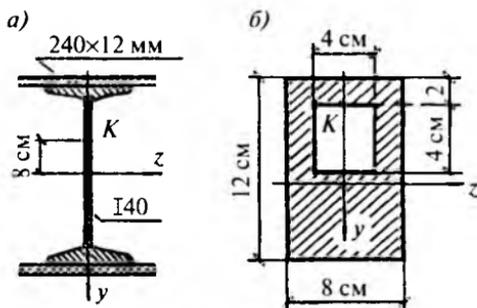


Рис. 10.53

Ответ: а) $P = 1814 \text{ кН}$, $\sigma_{\text{нб}} = -69 \text{ МПа}$, $\sigma_{\text{нм}} = -210 \text{ МПа}$,
 б) $P = 147 \text{ кН}$, $\sigma_{\text{нб}} = 40 \text{ МПа}$, $\sigma_{\text{нм}} = -81,7 \text{ МПа}$.

Задача 10.22. Для стержней на рис. 10.54, а, б, находящихся в условиях сложного сопротивления, требуется построить эпюру σ в опасном сечении.

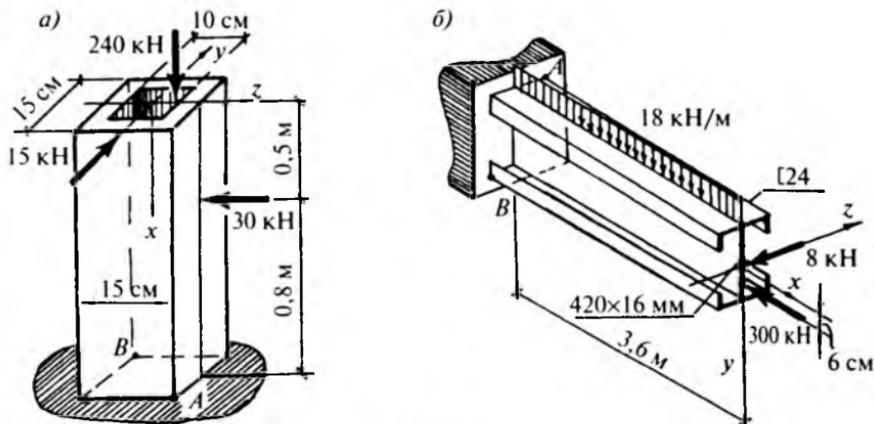


Рис. 10.54

Ответ: а) $\sigma_A = \sigma_{\text{нб}} = 50,6 \text{ МПа}$, $\sigma_B = \sigma_{\text{нм}} = -89 \text{ МПа}$;
 б) $\sigma_A = \sigma_{\text{нб}} = 124,8 \text{ МПа}$, $\sigma_B = \sigma_{\text{нм}} = -171,5 \text{ МПа}$.

Глава 11

УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ. ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Под устойчивостью инженерных конструкций и их элементов понимается способность сохранять в процессе эксплуатации первоначальную форму равновесия. На рис. 11.1 показан достаточно гибкий стержень, находящийся под действием центрально приложенной сжимающей силы P . Если эта сила меньше некоторого критического значения $P_{кр}$, то первоначальная прямолинейная форма равновесия является устойчивой. При небольшом искривлении стержня поперечной нагрузкой он стремится вернуться в свое первоначальное прямолинейное состояние после устранения причины искривления (рис. 11.1, а).

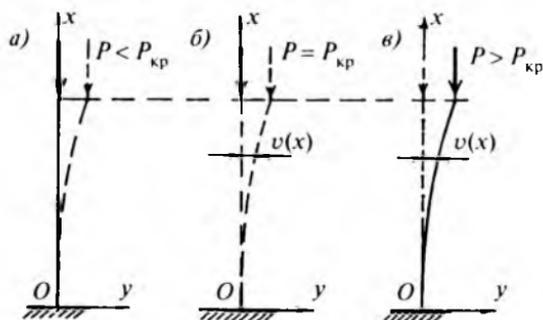


Рис. 11.1

При достижении силой критического значения $P_{кр}$ первоначальная форма равновесия становится неустойчивой (рис. 11.1, б). Возможно равновесие стержня в искривленном состоянии (искривленная форма равновесия). Такое явление называется бифуркацией (раздвоением) формы равновесия при достижении нагрузками критических значений. Таким образом, критической силой для сжатого стержня можно считать силу, соответствующую границе перехода из прямолинейной формы равновесия стержня в искривленную форму.

Если сжимающая сила превышает критическое значение, то устойчивой является искривленная форма равновесия стержня

(рис. 11.1, в). При этом происходит интенсивное нарастание деформаций изгиба, что может привести к разрушению стержня. Такое явление называется потерей устойчивости. Потеря устойчивости инженерных сооружений и конструкций как в целом, так и их отдельных элементов очень опасна, поскольку она может происходить достаточно быстро, иногда почти внезапно. В силу этого действующие на сооружение или конструкцию нагрузки должны быть значительно меньше критических.

Для исследования устойчивости равновесия упругих систем и определения критических нагрузок используются три метода — статический, энергетический и динамический.

Статический метод определения критических нагрузок основан на рассмотрении уравнения равновесия системы в деформированном состоянии при достижении нагрузками критических значений. Для сжатого стержня в качестве деформированного состояния принимается искривленная форма равновесия при $P = P_{кр}$. При этом в стержне имеет место явление продольного изгиба, которое можно описать соответствующим дифференциальным уравнением. Если изогнутую ось стержня считать очень полой кривой с малой кривизной, то его продольный изгиб можно описать линейным дифференциальным уравнением второго или четвертого порядка:

$$EJv''(x) + Pv(x) = 0, \quad (11.1)$$

$$EJv^{IV}(x) + Pv''(x) = 0, \quad (11.2)$$

где $v(x)$ — прогиб стержня, EJ — жесткость в плоскости продольного изгиба.

Решение уравнения (11.2) в безразмерной переменной ξ и при $EJ = \text{const}$ имеет следующий вид:

$$v(\xi) = C_1 + C_2\xi + C_3\sin\xi + C_4\cos\xi, \quad (11.3)$$

где $\xi = kx$, $k = \sqrt{\frac{P}{EJ}}$.

Дифференцируя решение (11.3), получаем выражения для углов поворота поперечных сечений, изгибающих моментов и поперечных сил:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\xi) &= kv'(\xi) = k(C_2 + C_3\cos\xi - C_4\sin\xi), \\ M(\xi) &= -k^2EJv''(\xi) = k^2EJ(C_3\sin\xi + C_4\cos\xi), \\ Q(\xi) &= -k^3EJv'''(\xi) = k^3EJ(C_3\cos\xi - C_4\sin\xi). \end{aligned} \right\} \quad (11.4)$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 , C_2 , C_3 и C_4 надо использовать соответствующие граничные условия исходя из характера закрепления стержня, раскрыв которые получим систему однородных алгебраических уравнений относительно этих постоянных. Приравняв определитель однородной системы к нулю, получим характеристическое уравнение устойчивости. Корни этого уравнения позволяют определить значения критической силы при различных условиях закрепления стержня.

В качестве примера определим величину критической силы для стержня на рис. 11.2. Используем граничные условия: при $x = 0$, $v = 0$, $M = 0$; при $x = l$, $v = 0$, $\varphi = 0$.

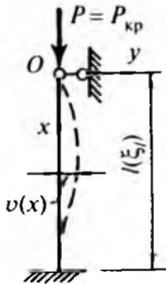


Рис. 11.2

Раскрыв эти условия, получаем систему однородных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} C_1 + C_4 &= 0, \\ k^2 EJ C_4 &= 0, \\ C_1 + C_2 \xi_l + C_3 \sin \xi_l + C_4 \cos \xi_l &= 0, \\ C_2 + C_3 \cos \xi_l - C_4 \sin \xi_l &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Упростив эту систему и приравняв ее определитель к нулю, получаем характеристическое уравнение устойчивости:

$$\xi_l \cos \xi_l - \sin \xi_l = 0, \quad \operatorname{tg} \xi_l = \xi_l.$$

Решив это уравнение численно или графически, находим наименьшее значение корня $\xi_l = kl = 4,493$, а затем и величину критической силы:

$$k^2 = \frac{P}{EJ} = \frac{(4,493)^2}{l^2}, \quad P = P_{\text{кр}} = \frac{20,19 EJ}{l^2} \approx \frac{\pi^2 EJ}{(0,7l)^2}.$$

Аналогично определяется величина критической силы для сжатого стержня при других условиях его закрепления. Полученные результаты можно обобщить, введя приведенную длину стержня $l_0 = \mu l$. При этом критическая сила может быть вычислена по так называемой обобщенной формуле Эйлера:

$$P_{\text{кр}} = P_3 = \frac{\pi^2 EJ}{l_0^2} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}. \quad (11.5)$$

Приведенную длину стержня можно рассматривать как длину полуволны синусоиды, выделяемой на изогнутой оси стержня при

его продольном изгибе. Коэффициент μ называется коэффициентом приведения длины. Значения этого коэффициента для однопролетных стержней с различными условиями закрепления концов приведены на рис. 11.3.

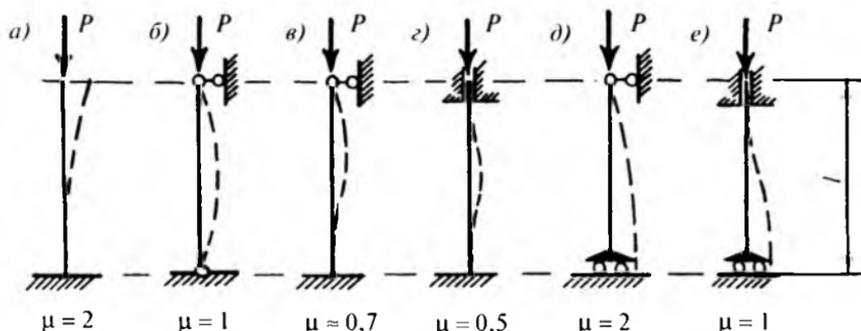


Рис. 11.3

Для более сложных случаев закрепления стержня значения μ приведены в справочниках по устойчивости сооружений. Например, для стержней с промежуточной шарнирной опорой (рис. 11.4 и 11.5) значения μ даны в табл. 11.1 и 11.2

Изложенный метод определения критических сил называется методом Эйлера. В этом методе используются линейные дифференциальные уравнения продольного изгиба (11.1) или (11.2), в силу чего оказывается невозможным определение числовых значений прогибов стержня. Однако при $P < P_{кр}$ это обстоятельство, как правило, не имеет практического значения.

При $P > P_{кр}$ прогибы стержня интенсивно нарастают. Для их определения в закритической области необходимо при выводе дифференциального уравнения продольного изгиба использовать точное выражение для кривизны изогнутой оси стержня:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}. \quad (11.6)$$

В этом случае дифференциальное уравнение продольного изгиба становится нелинейным, что существенно усложняет решение задачи.

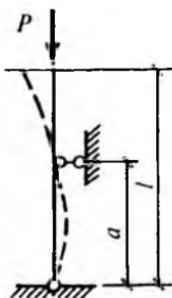


Рис. 11.4

Таблица 11.1

a/l	μ
0,0	2,0
0,2	1,73
0,4	1,47
0,6	1,23
0,8	1,06
1,0	1,00

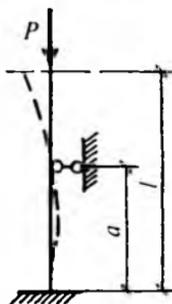


Рис. 11.5

Таблица 11.2

a/l	μ
0,0	2,0
0,2	1,70
0,4	1,40
0,6	1,11
0,8	0,852
1,0	0,699

Сжатый стержень может иметь различные условия закрепления в главных плоскостях инерции (рис. 11.6). Для определения плоскости возможной потери устойчивости стержня надо вычислить значения его гибкости в главных плоскостях:

$$\lambda_z = \frac{\mu_z l}{i_y}, \quad \lambda_y = \frac{\mu_y l}{i_z}, \quad (11.7)$$

где i_z и i_y — главные радиусы инерции сечения, μ_z и μ_y — коэффициенты приведения длины стержня в главных плоскостях.

Опасной в смысле потери устойчивости стержня является плоскость его большей гибкости. На составные стержни (колонны) с решеткой (рис. 11.6) или на планках иногда накладывается условие равноустойчивости в главных плоскостях: $\lambda_z = \lambda_y$. Из этого условия можно определить расстояние между основными элементами (ветвями) составного стержня:

$$a = \sqrt{\left(\frac{\mu_z}{\mu_y}\right)^2 i_z^2 - i_{y_0}^2}. \quad (11.8)$$

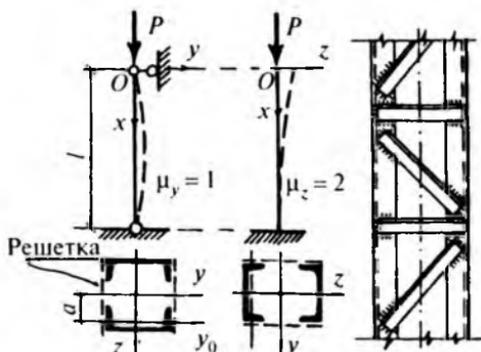


Рис. 11.6

Формулой Эйлера (11.5) для определения критических сил можно пользоваться только в пределах справедливости закона Гука, то есть когда критические напряжения в стержне не превосходят предел пропорциональности материала $\sigma_{\text{пн}}$:

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{P_{\text{кр}}}{F} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{\text{пн}}. \quad (11.9)$$

Условие применимости формулы Эйлера можно представить в следующем виде:

$$\lambda \geq \lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\text{пн}}}}. \quad (11.10)$$

Для каждого материала вычисляется свое значение предельной гибкости. Например, для малоуглеродистой стали $\lambda_1 \approx 100$.

При $\lambda < \lambda_1$ формулой Эйлера пользоваться нельзя. Для определения критических напряжений и критических сил за пределом упругих деформаций материала стержня используются эмпирические формулы. Например, для малоуглеродистой стали при гибкости стержня в пределах $60 \leq \lambda < 100$ может использоваться формула, полученная Л. Тетмайером и Ф. Ясинским:

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda, \quad P_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} F, \quad (11.11)$$

где a и b — полученные в опытах коэффициенты, имеющие размерность напряжений и равные: $a = 310$ МПа, $b = 1,14$ МПа.

Для чугунных стержней при $\lambda \leq 80$ линейная зависимость (11.11) заменяется параболической:

$$\sigma_{кр} = 776 - 12\lambda + 0,053\lambda^2. \quad (11.12)$$

При малых гибкостях стержня потеря устойчивости прямолинейной формы равновесия не происходит, а разрушение может наступить вследствие исчерпания прочности. Поэтому в качестве критических напряжений принимается либо предел текучести, либо временное сопротивление материала стержня. Для таких стержней может произойти потеря устойчивости положения, то есть без деформаций изгиба. Задача определения критических нагрузок в этом случае значительно проще; она может быть решена с помощью обычных уравнений равновесия.

Энергетический метод исследования устойчивости упругих систем основан на анализе полной потенциальной энергии деформации системы или приращения энергии в деформированном состоянии при достижении нагрузками критических значений. При этом можно использовать либо условие минимума полной потенциальной энергии в положении устойчивого равновесия, либо условие равенства работы внешних сил дополнительно накапливаемой потенциальной энергии деформации.

Например, при определении критической силы для сжатого стержня (рис. 11.7) надо работу силы P на осевом перемещении δ , вызванном изгибом стержня, приравнять приращению потенциальной энергии за счет его изгибных деформаций. Эти величины равны

$$A = P\delta = \frac{P}{2} \int_0^l (v')^2 dx; \quad (11.13)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2 dx}{EJ} = \frac{1}{2} \int_0^l EJ(v'')^2 dx, \quad (11.14)$$

где M — изгибающий момент в стержне.

Выполнив условие $A = U$, получим формулу для определения критической силы:

$$P_{кр} = \frac{\int_0^l \frac{M^2 dx}{EJ}}{\int_0^l (v')^2 dx} = \frac{\int_0^l EJ(v'')^2 dx}{\int_0^l (v')^2 dx}. \quad (11.15)$$

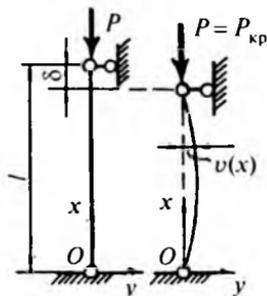


Рис. 11.7

Если $v(x)$ является точным выражением изогнутой оси стержня при продольном изгибе, то формула (11.15) дает точное значение критической силы. Однако получить точное уравнение изогнутой оси стержня не всегда возможно или довольно сложно. Для приближенного решения задачи функцию $v(x)$ надо принять в виде некоторой кривой, позволяющей удовлетворить условиям закрепления стержня. Например, для многих задач эту функцию можно принять в виде полинома

$$v(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \quad (11.16)$$

степень которого должна быть равна числу граничных условий. Удовлетворение этим условиям позволяет определить значения коэффициентов полинома (11.16).

Приближенное значение критической силы, вычисляемое по формуле (11.15), больше точного значения.

При расчете сжатых стержней на продольный изгиб необходимо обеспечить выполнение условия устойчивости:

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq \gamma_c \varphi R, \quad (11.17)$$

где P — расчетное значение сжимающей силы, $R = R_c$ — расчетное сопротивление материала стержня при сжатии, F — площадь поперечного сечения стержня, φ — коэффициент уменьшения расчетного сопротивления (коэффициент продольного изгиба).

Коэффициент φ зависит от гибкости стержня и от свойств его материала. Значения этого коэффициента для некоторых материалов приведены в табл. 11.3. В СНиП по строительным конструкциям условие (11.17) дано в более удобной для расчета форме:

$$\frac{P}{F\varphi} \leq \gamma_c R. \quad (11.18)$$

Таблица 11.3

Гибкость λ	Значения коэффициентов φ							
	Сталь с расчетным сопротивлением R , МПа				Алюминиевые сплавы		Чугун	Дерево
	200	240	280	320	АМг6	Д16-Т		
10	0,988	0,987	0,985	0,984	0,973	0,999	0,97	0,992
20	0,967	0,962	0,959	0,955	0,946	0,998	0,91	0,968
30	0,939	0,931	0,924	0,917	0,890	0,835	0,81	0,928
40	0,906	0,894	0,883	0,873	0,770	0,700	0,69	0,872
50	0,869	0,852	0,836	0,822	0,640	0,568	0,57	0,800
60	0,827	0,805	0,785	0,766	0,542	0,455	0,44	0,712
70	0,782	0,754	0,724	0,687	0,458	0,353	0,34	0,612
80	0,734	0,686	0,641	0,602	0,387	0,269	0,26	0,469
90	0,665	0,612	0,565	0,522	0,322	0,212	0,20	0,370
100	0,599	0,542	0,493	0,448	0,280	0,172	0,16	0,300
110	0,537	0,478	0,427	0,381	0,243	0,142	—	0,248
120	0,479	0,419	0,366	0,321	0,213	0,119	—	0,208
130	0,425	0,364	0,313	0,276	0,183	0,101	—	0,178
140	0,376	0,315	0,272	0,240	0,162	0,087	—	0,153
150	0,328	0,276	0,239	0,211	0,148	0,076	—	0,133
160	0,290	0,244	0,212	0,187	—	—	—	0,117
170	0,259	0,218	0,189	0,167	—	—	—	0,104
180	0,233	0,196	0,170	0,150	—	—	—	0,093
190	0,210	0,177	0,154	0,136	—	—	—	0,083
200	0,191	0,161	0,140	0,124	—	—	—	0,075
210	0,174	0,147	0,128	0,113	—	—	—	—

Подбор сечения сжатых стержней производится по формуле

$$F \geq \frac{P}{\gamma_c \varphi R}. \quad (11.19)$$

Поскольку эта формула содержит два неизвестных — F и φ , задача подбора сечения решается методом последовательных приближений.

Допустимая расчетная сжимающая сила определяется по формуле

$$P \leq \gamma_c \varphi R F. \quad (11.20)$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 11.1

Для стального стержня трубчатого сечения $\varnothing 180 \times 6$ мм (рис. 11.8) требуется определить значения допустимой расчетной сжимающей силы и критической силы. Условия закрепления стержня в главных плоскостях одинаковы. В расчетах принять $R = 200$ МПа $= 20$ кН/см², $\gamma_c = 0,9$, $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа $= 2,1 \cdot 10^4$ кН/см², $\sigma_{\text{нп}} = 200$ МПа.

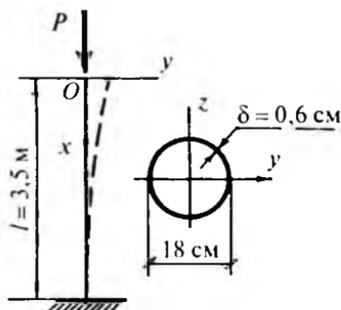


Рис. 11.8

Вычисляем геометрические характеристики сечения:

$$F = \pi(9^2 - 8,4^2) = 32,8 \text{ см}^2,$$

$$J_z = J_y = \frac{\pi}{4}(9^4 - 8,4^4) = 1243 \text{ см}^4,$$

$$i_z = i_y = \sqrt{\frac{1243}{32,8}} = 6,16 \text{ см}.$$

Коэффициенты приведения длины стержня равны: $\mu_y = \mu_z = 2$. Гибкость стержня в главных плоскостях одинакова и равна

$$\lambda_y = \lambda_z = \frac{2 \cdot 350}{6,16} = 114.$$

Значение коэффициента продольного изгиба φ определяем по данным табл. 11.3 с помощью линейной интерполяции.

$$\lambda = 114, \quad R = 200 \text{ МПа}, \quad \varphi = 0,537 - \frac{0,537 - 0,479}{10} \cdot 4 = 0,514.$$

Вычисляем значение допустимой расчетной силы:

$$P \leq \gamma_c \varphi R F = 0,9 \cdot 0,514 \cdot 20 \cdot 32,8 = 303,5 \text{ кН.}$$

Поскольку гибкость стержня больше предельной гибкости $\lambda_1 = 100$, значение критической силы определяем по формуле Эйлера:

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ}{l_{\text{пр}}^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^4 \cdot 1243}{(2 \cdot 350)^2} = 525,8 \text{ кН.}$$

Критические напряжения в стержне равны

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{P_{\text{кр}}}{F} = \frac{525,8}{32,8} = 16 \text{ кН/см}^2 = 160 \text{ МПа} < \sigma_{\text{пц}} = 200 \text{ МПа.}$$

Потеря устойчивости стержня произойдет в пределах пропорциональности материала.

Задача 11.2

Для сжатого деревянного стержня квадратного сечения (рис. 11.9) требуется определить размер a из условия устойчивости. Условия закрепления стержня в главных плоскостях одинаковы. Расчетное сопротивление для дерева $R = 14 \text{ МПа} = 1,4 \text{ кН/см}^2$, $\gamma_c = 1,0$.

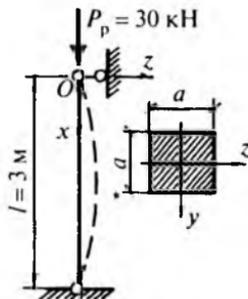


Рис. 11.9

Принимаем в первом приближении $\varphi = 0,3$ и определяем требуемую площадь сечения:

$$F \geq \frac{P}{\gamma_c \varphi R} = \frac{30}{1,0 \cdot 0,3 \cdot 1,4} = 71,43 \text{ см}^2.$$

Определяем размер a , радиусы инерции сечения и гибкость стержня:

$$a = \sqrt{71,43} = 8,45 \text{ см},$$

$$i_z = i_y = \sqrt{\frac{J_z}{F}} = \sqrt{\frac{a^4}{12a^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{8,45\sqrt{3}}{6} = 2,44 \text{ см},$$

$$\mu_z = \mu_y = 1, \quad \lambda_z = \lambda_y = \frac{1 \cdot 300}{2,44} = 123,$$

$$\varphi = 0,208 - \frac{0,208 - 0,178}{10} \cdot 3 = 0,199.$$

Коэффициент φ вычислен по данным табл. 11.3 с помощью линейной интерполяции. Проверяем выполнение условия устойчивости стержня:

$$\frac{P}{\varphi F} = \frac{30}{0,199 \cdot 71,43} = 2,11 \text{ кН/см}^2 = 21,1 \text{ МПа} > \gamma_c R = 14 \text{ МПа}.$$

Условие устойчивости не выполняется. Принимаем меньшее значение φ и производим повторный расчет:

$$\varphi = \frac{0,3 + 0,199}{2} = 0,25, \quad F \geq \frac{30}{1,0 \cdot 0,25 \cdot 1,4} = 85,7 \text{ см}^2,$$

$$a = \sqrt{85,7} = 9,26 \text{ см}, \quad i_z = i_y = \frac{9,26\sqrt{3}}{6} = 2,67 \text{ см},$$

$$\lambda_z = \lambda_y = \frac{1 \cdot 300}{2,67} = 112, \quad \varphi = 0,24,$$

$$\frac{P}{\varphi F} = \frac{30}{0,24 \cdot 85,7} = 1,46 \text{ кН/см}^2 = 14,6 \text{ МПа} > \gamma_c R = 14 \text{ МПа}.$$

Условие устойчивости не выполняется, но левая часть условия незначительно превышает правую. Увеличиваем размер a и принимаем сечение 10×10 см. Повторный расчет показывает, что условие устойчивости стержня выполняется с небольшим запасом.

Задача 11.3

Для стального стержня сечением $2 \cdot 90 \times 8$ (рис. 11.10) требуется установить плоскость, опасную в смысле потери устойчивости, и определить допустимое расчетное значение сжимающей силы и величину критической силы. В расчетах принять $R = 200 \text{ МПа} = 20 \text{ кН/см}^2$, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $\gamma_c = 0,9$.

Выписываем из сортамента и вычисляем необходимые геометрические характеристики сечения:

$$2 \cdot 90 \times 8 \quad F = 2 \cdot 13,9 = 27,8 \text{ см}^2, \quad J_z = 2 \cdot 106 = 212 \text{ см}^4,$$

$$J_y = 2[106 + (2,51 + 0,5)^2 \cdot 13,9] = 464 \text{ см}^4,$$

$$i_z = 2,76 \text{ см}, \quad i_y = \sqrt{\frac{464}{27,8}} = 4,08 \text{ см}.$$

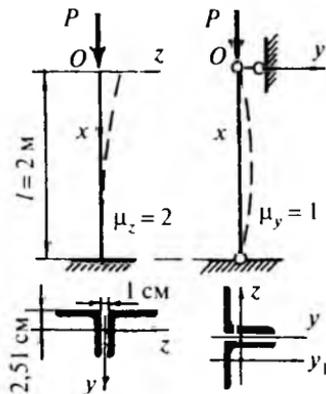


Рис. 11.10

Определяем значения гибкости стержня в главных плоскостях:

$$\lambda_z = \frac{\mu_z l}{i_y} = \frac{2 \cdot 200}{4,08} = 98, \quad \lambda_y = \frac{\mu_y l}{i_z} = \frac{1 \cdot 200}{2,76} = 72,5.$$

Поскольку $\lambda_z > \lambda_y$, опасной в смысле потери устойчивости является плоскость Oxz . Определяем по табл. 11.3 коэффициент φ и вычисляем допустимое расчетное значение сжимающей силы:

$$\lambda_z = 98, \quad \varphi = 0,612, \quad P \leq \gamma_c \varphi R F = 0,9 \cdot 0,612 \cdot 20 \cdot 27,8 = 306 \text{ кН}.$$

Гибкость стержня в плоскости Oxz меньше предельной ($\lambda = 98 < \lambda_1 = 100$). Следовательно, для определения критической силы нельзя использовать формулу Эйлера. Величину критической силы определяем по эмпирической формуле Тетмайера—Ясинского (11.11):

$$P_{кр} = \sigma_{кр} F = (a - b\lambda) F = (31 - 0,114 \cdot 98) \cdot 27,8 = 551 \text{ кН}.$$

Задача 11.4

Для составного стержня с решеткой, находящегося под действием расчетной сжимающей силы $P = 300$ кН, требуется:

1. Подобрать сечение в виде двух стальных прокатных двутавров из условия устойчивости.
2. Определить расстояние a между двутаврами из условия равноустойчивости стержня в главных плоскостях (рис. 11.11).
3. Вычислить значение критической силы.

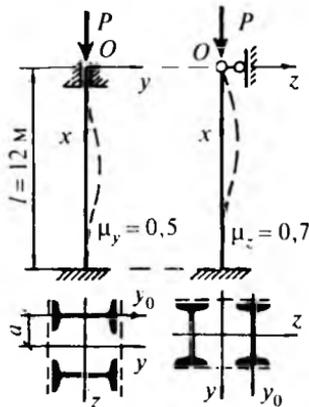


Рис. 11.11

Совместную работу двутавров считать обеспеченной. В расчетах принять $R = 200$ МПа = 20 кН/см², $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа = $2,1 \cdot 10^4$ кН/см², $\gamma_c = 0,9$.

Расчет на продольный изгиб проводим в плоскости Oxy , так как момент инерции и радиус инерции сечения относительно материальной оси Oz не зависят от расстояния между двутаврами. Принимаем в первом приближении $\varphi = 0,5$ и определяем требуемую площадь сечения:

$$F \geq \frac{300}{0,9 \cdot 0,5 \cdot 20} = 33,3 \text{ см}^2.$$

Принимаем по сортаменту сечение 2I14 и выполняем проверку устойчивости стержня:

$$F = 2 \cdot 17,4 = 34,8 \text{ см}^2, \quad i_z = 5,73 \text{ см}, \quad i_{y_0} = 1,55 \text{ см},$$

$$J_z = 2 \cdot 572 = 1144 \text{ см}^4, \quad \lambda_y = \frac{\mu_y l}{i_z} = \frac{0,5 \cdot 1200}{5,73} = 105,$$

$$\varphi = 0,599 - \frac{0,599 - 0,537}{10} \cdot 5 = 0,568,$$

$$\frac{P}{\varphi F} = \frac{300}{0,568 \cdot 34,8} = 15,2 \text{ кН/см}^2 < \gamma_c R = 18 \text{ кН/см}^2.$$

Условие устойчивости выполняется с небольшим запасом. Устойчивость стержня меньшего сечения 2И12 не обеспечена. Определяем по формуле (11.8) расстояние между двутаврами:

$$a = \sqrt{\left(\frac{\mu_z}{\mu_y}\right)^2 i_z^2 - i_{y_0}^2} = \sqrt{\left(\frac{0,7}{0,5}\right)^2 \cdot 5,73^2 - 1,55^2} = 7,87 \text{ см.}$$

В запас устойчивости в плоскости Oxz принимаем $a = 8$ см.

Поскольку $\lambda_y > \lambda_1 = 100$, величину критической силы определяем по формуле Эйлера:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_z}{(\mu_y l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^4 \cdot 1144}{(0,5 \cdot 1200)^2} = 658,6 \text{ кН.}$$

Задача 11.5

Для составного стержня сечением 4Л75×6, нагруженного сжимающей силой P в пределах его длины (рис. 11.12), требуется:

1. Определить коэффициент приведения длины в зависимости от отношения $n = l_1/l$.
2. Вычислить допустимое расчетное значение сжимающей силы и величину критической силы. В расчетах принять $l = 12$ м, $l_1 = 0,6l = 7,2$ м, $R = 200$ МПа = 20 кН/см², $\gamma_c = 1,0$, $E = 2,1 \times 10^5$ МПа.

Условия закрепления стержня в главных плоскостях одинаковы. Совместную работу уголков считать обеспеченной соединениями.

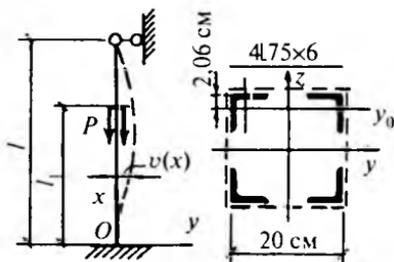


Рис. 11.12

Определяем по данным сортамента для 4L75×6 геометрические характеристики сечения. Для L75×6 $F_1 = 8,78 \text{ см}^2$, $J_{y_0} = 46,6 \text{ см}^4$.

$$J_y = J_z = 4[46,6 + (10 - 2,06)^2 \cdot 8,78] = 2400 \text{ см}^4,$$

$$i_y = i_z = \sqrt{\frac{2400}{4 \cdot 8,78}} = 8,27 \text{ см}.$$

Для определения коэффициента приведения длины стержня используем энергетический метод. Примем уравнение изогнутой оси стержня при продольном изгибе в виде параболы четвертого порядка

$$v(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4,$$

степень которой соответствует числу граничных условий задачи: при $x = 0$, $v = 0$, $\varphi = 0$; при $x = l$, $v = 0$, $M = -EJv'' = 0$.

Раскрывая граничные условия, получаем

$$a_0 = a_1 = 0, \quad a_2 = 1,5a_4l^2, \quad a_3 = -2,5a_4l.$$

Коэффициент a_4 остается неопределенным. Записываем выражения для прогиба $v(x)$ и его первой и второй производных:

$$v(x) = a_4(x^4 - 2,5lx^3 + 1,5l^2x^2),$$

$$v'(x) = a_4(4x^3 - 7,5lx^2 + 3l^2x),$$

$$v''(x) = a_4(12x^2 - 15lx + 3l^2).$$

Для определения критической силы используем формулу (11.15). Вычисляем входящие в эту формулу определенные интегралы, причем интеграл в знаменателе берем в пределах от 0 до l_1 , то есть до координаты точки приложения силы:

$$\int_0^{l_1} EJ(v'')^2 dx = EJ a_4^2 \int_0^{l_1} (12x^2 - 15lx + 3l^2)^2 dx = 1,8 EJ a_4^2 l^5,$$

$$\int_0^{l_1} (v')^2 dx = a_4^2 \int_0^{l_1} (4x^3 - 7,5lx^2 + 3l^2x)^2 dx =$$

$$= a_4^2 \left(\frac{16}{7} l_1^7 - 10ll_1^6 + 16,05l^2l_1^5 - 11,25l^3l_1^4 + 3l^4l_1^3 \right).$$

Обозначая отношение $n = l_1/l$ и производя вычисления, приведем формулу для определения критической силы к следующему виду:

$$P_{\text{кр}} = \frac{\int_0^l EJ(v'')^2 dx}{\int_0^l (v')^2 dx} = \eta \frac{EJ}{l^2}.$$

Значения коэффициента η при различных значениях n приведены в табл. 11.4. Для определения коэффициента приведения длины стержня надо приравнять полученное значение критической силы силе Эйлера (11.5):

$$P_{\text{кр}} = \eta \frac{EJ}{l^2} = P_3 = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}, \quad \mu = \frac{\pi \sqrt{\eta}}{\eta}.$$

Значения коэффициента μ также приведены в табл. 11.4. Отметим, что при $n = 1$ (сила приложена в верхнем сечении) точное решение дает $\mu = 0,699 \approx 0,7$ (рис. 11.3, в). Полученный приближенный результат имеет относительную погрешность 1,9%, что можно считать допустимым.

Таблица 11.4

$n = l_1/l$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
η	171,0	57,81	50,74	39,85	21,0
μ	0,24	0,413	0,441	0,498	0,686

Выполним числовой расчет по данным пункта 2. Определяем гибкость стержня и коэффициент продольного изгиба:

$$n = 0,6, \quad \mu = 0,441, \quad l_{\text{ир}} = 0,441 \cdot 12 = 5,292 \text{ м},$$

$$\lambda_y = \lambda_z = \frac{529,2}{8,27} = 64, \quad \varphi = 0,827 - \frac{0,827 - 0,782}{10} \cdot 4 = 0,809.$$

Расчетная сжимающая сила не должна превышать следующего значения:

$$P \leq \gamma_c \varphi R F = 1,0 \cdot 0,809 \cdot 20 \cdot 4 \cdot 8,78 = 568 \text{ кН}.$$

Поскольку $\lambda = 64 < \lambda_1 = 100$, величину критической силы определяем по формуле Тетмайера—Ясинского:

$$P_{\text{кр}} = F(a - b\lambda) = 4 \cdot 8,78 \cdot (31 - 0,114 \cdot 64) = 832 \text{ кН}.$$

Задача 11.6

Для шарнирно-опертого стержня ступенчато-постоянного сечения (рис. 11.13) требуется определить величину критической силы в плоскости Oxy в пределах упругой работы материала стержня.

Для решения задачи используем энергетический метод. Примем уравнение изогнутой оси стержня при продольном изгибе в виде полуволны синусоиды

$$v(x) = f \sin \frac{\pi x}{l},$$

что обеспечивает выполнение граничных условий: при $x = 0$, $x = l$, $v = 0$, $M = -EJv'' = 0$.

Изгибающий момент в поперечных сечениях стержня при продольном изгибе равен

$$M = Pv(x) = Pf \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Для определения приращения потенциальной энергии деформации стержня за счет его изгиба используем формулу (11.14). Интегрируя в пределах длины каждого участка стержня, получаем

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^{l_1} \frac{M^2 dx}{EJ_1} + \frac{1}{2} \int_{l_1}^l \frac{M^2 dx}{EJ_2} = \frac{P^2 f^2}{2EJ_1} \left[\int_0^{l_1} \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx + \frac{J_1}{J_2} \int_{l_1}^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx \right] = \\ &= \frac{P^2 f^2}{4EJ_1} l \left[\frac{l_1}{l} + \frac{J_1}{J_2} \frac{l_2}{l} - \frac{1}{2\pi} \left(1 - \frac{J_1}{J_2} \right) \sin \frac{2\pi l_1}{l} \right], \end{aligned}$$

где J_1 и J_2 — осевые моменты инерции поперечного сечения стержня в пределах 1-го и 2-го участков.

Работа, совершаемая силой P при изгибе стержня, равна

$$A = \frac{P}{2} \int_0^l (v')^2 dx = \frac{P}{2} f^2 \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \int_0^l \cos^2 \frac{\pi x}{l} dx = \frac{P}{4} f^2 \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 l.$$

Выполняя условие $U = A$, определяем приближенное значение критической силы:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_1}{l^2} \frac{1}{\left[\frac{l_1}{l} + \frac{J_1}{J_2} \frac{l_2}{l} - \frac{1}{2\pi} \left(1 - \frac{J_1}{J_2} \right) \sin \frac{2\pi l_1}{l} \right]} = \eta \frac{\pi^2 EJ_1}{l^2}.$$

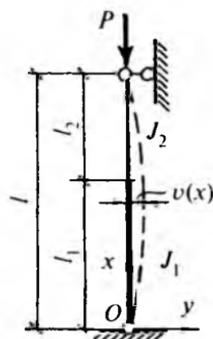


Рис. 11.13

Полученное решение дает вполне удовлетворительный результат при условии, что отношение J_1/J_2 не очень велико. Например, при $l_1 = 0,5l$ и $J_1 = 2J_2$ получаем $\eta = 0,667$. Точное решение, связанное с интегрированием дифференциального уравнения продольного изгиба, дает $\eta = 0,649$. Относительная погрешность составляет 2,7%.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 11.7. Для стального стержня коробчатого сечения $120 \times 180 \times 10$ мм с различными условиями закрепления в главных плоскостях (рис. 11.14) требуется установить плоскость возможной потери устойчивости и вычислить наименьшие значения допустимой расчетной силы и критической силы. В расчетах принять $R = 200$ МПа, $\gamma_c = 1,0$, $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа.

Ответ: $P = 526$ кН, $P_{кр} = 783$ кН (в плоскости Oxy).

Задача 11.8. Для стержня, состоящего из двух стальных жестко соединенных между собой труб сечением $\varnothing 120 \times 6$ мм (рис. 11.15), требуется установить плоскость возможной потери устойчивости и вычислить наименьшие значения допустимой расчетной силы и критической силы. В расчетах принять $R = 200$ МПа, $\gamma_c = 1,0$, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Ответ: $P = 330$ кН, $P_{кр} = 444$ кН (в плоскости Oxy).

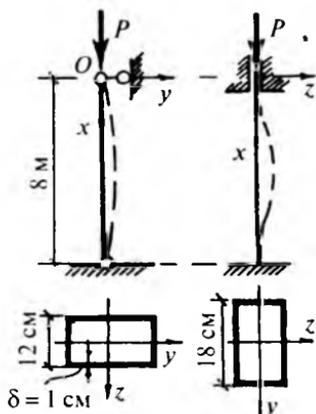


Рис. 11.14

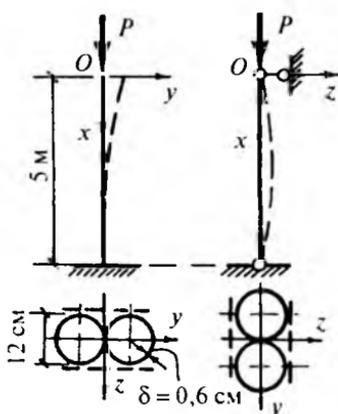


Рис. 11.15

Задача 11.9. Для деревянной стойки требуется подобрать сечение в виде четырех жестко соединенных между собой стержней круглого сечения (рис. 11.16). $R = 14$ МПа, $\gamma_c = 1,0$, $\gamma_f = 1,0$. Условия закрепления стойки в главных плоскостях являются одинаковыми.

Ответ: $D = 12$ см.

Задача 11.10. Для стального составного стержня сечением 2[24а (рис. 11.17) требуется определить значения допустимой расчетной силы и критической силы в плоскости Oxz . $R = 200$ МПа, $\gamma_c = 1,0$, $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа.

Ответ: $P = 764$ кН, $P_{кр} = 1286$ кН.

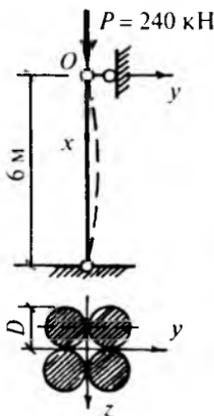


Рис. 11.16

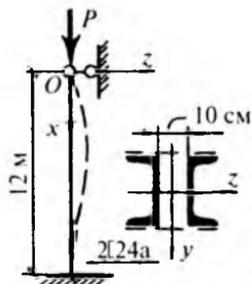


Рис. 11.17

Задача 11.11. Стальная балка AB сечением 2[36 нагружена равномерно распределенной нагрузкой и опирается в сечении B на стальной стержень трубчатого сечения $\varnothing 100 \times 5$ мм (рис. 11.18). Требуется определить значения допустимой расчетной нагрузки и критической нагрузки из условия устойчивости стержня BC . Определить значения наибольших нормальных напряжений в балке AB при действии расчетной нагрузки. $R = 200$ МПа, $\gamma_c = 1,0$, $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа.

Ответ: $q = 96,4$ кН/м, $q_{кр} = 146$ кН/м, $\sigma_{нб} = 160,4$ МПа.

Задача 11.12. Для стального шарнирно-опертого стержня, нагруженного в центральной части осевой сосредоточенной силой P

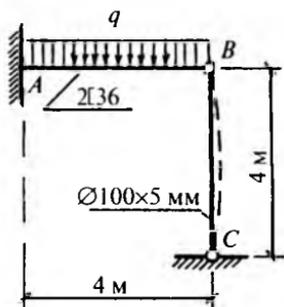


Рис. 11.18

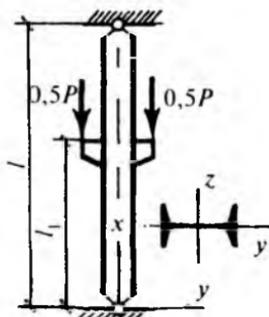


Рис. 11.19

(рис. 11.19), требуется определить коэффициент приведения длины. Для решения использовать энергетический метод, уравнение изогнутой оси стержня принять по полуволне синусоиды. Подобрать сечение стержня в виде прокатного двутавра и вычислить значение критической силы в плоскости Oxy , приняв $l = 12$ м, $l_1 = 0,5l$, $P = 400$ кН, $R = 210$ МПа, $\gamma_c = 1,0$, $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, $\gamma_f = 1,0$.

Ответ: $\mu = 0,707$, I22, $P_{кр} = 625$ кН.

Задача 11.13. Для консольного стержня ступенчато-постоянно-го сечения (рис. 11.20) требуется определить величину критической силы в плоскости Oxz и коэффициент приведения длины. Выполнить числовой расчет и определить значение допустимой расчетной силы при $l = 10$ м, $l_1 = 6$ м, $R = 200$ МПа, $\gamma_c = 1,0$, $E = 2,1 \times 10^5$ МПа и поперечных сечениях нижней и верхней частей стержня в соответствии с рис. 11.20.

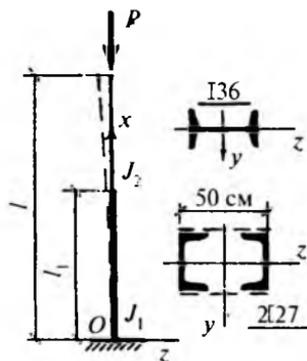


Рис. 11.20

$$\text{Ответ: } P_{\text{кр}} = \eta \frac{\pi^2 EJ_1}{4l^2},$$

$$\text{где } \eta = \frac{1}{\frac{l_1}{l} + \frac{J_1(l-l_1)}{J_2 l} + \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{J_1}{J_2}\right) \sin \frac{\pi l_1}{l}}.$$

Числовой расчет дал $\eta = 0,857$, $\mu = 2,16$, $P = 888$ кН, $P_{\text{кр}} = 1418$ кН.

ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ СТЕРЖНЕЙ

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Продольно-поперечный изгиб имеет место в достаточно гибких стержнях при одновременном действии поперечных нагрузок и продольных сжимающих или растягивающих сил (рис. 12.1). При этом продольные силы вызывают дополнительные изгибающие моменты $\Delta M = Pv(x)$, которые могут увеличить или уменьшить изгиб стержня. Расчет стержней при продольно-поперечном изгибе должен производиться по так называемой деформированной схеме с учетом дополнительных изгибающих моментов.

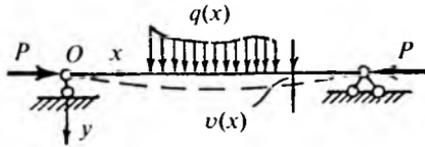


Рис. 12.1

При малых прогибах продольно-поперечный изгиб стержня может быть описан линейным дифференциальным уравнением четвертого порядка. При действии сжимающих постоянных по величине продольных сил это уравнение имеет следующий вид:

$$EJv^{IV}(x) + Pv''(x) = q(x). \quad (12.1)$$

Решение однородного уравнения, соответствующего (12.1), можно представить в форме метода начальных параметров:

$$v(\xi) = v_0 + \frac{\varphi_0}{k} \xi - \frac{M_0}{EJk^2} (1 - \cos \xi) - \frac{Q_0}{EJk^3} (\xi - \sin \xi), \quad (12.2)$$

где $\xi = kx$ — безразмерная переменная и $k = \sqrt{\frac{P}{EJ}}$.

Величины v_0 , φ_0 , M_0 и Q_0 — начальные параметры, т.е. значения прогиба, угла поворота, изгибающего момента и поперечной силы в начальном сечении стержня при $x = 0$ ($\xi = 0$).

Отметим, что прогиб стержня и начальные параметры связаны между собой линейными зависимостями. Это позволяет использовать принцип независимости действия сил по отношению к поперечной нагрузке. При этом для учета влияния нагрузок, приложенных в пределах длины стержня (рис. 12.2), к выражению (12.2)

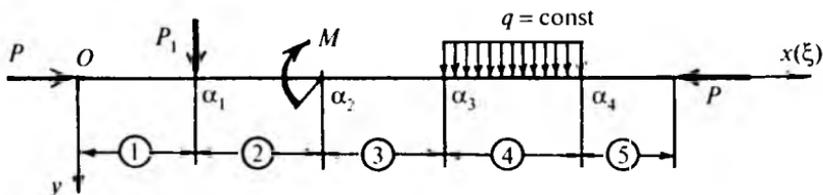


Рис. 12.2

надо добавить функции, соответствующие частным интегралам в (12.2):

$$\begin{aligned}
 v(\xi) = & v_0 + \frac{\varphi_0}{k} \xi - \frac{M_0}{EJk^2} (1 - \cos \xi) - \frac{Q_0}{EJk^3} (\xi - \sin \xi) \Big|_1 + \\
 & + \frac{P_1[(\xi - \alpha_1) - \sin(\xi - \alpha_1)]}{EJk^3} \Big|_2 - \frac{M[1 - \cos(\xi - \alpha_2)]}{EJk^2} \Big|_3 + \\
 & + \frac{q}{EJk^4} \left\{ \left[\cos(\xi - \alpha_3) - 1 + \frac{(\xi - \alpha_3)^2}{2} \right] \Big|_4 - \right. \\
 & \left. - \left[\cos(\xi - \alpha_4) - 1 + \frac{(\xi - \alpha_4)^2}{2} \right] \Big|_5 \right\}, \quad (12.3)
 \end{aligned}$$

где вертикальная черта соответствует границам участков.

Для определения углов поворота поперечных сечений и изгибающих моментов используются дифференциальные зависимости при поперечном изгибе. Поперечная сила должна определяться по отношению к деформированному состоянию стержня, т.е. с учетом проекции продольной силы на нормаль к изогнутой оси стержня (рис. 12.3), равной $N \sin \varphi \approx Nv'$. Проекция поперечной силы на вертикальную ось y определяется из уравнения равновесия бесконечно малого элемента стержня:

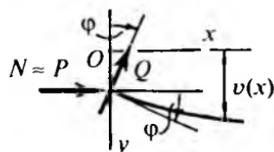


Рис. 12.3

$$Q_y = \frac{dM}{dx} - Nv' = -EJv''' - Nv'. \quad (12.4)$$

При небольшом влиянии поперечных сил на прочность стержня иногда принимают $Q = Q_y$. Продольная сила определяется по отношению к недеформированному состоянию стержня, т.е. принимается равной $N = P \cos \varphi \approx P$.

В начале расчета часть начальных параметров может быть неизвестной. Для их определения надо использовать кинематические и статические граничные условия. Примеры постановки граничных условий рассмотрены ниже.

Для шарнирно-опертой балки (рис. 12.4) имеем: $v_0 = 0$, $M_0 = 0$. Неизвестные начальные параметры φ_0 и Q_0 подлежат определению из граничных условий: при $x = l$, $v = 0$, $M_x = -M$.

Для консольной балки (рис. 12.5) имеем: $v_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$, $Q_0 = R_A$. Для определения неизвестного начального параметра M_0 надо использовать граничное условие: при $x = l$ ($\xi = \xi_l$), $M = 0$.

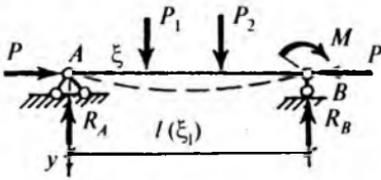


Рис. 12.4

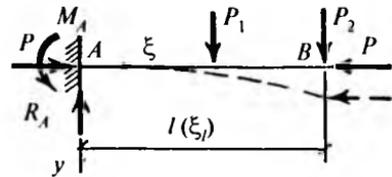


Рис. 12.5

Раскрыв граничные условия, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно всех неизвестных величин. После их определения можно записать окончательные выражения для v , φ , M и Q , вычислить значения этих величин в характерных сечениях стержня и построить соответствующие эпюры.

Аналогично решается задача расчета гибких стержней при одновременном действии поперечных нагрузок и продольных растягивающих сил (рис. 12.6). Эта задача описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$EJv^{IV} - Pv'' = q(x). \quad (12.5)$$

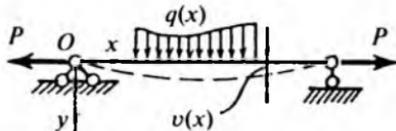


Рис. 12.6

Решение соответствующего (12.5) однородного уравнения имеет вид:

$$v(\xi) = C_1 + C_2\xi + C_3\text{sh}\xi + C_4\text{ch}\xi, \quad (12.6)$$

где, по-прежнему, $\xi = kx$, $k = \sqrt{\frac{P}{EJ}}$.

Решение уравнения (12.5), а также выражения для углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил можно представить в форме метода начальных параметров, как это сделано выше для случая действия сжимающих сил.

Напряжения в поперечных сечениях стержней при продольно-поперечном изгибе определяются по формулам сложного сопротивления (растяжение-сжатие с изгибом). Например, наибольшие нормальные напряжения в крайних волокнах стержня с симметричным сечением при продольно-поперечном изгибе в плоскости Oxy определяется по формулам

$$\sigma_{\text{нб}} = -\frac{P}{F} + \frac{M_z}{W_z}, \quad \sigma_{\text{нм}} = -\frac{P}{F} - \frac{M_z}{W_z}. \quad (12.7)$$

Формулы (12.7) соответствуют случаю действия сжимающей силы. Отметим, что прогибы, внутренние усилия и напряжения в стержнях при продольно-поперечном изгибе нелинейно зависят от продольной силы P .

Для статически определимых шарнирно-опертых и консольных стержней при действии простых нагрузок задача продольно-поперечного изгиба может быть решена приближенно. При этом дополнительные прогибы, вызываемые действием продольной силы (рис. 12.7), принимаются изменяющимися по синусоиде:

$$v_1 = f \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (12.8)$$

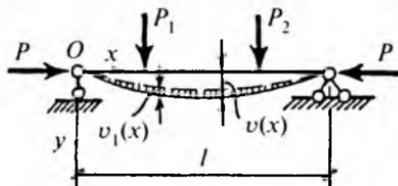


Рис. 12.7

Суммарный прогиб от совместного действия поперечных нагрузок и продольной сжимающей силы определяется по приближенной формуле

$$v = \frac{v_0}{1 - \frac{P}{P_{кр}}}, \quad (12.9)$$

где $P_{кр} = P_3 = \frac{\pi^2 EJ}{l_0^2}$.

В формуле (12.9) v_0 — прогиб стержня от действия поперечных нагрузок и l_0 — приведенная длина стержня. Приближенная формула (12.9) правильно отражает качественную сторону задачи, в частности, нелинейный характер зависимости v от P (рис. 12.8). При $P \rightarrow P_{кр}$ прогибы стержня неограниченно возрастают. Однако в инженерной практике сжимающая сила обычно не превышает величины $(0,5 \div 0,6)P_{кр}$. Полученную формулу можно использовать в задачах продольно-поперечного изгиба при $P \leq 0,75P_{кр}$.

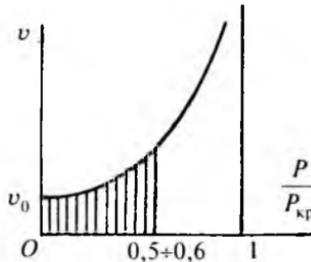


Рис. 12.8

При действии растягивающих сил приближенная формула имеет следующий вид:

$$v = \frac{v_0}{1 + \frac{P}{P_{кр}}}. \quad (12.10)$$

Изгибающий момент в стержне определяется по формуле

$$M = M_0 \pm \Delta M = M_0 \pm Pv, \quad (12.11)$$

где M_0 — изгибающий момент от действия поперечных нагрузок, ΔM — дополнительный изгибающий момент, вызываемый действием продольной силы P .

Знак «плюс» в формуле (12.11) относится к действию сжимающей силы, а знак «минус» — к действию растягивающей силы.

В сечениях с наибольшими нормальными напряжениями производится проверка прочности стержня. При этом в силу нелиней-

ной зависимости σ от P запас прочности по напряжениям меньше запаса прочности по сжимающей силе. В силу этого в правую часть условия прочности надо подставить опасное напряжение, например предел текучести σ_T для пластичных материалов. Нормативные значения нагрузок должны быть умножены на коэффициент запаса по нагрузкам n_p .

При действии больших сжимающих сил стержень, находящийся в условиях продольно-поперечного изгиба, должен быть проверен также на устойчивость.

С помощью рассмотренных выше методов можно решить задачу о внецентренном сжатии или растяжении гибкого стержня (рис. 12.9). При этом можно считать, что стержень находится под действием осевой сжимающей или растягивающей силы P и краевого момента $M = Pe$, где e — эксцентриситет продольной силы. Данная задача может быть описана однородным дифференциальным уравнением $EJv^{IV} \pm Pv'' = 0$ и его общим решением (12.2) или (12.6). Возможно использование приближенных методов расчета, связанных с заданием прогиба стержня по синусоиде.

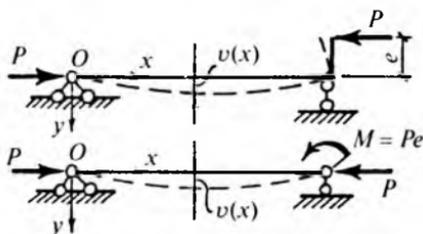


Рис. 12.9

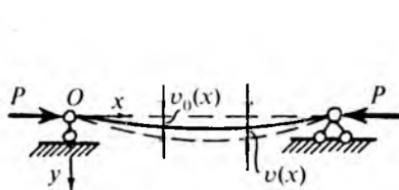


Рис. 12.10

В аналогичной постановке можно решить задачу о сжатии (растяжении) гибкого стержня с небольшим начальным искривлением $v_0(x)$ (рис. 12.10).

Во всех рассмотренных задачах стержень при действии сжимающих сил должен быть рассчитан на прочность и устойчивость.

Отметим, что приведенные решения справедливы при упругих деформациях материала стержня, то есть в пределах справедливости закона Гука.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 12.1

Для стального двутавра I24, находящегося под действием поперечных нагрузок и сжимающих сил $P = 300$ кН (рис. 12.11, а), требуется:

1. Выполнить расчет стержня по деформированной схеме, вычислив значения ν , φ , M и Q в сечениях стержня с шагом 1 м и построив эпюры этих величин.

2. Проверить прочность и устойчивость стержня и построить эпюру σ в опасном сечении.

3. Сравнить полученные результаты с данными расчета по недеформированной схеме.

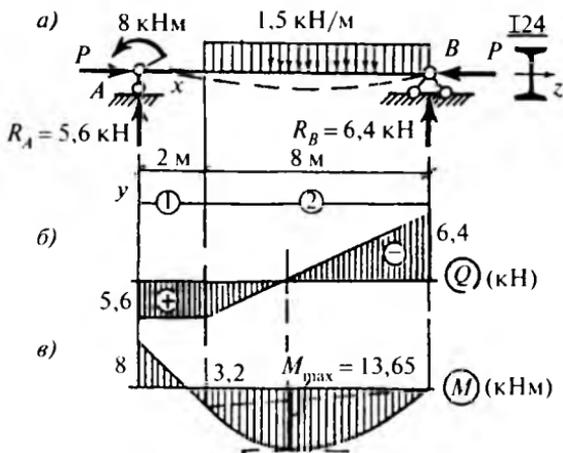


Рис. 12.11

В расчетах принять $E = 2,1 \cdot 10^4$ кН/см², $\sigma_r = 24$ кН/см², $R = 20$ кН/см², $\gamma_c = 0,9$, $\gamma_f = 1,2$. Нормативные значения нагрузок умножены на коэффициент запаса $n_p = 1,5$.

Выписываем из сортамента для I24: $F = 34,8$ см², $J_z = 3460$ см⁴, $W_z = 289$ см³, $i_z = 9,97$ см.

Вначале произведем расчет стержня по недеформированной схеме в условиях центрального сжатия с изгибом. Эпюры Q и M в стержне от действия поперечных нагрузок приведены на рис. 12.11, б, в. Вычисляем значения наибольших нормальных напряжений в крайних волокнах опасного сечения стержня:

$$M_{\max} = \frac{Q_B^2}{2q} = \frac{6,4^2}{2 \cdot 1,5} = 13,65 \text{ кНм},$$

$$\sigma_B = -\frac{P}{F} - \frac{M_z}{W_z} = -\frac{300}{34,8} - \frac{13,65 \cdot 10^2}{289} = -13,34 \text{ кН/см}^2,$$

$$\sigma_{II} = -\frac{P}{F} + \frac{M_z}{W_z} = -3,9 \text{ кН/см}^2.$$

Производим расчет стержня по деформированной схеме в условиях продольно-поперечного изгиба. Вычисляем значения жесткости стержня при изгибе и параметра k :

$$EJ = 2,1 \cdot 10^4 \cdot 3460 = 7,266 \cdot 10^7 \text{ кНсм}^2,$$

$$k = \sqrt{\frac{P}{EJ}} = \sqrt{\frac{300}{7,266 \cdot 10^7}} = 2,032 \cdot 10^{-3} \text{ 1/см}.$$

Разбиваем стержень на два характерных участка и записываем с помощью уравнения (12.3) выражения для прогибов, углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил в стержне:

$$v(\xi) = v_0 + \frac{\varphi_0}{k} \xi - \frac{M_0}{EJk^2} (1 - \cos \xi) - \frac{Q_0}{EJk^3} (\xi - \sin \xi) \Big|_1 + \\ + \frac{q}{EJk^4} \left[\cos(\xi - \alpha_1) - 1 + \frac{(\xi - \alpha_1)^2}{2} \right] \Big|_2,$$

$$\varphi(\xi) = kv' = \varphi_0 - \frac{M_0 \sin \xi}{EJk} - \frac{Q_0(1 - \cos \xi)}{EJk^2} \Big|_1 + \\ + \frac{q}{EJk^3} [(\xi - \alpha_1) - \sin(\xi - \alpha_1)] \Big|_2,$$

$$M(\xi) = -EJk^2 v'' = M_0 \cos \xi + \frac{Q_0}{k} \sin \xi \Big|_1 - \frac{q}{k^2} [1 - \cos(\xi - \alpha_1)] \Big|_2,$$

$$Q(\xi) = -EJk^3 v''' = -kM_0 \sin \xi + Q_0 \cos \xi \Big|_1 - \frac{q}{k} \sin(\xi - \alpha_1) \Big|_2,$$

где $\alpha_1 = kx_1 = 2,032 \cdot 10^{-3} \cdot 200 = 0,4064$.

Начальные параметры равны: $v_0 = 0$, $M_0 = -8 \text{ кНм} = -8 \cdot 10^2 \text{ кНсм}$. Для определения неизвестных начальных параметров φ_0 и Q_0 используем граничные условия:

при $x = 10 \text{ м}$ ($\xi_j = 2,032 \cdot 10^{-3} \cdot 1000 = 2,032$), $v = 0$, $M = 0$.

Удовлетворяем граничным условиям:

$$\begin{aligned}
 v(2,032) &= \frac{\varphi_0 \cdot 2,032}{2,032 \cdot 10^{-3}} + \frac{8 \cdot 10^2(1 - \cos 2,032)}{7,266 \cdot 10^7(2,032 \cdot 10^{-3})^2} - \\
 &- \frac{Q_0(2,032 - \sin 2,032)}{7,266 \cdot 10^7(2,032 \cdot 10^{-3})^3} + \\
 &+ \frac{1,5 \cdot 10^{-2}}{7,266 \cdot 10^7(2,032 \cdot 10^{-3})^4} \left[\cos 1,6256 - 1 + \frac{1,6256^2}{2} \right] = 0, \\
 M(2,032) &= -8 \cdot 10^2 \cos 2,032 + \frac{Q_0 \sin 2,032}{2,032 \cdot 10^{-3}} - \\
 &- \frac{1,5 \cdot 10^{-2}(1 - \cos 1,6256)}{(2,032 \cdot 10^{-3})^2} = 0.
 \end{aligned}$$

Решив систему алгебраических уравнений, определяем неизвестные начальные параметры:

$$Q_0 = 7,887 \text{ кН}, \quad \varphi_0 = 7,621 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

Записываем окончательные выражения для v , φ , M и Q с учетом числовых значений начальных параметров и нагрузок:

$$\begin{aligned}
 v(\xi) &= 3,75\xi + 2,667(1 - \cos \xi) - 12,937(\xi - \sin \xi)|_1 + \\
 &+ 12,109 \left[\cos(\xi - 0,4064) - 1 + \frac{(\xi - 0,4064)^2}{2} \right]_2, \\
 \varphi(\xi) &= \{ 7,621 + 5,418 \sin \xi - 26,29(1 - \cos \xi)|_1 + \\
 &+ 24,605[(\xi - 0,4064) - \sin(\xi - 0,4064)]_2 \} 10^{-3}, \\
 M(\xi) &= -8 \cdot 10^2 \cos \xi + 38,81 \cdot 10^2 \sin \xi|_1 - \\
 &- 36,33 \cdot 10^2 [1 - \cos(\xi - 0,4064)]_2, \\
 Q(\xi) &= 1,6256 \sin \xi + 7,887 \cos \xi|_1 - 7,382 \sin(\xi - 0,4064)|_2.
 \end{aligned}$$

Вычисляем значения v , φ , M и Q в сечениях стержня с шагом 1 м. Результаты расчета приведены в табл. 12.1. По результатам расчета построены эпюры Q , M , φ и v (рис. 12.12).

Определим наибольшие нормальные напряжения в стержне и выполним проверку прочности:

$$\sigma_{\text{в}} = -\frac{300}{34,8} - \frac{22,33 \cdot 10^2}{289} = -8,62 - 7,73 = -16,35 \text{ кН/см}^2,$$

$$|\sigma_{\text{н}}| = 16,35 \text{ кН/см}^2 < \sigma_{\text{т}} = 24 \text{ кН/см}^2,$$

$$\sigma_{\text{н}} = -8,62 + 7,73 = -0,89 \text{ кН/см}^2.$$

№ п/п	$x, \text{ м}$	ξ	$v, \text{ см}$	$\varphi \cdot 10^{-3}, \text{ рад}$	$M, \text{ кНм}$	$Q, \text{ кН}$
1	0,0	0,0	0,0	7,621	-8,0	7,887
2	1,0	0,2032	0,799	8,173	-0,0034	8,053
3	2,0	0,4064	1,598	7,621	7,993	7,887
4	3,0	0,6096	2,288	6,022	14,91	5,907
5	4,0	0,8128	2,775	3,612	19,73	3,684
6	5,0	1,016	2,993	0,697	22,23	1,310
7	6,0	1,2192	2,909	-2,398	22,33	-1,119
8	7,0	1,4224	2,519	-5,339	20,01	-3,501
9	8,0	1,6256	1,857	-7,801	15,37	-5,739
10	9,0	1,8288	0,986	-9,475	8,608	-7,741
11	10,0	2,032	0,0	-10,09	0,0	-9,425

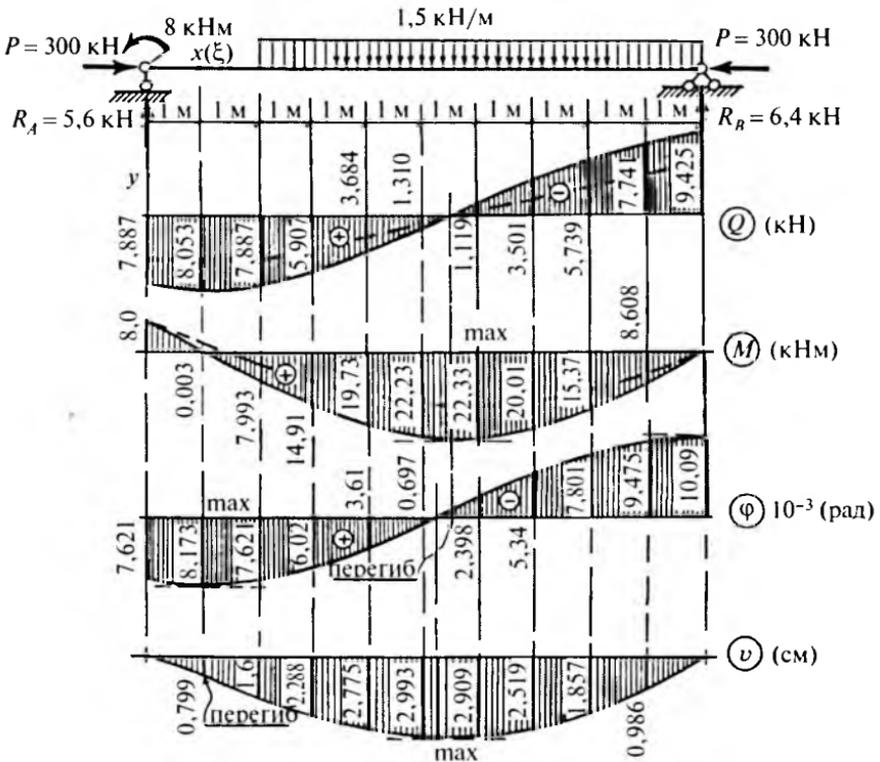


Рис. 12.12

Условие прочности стержня выполняется. Эпюра σ приведена на рис. 12.13. Пунктиром на рис. 12.12 и 12.13 показаны эпюры Q , M и σ при расчете по недеформированной схеме.

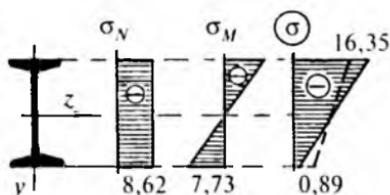


Рис. 12.13

Проверяем устойчивость стержня в плоскости действия поперечных нагрузок. Гибкость стержня и коэффициент продольного изгиба равны

$$\lambda_y = \frac{\mu_y l}{i_z} = \frac{1 \cdot 1000}{9,97} = 100,3, \quad \varphi = 0,599,$$

Определим расчетное значение сжимающей силы и выполним проверку устойчивости:

$$P_p = \frac{300}{n_p} \gamma_f = \frac{300}{1,5} 1,2 = 240 \text{ кН},$$

$$\frac{P}{\varphi F} = \frac{240}{0,599 \cdot 34,8} = 11,5 \text{ кН/см}^2 < \gamma_c R = 18 \text{ кН/см}^2.$$

Устойчивость стержня обеспечена.

Задача 12.2

Стальной консольный составной стержень сечением $2\text{C}16$ находится под действием продольной и поперечных сил (рис. 12.14, а). Требуется произвести расчет стержня по деформированной схеме и проверить его прочность и устойчивость в плоскости действия поперечных нагрузок. При необходимости — увеличить сечение стержня и сделать перерасчет. В расчетах принять $E = 2,1 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$, $\sigma_T = 24 \text{ кН/см}^2$, $R = 20 \text{ кН/см}^2$, $\gamma_c = 0,9$, $\gamma_f = 1,2$. Нормативные значения нагрузок умножены на коэффициент запаса $n_p = 1,5$.

Для сечения $2\text{C}16$ имеем $J_z = 2 \cdot 747 = 1494 \text{ см}^4$, $W_z = 2 \cdot 93,4 = 186,8 \text{ см}^3$, $F = 2 \cdot 18,1 = 36,2 \text{ см}^2$, $i_z = 6,42 \text{ см}$.

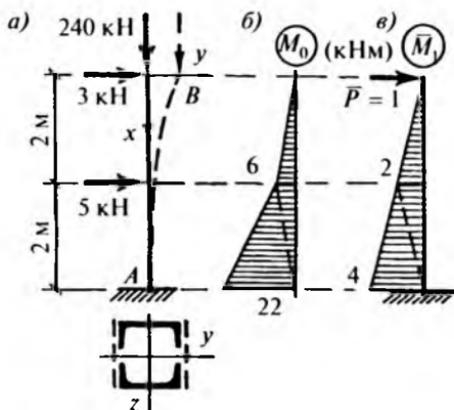


Рис. 12.14

Расчет стержня на продольно-поперечный изгиб производим приближенно с помощью формул (12.9) и (12.11). Эпюра изгибающих моментов M_0 от действия поперечных нагрузок приведена на рис. 12.14, б. Опасным является сечение вблизи заделки, где изгибающий момент M_0 и дополнительный момент $\Delta M = Pv$ от действия продольной сжимающей силы имеют наибольшие значения. Определяем с помощью метода Мора прогиб свободного конца стержня от действия поперечных нагрузок. Для этого строим единичную эпюру \bar{M}_1 (рис. 12.14, в) и «перемножаем» ее с эпюрой M_0 .

$$v_B = \frac{1}{EJ_z} \left[\frac{2}{6} (2 \cdot 22 \cdot 4 + 2 \cdot 6 \cdot 2 + 22 \cdot 2 + 6 \cdot 4) + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right] =$$

$$= \frac{97,3}{EJ_z} = \frac{97,3 \cdot (10^2)^3}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 1494} = 3,102 \text{ см.}$$

Определяем критическую силу Эйлера и прогиб свободного конца стержня от совместного действия продольной силы и поперечных нагрузок:

$$P_{кр} = P_3 = \frac{\pi^2 EJ_z}{l_0^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^4 \cdot 1494}{(2 \cdot 400)^2} = 483,8 \text{ кН,}$$

$$v = \frac{v_0}{1 - \frac{P}{P_{кр}}} = \frac{3,102}{1 - \frac{240}{483,8}}$$

Вычисляем значения дополнительного и суммарного изгибающих моментов в заделке и проверяем прочность балки:

$$\Delta M = Pv = 240 \cdot 6,156 = 1477 \text{ кНсм},$$

$$M = M_0 + \Delta M = 22 \cdot 10^2 + 1477 = 3677 \text{ кНсм},$$

$$|\sigma_{\text{нм}}| = \left| -\frac{P}{F} - \frac{M}{W_z} \right| = \frac{240}{36,2} + \frac{3677}{186,8} = 26,3 \text{ кН/см}^2 = \\ = 263 \text{ МПа} > \sigma_T = 240 \text{ МПа}.$$

Прочность стержня не обеспечена. Увеличиваем сечение и принимаем 2□18. Для этого сечения имеем $J_z = 2 \cdot 1090 = 2180 \text{ см}^4$, $W_z = 2 \cdot 121 = 242 \text{ см}^3$, $F = 2 \cdot 20,7 = 41,4 \text{ см}^2$, $i_z = 7,24 \text{ см}$.

Производим повторный расчет и проверяем прочность стержня:

$$v_0 = \frac{97,3 \cdot 10^6}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 2180} = 2,125 \text{ см}, \quad P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^4 \cdot 2180}{(2 \cdot 400)^2} = 706 \text{ кН},$$

$$v = \frac{2,125}{1 - \frac{240}{706}} = 3,219 \text{ см}, \quad M = 22 \cdot 10^2 + 240 \cdot 3,219 = 2973 \text{ кНсм},$$

$$|\sigma_{\text{нм}}| = \frac{240}{41,4} + \frac{2973}{242} = 18,08 \text{ кН/см}^2 = \\ = 180,8 \text{ МПа} < \sigma_T = 240 \text{ МПа}.$$

Прочность обеспечена. Проверяем устойчивость стержня в плоскости действия поперечных нагрузок. Решетка стержня обеспечивает совместную работу швеллеров.

$$\lambda_y = \frac{2 \cdot 400}{7,24} = 110,5, \quad \varphi = 0,537 - \frac{0,537 - 0,479}{10} 0,5 = 0,534,$$

$$P_p = \frac{240}{n_p} \gamma_f = \frac{240}{1,5} 1,2 = 192 \text{ кН},$$

$$\frac{P}{\varphi F} = \frac{192}{0,534 \cdot 41,4} = 6,68 \text{ кН/см}^2 < \gamma_c R = 18 \text{ кН/см}^2.$$

Условие устойчивости выполняется.

Задача 12.3

Стальной консольный стержень трубчатого сечения $\varnothing 120 \times 5 \text{ мм}$ находится в условиях внецентренного сжатия силой $P_{\text{н}} = 60 \text{ кН}$.

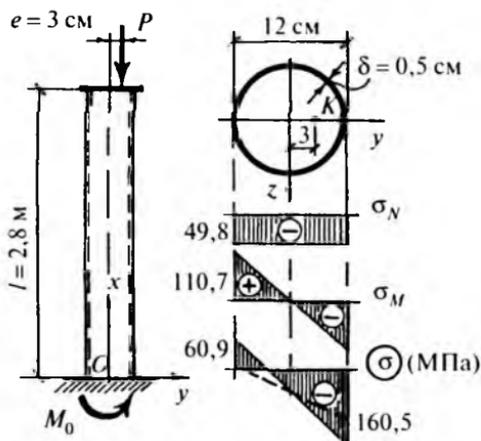


Рис. 12.15

Требуется проверить прочность стержня при расчете по деформированной схеме и его устойчивость в плоскости действия изгибающего момента. В расчетах принять $E = 2,1 \cdot 10^4$ кН/см², $\sigma_T = 24$ кН/см², $R = 20$ кН/см², $\gamma_c = 1,0$, $\gamma_f = 1,2$ и коэффициент запаса по нагрузке $n_p = 1,5$.

Вычисляем геометрические характеристики сечения стержня:

$$F = \pi(6^2 - 5,5^2) = 18,06 \text{ см}^2, \quad J_z = \frac{\pi}{4}(6^4 - 5,5^4) = 299,2 \text{ см}^4,$$

$$W_z = \frac{299,2}{6} = 49,87 \text{ см}^3, \quad i_z = \sqrt{\frac{299,2}{18,06}} = 4,07 \text{ см}.$$

При расчете внецентренно сжатого стержня по деформируемой схеме используем однородное дифференциальное уравнение продольно-поперечного изгиба $EJv^{IV} + Pv'' = 0$ и его общее решение (12.2). Помещаем начало координат в заделке и записываем значения начальных параметров: $v_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$, $Q_0 = 0$. Для определения неизвестного изгибающего момента в заделке M_0 используем граничное условие на свободном конце стержня.

При $x = l$ ($\xi = \xi_l$), $M_l = M_0 \cos \xi_l = Pe = 60 \cdot 1,5 \cdot 3 = 270$ кНсм,

$$M_0 = \frac{M_l}{\cos \xi_l} = \frac{270}{0,489} = 552 \text{ кНсм},$$

$$\text{где } \xi_l = kl = 280 \sqrt{\frac{60 \cdot 1,5}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 299,2}} = 1,06, \quad \cos \xi_l = 0,489.$$

Определяем наибольшие нормальные напряжения в сечении стержня вблизи заделки и проверяем его прочность:

$$|\sigma_{\text{нм}}| = \left| -\frac{P}{F} - \frac{M}{W_z} \right| = \frac{60 \cdot 1,5}{18,06} + \frac{552}{49,87} =$$

$$= 16,05 \text{ кН/см}^2 < \sigma_r = 24 \text{ кН/см}^2,$$

$$\sigma_{\text{нб}} = -\frac{P}{F} + \frac{M}{W_z} = 6,09 \text{ кН/см}^2.$$

Прочность стержня обеспечена. Эпюра σ в сечении вблизи заделки приведена на рис. 12.15. Пунктиром показана эпюра σ при расчете по недеформированной схеме.

Проверку устойчивости внецентренно сжатого стержня произведем по методике СНиП П-23-81*. Стальные конструкции. Вычисляем значения условной гибкости стержня $\bar{\lambda}$ и приведенного относительного эксцентриситета m_1 :

$$\bar{\lambda} = \lambda \sqrt{\frac{R}{E}} = \frac{2 \cdot 280}{4,07} \sqrt{\frac{200}{2,1 \cdot 10^5}} = 4,246,$$

$$m_1 = \eta \frac{eF}{W} = 1,13 \frac{3 \cdot 18,06}{49,87} = 1,227,$$

где η — коэффициент влияния формы сечения, определяемый по формуле

$$\eta = (1,35 - 0,05m) - 0,01(5 - m)\bar{\lambda} =$$

$$= (1,35 - 0,05 \cdot 1,086) - 0,01(5 - 1,086) \cdot 4,246 = 1,13,$$

$$m = \frac{eF}{W} = \frac{3 \cdot 18,06}{49,87} = 1,086.$$

Выполняем проверку устойчивости стержня:

$$\frac{P_p}{\varphi_{\text{вн}} F} = \frac{60 \cdot 1,2}{0,301 \cdot 18,06} = 13,2 \text{ кН/см}^2 =$$

$$= 132 \text{ МПа} < \gamma_c R = 200 \text{ МПа},$$

где $\varphi_{\text{вн}} = 0,301$ — коэффициент для проверки устойчивости внецентренно-сжатых стержней сплошного сечения, взятый из табл. 74 СНиП П-23-81*.

Устойчивость стержня обеспечена.

Задача 12.4

Стальной шарнирно-опертый стержень коробчатого сечения $90 \times 120 \times 6$ мм находится под действием поперечной равномерно распределенной нагрузки и растягивающих сил $P = 150$ кН (нагрузки расчетные). Требуется произвести расчет стержня по деформированной схеме и проверить его прочность. В расчетах принять $R = 180$ МПа, $\gamma_c = 1,0$, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа = $2 \cdot 10^4$ кН/см².

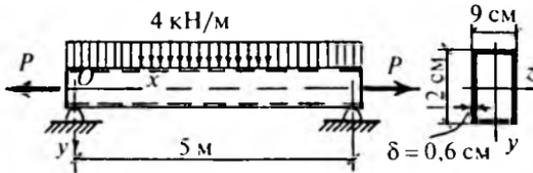


Рис. 12.16

Определяем геометрические характеристики сечения:

$$F = 9 \cdot 12 - 7,8 \cdot 10,8 = 23,76 \text{ см}^2,$$

$$J_z = \frac{9 \cdot 12^3}{12} - \frac{7,8 \cdot 10,8^3}{12} = 477,2 \text{ см}^4.$$

Расчет растянуто-изогнутого стержня по деформированной схеме производим приближенно с помощью формул (12.10) и (12.11). Опасным в смысле прочности является сечение в середине пролета. Вычисляем в этом сечении значения изгибающего момента и прогиба от действия поперечной нагрузки:

$$M_0 = M_{\max} = \frac{4 \cdot 5^2}{8} = 12,5 \text{ кНм},$$

$$v_0 = v_{\max} = \frac{5ql^4}{384EJ} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 500^4}{384 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 477,2} = 3,41 \text{ см}.$$

Определяем критическую силу Эйлера, суммарный прогиб, дополнительный и суммарный изгибающие моменты в середине балки:

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 477,2}{500^2} = 376,8 \text{ кН},$$

$$v = \frac{v_0}{1 + \frac{P}{P_{\text{кр}}}} = \frac{3,41}{1 + \frac{150}{376,8}} = 2,439 \text{ см},$$

$$\Delta M = Pv = 150 \cdot 2,439 = 365,9 \text{ кНсм},$$

$$M = M_0 - \Delta M = 12,5 \cdot 10^2 - 365,9 = 884,1 \text{ кНсм}.$$

Вычисляем значения наибольших нормальных напряжений в стержне и проверяем его прочность:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{нб}} &= \frac{150}{23,76} + \frac{884,1}{477,2} \cdot 6 = 17,43 \text{ кН/см}^2 = \\ &= 174,3 \text{ МПа} < \gamma_c R = 180 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Прочность стержня обеспечена. Отметим, что при расчете по недеформированной схеме условие прочности не выполняется.

Задача 12.5

Для статистики неопределимого сжатого стержня (рис. 12.17) требуется определить изгибающий момент и поперечную силу в сечении A при осадке шарнирной опоры на величину δ . Выполнить числовой расчет, приняв сечение стержня в виде двух стальных прокатных равнобоких уголков $\angle 100 \times 10$, $P = 100 \text{ кН}$, $l = 3 \text{ м}$, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ и $\delta = 1,5 \text{ см}$. Определить значение наибольших нормальных напряжений в заделке. Устойчивость стержня считать обеспеченной.

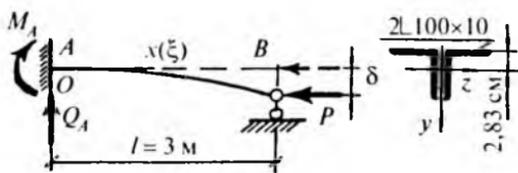


Рис. 12.17

В результате осадки опоры B стержень будет находиться в условиях продольно-поперечного изгиба, который можно описать однородным дифференциальным уравнением $EJv^{IV} + Pv'' = 0$ и его общим решением (12.2). Начальные параметры равны $v_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$. Для определения статических начальных параметров M_0 и Q_0 используем граничные условия на шарнирной опоре B .

При $x = l$ ($\xi = \xi_l$),

$$M = M_B = M_0 \cos \xi_l + \frac{Q_0}{k} \sin \xi_l = 0,$$

$$v = v_B = -\frac{M_0(1 - \cos \xi_l)}{EJk^2} - \frac{Q_0(\xi_l - \sin \xi_l)}{EJk^3} = \delta.$$

Решая полученную систему двух алгебраических уравнений, находим

$$M_0 = M_A = -\frac{EJk^2 \delta \operatorname{tg} \xi_l}{\operatorname{tg} \xi_l - \xi_l}, \quad Q_0 = Q_A = \frac{EJk^3 \delta}{\operatorname{tg} \xi_l - \xi_l}.$$

При отсутствии сжимающей силы P разложим тангенс в ряд и, переходя к пределу при $k \rightarrow 0$, получим известные решения.

$$\text{При } P=0 \quad \left(k = \sqrt{\frac{P}{EJ}} = 0 \right) \quad M_0 = -\frac{3EJ\delta}{l^2}, \quad Q_0 = \frac{3EJ\delta}{l^3}.$$

Произведем расчет при заданных числовых значениях. Определяем геометрические характеристики сечения:

$$2 \perp 100 \times 10 \quad F = 2 \cdot 19,2 = 38,4 \text{ см}^2, \quad J_z = 2 \cdot 179 = 358 \text{ см}^4, \\ z_0 = y_0 = 2,83 \text{ см}.$$

Вычисляем значения величин k , ξ_l , M_0 и Q_0 .

$$k = \sqrt{\frac{100}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 358}} = 3,647 \cdot 10^{-3},$$

$$\xi_l = kl = 1,094, \quad \operatorname{tg} \xi_l = 1,937,$$

$$M_0 = M_A = -\frac{2,1 \cdot 10^4 \cdot 358 (3,647 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 1,5 \cdot 1,937}{1,937 - 1,094} = -344,6 \text{ кНсм},$$

(растянуты верхние волокна)

$$Q_0 = Q_A = \frac{2,1 \cdot 10^4 \cdot 358 (3,647 \cdot 10^{-3})^3 \cdot 1,5}{1,937 - 1,094} = 0,649 \text{ кН}.$$

Наибольшие нормальные напряжения в заделке, действующие в крайних нижних волокнах сечения, равны

$$|\sigma_{\text{нм}}| = \frac{100}{38,4} + \frac{344,6}{358} \cdot (10 - 2,83) = 9,51 \text{ кН/см}^2 = 95,1 \text{ МПа}.$$

Проанализируем изменение изгибающего момента M_0 при увеличении сжимающей силы P . График зависимости M_0 от P представлен на рис. 12.18. При увеличении сжимающей силы знак изгибающего момента в заделке изменяется на противоположный. При стремлении сжимающей силы к критической силе Эйлера $P_c = 1683 \text{ кН}$ изгибающий момент неограниченно возрастает.

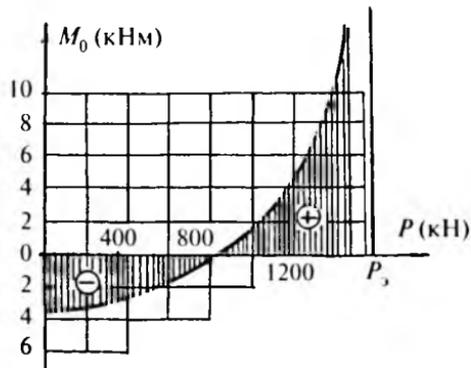


Рис. 12.18

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 12.6. Для стального сжато-изогнутого стержня (рис. 12.19) требуется определить значение наибольшего прогиба и построить эпюру σ в опасном сечении. Сравнить с результатами расчета стержня по недеформированной схеме. В расчетах принять $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа.

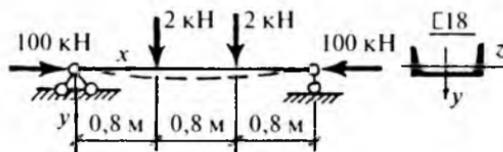


Рис. 12.19

Ответ: $v_{\max} = 0,803$ см, $\sigma_{\text{нм}} = -189,7$ МПа, $\sigma_{\text{нб}} = 5,9$ МПа (при расчете по недеформированной схеме $\sigma_{\text{нм}} = -142,4$ МПа, $\sigma_{\text{нб}} = -12$ МПа).

Задача 12.7. Для внецентренно-растянутого алюминиевого стержня трубчатого сечения $\text{Ø}60 \times 3$ мм (рис. 12.20) требуется вычислить значение максимального прогиба и построить эпюру σ в опасном сечении. Сравнить с результатами расчета стержня по недеформированной схеме. В расчетах принять $E = 0,7 \cdot 10^5$ МПа.

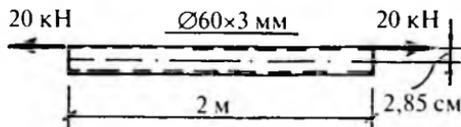


Рис. 12.20

Ответ: $v_{\max} = 1,217$ см, $\sigma_{\text{нб}} = 82,0$ МПа, $\sigma_{\text{нм}} = -7,6$ МПа (при расчете по недеформированной схеме $\sigma_{\text{нб}} = 115$ МПа, $\sigma_{\text{нм}} = -41$ МПа).

Задача 12.8. Для сжато-изогнутого деревянного стержня прямоугольного сечения 9×12 см (рис. 12.21) требуется определить значение наибольшего прогиба и построить эпюру σ в опасном сечении. В расчетах принять $E = 1 \cdot 10^4$ МПа.

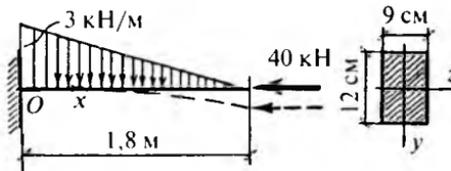


Рис. 12.21

Ответ: $v_{\text{нб}} = 1,362$ см, $\sigma_{\text{нм}} = -13,7$ МПа, $\sigma_{\text{нб}} = 6,3$ МПа.

Задача 12.9. Для сжатого стержня (рис. 12.22) требуется определить изгибающие моменты в заделках при повороте правой заделки на угол θ . Для решения использовать выражения (12.2). Выполнить числовой расчет стержня сечением I20 при $P = 200$ кН, $\theta = 0^\circ 20'$, $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа и $l = 6$ м. Устойчивость стержня в плоскости Oxz считать обеспеченной.

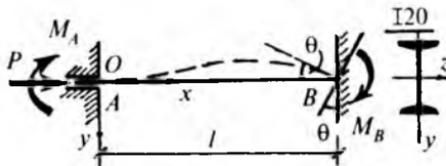


Рис. 12.22

Ответ:

$$M_A = \frac{EJk\theta(kl - \sin kl)}{2(1 - \cos kl) - kl \sin kl}, \quad M_B = \frac{EJk\theta(\sin kl - kl \cos kl)}{2(1 - \cos kl) - kl \sin kl},$$

где $k = \sqrt{\frac{P}{EJ}}$; при $P=0$ $M_A = \frac{2EJ\theta}{l}$, $M_B = \frac{4EJ\theta}{l}$.

Числовой расчет дал результаты: $M_A = 7,74$ кНм, $M_B = 14,03$ кНм, $\sigma_{\text{нм}} = -150,9$ МПа, $\sigma_{\text{нб}} = 1,6$ МПа.

Глава 13

ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ НАГРУЗОК

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

К динамическим относятся нагрузки, возникающие при движении элементов конструкций с ускорением, ударные нагрузки, вибрационные нагрузки, вызывающие колебания конструкций, сейсмические нагрузки и т.п. К динамическим нагрузкам можно также отнести периодические многократно повторяющиеся нагрузки.

В задачах расчета конструкций на действие динамических нагрузок необходим учет сил инерции, возникающих при достаточно быстром изменении величин и направлений нагрузок. При этом учет динамического воздействия на конструкцию часто производится с помощью так называемого динамического коэффициента $\mu_{дин}$, на который должны быть умножены нагрузки, напряжения и перемещения, возникающие при статическом нагружении. Величина динамического коэффициента зависит от характера действия нагрузки, геометрических характеристик, массы и свойств материала конструкции и от ряда других факторов.

Рассмотрим частные случаи динамического действия нагрузок.

Расчет элементов конструкций при движении с ускорением

При движении элементов конструкций с ускорением учет сил инерции можно произвести с помощью известного в механике принципа Даламбера. Согласно этому принципу движущуюся с

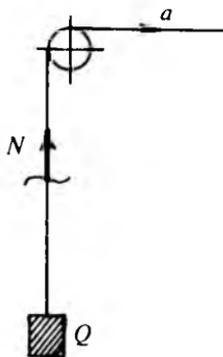


Рис. 13.1

ускорением систему можно условно рассматривать как находящуюся в состоянии покоя, если к внешним нагрузкам добавить силы инерции, равные произведению массы системы на ускорение и направленные в противоположную по отношению к направлению движения сторону.

Рассмотрим, например, равноускоренный подъем груза (рис. 13.1). В состоянии покоя напряжение в тросе без учета его веса определяется по формуле центрального растяжения-сжатия: $\sigma_{ст} = Q/F$, где F — площадь сечения

троса. При подъеме груза с ускорением a возникает сила инерции, равная

$$P_{\text{и}} = N_{\text{и}} = \frac{Q}{g} a = ma,$$

где g — ускорение свободного падения.

Динамическое усилие в тросе равно сумме статического усилия и силы инерции:

$$N_{\text{дин}} = N_{\text{ст}} + N_{\text{и}} = Q \left(1 + \frac{a}{g} \right).$$

Таким образом, динамический коэффициент равен

$$\mu_{\text{дин}} = 1 + \frac{a}{g}. \quad (13.1)$$

При равноускоренном опускании груза динамический коэффициент меньше единицы:

$$\mu_{\text{дин}} = 1 - \frac{a}{g}. \quad (13.2)$$

При свободном падении груза имеем очевидный факт: $\mu_{\text{дин}} = 0$, и напряжения в тросе отсутствуют.

Ударное действие нагрузки

Удар происходит в течение очень короткого промежутка времени, за который силы при ударе достигают больших значений. При учете всех факторов удар является достаточно сложным явлением, и точное определение напряжений и перемещений при ударе затруднительно. В силу этого при расчете конструкций на ударные воздействия вводятся допущения, упрощающие расчет и приводящие к увеличению динамического коэффициента, что, как правило, «идет в запас прочности».

В стержнях и стержневых системах удар имеет место, например, при падении груза с некоторой высоты. При этом могут возникать деформации растяжения или сжатия (рис. 13.2, *а*), изгиба (13.2, *б*), кручения и изгиба с кручением (рис. 13.2, *в*).

В приближенной теории удара при падении груза вводятся следующие допущения:

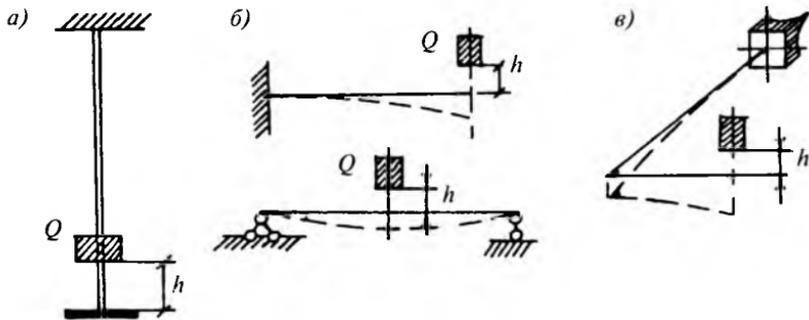


Рис. 13.2

1. Удар считается абсолютно неупругим. При этом не учитывается упругий отскок груза и принимается, что после удара груз и ударяемое тело движутся совместно до полной остановки.
2. Предполагается, что деформации ударяемого тела являются упругими и подчиняются закону Гука.
3. Местные деформации, возникающие в ударяемом теле в области падения груза, не учитываются.

Определение динамического коэффициента при ударе основано на использовании закона сохранения энергии. При этом вводится условная динамическая сила $P_{\text{дин}}$, при статическом действии которой возникают те же перемещения, что и при ударе.

Рассмотрим, например, падение груза весом Q на деформируемую систему, условно изображаемую в виде упругой пружины (рис. 13.3, а). Если масса ударяемой системы мала по сравнению с массой падающего груза, то можно принять, что волна сжатия распространяется по всей ударяемой системе практически мгновенно.

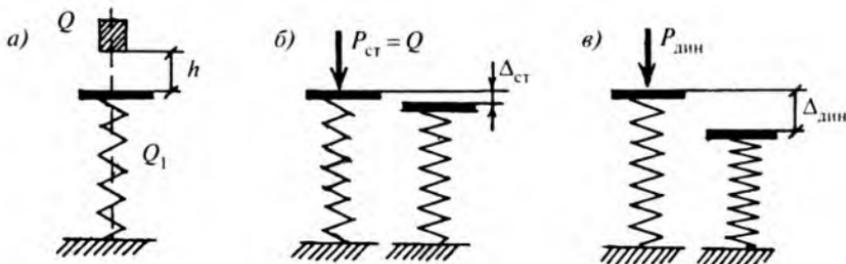


Рис. 13.3

При статическом действии силы $P_{ст} = Q$ (рис. 13.3, б) величина статического перемещения верхнего конца пружины равна

$$\Delta_{ст} = \frac{P_{ст}}{c} = \frac{Q}{c}, \quad (13.3)$$

где c — жесткость пружины.

Аналогично можно определить величину динамического перемещения при действии условной динамической силы $P_{дин}$ (рис. 13.3, в):

$$\Delta_{дин} = \frac{P_{дин}}{c}. \quad (13.4)$$

Величина $\Delta_{дин}$ принимается равной наибольшему перемещению верхнего конца пружины после падения груза в момент полной остановки движения. Из формул (13.3) и (13.4) получаем

$$P_{дин} = P_{ст} \frac{\Delta_{дин}}{\Delta_{ст}} = P_{ст} \mu_{дин}. \quad (13.5)$$

Для определения динамического коэффициента используем равенство кинетической энергии падающего груза и потенциальной энергии деформации ударяемой системы при статическом действии условной динамической силы $P_{дин}$:

$$Q(h + \Delta_{дин}) = \frac{1}{2} P_{дин} \Delta_{дин} = \frac{1}{2} Q \frac{\Delta_{дин}^2}{\Delta_{ст}}.$$

Сократив обе части на величину $Q = P_{ст}$, получим квадратное уравнение относительно $\Delta_{дин}$, решение которого имеет следующий вид:

$$\Delta_{дин} = \Delta_{ст} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{ст}}} \right).$$

Таким образом, динамический коэффициент определяется по формуле

$$\mu_{дин} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{ст}}}. \quad (13.6)$$

Если масса ударяемой системы $m = Q_1/g$ значительна, то расчет усложняется. В приближенном расчете распределенная масса ударяемой системы заменяется приведенной массой $\beta Q_1/g$, сосредоточенной в точке удара. Безразмерный коэффициент β определя-

ется из условия равенства кинетической энергии ударяемой системы с распределенной массой и кинетической энергии системы с массой, приведенной к точке удара. При этом для ударяемой системы в виде стержня длиной l получим формулу

$$\beta = \frac{1}{v_1^2 l} \int_0^l v_{\text{дин}}^2(x) dx, \quad (13.7)$$

где v_1 — скорость динамического перемещения сечения стержня в месте удара и $v_{\text{дин}}$ — скорость динамического перемещения произвольного сечения стержня.

Величина динамического коэффициента при падении груза на упругую систему с приведенной массой определяется по формуле

$$\mu_{\text{дин}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{ст}} \left(1 + \beta \frac{Q_1}{Q}\right)}}, \quad (13.8)$$

где Q_1 — вес ударяемой системы и Q — вес падающего груза.

Несмотря на существенные допущения, формулы (13.6) и (13.8) дают правильное качественное представление о характере напряженного и деформированного состояний упругой системы при ударе. В частности, они подтверждают очевидный факт, что эффект удара тем больше, чем более жесткой является ударяемая система. В силу этого для уменьшения динамического коэффициента и смягчения эффекта удара используются различные устройства (пружины, рессоры, амортизаторы и т.п.), позволяющие увеличить величину $\Delta_{\text{ст}}$.

Если в формулах (13.6) и (13.8) положить $h = 0$, то получим $\mu_{\text{дин}} = 2$. Такое нагружение, при котором величина нагрузки практически мгновенно принимает конечное значение, называется внезапным. Оно может возникнуть, например, при одновременном снятии опалубки (при распалубке) железобетонных конструкций на значительной площади.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 13.1

Груз весом $Q = 30$ кН поднимается с помощью лебедки, установленной на двух жестко соединенных друг с другом двутаврах I20 длиной $l = 3$ м (рис. 13.4). Подъем происходит с постоянным уско-

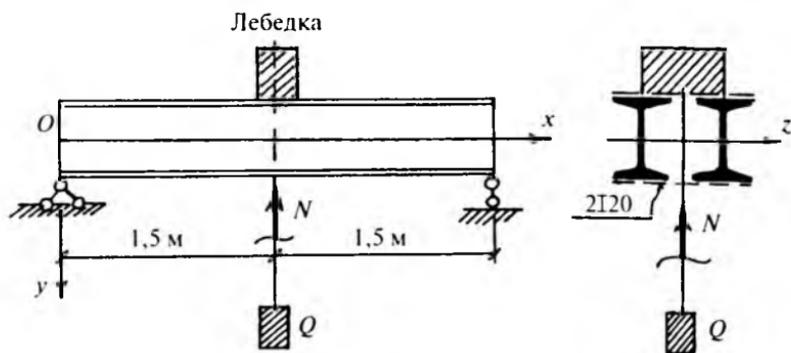


Рис. 13.4

рением $a = 5 \text{ м/сек}^2$. Вес лебедки $Q_1 = 6 \text{ кН}$, вес единицы длины двутавра $q_1 = 0,21 \text{ кН/м}$, сечение троса $\varnothing 20 \text{ мм}$. Требуется определить нормальные напряжения в тросе и балке. Вес троса не учитывать.

Вначале определим напряжения в тросе. Динамический коэффициент равен

$$\mu_{\text{дин}} = 1 + \frac{a}{g} = 1 + \frac{5}{9,81} = 1,51.$$

Нормальные напряжения в тросе при статическом действии груза равны

$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{Q}{F} = \frac{30}{\pi \cdot l^2} = 9,55 \text{ кН/см}^2.$$

Определяем динамические напряжения в тросе:

$$\sigma_{\text{дин}} = \mu_{\text{дин}} \sigma_{\text{ст}} = 1,51 \cdot 9,55 = 14,4 \text{ кН/см}^2.$$

Наибольшие нормальные напряжения в балке возникают в середине пролета. Поскольку балка и лебедка остаются неподвижными, наибольшие нормальные напряжения от веса лебедки и собственного веса балки определяем с помощью статического расчета. Изгибающий момент в середине пролета балки равен

$$M_{\text{ст}} = \frac{Q_1 l}{4} + \frac{q_1 l^2}{8} = \frac{6 \cdot 3}{4} + \frac{0,21 \cdot 3^2}{8} = 4,74 \text{ кНм}.$$

Определяем статические напряжения:

$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{M_{\text{ст}}}{W_z} = \frac{4,74 \cdot 10^2}{2 \cdot 184} = 1,29 \text{ кН/см}^2,$$

где $W_z = 184 \text{ см}^3$ — момент сопротивления двутавра I20.

К этим напряжениям надо добавить напряжения от динамического действия груза:

$$M_{\text{дин}} = \mu_{\text{дин}} M_{\text{ст}} = 1,51 \cdot \frac{30 \cdot 3}{4} = 33,96 \text{ кНм},$$

$$\sigma_{\text{дин}} = \frac{33,96 \cdot 10^2}{2 \cdot 184} = 9,23 \text{ кН/см}^2.$$

Суммарные напряжения в середине пролета балки равны

$$\sigma = 1,29 + 9,23 = 10,52 \text{ кН/см}^2.$$

Задача 13.2

Стальной стержень в виде трубы $\varnothing 180 \times 6$ мм испытывает действие груза $Q = 1$ кН, падающего с высоты $h = 30$ см (рис. 13.5, а). Требуется проверить прочность и устойчивость стержня. В расчетах принять $E = 2,1 \cdot 10^4$ кН/см², $R = 20$ кН/см², $\gamma_c = 0,9$, удельный вес стали $\gamma = 7,85 \cdot 10^{-5}$ кН/см³.

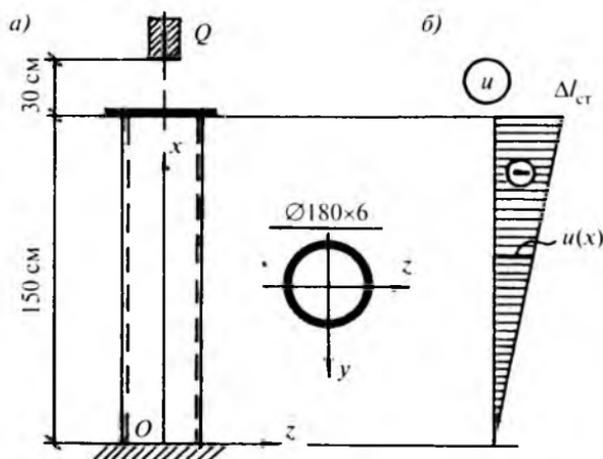


Рис. 13.5

Определяем геометрические характеристики поперечного сечения стержня:

$$F = \pi(9^2 - 8,4^2) = 32,8 \text{ см}^2,$$

$$J_z = J_y = \frac{\pi}{4}(9^4 - 8,4^4) = 1243 \text{ см}^4,$$

$$i_z = i_y = \sqrt{\frac{1243}{32,8}} = 6,16 \text{ см.}$$

Рассмотрим статическое действие падающего груза. Нормальные напряжения и укорочение стержня равны

$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{Q}{F} = \frac{1}{32,8} = 0,0305 \text{ кН/см}^2,$$

$$\Delta l_{\text{ст}} = -\frac{Ql}{EF} = -\frac{1 \cdot 150}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 32,8} = -2,18 \cdot 10^{-4} \text{ см.}$$

Для выполнения динамического расчета с учетом массы стержня определим с помощью формулы (13.7) коэффициент приведения массы к точке удара. Статическое перемещение произвольно-го сечения x (рис. 13.5, б) равно

$$u(x) = -\frac{Px}{EF} = -\frac{Qx}{EF} = -\Delta l_{\text{ст}} \frac{x}{l}.$$

Скорость динамического перемещения произвольного сечения примем равной

$$v_{\text{дин}}(x) = v_1 \frac{x}{l},$$

где v_1 — скорость динамического перемещения сечения стержня в точке падения груза.

Подставив это выражение в формулу (13.7), получим

$$\beta = \frac{1}{v_1^2 l} \int_0^l v_1^2 \left(\frac{x}{l} \right)^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Вес стержня равен

$$Q_1 = \gamma Fl = 7,85 \cdot 10^{-5} \cdot 32,8 \cdot 150 = 0,386 \text{ кН.}$$

Определяем по формуле (13.8) динамический коэффициент:

$$\mu_{\text{дин}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 30}{2,18 \cdot 10^{-4} \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{0,386}{1,0} \right)}} = 494,8.$$

Выполняем проверку прочности стержня при ударе:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{дин}} &= \mu_{\text{дин}} \sigma_{\text{ст}} = 494,8 \cdot 0,0305 = 15,1 \text{ кН/см}^2 < \gamma_c R = 0,9 \cdot 20 = \\ &= 18 \text{ кН/см}^2. \end{aligned}$$

Условие прочности выполняется. Для проверки выполнения условия устойчивости стержня определим величину условной динамической силы:

$$P_{\text{дин}} = \mu_{\text{дин}} P_{\text{ст}} = 494,8 \cdot 1 = 494,8 \text{ кН.}$$

Приняв условия закрепления стержня в главных плоскостях одинаковыми, определим гибкость стержня и коэффициент продольного изгиба:

$$\lambda_z = \lambda_y = \frac{2 \cdot 150}{6,16} = 48,7.$$

По таблице СНиП находим

$$\varphi = 0,906 - \frac{0,906 - 0,869}{10} 48,7 = 0,874.$$

Выполняем проверку устойчивости стержня:

$$\frac{P_{\text{дин}}}{F\varphi} = \frac{494,8}{32,8 \cdot 0,874} = 17,26 \text{ кН/см}^2 < \gamma_c R = 18 \text{ кН/см}^2.$$

Условие устойчивости выполняется.

Если не учитывать массу ударяемого стержня, то динамический коэффициент будет равен:

$$\mu_{\text{дин}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 30}{2,18 \cdot 10^{-4}}} = 525,6.$$

Соответствующее динамическое напряжение равно

$$\sigma_{\text{дин}} = 525,6 \cdot 0,0305 = 16,03 \text{ кН/см}^2.$$

Учет влияния массы стержня приводит к уменьшению напряжений примерно на 6%.

Задача 13.3

Во время лесосплава бревно весом $Q = 2 \text{ кН}$, плывущее со скоростью $v = 2 \text{ м/сек}$, ударяется в деревянную сваю моста (рис. 13.6). Глубина реки $h = 2 \text{ м}$, диаметр сваи $D = 22 \text{ см}$. Требуется определить нормальные напряжения в основании сваи при ударе и выполнить проверку ее прочности. В расчетах принять $E = 1 \cdot 10^3 \text{ кН/см}^2$, $R = 1,4 \text{ кН/см}^2$, $\gamma_c = 1,0$. Массу сваи не учитывать.

Для определения динамического коэффициента выполним условие равенства кинетической энергии плывущего бревна и по-

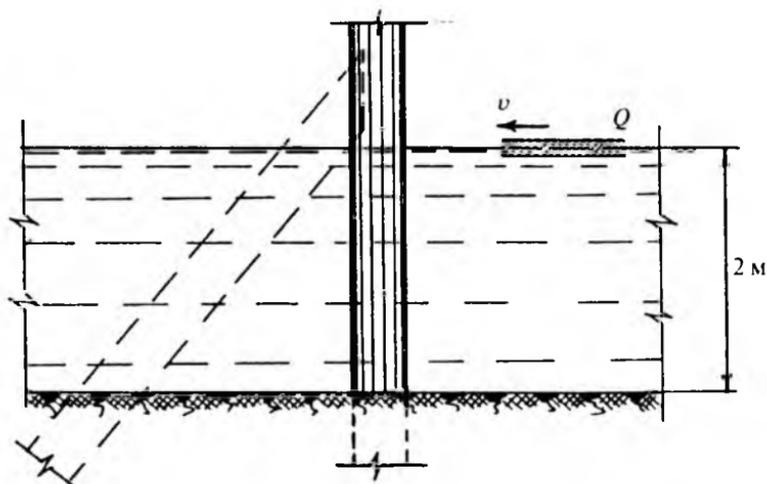


Рис. 13.6

тенциальной энергии деформации сваи при действии условной динамической силы $P_{\text{дин}}$:

$$v = \frac{1}{2} P_{\text{дин}} \Delta_{\text{дин}} = \frac{1}{2} Q \frac{\Delta_{\text{дин}}^2}{\Delta_{\text{ст}}} = \frac{1}{2} \frac{Q}{g} v^2,$$

$$\Delta_{\text{дин}} = \Delta_{\text{ст}} \sqrt{\frac{v^2}{g \Delta_{\text{ст}}}}, \quad \mu_{\text{дин}} = \sqrt{\frac{v^2}{g \Delta_{\text{ст}}}}.$$

Определяем осевой момент инерции и момент сопротивления поперечного сечения сваи:

$$J_z = J_y = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi \cdot 11^4}{4} = 11499 \text{ см}^4,$$

$$W_z = W_y = \frac{J_z}{R} = \frac{11499}{11} = 1045 \text{ см}^3.$$

Прогиб верхнего сечения сваи при статическом действии силы $P=Q$ равен

$$\Delta_{\text{ст}} = \frac{Pl^3}{3EJ} = \frac{2 \cdot 200^3}{3 \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 11499} = 0,464 \text{ см.}$$

Определяем динамический коэффициент:

$$\mu_{\text{дин}} = \sqrt{\frac{200^2}{981 \cdot 0,464}} = 9,376.$$

Определяем динамические напряжения в основании сваи и выполняем проверку ее прочности при ударе:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{дин}} &= \mu_{\text{дин}} \sigma_{\text{ст}} = \mu_{\text{дин}} \frac{Pl}{W_z} = 9,376 \cdot \frac{2 \cdot 200}{1045} = \\ &= 3,59 \text{ кН/см}^2 > \gamma_c R = 1,3 \text{ кН/см}^2.\end{aligned}$$

Условие прочности не выполняется. Требуется усиление сваи, например, с помощью установки подкоса, как показано пунктиром на рис. 13.6.

Задача 13.4

На стальную шарнирно-опертую балку из двух жестко соединенных между собой швеллеров $\text{I}18$ длиной $l = 4$ м падает с высоты $h = 10$ см груз весом $Q = 3$ кН (рис. 13.7). Требуется определить наибольшие нормальные напряжения в балке и выполнить проверку ее прочности. В расчетах принять $E = 2,1$ кН/см², $\gamma = 7,85 \cdot 10^{-5}$ кН/см³, $R = 21$ кН/см², $\gamma_c = 0,9$.

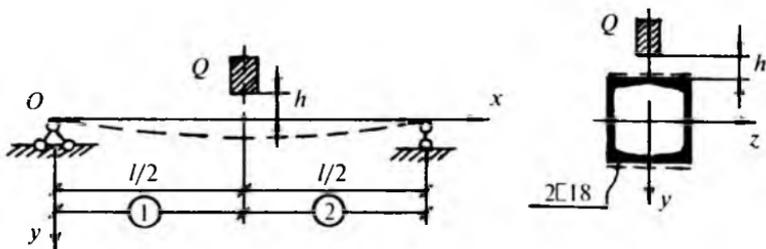


Рис. 13.7

Выполним расчет балки на статическое действие силы $P = Q = 3$ кН. Наибольшие изгибающий момент и нормальные напряжения равны

$$\begin{aligned}M_{\text{ст}} &= \frac{Pl}{4} = \frac{3 \cdot 4}{4} = 3 \text{ кНм}, \\ \sigma_{\text{ст}} &= \frac{M_{\text{ст}}}{W_z} = \frac{3 \cdot 10^2}{2 \cdot 121} = 1,24 \text{ кН/см}^2.\end{aligned}$$

Запишем с помощью метода начальных параметров выражение для прогиба балки на 1-м участке:

$$v(x) = \varphi_0 x - \frac{Q_0 x^3}{3! EJ} = \frac{Pl^2}{16 EJ} x - \frac{Px^3}{12 EJ} = \frac{Pl^3}{48 EJ} \left(\frac{3x}{l} - \frac{4x^3}{l^3} \right).$$

Статический прогиб балки в середине пролета равен

$$\Delta_{ст} = \frac{Pl^3}{48 EJ} = \frac{3 \cdot 400^3}{48 \cdot 2,1 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 1090} = 0,0874 \text{ см.}$$

Примем скорость динамического перемещения произвольного сечения балки на 1-м участке равной

$$v_{дин} = v_1 \left(\frac{3x}{l} - \frac{4x^3}{l^3} \right),$$

где v_1 — скорость динамического перемещения сечения в точке падения груза.

Определяем с помощью формулы (13.7) коэффициент приведения массы балки к точке удара. Выполнив интегрирование на половине длины балки и удвоив результат, получим

$$\beta = 2 \frac{1}{v_1^2 l} \int_0^{l/2} v_1^2 \left(\frac{3x}{l} - \frac{4x^3}{l^3} \right)^2 dx = \frac{17}{35}.$$

Вес балки равен

$$Q_1 = \gamma Fl = 7,85 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 20,7 \cdot 400 = 1,3 \text{ кН.}$$

Определяем по формуле (13.8) величину динамического коэффициента:

$$\mu_{дин} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 10}{0,0874 \left(1 + \frac{17}{35} \cdot \frac{1,3}{3} \right)}} = 14,8.$$

Определяем наибольшие динамические напряжения в середине балки и выполняем проверку ее прочности:

$$\sigma_{дин} = \mu_{дин} \sigma_{ст} = 14,8 \cdot 1,24 = 18,35 \text{ кН/см}^2 < \gamma_c R = 0,9 \cdot 21 = 18,9 \text{ кН/см}^2.$$

Условие прочности выполняется.

Задача 13.5

Стальной полый вал с насаженным на консольный конец шкивом диаметром $D = 30$ см испытывает удар падающим с высоты

$h = 5$ см грузом $Q = 0,5$ кН, который передается стальным тросом через шкив (рис. 13.8, а). Требуется определить напряжения в вале и выполнить проверку его прочности. В расчетах принять модули упругости при растяжении-сжатии и сдвиге $E = 2,1 \cdot 10^4$ кН/см², $G = 0,8 \cdot 10^4$ кН/см², $D_1 = 3$ см, $D_2 = 6$ см, $[\sigma] = 20$ кН/см². Сечение А считать зафиксированным от поворота вала относительно оси, упорные подшипники в сечениях А и В рассматривать при изгибе вала как шарнирные опоры. Прочность троса считать обеспеченной, его вес не учитывать.

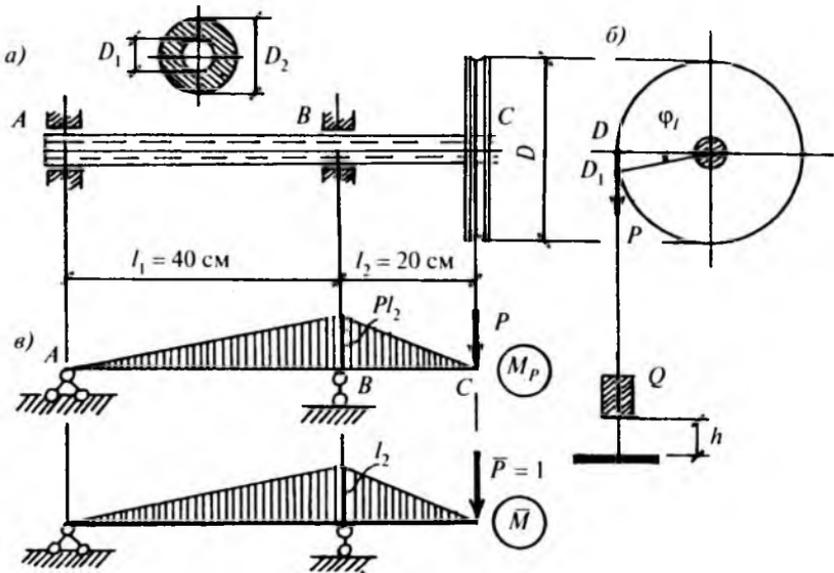


Рис. 13.8

При ударе вал испытывает изгиб в вертикальной плоскости и кручение. Определяем осевые и полярные моменты инерции и моменты сопротивления поперечного сечения вала:

$$J_z = \frac{\pi}{64}(D_2^4 - D_1^4) = \frac{\pi}{64}(6^4 - 3^4) = 59,64 \text{ см}^4,$$

$$J_p = 2J_z = 2 \cdot 59,64 = 119,3 \text{ см}^4,$$

$$W_z = \frac{J_z}{R_2} = \frac{59,64}{3} = 19,88 \text{ см}^3, \quad W_p = 2W_z = 39,76 \text{ см}^3.$$

Выполним статический расчет ударяемой системы на действие силы $P_{ст} = Q$. Наибольший изгибающий момент в вале возникает в сечении B , где он равен $M_z = Pl_2 = 0,5 \cdot 20 = 10$ кНсм. Крутящий момент в вале является постоянным по величине и равным $M_k = PD/2 = 0,5 \cdot 15 = 7,5$ кНсм. Наибольшие нормальные и касательные напряжения в вале при статическом нагружении равны

$$\sigma_{ст} = \frac{M_z}{W_z} = \frac{10}{19,88} = 0,503 \text{ кН/см}^2,$$

$$\tau_{ст} = \frac{M_k}{W_p} = \frac{7,5}{39,76} = 0,189 \text{ кН/см}^2.$$

Для определения динамического коэффициента определим вертикальное перемещение точки D шкива (рис. 13.8, б), считая трос закрепленным в этой точке. Это перемещение равно сумме прогиба вала в сечении C и перемещения DD_1 точки шкива за счет его поворота при кручении вала.

Для определения прогиба вала «перемножим» грузовую и единичную эпюры изгибающих моментов (рис. 13.8, в) по правилу А.К. Верещагина:

$$\begin{aligned} v_{ст} &= \frac{1}{EJ_z} \left(\frac{1}{2} Pl_2 l_2 \frac{2}{3} l_2 + \frac{1}{2} Pl_2 l_1 \frac{2}{3} l_2 \right) = \frac{Pl_2^2 (l_1 + l_2)}{3EJ_z} = \\ &= \frac{0,5 \cdot 20^2 \cdot 60}{3 \cdot 2,1 \cdot 10^4 \cdot 59,64} = 3,19 \cdot 10^{-3} \text{ см.} \end{aligned}$$

Вертикальное перемещение DD_1 шкива за счет кручения вала равно

$$DD_1 = \frac{D}{2} \varphi_l = \frac{D}{2} \cdot \frac{M_k (l_1 + l_2)}{GJ_p} = \frac{15 \cdot 7,5 \cdot 60}{0,8 \cdot 10^4 \cdot 119,3} = 7,07 \cdot 10^{-3} \text{ см.}$$

Таким образом, величина вертикального перемещения точки D шкива при статическом нагружении равна

$$\Delta_{ст} = (3,19 + 7,07) \cdot 10^{-3} = 0,01026 \text{ см.}$$

Определяем динамический коэффициент по формуле (13.6), то есть без учета массы ударяемой системы:

$$\mu_{дин} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2,5}{0,01026}} = 32,2.$$

Определяем наибольшие динамические напряжения в вале:

$$\sigma_{\text{дин}} = 32,2 \cdot 0,503 = 16,2 \text{ кН/см}^2,$$

$$\tau_{\text{дин}} = 32,2 \cdot 0,189 = 6,09 \text{ кН/см}^2.$$

Выполняем проверку прочности вала по энергетической теории прочности:

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{16,2^2 + 3 \cdot 6,09^2} = 19,3 \text{ кН/см}^2 < [\sigma] = 20 \text{ кН/см}^2.$$

Условие прочности вала выполняется.

Глава 14

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Плоская задача представляет собой частный случай пространственной задачи теории упругости. Для плоской задачи характерно отсутствие зависимости напряжений и деформаций от одной из трех переменных, например от z . Следовательно, все производные от напряжений и деформаций по этой переменной обращаются в нуль.

В инженерных конструкциях плоская задача имеет место в двух случаях — при плоской деформации и при плоском обобщенном напряженном состоянии.

Плоская деформация имеет место, например, в достаточно протяженных конструкциях типа плотин, подпорных стенок, толстостенных цилиндрах и т.п. при условии, что нагрузка и условия закрепления не изменяются по длине, а торцы не могут перемещаться в направлении оси Oz (рис. 14.1). Все элементы в виде пластин или дисков единичной толщины, выделенные перпендикулярно к оси Oz на достаточном удалении от торцов, находятся в одинаковом напряженном и деформированном состояниях. При этом все эти элементы остаются плоскими и перемещения в направлении оси Oz можно положить равными нулю. Таким образом, имеем

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = 0, \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0. \quad (14.1)$$

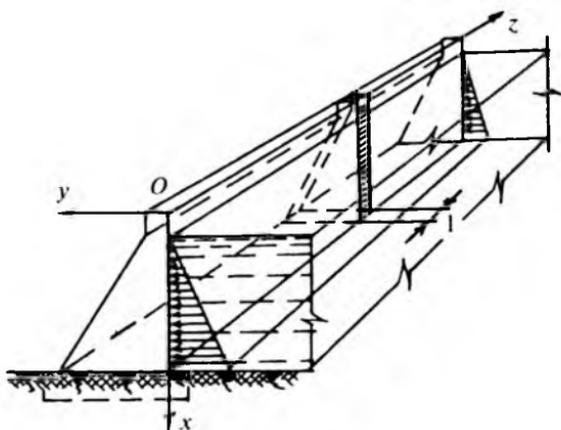


Рис. 14.1

При плоской деформации отличны от нуля линейные деформации ϵ_x , ϵ_y и угловая деформация γ_{xy} . Напряженное состояние характеризуется тремя основными напряжениями σ_x , σ_y и τ_{xy} , связанными с деформациями законом Гука (2.22). Напряжение σ_z не равно нулю, но и не является независимой характеристикой напряженного состояния, поскольку выражается через σ_x и σ_y по формуле

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y), \quad (14.2)$$

где ν — коэффициент Пуассона.

Плоское обобщенное напряженное состояние, как было отмечено в главе 2, имеет место в тонких конструктивных элементах типа пластин или дисков при нагружении в срединной плоскости, которая делит пластину пополам по толщине (рис. 14.2). В срединной плоскости располагаются оси координат Ox и Oy . По малости толщины h по сравнению с размерами пластины в плане можно принять $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Остальные три напряжения обобщенно принимаются средними по толщине и не зависящими от переменной z .

$$\sigma_x = \sigma_x(x, y), \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y), \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y). \quad (14.3)$$



Рис. 14.2

При этом возможны все три перемещения u , v и w , но перемещение w не является независимой величиной и может быть определено из уравнения

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y). \quad (14.4)$$

Перемещения u и v принимаются постоянным по толщине и не зависящими от переменной z .

Обе рассмотренные задачи описываются одинаковыми уравнениями плоской задачи, которые включают в себя следующие основные уравнения.

Два дифференциальных уравнения равновесия

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (14.5)$$

где X, Y — проекции объемных сил.

Три зависимости Коши

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (14.6)$$

Три уравнения закона Гука

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \sigma_y), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu \sigma_x), \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}, \end{aligned} \right\} \quad (14.7)$$

где $G = E/2(1 + \nu)$ — модуль упругости при сдвиге.

Для плоской деформации в закон Гука входят приведенные модуль упругости и коэффициент Пуассона

$$E_1 = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad \nu_1 = \frac{\nu}{1 - \nu}. \quad (14.8)$$

При выполнении статических граничных условий используются формулы для определения напряжений на наклонной площадке

$$\left. \begin{aligned} X_v &= \sigma_x l + \tau_{xy} m, \\ Y_v &= \tau_{yx} l + \sigma_y m, \end{aligned} \right\} \quad (14.9)$$

где $X_v = p_{xv}$, $Y_v = p_{yv}$ — компоненты распределенной поверхностной нагрузки, $l = \cos(\nu, x)$, $m = \cos(\nu, y)$ — направляющие косинусы нормалей к границе тела. Если эти нормали направлены по осям координат, то имеем

$$l, m = \begin{cases} \pm 1, \\ 0. \end{cases}$$

Для плоской задачи остается одно уравнение неразрывности деформаций (2.11)

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (14.10)$$

Если в это уравнение подставить формулы закона Гука (14.7) и исключить касательные напряжения с помощью уравнений равновесия (14.5), то получим гармоническое уравнение Лапласа

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0, \quad (14.11)$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — дифференциальный оператор Лапласа.

Уравнение (14.11) в механике деформируемого твердого тела называется уравнением М. Леви. Оно справедливо при следующих условиях:

$$X, Y = \begin{cases} \text{const}, \\ 0. \end{cases}$$

При решении плоской задачи в напряжениях необходимо проинтегрировать систему трех дифференциальных уравнений (14.5) и (14.11) и обеспечить выполнение статических граничных условий (14.9). Одним из способов решения системы дифференциальных уравнений является сведение ее к одному дифференциальному уравнению более высокого порядка. Для этого надо ввести новую искомую функцию (функцию напряжений Эри) $\varphi(x, y)$ и выразить через нее напряжения по формулам

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - xY - yX. \quad (14.12)$$

При подстановке формул (14.12) в дифференциальные уравнения равновесия (14.5) они обращаются в тождества, а при их подстановке в уравнение (14.11) получим дифференциальное уравнение 4-го порядка (бигармоническое уравнение)

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi(x, y) = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \quad (14.13)$$

Поскольку получить общее решение дифференциального уравнения в частных производных (14.13) и выразить его через элементарные функции нельзя, применяются различные приближенные методы решения плоской задачи. Одним из таких методов является метод степенных многочленов (полиномов). При этом функция напряжений $\varphi(x, y)$ принимается в виде алгебраического многочлена соответствующей степени. Этот многочлен должен обращать в тождество бигармоническое уравнение. Коэффициенты полинома подлежат определению из статических граничных условий.

При расчете элементов конструкций с круговыми границами, например цилиндров (рис. 14.3), а также в некоторых других случаях удобно использовать полярную систему координат r, θ .

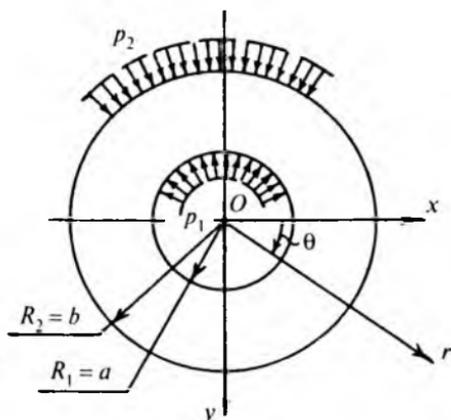


Рис. 14.3

Одним из основных случаев плоской задачи в полярной системе координат является полярно-симметричная задача, для которой напряжения, деформации и перемещения не зависят от полярного угла θ . При этом остается одно дифференциальное уравнение равновесия

$$\sum_r = 0, \quad \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R = 0, \quad (14.14)$$

где σ_r и σ_θ — радиальное и кольцевое (окружное) нормальные напряжения (рис. 14.4), R — проекция объемной силы на ось Or .

Касательные напряжения в полярно-симметричной задаче отсутствуют: $\tau_{r\theta} = 0$.

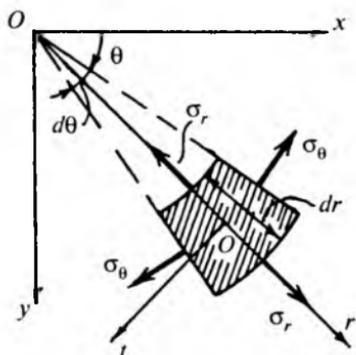


Рис. 14.4

Относительные деформации определяются по формулам

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \epsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad \gamma_{r\theta} = 0, \quad (14.15)$$

где $u = u(r)$ — радиальное перемещение. Перемещения в окружном направлении равны нулю.

Использував закон Гука в обратной форме

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_r + \nu \epsilon_\theta), \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_\theta + \nu \epsilon_r), \end{aligned} \right\} \quad (14.16)$$

приведем дифференциальное уравнение равновесия (14.14) к следующему виду:

$$\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{1}{r^2} u \right) + R = 0. \quad (14.17)$$

Решение этого уравнения при отсутствии объемных сил ($R = 0$) имеет следующий вид:

$$u(r) = C_1 r + C_2 \frac{1}{r}. \quad (14.18)$$

Для напряжений получим следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[(1+\nu)C_1 - (1-\nu)C_2 \frac{1}{r^2} \right], \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[(1+\nu)C_1 + (1-\nu)C_2 \frac{1}{r^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (14.19)$$

Входящие в решения (14.18) и (14.19) постоянные интегрирования C_1 и C_2 подлежат определению из граничных условий.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 14.1

Для консольной пластины прямоугольного поперечного сечения, находящейся в условиях плоского напряженного состояния под действием равномерно распределенной нагрузки (рис. 14.5), требуется:

1. Определить напряжения в пластине с помощью метода степенных полиномов (многочленов). При решении использовать полином $\varphi(x, y) = \frac{a_2}{2}x^2 + \frac{b_3}{2}x^2y + \frac{d_3}{6}y^3 + \frac{d_5}{6}\left(x^2y^3 - \frac{y^5}{5}\right)$. Объемные силы не учитывать.
2. Получить решение задачи с помощью формул сопротивления материалов.
3. Сравнить полученные решения и построить эпюры напряжений в сечении $x = h$.

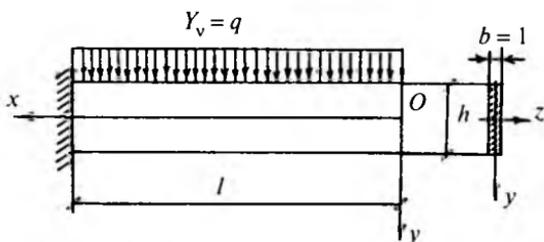


Рис. 14.5

Проверим выполнение бигармонического уравнения (14.13):

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = 0, \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = -4d_5y, \quad 2\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = 4d_5y,$$

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi(x, y) = 4d_5y - 4d_5y = 0.$$

Бигармоническое уравнение удовлетворяется. Определяем напряжения в пластине (рис. 14.6) по формулам (14.12) при $X = Y = 0$.

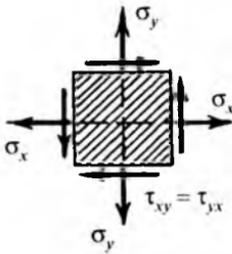


Рис. 14.6

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = d_3 y + d_5 x^2 y - \frac{2}{3} d_5 y^3,$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = a_2 + b_3 y + \frac{d_5}{3} y^3,$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -b_3 x - d_5 x y^2.$$

Используем граничные условия на длинных сторонах пластин при $y = \pm h/2$. Направляющие косинусы равны: $l = 0, m = \pm 1$.

$$\left. \begin{aligned} y = -h/2, \quad X_v = \tau_{xy}(-1) = b_3 x + d_5 \frac{h^2}{4} x = 0, \\ Y_v = \sigma_y(-1) = -a_2 + b_3 \frac{h}{2} + d_5 \frac{h^3}{24} = q; \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} y = h/2, \quad X_v = \tau_{xy} \cdot 1 = -b_3 x - d_5 \frac{h^2}{4} x = 0, \\ Y_v = \sigma_y \cdot 1 = a_2 + b_3 \frac{h}{2} + d_5 \frac{h^3}{24} = 0. \end{aligned} \right\}$$

1-е и 3-е уравнения совпадают. Из этих уравнений получаем соотношение

$$b_3 = -d_5 \frac{h^2}{4}.$$

Решая совместно 2-е и 4-е уравнения, получаем

$$a_2 = -\frac{q}{2}, \quad b_3 = \frac{3q}{2h}, \quad d_5 = -\frac{6q}{h^3}.$$

Запишем окончательные выражения для напряжений σ_y и τ_{xy} :

$$\sigma_y = -\frac{q}{2} + \frac{3q}{2h} y - \frac{2q}{h^3} y^3,$$

$$\tau_{xy} = -\frac{3q}{2h} x + \frac{6q}{h^3} x y^2.$$

Отметим, что нормальное напряжение σ_y не изменяется по переменной x .

Для определения последнего коэффициента d_3 используем статические граничные условия на свободном торце пластины при

$x = 0$. Направляющие косинусы равны: $l = -1$, $m = 0$. Поскольку нагрузки на торце отсутствуют, надо принять $X_v = p_{xv} = 0$, $Y_v = p_{yv} = 0$. При этом получим

$$\left. \begin{aligned} x = 0, \quad X_v = \sigma_x(-1) = -d_3 y + \frac{2}{3} d_5 y^3 = 0, \\ Y_v = \tau_{yx}(-1) = b_3 \cdot 0 + d_5 \cdot 0 \cdot y^2 = 0. \end{aligned} \right\}$$

Второе уравнение выполняется точно при любом значении y , а первое выполняется не во всех точках торца. Используем интегральные граничные условия относительно равнодействующих нормального напряжения σ_x , которые должны быть равны нулю.

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dy = \int_{-h/2}^{h/2} \left(d_3 y - \frac{2}{3} d_5 y^3 \right) dy = d_3 \frac{y^2}{2} \Big|_{-h/2}^{h/2} - \frac{2}{3} d_5 \frac{y^4}{4} \Big|_{-h/2}^{h/2} = 0.$$

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x y dy &= \int_{-h/2}^{h/2} \left(d_3 y - \frac{2}{3} d_5 y^3 \right) y dy = d_3 \frac{y^3}{3} \Big|_{-h/2}^{h/2} - \frac{2}{3} d_5 \frac{y^5}{5} \Big|_{-h/2}^{h/2} = \\ &= d_3 \frac{h^3}{12} - d_5 \frac{h^5}{120} = 0. \end{aligned}$$

Первое условие выполняется при любых значениях коэффициентов, а из второго получаем

$$d_3 = d_5 \frac{h^2}{10} = -\frac{3q}{5h}.$$

Окончательное выражение для напряжения σ_x имеет следующий вид:

$$\sigma_x = -\frac{3q}{5h} y - \frac{6q}{h^3} x^2 y + \frac{4q}{h^3} y^3.$$

В полученном решении выполняются точно дифференциальные уравнения равновесия (14.5), уравнение неразрывности деформаций (14.11) и статические граничные условия при $y = \pm h/2$. Граничные условия на свободном торце при $x = 0$ выполняются в интегральной (смягченной) форме. Граничные условия в закрепленном сечении $x = l$ являются кинематическими, и при их постановке необходимо ввести предположение о характере перемещений.

При определении напряжений в пластине с помощью формул сопротивления материалов (глава 6) ее надо рассматривать как

консольную балку прямоугольного сечения с шириной $b = 1$. Внутренние усилия в поперечных сечениях определяются по формулам:

$$Q(x) = qx, \quad M(x) = -\frac{qx^2}{2}.$$

Сечение $x = h$

Таблица 14.1

Плоская задача				Сопrotивление материалов		
y	σ_x	σ_y	τ_{yx}	σ_x	σ_y	τ_{yx}
$-h/2$	$2,8q$	$-q$	0	$3q$	0	0
$-h/4$	$1,59q$	$-0,84q$	$-1,125q$	$1,5q$	0	$1,125q$
0	0	$-0,5q$	$-1,5q$	0	0	$1,5q$
$h/4$	$-1,59q$	$-0,16q$	$-1,125q$	$-1,5q$	0	$1,125q$
$h/2$	$-2,8q$	0	0	$-3q$	0	0

Сечение $x = 8h$

Таблица 14.2

Плоская задача				Сопrotивление материалов		
y	σ_x	σ_y	τ_{yx} <th>σ_x</th> <th>σ_y</th> <th>τ_{yx}</th>	σ_x	σ_y	τ_{yx}
$-h/2$	$191,8q$	$-q$	0	$192q$	0	0
$-h/4$	$96,1q$	$-0,84q$	$-9q$	$96q$	0	$9q$
0	0	$-0,5q$	$-12q$	0	0	$12q$
$h/4$	$-96,1q$	$-0,16q$	$-9q$	$-96q$	0	$9q$
$h/2$	$-191,8q$	0	0	$-192q$	0	0

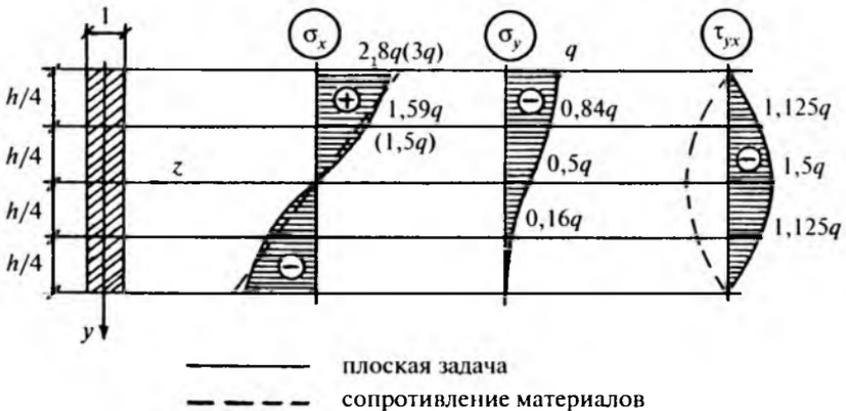


Рис. 14.7

Определяем напряжения:

$$\sigma_x = \frac{M}{J_z} y = -\frac{6q}{h^3} x^2 y,$$

$$\tau_{yx} = \frac{QS_z^{\text{отс}}}{J_z b} = \frac{3q}{2h} x - \frac{6q}{h^3} xy^2,$$

где $J_z = \frac{h^3}{12}$, $S_z^{\text{отс}} = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$.

Напряжение σ_y , характеризующее взаимное давление между продольными слоями балки, в сопротивлении материалов полагается отсутствующим: $\sigma_y = 0$.

Сравнив полученные решения, можно отметить, что в формулах для напряжения σ_x совпадает функция $\frac{6q}{h^3} x^2 y$. В решении плоской задачи имеются две дополнительные функции, не зависящие от переменной x . Формулы для касательных напряжений совпадают с точностью до знака.

Определим величины напряжений в сечениях $x = h$ и $x = 8h$. Результаты вычислений приведены в табл. 14.1 и 14.2.

В сечении $x = h$ напряжения σ_x и σ_y имеют один порядок. Различие в напряжениях σ_x составляет 7,14%. На достаточном удалении от свободного конца (сечение $x = 8h$) различие в напряжениях σ_x практически отсутствует, а напряжение σ_y значительно меньше напряжения σ_x . Эпюры напряжений в сечении $x = h$ приведены на рис. 14.7.

Задача 14.2

В плотине треугольного поперечного сечения, находящейся в условиях плоской деформации под действием гидростатического давления воды и собственного веса материала $X = \gamma_1$ (рис. 14.8), требуется определить напряжения с помощью функции напряжений и по формулам сопротивления материалов. Построить эпюры напряжений в сечении x . В расчетах принять $\alpha = 28^\circ$, $\gamma = 10 \text{ кН/м}^3$ и $\gamma_1 = 21 \text{ кН/м}^3$.

Примем в качестве функции напряжений полином третьей степени

$$\varphi(x, y) = \frac{a_3}{6} x^3 + \frac{b_3}{2} x^2 y + \frac{c_3}{2} xy^2 + \frac{d_3}{6} y^3.$$

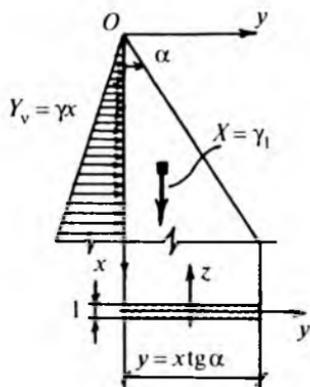


Рис. 14.8

Данный полином обращает бигармоническое уравнение (14.13) в тождество при любых значениях коэффициентов. Определяем напряжения в плотине:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = c_3 x + d_3 y,$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = a_3 x + b_3 y,$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - xY - yX = -b_3 x - c_3 y - \gamma_1 y.$$

Для определения коэффициентов полинома используем статические граничные условия на передней и задней гранях плотин.

Передняя грань ($y = 0$).

$$l = 0, \quad m = -1, \quad Y_v = p_{yv} = \gamma x, \quad X_v = 0.$$

$$\left. \begin{aligned} X_v = p_{xv} &= c_3 x \cdot 0 + (-b_3)x(-1) = 0, \\ Y_v = p_{yv} &= -b_3 x \cdot 0 + a_3 x(-1) = \gamma x. \end{aligned} \right\}$$

Из этих уравнений получаем $a_3 = -\gamma$, $b_3 = 0$. Формулы для напряжений принимают следующий вид:

$$\sigma_x = c_3 x + d_3 y, \quad \sigma_y = -\gamma x, \quad \tau_{xy} = -(c_3 + \gamma_1)y.$$

Задняя грань ($y = x \operatorname{tg} \alpha$).

$$l = -\sin \alpha, \quad m = \cos \alpha, \quad X_v = Y_v = 0.$$

$$\left. \begin{aligned} X_v &= (c_3x + d_3x \operatorname{tg} \alpha)(-\sin \alpha) - (c_3 + \gamma_1)x \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha = 0, \\ Y_v &= -(c_3 + \gamma_1)x \operatorname{tg} \alpha(-\sin \alpha) - \gamma x \cos \alpha = 0. \end{aligned} \right\}$$

Решив полученную систему алгебраических уравнений, определяем коэффициенты c_3 и d_3 , после чего запишем окончательные формулы для напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (\gamma \operatorname{ctg}^2 \alpha - \gamma_1)x + (\gamma_1 \operatorname{ctg} \alpha - 2\gamma \operatorname{ctg}^3 \alpha)y, \\ \sigma_y &= -\gamma x, \quad \tau_{xy} = -\gamma \operatorname{ctg}^2 \alpha y. \end{aligned}$$

Напряжения изменяются по линейному закону.

Определим напряжения в плотине по формулам сопротивления материалов. При этом элемент плотины в условиях плоской задачи можно приближенно рассматривать как консольный стержень переменного сечения единичной ширины, испытывающий изгиб и внецентренное сжатие (рис. 14.9). Продольная сила численно равна весу части треугольной призмы:

$$N = -R_2 = -\frac{1}{2} \gamma_1 x^2 \operatorname{tg} \alpha.$$

Эта сила приложена с эксцентриситетом по отношению к центральной оси Oz поперечного сечения, равным $e = \frac{1}{6} x \operatorname{tg} \alpha$.

Изгибающий момент в сечении x равен

$$M(x) = -R_1 \frac{x}{3} + R_2 e = -\frac{1}{6} \gamma x^3 + \frac{1}{12} \gamma_1 x^3 \operatorname{tg}^2 \alpha,$$

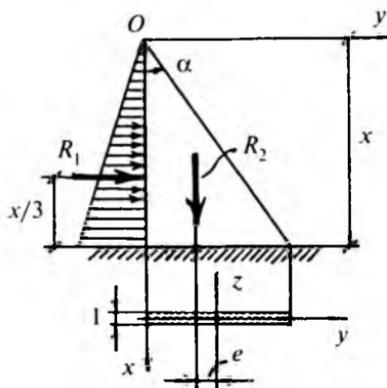


Рис. 14.9

где R_1 — равнодействующая гидростатического давления и $R_2 = Q$ — равнодействующая веса плотины.

а) Плоская задача

б) Сопротивление материалов

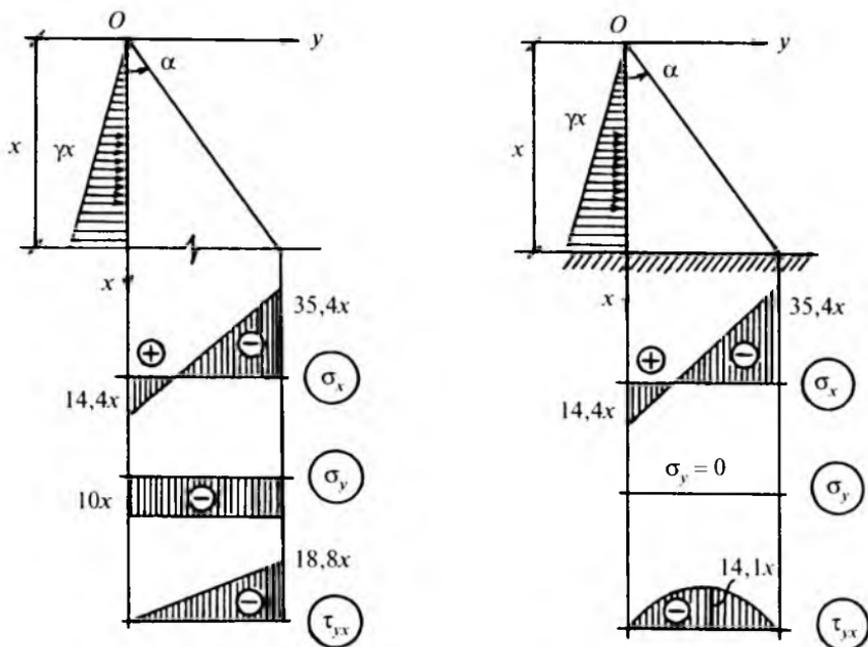


Рис. 14.10

Нормальные напряжения определяются по формулам внецентренного сжатия с изгибом, а касательные напряжения — приближенно по формуле Д.И. Журавского (6.3). При этом формулы для нормальных напряжений σ_x в обоих решениях полностью совпадают. Касательные напряжения в решении сопротивления материалов изменяются по переменной y по квадратичному закону:

$$\tau_{xy} = -3\gamma \operatorname{ctg}^3 \alpha \left(y \operatorname{tg} \alpha - \frac{y^2}{x} \right).$$

Нормальные напряжения σ_y , характеризующие взаимное давление продольных слоев, в сопротивлении материалов полагаются отсутствующими.

Эпюры напряжений в произвольном сечении x приведены на рис. 14.10. Отметим качественное отличие эпюр касательных напряжений.

Растягивающие нормальные напряжения σ_x по передней грани железобетонных плотин нежелательны. Определим угол раствора плотины α_0 , при котором эти напряжения равны нулю:

$$y = 0, \quad \sigma_x = (\gamma \operatorname{ctg}^2 \alpha - \gamma_1)x = 0, \quad \operatorname{tg} \alpha_0 = \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_1}}.$$

При $\alpha > \alpha_0$ нормальные напряжения σ_x являются сжимающими. При числовых данных задачи $\alpha_0 = 34,6^\circ$.

Задача 14.3

Стальной толстостенный цилиндр находится под действием внутреннего давления $p_1 = 8 \text{ кН/см}^2$ (рис. 14.11). Требуется построить эпюры нормальных напряжений σ_r и σ_θ и радиальных перемещений u . Выполнить проверку прочности цилиндра по энергетической теории. В расчетах принять $E = 2,1 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$, $\nu = 0,3$, $a = 20 \text{ см}$, $b = 40 \text{ см}$, $[\sigma] = 20 \text{ кН/см}^2$.

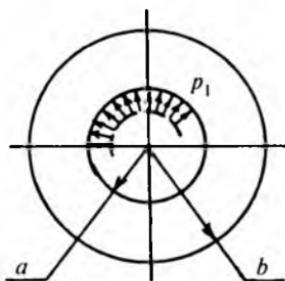


Рис. 14.11

Данная задача является плоской и полярно-симметричной. Используем общие решения (14.18) и (14.19) и выполняем граничные условия на внутренней и внешней поверхностях цилиндра: $r = a$, $\sigma_r = -p_1$, $r = b$, $\sigma_r = 0$.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r(a) &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[(1+\nu)C_1 - (1-\nu)C_2 \frac{1}{a^2} \right] = -p_1, \\ \sigma_r(b) &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[(1+\nu)C_1 - (1-\nu)C_2 \frac{1}{b^2} \right] = 0. \end{aligned} \right\}$$

Решив систему алгебраических уравнений и определив постоянные C_1 и C_2 , представим окончательное решение задачи в следующем виде:

$$\sigma_r = \frac{p_1 k^2}{1 - k^2} \left(1 - \frac{1}{\rho^2} \right),$$

$$\sigma_\theta = \frac{p_1 k^2}{1 - k^2} \left(1 + \frac{1}{\rho^2} \right),$$

$$u = \frac{p_1 k^2 b}{E(1 - k^2)} \left[(1 - \nu)\rho + (1 + \nu)\frac{1}{\rho} \right],$$

где $\rho = r/b$, $k = a/b$, $a \leq r \leq b$.

Отметим, что напряжения не зависят от характеристик упругости материала E и ν .

Выполним числовой расчет при $k = 20/40 = 0,5$. Считая, что цилиндр находится в условиях плоской деформации, в формулу для радиальных перемещений надо подставить приведенные модуль упругости и коэффициент Пуассона (14.8):

$$E_1 = \frac{E}{1 - \nu^2} = \frac{2,1 \cdot 10^4}{1 - 0,3^2} = 2,31 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2,$$

$$\nu_1 = \frac{\nu}{1 - \nu} = \frac{0,3}{1 - 0,3} = 0,43.$$

Вычислим значения напряжений и радиальных перемещений в точках внутренней и внешней поверхностей цилиндра и посередине толщины соответственно при $\rho = 20/40 = 0,5$, $\rho = 30/40 = 0,75$ и $\rho = 40/40 = 1$. Эпюры σ_r , σ_θ и u приведены на рис. 14.12.

Определяем по формуле (14.2) нормальное напряжение σ_z в точках внутренней поверхности цилиндра:

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) = 0,3(-8 + 13,3) = 1,59 \text{ кН/см}^2.$$

Эти точки являются наиболее опасными в смысле прочности. Напряжения на гранях бесконечно малого элемента в окрестности этих точек показаны на рис. 14.13. Поскольку в полярно-симметричной задаче касательные напряжения на гранях элемента равны нулю, напряжения σ_r , σ_θ и σ_z являются главными. В данной задаче $\sigma_1 = \sigma_\theta$, $\sigma_2 = \sigma_z$, $\sigma_3 = \sigma_r$.

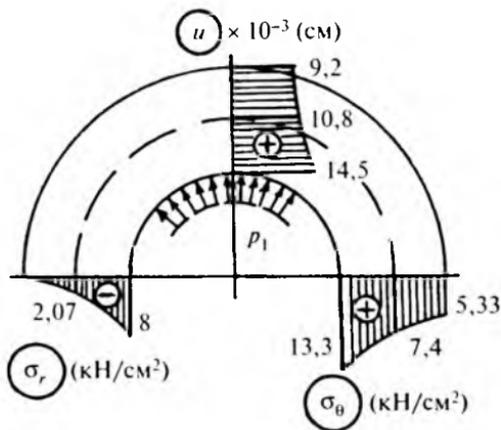


Рис. 14.12

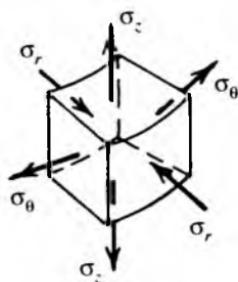


Рис. 14.13

Используя формулу для удельной потенциальной энергии изменения формы (задача 2.5), получим условие прочности по энергетической теории:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq [\sigma].$$

Подставим значения главных напряжений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(13,3 - 1,59)^2 + [1,59 - (-8)]^2 + (-8 - 13,3)^2} = \\ = 18,5 \text{ кН/см}^2 < [\sigma] = 20 \text{ кН/см}^2. \end{aligned}$$

Условие прочности выполняется.

Задача 14.14

В стальном толстостенном цилиндре (рис. 14.14) внутренняя поверхность получила радиальное перемещение u_1 (например, в результате теплового воздействия). Требуется построить эпюры напряжений и радиальных перемещений и выполнить проверку прочности по энергетической теории. В расчетах принять $u_1 = 0,01$ см, $a = 15$ см, $b = 25$ см, $E = 2,1 \cdot 10^4$ кН/см², $\nu = 0,3$, $[\sigma] = 18$ кН/см².

Используем общее решение полярно-симметричной задачи (14.18) и (14.19) и выполняем граничные условия: $r = a$, $u = u_1$; $r = b$, $\sigma_r = 0$.

$$\left. \begin{aligned} u(a) &= C_1 a + C_2 \frac{1}{a} = u_1, \\ \sigma_r(b) &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[(1+\nu)C_1 - (1-\nu)C_2 \frac{1}{b^2} \right] = 0. \end{aligned} \right\}$$

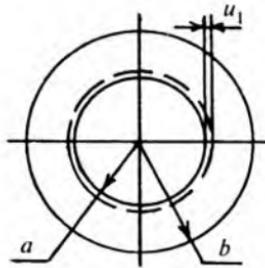


Рис. 14.14

Решив систему алгебраических уравнений и определив постоянные C_1 и C_2 , получим формулы

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{u_1 k E}{b[(1-\nu)k^2 + (1+\nu)]} \left(1 - \frac{1}{\rho^2} \right), \\ \sigma_\theta &= \frac{u_1 k E}{b[(1-\nu)k^2 + (1+\nu)]} \left(1 + \frac{1}{\rho^2} \right), \\ u &= \frac{u_1 k}{(1-\nu)k^2 + (1+\nu)} \left[(1-\nu)\rho + \frac{1+\nu}{\rho} \right], \end{aligned}$$

где $\rho = r/b$, $k = a/b$.

Считая, что цилиндр находится в условиях плоской деформации, выполним числовой расчет при $k = 15/25 = 0,6$, $E_1 = 2,31 \times 10^4$ кН/см² и $\nu_1 = 0,43$. Эпюры напряжений и радиальных перемещений приведены на рис. 14.15. Ординаты величин вычислены при $\rho = 0,6, 0,8$ и $1,0$.

Определим нормальное напряжение σ_z в точках внутренней поверхности цилиндра:

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) = 0,3(-6,03 + 12,8) = 2,03 \text{ кН/см}^2.$$

Приняв значения главных напряжений в точках внутренней поверхности цилиндра $\sigma_1 = \sigma_\theta = 12,8$ кН/см², $\sigma_2 = \sigma_z = 2,03$ кН/см²

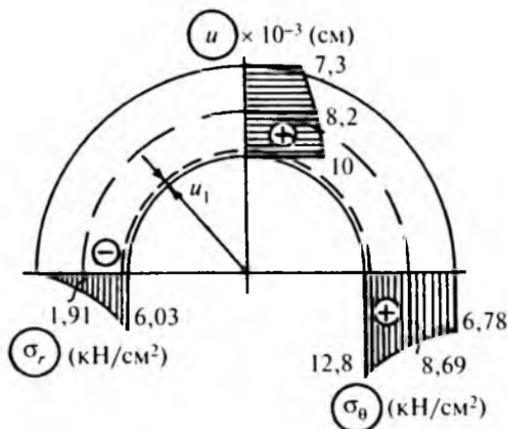


Рис. 14.15

и $\sigma_3 = \sigma_r = -6,03 \text{ кН/см}^2$, выполним проверку выполнения условия прочности по энергетической теории:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(12,8 - 2,03)^2 + [2,03 - (-6,03)]^2 + (-6,03 - 12,8)^2} =$$

$$= 16,4 \text{ кН/см}^2 < [\sigma] = 18 \text{ кН/см}^2.$$

Условие прочности выполняется.

Глава 15

ИЗГИБ ПЛАСТИН

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Тонкими пластинами или тонкими плитами (рис. 15.1) принято называть конструктивные элементы, у которых один размер (толщина h) значительно меньше двух других характерных размеров (длины сторон пластины). Поперечная нагрузка $q(x, y)$ вызывает изгиб пластины, который сопровождается появлением поперечных перемещений или прогибов $w(x, y)$. Задача расчета пластин при изгибе в большинстве случаев сводится к определению прогибов при выполнении соответствующих граничных (краевых) условий.

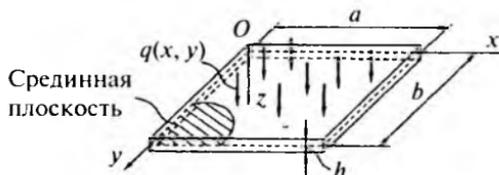


Рис. 15.1

Наиболее просто задача расчета пластин решается в рамках так называемой технической теории, которая используется при следующих соотношениях:

$$\frac{h}{a} = \frac{1}{5} + \frac{1}{80}, \quad w_{\text{пгб}} \leq \frac{h}{4},$$

где a — длина меньшей из сторон пластины.

Техническая теория изгиба пластин базируется на упрощающих расчет гипотезах, которые по существу являются обобщением известных из сопротивления материалов гипотез теории изгиба стержней.

Основным уравнением технической теории изгиба пластин является уравнение Софи Жермен — Лагранжа, которое в декартовой системе координат имеет следующий вид:

$$D\nabla^2\nabla^2w(x, y) = q(x, y) \quad (15.1)$$

или

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) = q(x, y), \quad (15.2)$$

где D — жесткость пластины при изгибе, определяемая по формуле

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}. \quad (15.3)$$

В общем случае изгиба в пластине возникают пять внутренних усилий — изгибающие моменты M_x , M_y , крутящий момент $M_{xy} = M_{yx} = H$ и поперечные силы Q_x , Q_y (рис. 15.2, а, б, в).

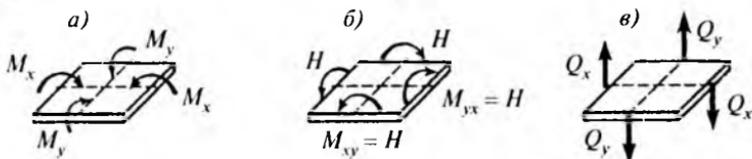


Рис. 15.2

Внутренние выражаются через прогиб по формулам

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ H &= -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\ Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w, \quad Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w. \end{aligned} \right\} \quad (15.4)$$

Внутренние усилия относятся к единице длины координатных линий. При этом изгибающие и крутящий моменты имеют размерность кНсм/см, а поперечные силы — кН/см и т.п.

Внутренние усилия и распределенная нагрузка $q(x, y)$ связаны между собой следующими дифференциальными зависимостями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} &= Q_x, \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} &= Q_y, \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} &= -q. \end{aligned} \right\} \quad (15.5)$$

Внутренние усилия являются равнодействующими нормальных и касательных напряжений в сечениях пластины, перпендикулярных к срединной плоскости (рис. 15.3). Нормальные напряжения σ_x и σ_y и касательные напряжения $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ изменяются по толщине пластины по линейному закону и имеют наибольшие значения при $z = \pm h/2$. Касательные напряжения τ_{xz} и τ_{yz} изменяются по толщине по квадратичному закону и имеют наибольшие значения в точках на уровне срединной плоскости ($z = 0$). Эпюры напряжений приведены в задаче 15.1.

Напряжение σ_z , характеризующее взаимное давление между продольными слоями пластины, в большинстве случаев значительно меньше остальных напряжений и в силу этого не учитывается.

Функция прогиба пластины должна удовлетворять граничным условиям, которые зависят от характера закрепления и нагружения пластины. Рассмотрим три основных типа граничных условий для прямоугольных пластин.

Жестко защемленные края (рис. 15.4)

$$x = 0, \quad w = 0, \quad \varphi_x = \frac{\partial w}{\partial x} = 0;$$

$$y = 0, \quad w = 0, \quad \varphi_y = \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

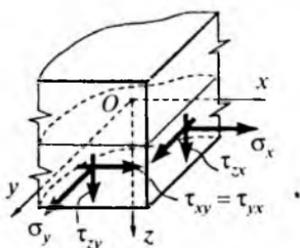


Рис. 15.3

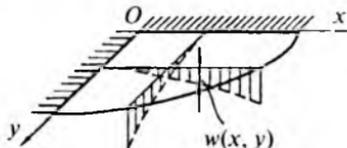


Рис. 15.4

Шарнирно-опертые края (рис. 15.5)

Шарнирное закрепление обозначается с помощью пунктирных линий, параллельных сторонам пластины.

$$x = 0, \quad w = 0, \quad M_x = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = m_x,$$

$$y = 0, \quad w = 0, \quad M_y = -D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

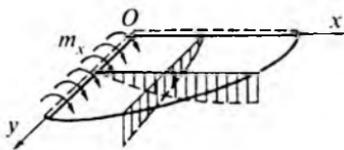


Рис. 15.5

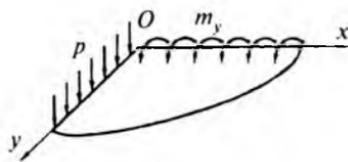


Рис. 15.6

Свободные от закреплений края (рис. 15.6)

$$x = 0, \quad M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0,$$

$$V_x = Q_x + \frac{\partial H}{\partial y} = -p,$$

$$y = 0, \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = m_y,$$

$$V_y = Q_y + \frac{\partial H}{\partial x} = 0.$$

В приведенных формулах φ_x и φ_y — углы наклона нормали к срединной плоскости пластины, V_x, V_y — приведенные поперечные силы и m_x, m_y, p — распределенные краевые нагрузки.

Расчет пластин на прочность производится в точках верхней и нижней поверхностей пластины при $z = \pm h/2$, где напряжения σ_x , σ_y и τ_{xy} имеют наибольшие значения. Влияние на прочность напряжений τ_{xz} , τ_{zy} и σ_z , как правило, не учитывается. Условие прочности по энергетической теории имеет следующий вид:

$$\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \leq \gamma_c R. \quad (15.6)$$

При расчете пластин на жесткость требуется выполнение условия

$$\frac{w_{нб}}{a} \leq \frac{1}{100} + \frac{1}{200},$$

где a — меньший из размеров пластины в плане.

При расчете круглых и кольцевых пластин удобно использовать полярную систему координат (рис. 15.7). Дифференциальное уравнение изгиба пластины имеет следующий вид:

$$D \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = q(r, \theta). \quad (15.7)$$

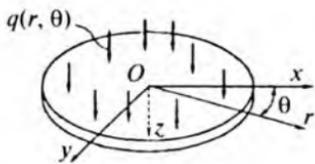


Рис. 15.7

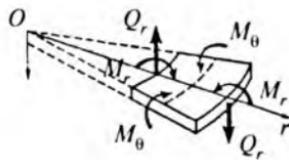


Рис. 15.8

Наиболее просто решаются задачи осесимметричного изгиба круглых и кольцевых пластин, при котором нагрузка и условия закрепления не зависят от полярного угла θ . В этом случае дифференциальное уравнение изгиба пластины имеет вид:

$$D \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = q(r). \quad (15.8)$$

Общее решение этого уравнения определяется по формуле

$$w(r) = C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 r^2 \ln r + w^*(r), \quad (15.9)$$

где C_1, C_2, C_3 и C_4 — постоянные интегрирования и $w^*(r)$ — частное решение дифференциального уравнения, которое для равномерно распределенной нагрузки $q = \text{const}$ имеет следующий вид:

$$w^*(r) = \frac{qr^4}{64D}. \quad (15.10)$$

При осесимметричном изгибе в пластине возникают только три внутренних усилия — радиальный и кольцевой (окружной) изгибающие моменты M_r, M_θ и радиальная поперечная сила Q_r (рис. 15.8).

Внутренние усилия определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right), \\ M_\theta &= -D \left(\nu \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right), \\ Q_r &= -D \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right). \end{aligned} \right\} \quad (15.11)$$

Эти внутренние усилия являются равнодействующими напряжений σ_r, σ_θ и $\tau_{rz} = \tau_{rz}$. Характер изменения этих напряжений по толщине пластины показан в задаче 15.4.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 15.1

Стальная прямоугольная шарнирно-опертая пластина (рис. 15.9) находится под действием распределенной поперечной нагрузки, изменяющейся по закону $q(x, y) = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$.

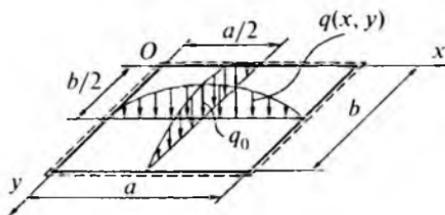


Рис. 15.9

Определим внутренние усилия и напряжения в пластине и построим их эпюры. Определим толщину пластины из условий прочности и жесткости. В расчетах примем: $a = 150$ см, $b = 120$ см, $q_0 = 0,01$ кН/см², $E = 2,1 \cdot 10^4$ кН/см², $\nu = 0,3$, $\gamma_c = 1,0$, $\gamma_f = 1,0$, $R = 21$ кН/см², $w_{н\bar{\sigma}}/b \leq 1/200$ (b — длина меньшей стороны).

Под действием заданной нагрузки прогиб пластины также изменяется по одной полуволне синусоиды вдоль координатных линий:

$$w(x, y) = w_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

При этом граничные условия шарнирного опирания выполняются точно:

$$x = 0, \quad x = a, \quad w = 0, \quad M_x = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,$$

$$y = 0, \quad y = b, \quad w = 0, \quad M_y = -D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Подставив выражения для прогиба и нагрузки в дифференциальное уравнение изгиба пластины (15.2), получим

$$w_0 = \frac{q_0}{D\pi^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2}.$$

Определим внутренние усилия в пластине:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{q_0 \left(\frac{1}{a^2} + \nu \frac{1}{b^2} \right)}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b},$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \frac{q_0 \left(\frac{1}{b^2} + \nu \frac{1}{a^2} \right)}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b},$$

$$H = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{q_0(1 - \nu)}{\pi^2 ab \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b},$$

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w = -\frac{q_0}{\pi a \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b},$$

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w = -\frac{q_0}{\pi b \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}.$$

Характер эпюр прогиба и внутренних усилий показан на рис. 15.10.

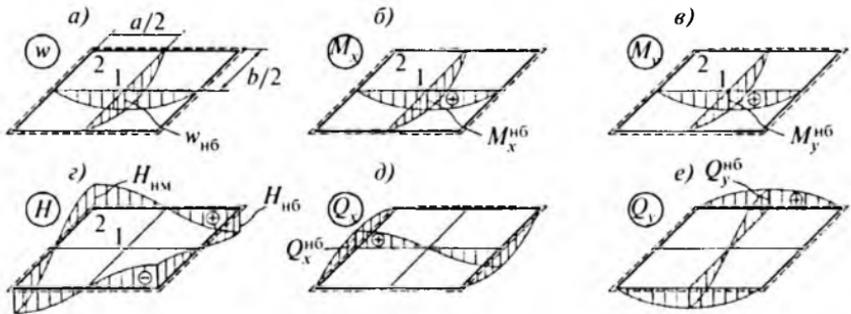


Рис. 15.10

Наибольшие значения прогиб и изгибающие моменты имеют в середине пластины ($x = a/2$, $y = b/2$), а крутящий момент — в угловых точках. Поперечные силы имеют наибольшие значения в серединах сторон.

Определим числовые значения наибольших внутренних усилий:

$$M_x^{нб} = \frac{0,01 \left(\frac{1}{150^2} + 0,3 \frac{1}{120^2} \right)}{\pi^2 \left(\frac{1}{150^2} + \frac{1}{120^2} \right)^2} \cdot 1 \cdot 1 = 5,1 \text{ кНсм/см},$$

$$M_y^{нб} = \frac{0,01 \left(\frac{1}{120^2} + 0,3 \frac{1}{150^2} \right)}{\pi^2 \left(\frac{1}{150^2} + \frac{1}{120^2} \right)^2} \cdot 1 \cdot 1 = 6,47 \text{ кНсм/см},$$

$$H_{нб} = |H_{нм}| = \frac{0,01 \cdot (1 - 0,3)}{\pi^2 \cdot 150 \cdot 120 \left(\frac{1}{150^2} + \frac{1}{120^2} \right)^2} \cdot 1 \cdot 1 = 3,04 \text{ кНсм/см},$$

$$Q_x^{нб} = \frac{0,01}{\pi \cdot 150 \left(\frac{1}{150^2} + \frac{1}{120^2} \right)} \cdot 1 \cdot 1 = 0,186 \text{ кН/см},$$

$$Q_y^{нб} = \frac{0,01}{\pi \cdot 120 \left(\frac{1}{150^2} + \frac{1}{120^2} \right)} \cdot 1 \cdot 1 = 0,233 \text{ кН/см}.$$

Определим толщину пластины h из условия прочности по энергетической теории. Опасными в смысле прочности являются точки 1 и 2. В этих точках изгибающие и крутящий моменты имеют наибольшие значения, а поперечные силы равны нулю.

Выразив наибольшие значения напряжений σ_x , σ_y и $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ через M_x , M_y и H и используя формулу (15.6), получим

$$h \geq \sqrt{\frac{6}{R\gamma_c}} \sqrt{M_x^2 + M_y^2 - M_x M_y + 3H^2}. \quad (15.12)$$

Подставив в (15.12) наибольшие значения внутренних усилий, найдем:

Точка 1 ($x = a/2$, $y = b/2$)

$$h \geq \sqrt{\frac{6}{21 \cdot 1,0}} \sqrt{5,1^2 + 6,47^2 - 5,1 \cdot 6,47} = 1,3 \text{ см}.$$

Точка 2 ($x = 0$, $y = 0$)

$$h \geq \sqrt{\frac{6}{21 \cdot 1,0}} \sqrt{3 \cdot 3,04^2} = 1,23 \text{ см}.$$

Определим толщину пластины из условия жесткости, согласно которому наибольший прогиб $w_{нб}$ в середине пластины не должен превышать величину $b/200$, где b — меньший из размеров сторон пластины:

$$w_{нб} = w_0 = \frac{q_0}{D\pi^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \leq \frac{b}{200} = 0,6 \text{ см.}$$

Учитывая выражение (15.3) для жесткости, получим

$$h \geq \sqrt[3]{\frac{12(1 - 0,3^2) \cdot 0,01}{2,1 \cdot 10^4 \cdot \pi^4 \cdot 0,6 \left(\frac{1}{150^2} + \frac{1}{120^2} \right)^2}} = 1,899 \text{ см.}$$

Примем с округлением большую толщину $h = 1,9$ см.

Определим напряжения в точке с координатами $x = a/4$, $y = b/4$. В этой точке все внутренние усилия отличны от нуля и равны половине наибольших. Наибольшие значения напряжений равны

$$\sigma_x^{нб} = \frac{6M_x}{h^2} = \frac{6 \cdot 0,5 \cdot 5,1}{1,9^2} = 4,24 \text{ кН/см}^2 = 42,4 \text{ МПа,}$$

$$\sigma_y^{нб} = \frac{6M_y}{h^2} = \frac{6 \cdot 0,5 \cdot 6,47}{1,9^2} = 5,38 \text{ кН/см}^2 = 53,8 \text{ МПа,}$$

$$\tau_{xy}^{нб} = \frac{6H}{h^2} = \frac{6 \cdot 0,5 \cdot 3,04}{1,9^2} = 2,53 \text{ кН/см}^2 = 25,3 \text{ МПа,}$$

$$\tau_{zx}^{нб} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_x}{h} = \frac{3}{2} \cdot \frac{0,5 \cdot 0,186}{1,9} = 0,073 \text{ кН/см}^2 = 0,73 \text{ МПа,}$$

$$\tau_{zy}^{нб} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_y}{h} = \frac{3}{2} \cdot \frac{0,5 \cdot 0,233}{1,9} = 0,092 \text{ кН/см}^2 = 0,92 \text{ МПа.}$$

Эпюры напряжений в данной точке приведены на рис. 15.11.

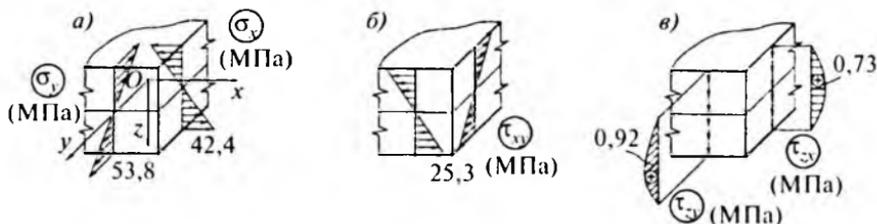


Рис. 15.11

Задача 15.2

Стальная прямоугольная шарнирно-опертая пластина находится под действием равномерно распределенной нагрузки $q = \text{const}$ (рис. 15.12).

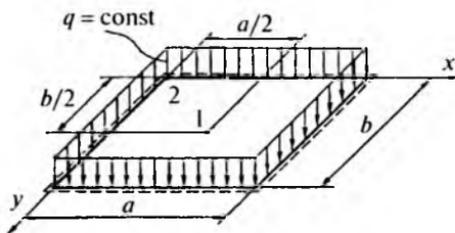


Рис. 15.12

Определим внутренние усилия и напряжения в пластине и выполним расчет пластины на прочность и жесткость. В расчетах примем: $a = 50$ см, $b = 80$ см, $q = 0,02$ кН/см², $E = 2,1 \cdot 10^4$ кН/см², $\nu = 0,3$, $\gamma_c = 1,0$, $\gamma_f = 1,0$, $R = 21$ кН/см², $w_{\text{нб}}/a \leq 1/200$ (a — длина меньшей стороны пластины).

При действии на шарнирно-опертую прямоугольную пластину произвольных поперечных нагрузок задачу расчета можно решить с помощью двойных тригонометрических рядов. Искомый прогиб пластины необходимо представить в виде ряда по синусам:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots). \quad (15.13)$$

Такое представление прогиба обеспечивает точное выполнение граничных условий шарнирного опирания.

Произвольная распределенная поперечная нагрузка должна быть также разложена в двойной тригонометрический ряд по синусам.

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (15.14)$$

При распределении нагрузки по всей площади пластины имеем

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (15.15)$$

После подстановки выражений (15.13) и (15.14) в дифференциальное уравнение изгиба пластины (15.2) получим формулу для коэффициентов w_{mn} :

$$w_{mn} = \frac{q_{mn}}{D\pi^4 \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2}. \quad (15.16)$$

При действии равномерно распределенной нагрузки $q = \text{const}$ индексы m и n могут быть только нечетными числами ($m, n = 1, 3, 5, \dots$). После интегрирования по формуле (15.15) получим

$$q_{mn} = \frac{16q}{\pi^2 mn}. \quad (15.17)$$

Таким образом, прогиб пластины, а также внутренние усилия выражаются в виде бесконечных тригонометрических рядов. Сходимость ряда для прогиба является достаточно хорошей при действии любой поперечной нагрузки, в том числе и сосредоточенной или распределенной по линии (полосовая нагрузка). Сходимость рядов для внутренних усилий хуже, чем сходимость ряда для прогиба. В точках приложения сосредоточенных сил ряды для внутренних усилий становятся расходящимися.

Выполним числовой расчет данного примера, используя четыре члена рядов ($m = 1, 3, n = 1, 3$). Определим наибольший прогиб пластины в ее середине при $x = a/2$ и $y = b/2$.

$$\begin{aligned} w_{\text{нб}} &= \frac{16qa^4}{D\pi^6} \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \frac{\sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}}{mn(m^2 + k^2 n^2)^2} = \\ &= \frac{16 \cdot 0,02 \cdot 50^4}{D\pi^6} \left[\frac{1 \cdot 1}{1 \cdot 1 \cdot (1^2 + 0,625^2 \cdot 1^2)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-1) \cdot 1}{3 \cdot 1 \cdot (3^2 + 0,625^2 \cdot 1^2)^2} + \frac{1 \cdot (-1)}{1 \cdot 3 \cdot (1^2 + 0,625^2 \cdot 3^2)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-1) \cdot (-1)}{3 \cdot 3 \cdot (3^2 + 0,625^2 \cdot 3^2)^2} \right] = \frac{1035,4}{D}, \end{aligned}$$

где $k = a/b = 50/80 = 0,625$.

Наибольшие изгибающие моменты в середине пластины равны

$$\begin{aligned}
 M_x^{н6} &= \frac{16qa^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \frac{(m^2 + \nu k^2 n^2) \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}}{mn(m^2 + k^2 n^2)^2} = \\
 &= \frac{16 \cdot 0,02 \cdot 50^2}{\pi^4} \left[\frac{(1^2 + 0,3 \cdot 0,625^2 \cdot 1^2) \cdot 1 \cdot 1}{1 \cdot 1 \cdot (1^2 + 0,625^2 \cdot 1^2)^2} + \right. \\
 &+ \frac{(3^2 + 0,3 \cdot 0,625^2 \cdot 1^2) \cdot (-1) \cdot 1}{3 \cdot 1 \cdot (3^2 + 0,625^2 \cdot 1^2)^2} + \frac{(1^2 \cdot 0,3 \cdot 0,625^2 \cdot 3^2) \cdot 1 \cdot (-1)}{1 \cdot 3 \cdot (1^2 + 0,625^2 \cdot 3^2)^2} + \\
 &\left. + \frac{(3^2 + 0,3 \cdot 0,625^2 \cdot 3^2) \cdot (-1) \cdot (-1)}{3 \cdot 3 \cdot (3^2 + 0,625^2 \cdot 3^2)^2} \right] = 4,24 \text{ кНсм/см};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_y^{н6} &= \frac{16qa^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \frac{(\nu m^2 + k^2 n^2) \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}}{mn(m^2 + k^2 n^2)^2} = \\
 &= \frac{16 \cdot 0,02 \cdot 50^2}{\pi^4} \left[\frac{(0,3 \cdot 1^2 + 0,625^2 \cdot 1^2) \cdot 1 \cdot 1}{1 \cdot 1 \cdot (1^2 + 0,625^2 \cdot 1^2)^2} + \right. \\
 &+ \frac{(0,3 \cdot 3^2 + 0,625^2 \cdot 1^2) \cdot (-1) \cdot 1}{3 \cdot 1 \cdot (3^2 + 0,625^2 \cdot 1^2)^2} + \\
 &+ \frac{(0,3 \cdot 1^2 + 0,625^2 \cdot 3^2) \cdot 1 \cdot (-1)}{1 \cdot 3 \cdot (1^2 + 0,625^2 \cdot 3^2)^2} + \\
 &\left. + \frac{(0,3 \cdot 3^2 + 0,625^2 \cdot 3^2) \cdot (-1) \cdot (-1)}{3 \cdot 3 \cdot (3^2 + 0,625^2 \cdot 3^2)^2} \right] = 2,36 \text{ кНсм/см}.
 \end{aligned}$$

Крутящий момент имеет наибольшее значение в углах пластины при $x = 0, y = 0$ и $x = a, y = b$.

$$\begin{aligned}
 H_{н6} &= |H_{нм}| = \frac{16q(1-\nu)ka^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \frac{1}{(m^2 + k^2 n^2)^2} = \\
 &= \frac{16 \cdot 0,02 \cdot (1 - 0,3) \cdot 0,625 \cdot 50^2}{\pi^4} \left[\frac{1}{(1^2 + 0,625^2 \cdot 1^2)^2} + \right. \\
 &+ \frac{1}{(3^2 + 0,625^2 \cdot 1^2)^2} + \frac{1}{(1^2 + 0,625^2 \cdot 3^2)^2} + \\
 &\left. + \frac{1}{(3^2 + 0,625^2 \cdot 3^2)^2} \right] = 2,1 \text{ кНсм/см}.
 \end{aligned}$$

Поперечные силы имеют наибольшие значения в серединах сторон пластины.

$$Q_x^{нб} = \frac{16qa}{\pi^3} \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n(m^2 + k^2 n^2)} = \frac{16 \cdot 0,02 \cdot 50}{\pi^3} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{1 \cdot (1^2 + 0,625^2 \cdot 1^2)} + \frac{1}{1 \cdot (3^2 + 0,625^2 \cdot 1^2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{(-1)}{3 \cdot (1^2 + 0,625^2 \cdot 3^2)} + \frac{(-1)}{3 \cdot (3^2 + 0,625^2 \cdot 3^2)} \right] = 0,374 \text{ кН/см};$$

$$Q_y^{нб} = \frac{16qka}{\pi^3} \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{m(m^2 + k^2 n^2)} = \frac{16 \cdot 0,02 \cdot 0,625 \cdot 50}{\pi^3} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{1 \cdot (1^2 + 0,625^2 \cdot 1^2)} + \frac{(-1)}{3 \cdot (3^2 + 0,625^2 \cdot 1^2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{1 \cdot (1^2 + 0,625^2 \cdot 3^2)} + \frac{(-1)}{3 \cdot (3^2 + 0,625^2 \cdot 3^2)} \right] = 0,283 \text{ кН/см}.$$

Определим толщину пластины из условия прочности по энергетической теории.

Точка 1 ($x = a/2, y = b/2, z = \pm h/2$)

$$h \geq \sqrt{\frac{6}{R\gamma_c} \sqrt{M_x^2 + M_y^2 - M_x M_y}} =$$

$$= \sqrt{\frac{6}{21 \cdot 1,0} \sqrt{4,24^2 + 2,36^2 - 4,24 \cdot 2,36}} = 1,03 \text{ см};$$

Точка 2 ($x = 0, y = 0, z = \pm h/2$)

$$h \geq \sqrt{\frac{6}{R\gamma_c} \sqrt{3H^2}} = \sqrt{\frac{6}{21 \cdot 1,0} \sqrt{3 \cdot 2,1^2}} = 1,02 \text{ см}.$$

Потребуем выполнения условия жесткости пластины.

$$w_{нб} = \frac{1035,4}{D} = \frac{12(1 - \nu^2) \cdot 1035,4}{Eh^3} \leq \frac{a}{200} = 0,25 \text{ см}.$$

$$h \geq \sqrt[3]{\frac{12(1 - 0,3^2) \cdot 1035,4}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 0,25}} = 1,29 \text{ см}.$$

Примем с округлением большую толщину $h = 1,3 \text{ см}$.

Задача 15.3

Для прямоугольной пластины с шарнирно-опертыми краями $x = 0$, $x = a$ и жестко закрепленными краями $y = \pm b/2$, находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки (рис. 15.13), требуется определить функцию прогиба. Для частного случая $a = b = 100$ см, $q = 0,03$ кН/см² определить толщину пластины из условия жесткости, приняв $w_{\text{нб}}/a \leq 1/150$. В расчетах принять $E = 2,1 \cdot 10^4$ кН/см², $\nu = 0,3$.

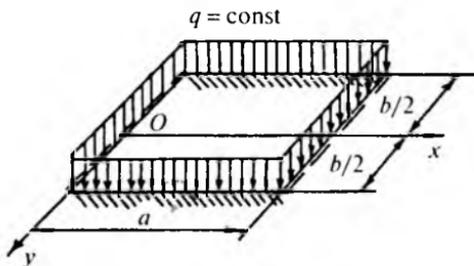


Рис. 15.13

Для прямоугольной пластины с противоположными шарнирно-опертыми краями $x = 0$, $x = a$ искомым прогиб представим в виде следующего тригонометрического ряда:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (15.18)$$

где $m = 1, 2, 3, \dots$

При таком задании прогиба граничные условия на шарнирно-опертых краях выполняются точно:

$$x = 0, \quad x = a, \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

Функция $w_m(y)$ характеризует изменение прогиба в направлении оси Oy . Для определения этой функции разложим заданную поперечную нагрузку в аналогичный (15.18) тригонометрический ряд:

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (15.19)$$

$$\text{где } q_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} dx. \quad (15.20)$$

При действии равномерно распределенной нагрузки $q = \text{const}$ по всей площади пластины получим

$$q_m = \frac{2q}{a} \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} dx = \frac{4q}{m\pi}, \quad (15.21)$$

где $m = 1, 3, 5, \dots$

Подставив ряды для прогиба и нагрузки в дифференциальное уравнение изгиба пластины (15.2) и сократив обе части на $\sin \lambda_m x$, получим обыкновенное дифференциальное уравнение 4-го порядка относительно функции $w_m(y)$:

$$w_m^{IV} - 2\lambda_m^2 w_m'' + \lambda_m^4 w_m = \frac{q_m}{D}, \quad (15.22)$$

где $\lambda_m = m\pi/a$.

Записав общее решение этого уравнения, получим выражение для прогиба пластины в виде следующего ряда:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} [C_{1m} \text{ch } \lambda_m y + C_{2m} \text{sh } \lambda_m y + C_{3m} y \text{ch } \lambda_m y + C_{4m} y \text{sh } \lambda_m y + w_m^*(y)] \sin \lambda_m x, \quad (15.23)$$

где $C_{1m}, C_{2m}, C_{3m}, C_{4m}$ — постоянные интегрирования, подлежащие определению из граничных условий на краях $y = \pm b/2$, $w_m^*(y)$ — частное решение уравнения (15.22). Для равномерно-распределенной нагрузки $q = \text{const}$ частное решение имеет следующий вид:

$$w_{m*} = \frac{4q}{m\pi D \lambda_m^4}. \quad (15.24)$$

Рассмотрим частный случай жестко закрепленных краев пластины $y = \pm b/2$. В силу очевидной симметрии изогнутой срединной поверхности пластины относительно вертикальной плоскости, проходящей через ось Ox , в выражении (15.23) надо удержать только четные функции переменной y и отбросить нечетные функции, положив постоянные C_{2m} и C_{3m} , равными нулю. Таким образом, получим

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(C_{1m} \text{ch } \lambda_m y + C_{4m} y \text{sh } \lambda_m y + \frac{4q}{m\pi D \lambda_m^4} \right) \sin \lambda_m x,$$

где $m = 1, 3, 5, \dots$

Постоянные интегрирования C_{1m} и C_{4m} подлежат определению из граничных условий на заземленных краях пластины

$$y = \pm b/2, \quad w = 0, \quad \varphi_y = \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Используя эти условия, получим систему двух алгебраических уравнений для каждой пары постоянных с одинаковым индексом m :

$$\left. \begin{aligned} C_{1m} \operatorname{ch} \beta_m + C_{4m} \frac{b}{2} \operatorname{sh} \beta_m + \frac{4q}{m\pi D \lambda_m^4} &= 0, \\ \lambda_m C_{1m} \operatorname{sh} \beta_m + C_{4m} \left(\operatorname{sh} \beta_m + \frac{b}{2} \operatorname{ch} \beta_m \right) &= 0, \end{aligned} \right\}$$

где $\beta_m = \frac{b}{2} \lambda_m = \frac{m\pi b}{2a}$.

Решив эту систему и определив постоянные C_{1m} и C_{4m} , получим следующее выражение для прогиба пластин:

$$w(x, y) = \frac{4qa^4}{D\pi^5} \sum_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda_m y \operatorname{sh} \lambda_m y \operatorname{sh} \beta_m - A_m \operatorname{ch} \lambda_m y}{\beta_m + \operatorname{sh} \beta_m \operatorname{ch} \beta_m} \right) \frac{\sin \lambda_m x}{m^5},$$

где $A_m = \operatorname{sh} \beta_m + \beta_m \operatorname{ch} \beta_m$.

Внутренние усилия в пластине (15.4) также выражаются в виде бесконечных рядов, однако их выражения являются достаточно громоздкими.

Для частного случая квадратной пластины со стороной a наибольший прогиб в середине ($x = a/2, y = 0$) выражается следующим числовым рядом:

$$w_{\text{нб}} = \frac{4qa^4}{D\pi^5} \sum_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} + \frac{m\pi}{2} \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}}{\frac{m\pi}{2} + \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}} \right) \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{m^5}.$$

Ряды для прогиба сходятся очень быстро в любой точке пластины. Например, для наибольшего прогиба при двух членах ряда ($m = 1, 3$) получим

$$w_{\text{нб}} = \frac{4qa^4}{D\pi^5} \left[\left(1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \operatorname{ch} \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2} + \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} \operatorname{ch} \frac{\pi}{2}} \right) \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{1^5} + \right.$$

$$+ \left[1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} \operatorname{ch} \frac{3\pi}{2}}{\frac{3\pi}{2} + \operatorname{sh} \frac{3\pi}{2} \operatorname{ch} \frac{3\pi}{2}} \right] \frac{\sin \frac{3\pi}{2}}{3^5} = 1,914 \cdot 10^{-3} \frac{qa^4}{D}.$$

Точное значение, приведенное в справочниках, равно

$$w_{\text{нб}} = 1,92 \cdot 10^{-3} \frac{qa^4}{D}.$$

Относительная погрешность составляет $\Delta\% = 0,3\%$. Определим толщину пластины из условия жесткости при заданных числовых значениях:

$$w_{\text{нб}} = 1,914 \cdot 10^{-3} \frac{qa^4}{D} \leq \frac{a}{150} = \frac{100}{150} = 0,667 \text{ см.}$$

$$h \geq \sqrt[3]{\frac{12 \cdot 0,03 \cdot 100^4 (1 - 0,3^2) \cdot 0,001914}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 0,667}} = 1,65 \text{ см.}$$

Задача 15.4

Для стальной кольцевой пластины, находящейся в условиях осесимметричного изгиба под действием показанной на рис. 15.14 распределенной нагрузки, построим эпюры внутренних усилий и прогиба. Определим толщину пластины из условий прочности и жесткости. Построим эпюры напряжений в одном из опасных сечений.

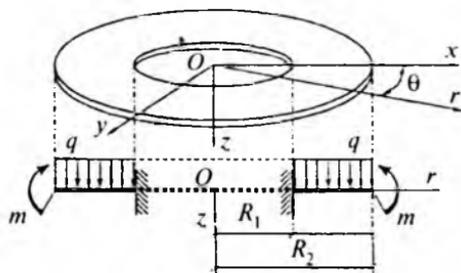


Рис. 15.14

В расчетах примем: $E = 2,1 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$, $\nu = 0,3$, $\gamma_c = \gamma_f = 1,0$, $R = 21 \text{ кН/см}^2$, $R_1 = 30 \text{ см}$, $R_2 = 60 \text{ см}$, $q = 0,01 \text{ кН/см}^2$, $m = 3 \text{ кНсм/см}$, $w_{\text{нб}} \leq R_1/100$.

Прогиб, угол поворота нормали и внутренние усилия в пластине определяются по формулам

$$w(r) = C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 r^2 \ln r + \frac{qr^4}{64D},$$

$$\varphi_r = \frac{dw}{dr} = C_2 \frac{1}{r} + 2C_3 r + C_4 r(2 \ln r + 1) + \frac{qr^3}{16D},$$

$$M_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \nu \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = -D \left[-C_2(1-\nu) \frac{1}{r^2} + 2C_3(1+\nu) + 2C_4(1+\nu) \ln r + C_4(3+\nu) + \frac{qr^2}{16D}(3+\nu) \right],$$

$$M_\theta = -D \left(\nu \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = -D \left[C_2(1-\nu) \frac{1}{r^2} + 2C_3(1+\nu) + 2C_4(1+\nu) \ln r + C_4(1+3\nu) + \frac{qr^2}{16D}(1+3\nu) \right],$$

$$Q_r = -D \frac{d}{dr} \nabla^2 w = -D \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = -D \left(4C_4 \frac{1}{r} + \frac{qr}{2D} \right).$$

Для определения постоянных интегрирования используем граничные условия:

$$r = R_1, \quad w = 0, \quad \varphi_r = 0;$$

$$r = R_2, \quad M_r = m, \quad Q_r = 0.$$

Вначале используем граничное условие относительно поперечной силы:

$$Q_r(R_2) = -D \left(4C_4 \frac{1}{R_2} + \frac{qR_2}{2D} \right) = 0; \quad C_4 = -\frac{qR_2^2}{8D}.$$

Для определения постоянных C_2 и C_3 используем граничные условия относительно φ_r и M_r :

$$\varphi_r(R_1) = C_2 \frac{1}{R_1} + 2C_3 R_1 + C_4 R_1(2 \ln R_1 + 1) + \frac{qR_1^3}{16D} = 0,$$

$$M_r(R_2) = -D \left[-C_2(1-\nu) \frac{1}{R_2^2} + 2C_3(1+\nu) + 2C_4(1+\nu) \ln R_2 + C_4(3+\nu) + \frac{qR_2^2}{16D}(3+\nu) \right] = m.$$

Подставив выражение для C_4 и числовые значения R_1 , R_2 , q , m и ν , получим систему двух алгебраических уравнений относительно C_2 и C_3 :

$$\left. \begin{aligned} D(33,3 \cdot 10^{-3} C_2 + 60 C_3) &= 1036, \\ D(0,194 \cdot 10^{-3} C_2 - 2,6 C_3) &= -52,33. \end{aligned} \right\}$$

Решив эту систему, находим

$$C_2 = -\frac{4538}{D}, \quad C_3 = \frac{19,79}{D}.$$

Запишем окончательные выражения для радиального и кольцевого (окружного) изгибающих моментов и радиальной поперечной силы:

$$\begin{aligned} M_r &= -\frac{3177}{r^2} + 11,7 \ln r - 2,06 \cdot 10^{-3} r^2 - 36,6, \\ M_\theta &= \frac{3177}{r^2} + 11,7 \ln r - 1,19 \cdot 10^{-3} r^2 - 42,9, \\ Q_r &= \frac{q(R_2^2 - r^2)}{2r} = \frac{5 \cdot 10^{-3}(3600 - r^2)}{r}. \end{aligned}$$

Определим числовые значения внутренних усилий в сечениях пластины с шагом $a = (R_2 - R_1)/4 = 7,5$ см. Результаты расчета приведены в табл. 15.1.

Таблица 15.1

r , см	M_r , кНсм/см	M_θ , кНсм/см	Q_r , кН/см	wD
30	-2,192	-0,645	0,45	0
37,5	0,645	0,094	0,293	28,63
45	2,192	0,802	0,175	24,63
52,5	2,904	1,321	0,080	-95,43
60	3,0	1,611	0	-367,5

Для определения постоянной C_1 используем граничное условие относительно прогиба на внутреннем жестко защемленном крае пластины:

$$w(R_1) = C_1 + C_2 \ln R_1 + C_3 R_1^2 + C_4 R_1^2 \ln R_1 + \frac{q R_1^4}{64 D} = 0.$$

Отсюда находим

$$C_1 = \frac{11272}{D}.$$

Запишем окончательное выражение для прогиба:

$$w(r) = \frac{1}{D}(11\,272 - 4538 \ln r + 19,79r^2 - 4,5r^2 \ln r + 1,56 \cdot 10^{-4}r^4).$$

Значения прогиба, умноженные на жесткость D , приведены в табл. 15.1. Эпюры внутренних усилий и прогиба приведены на рис. 15.15.

Определим толщину пластины h из условий прочности и жесткости. Опасным в смысле прочности является кольцевое сечение

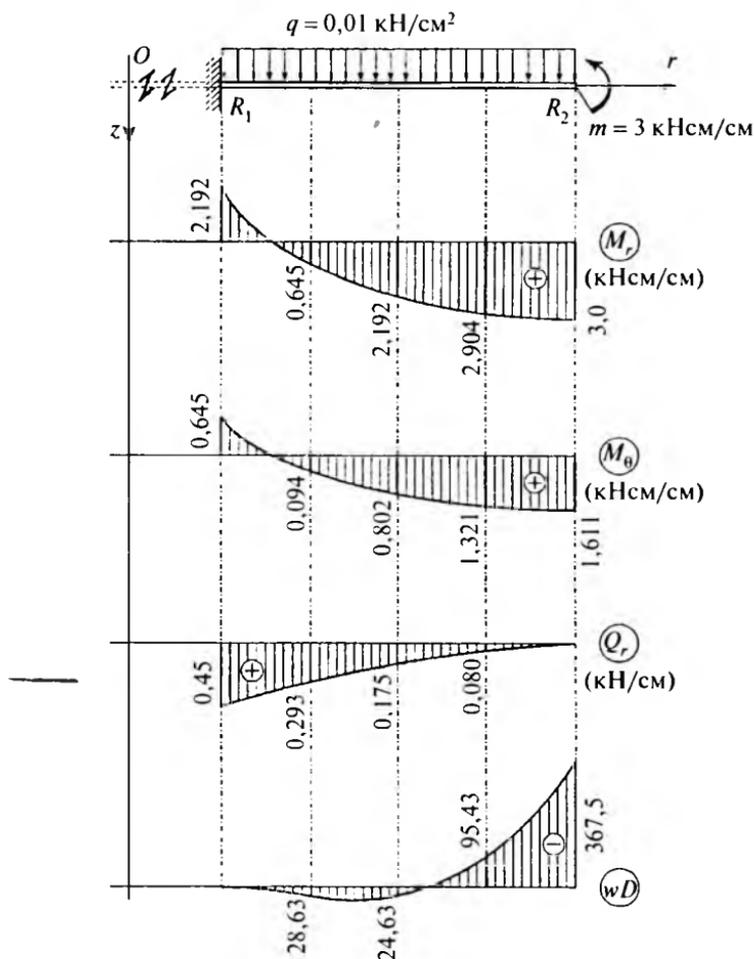


Рис. 15.15

на внешнем крае пластины, где M_r и M_θ имеют наибольшие значения. Используем энергетическую теорию прочности. Условие прочности в точках при $z = \pm h/2$ имеет следующий вид:

$$\sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2} - \sigma_r \sigma_\theta \leq \gamma_c R.$$

Подставив выражения наибольших напряжений через изгибающие моменты, получим

$$\begin{aligned} h &\geq \sqrt{\frac{6}{R\gamma_c} \sqrt{M_r^2 + M_\theta^2} - M_r M_\theta} = \\ &= \sqrt{\frac{6}{21 \cdot 1,0} \sqrt{3^2 + 1,611^2} - 3 \cdot 1,611} = 0,862 \text{ см.} \end{aligned}$$

Поставим условие жесткости на внешнем контуре пластины

$$|w_{\text{нб}}| = \frac{367,5}{D} \leq \frac{R_1}{100} = 0,3 \text{ см.}$$

Используя формулу для жесткости пластины, определим требуемую толщину:

$$h \geq \sqrt[3]{\frac{367,5 \cdot 12(1 - \nu^2)}{E \cdot 0,3}} = \sqrt[3]{\frac{367,5 \cdot 12(1 - 0,3^2)}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 0,3}} = 0,86 \text{ см.}$$

Принимаем с округлением $h = 0,9$ см.

Определим наибольшие нормальные и касательные напряжения в пластине.

Сечение $r = R_2$

$$\sigma_r^{\text{нб}} = \frac{6M_r}{h^2} = \frac{6 \cdot 3}{0,9^2} = 22,2 \text{ кН/см}^2 = 222 \text{ МПа,}$$

$$\sigma_\theta^{\text{нб}} = \frac{6M_\theta}{h^2} = \frac{6 \cdot 1,611}{0,9^2} = 11,9 \text{ кН/см}^2 = 119 \text{ МПа,}$$

$$\tau_{\mathcal{J}} = 0.$$

Сечение $r = R_1$

$$\tau_{\mathcal{J}}^{\text{нб}} = \frac{3Q_r}{2h} = \frac{3}{2} \cdot \frac{0,45}{0,9} = 0,75 \text{ кН/см}^2 = 7,5 \text{ МПа.}$$

Эпюры напряжений приведены на рис. 15.16.

Для кольцевых пластин, закрепленных по обоим краям, определение постоянных интегрирования является более громоздким,

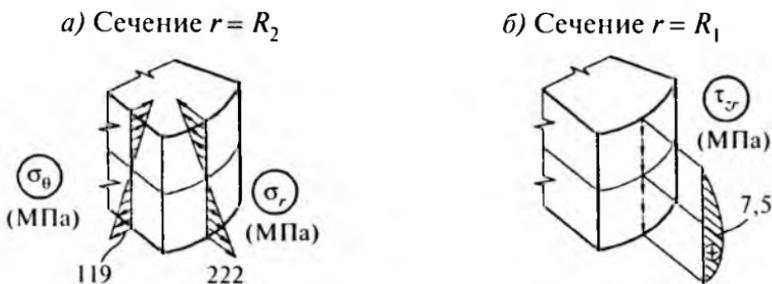


Рис. 15.16

так как необходимо решать систему алгебраических уравнений с тремя или четырьмя неизвестными.

Отметим, что для расчета пластин при действии произвольных нагрузок и с произвольными условиями закрепления широко используются различные численные методы, например метод конечных элементов. Имеются соответствующие программные комплексы для ПЭВМ.

ПРИЛОЖЕНИЕ

СОКРАЩЕННЫЙ СОРТАМЕНТ ПРОКАТНОЙ СТАЛИ

Уголки стальные горячекатаные равнополочные (по ГОСТ 8509-86)

Обозначения:

b — ширина полки;

t — толщина полки;

F — площадь поперечного сечения;

J — осевой момент инерции;

J_{yz}

i

$z_0 = y_0$

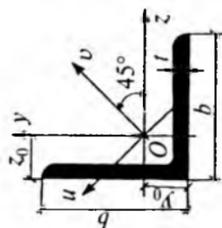
до наружной грани полки.

— центробежный момент инерции;

— радиус инерции;

— расстояния от центра тяжести

до наружной грани полки.



Обозначение уголка $b \times b \times t$, мм	F , см ²	J_z , см ⁴	i_z , см	$J_{y \text{ макс.}}$ см ⁴	$i_{y \text{ макс.}}$ см	$J_{u \text{ мин.}}$ см ⁴	$i_{u \text{ мин.}}$ см	$ J_{yz} $ см ⁴	z_0 , см	Масса 1 м, кг
50 × 50 × 4	3,89	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	5,4	1,38	3,05
50 × 50 × 5	4,80	11,2	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	6,59	1,42	3,77
56 × 56 × 4	4,38	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	7,7	1,52	3,44
56 × 56 × 5	5,41	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	9,41	1,57	4,25
63 × 63 × 4	4,96	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	11,0	1,69	3,90
63 × 63 × 5	6,13	23,1	1,94	36,8	2,44	9,52	1,25	13,6	1,74	4,81
63 × 63 × 6	7,28	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	15,8	1,78	5,72
70 × 70 × 5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	18,7	1,90	5,38
70 × 70 × 6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	22,1	1,94	6,39

Обозначение уголка $b \times b \times l$, мм	F , см ²	J_z , см ⁴	i_z , см	$J_{0 \text{ макс.}}$ см ⁴	$i_{0 \text{ макс.}}$ см	$J_{0 \text{ мин.}}$ см ⁴	$i_{0 \text{ мин.}}$ см	$ J_{yz} $ см ⁴	z_0 , см	Масса I М, кг
75 × 75 × 5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	23,1	2,02	5,80
75 × 75 × 6	8,78	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	27,3	2,06	6,89
75 × 75 × 7	10,1	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	31,3	2,10	7,96
80 × 80 × 5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	30,9	2,17	6,78
80 × 80 × 6	9,38	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	33,5	2,19	7,36
80 × 80 × 7	10,8	65,3	2,45	104	3,09	27,0	1,58	38,5	2,23	8,51
90 × 90 × 6	10,6	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	48,0	2,43	8,33
90 × 90 × 7	12,3	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	55,6	2,47	9,64
90 × 90 × 8	13,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	62,1	2,51	10,9
100 × 100 × 7	13,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	76,4	2,71	10,8
100 × 100 × 8	15,6	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	86,1	2,75	12,2
100 × 100 × 10	19,2	179	3,05	284	3,84	74,1	1,96	105,0	2,83	15,1
100 × 100 × 12	22,8	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	122,0	2,91	17,9
110 × 110 × 7	15,2	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	103	2,96	11,9
110 × 110 × 8	17,2	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	117	3,00	13,5
125 × 125 × 8	19,7	294	3,87	467	4,87	122	2,49	173	3,36	15,5
125 × 125 × 9	22,0	327	3,86	520	4,86	135	2,48	192	3,40	17,3
125 × 125 × 10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	211	3,45	19,1
125 × 125 × 12	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	248	3,53	22,7
140 × 140 × 9	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	274	3,78	19,4
140 × 140 × 10	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	302	3,82	21,5
140 × 140 × 12	32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	354	3,90	25,5

Продолжение

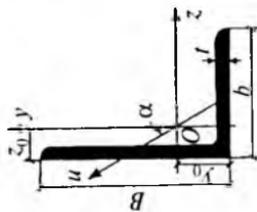
Обозначение Уголка $b \times b \times l$, мм	F , см ²	J_z , см ⁴	i_z , см	J_0 макс, см ⁴	i_0 макс, см	J_0 мин, см ⁴	i_0 мин, см	$ J_{yz} $, см ⁴	z_0 , см	Масса l м, кг
160 × 160 × 10	31,4	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	455	4,30	24,7
160 × 160 × 11	34,4	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	496	4,35	27,0
160 × 160 × 12	37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	537	4,39	29,4
160 × 160 × 14	43,3	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	615	4,47	34,0
160 × 160 × 16	49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	690	4,55	38,5
180 × 180 × 11	38,8	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	716	4,85	30,5
180 × 180 × 12	42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	776	4,89	33,1
200 × 200 × 12	47,1	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	1074	5,37	37,0
200 × 200 × 14	54,6	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	1236	5,46	42,8
220 × 220 × 14	60,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	1656	5,93	47,4
220 × 220 × 16	68,6	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	1870	6,02	53,8
250 × 250 × 16	78,4	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	2775	6,75	61,5
250 × 250 × 20	97,0	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	3395	6,91	76,1

Уголки стальные горячекатаные неравнополочные (по ГОСТ 8510-86)

Обозначения:

B — ширина большей полки;
 b — ширина меньшей полки;
 t — толщина полки;
 F — площадь поперечного сечения;
 J — осевой момент инерции;

J_{yc} — центробежный момент инерции;
 i_{yc} — радиус инерции;
 ζ_0, y_0 — расстояния от центра тяжести до наружной грани полки.



Обозначение уголка $B \times b \times t$, мм	F , см ²	J_z , см ⁴	i_z , см	J_y , см ⁴	i_y , см	J_u мин, см ⁴	i_u мин, см	Угол накло- на осей u к z_0	J_{yc} , см ⁴	ζ_0 , см	y_0 , см	Масса 1 м, кг
50 × 32 × 4	3,17	7,98	1,59	2,56	0,90	1,52	0,69	0,401	2,59	0,76	1,65	2,40
75 × 50 × 5	6,11	34,8	2,39	12,5	1,43	7,24	1,09	0,436	12,0	1,17	2,39	4,79
90 × 56 × 6	8,54	70,6	2,88	21,2	1,58	12,7	1,22	0,384	22,2	1,28	2,95	6,70
100 × 63 × 6	9,59	98,3	3,20	30,6	1,79	18,2	1,38	0,393	31,5	1,42	3,23	7,53
100 × 63 × 7	11,1	113	3,19	35,0	1,78	20,8	1,37	0,392	36,1	1,46	3,28	8,70
100 × 63 × 8	12,6	127	3,18	39,2	1,77	23,4	1,36	0,391	40,5	1,50	3,32	9,87
110 × 70 × 8	13,9	172	3,51	54,6	1,98	32,3	1,52	0,400	55,9	1,64	3,61	10,9
125 × 80 × 7	14,1	227	4,01	73,7	2,29	43,4	1,76	0,407	74,7	1,80	4,01	11,0
125 × 80 × 8	16,0	256	4,00	83,0	2,28	48,8	1,75	0,406	84,1	1,84	4,05	12,5
125 × 80 × 10	19,7	312	3,98	100	2,26	59,3	1,74	0,404	102	1,92	4,14	15,5
140 × 90 × 8	18,0	364	4,49	120	2,58	70,3	1,98	0,411	121	2,03	4,49	14,1
140 × 90 × 10	22,2	444	4,47	146	2,56	85,5	1,96	0,409	147	2,12	4,58	17,5

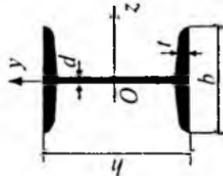
Продолжение

Обозначение уголка $B \times b \times t$, мм	F , см ²	J_z , см ⁴	i_z , см	J_y , см ⁴	i_y , см	J_u мин, см ⁴	i_u мин, см	Угол накло- на оси u , град	$ J_{yz} $, см ⁴	ζ_0 , см	y_0 , см	Масса I M, кг
160 × 100 × 9	22,9	606	5,15	186	2,85	110	2,20	0,391	194	2,23	5,19	18,0
160 × 100 × 10	25,3	667	5,13	204	2,84	121	2,19	0,390	213	2,28	5,23	19,8
160 × 100 × 12	30,0	784	5,11	239	2,82	142	2,18	0,388	249	2,36	5,32	23,6
180 × 110 × 10	28,3	952	5,80	276	3,12	165	2,42	0,375	295	2,44	5,88	22,2
180 × 110 × 12	33,7	1123	5,77	324	3,10	194	2,40	0,374	348	2,52	5,97	26,4
200 × 125 × 11	34,9	1449	6,45	446	3,58	264	2,75	0,392	465	2,79	6,50	27,4
200 × 125 × 12	37,9	1568	6,43	482	3,57	285	2,74	0,392	503	2,83	6,54	29,7
200 × 125 × 14	43,9	1801	6,41	551	3,54	327	2,73	0,390	575	2,91	6,62	34,4
200 × 125 × 16	49,8	2026	6,38	617	3,52	367	2,72	0,388	644	2,99	6,71	39,1
250 × 160 × 12	48,3	3147	8,07	1032	4,62	604	3,54	0,410	1043	3,53	7,97	37,9
250 × 160 × 16	63,6	4091	8,02	1333	4,58	781	3,50	0,408	1351	3,69	8,14	49,9
250 × 160 × 18	71,1	4545	7,99	1475	4,56	866	3,49	0,407	1497	3,77	8,23	55,8
250 × 160 × 20	78,5	4987	7,97	1613	4,53	949	3,48	0,405	1636	3,85	8,31	61,7

Двутавры стальные горячекатаные (по ГОСТ 8239-89)

Обозначения:

- h — высота двутавра;
 b — ширина полки;
 d — толщина стенки;
 t — средняя толщина полки;
 F — площадь поперечного сечения;



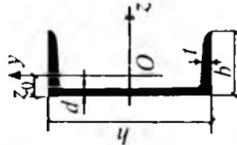
- J — осевой момент инерции;
 W — момент сопротивления;
 i — радиус инерции;
 S — статический момент полусечения.

Номер двутавра	Размеры, мм				F , см ²	J_z , см ⁴	W_z , см ³	i_z , см	S_z , см ³	J_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см	Масса I М, кг
	h	b	d	t									
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22	9,46
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38	11,5
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55	13,7
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70	15,9
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88	18,4
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07	21,0
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27	24,0
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37	27,3
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54	31,5
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69	36,5
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79	42,2
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89	48,6
40	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03	57,0
45	450	160	9,0	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101,0	3,09	66,5
50	500	170	10,0	15,2	100,0	39727	1589	19,9	919	1043	123,0	3,23	78,5
55	550	180	11,0	16,5	118,0	55962	2035	21,8	1181	1356	151,0	3,39	92,6
60	600	190	12,0	17,8	138,0	76806	2560	23,6	1491	1725	182,0	3,54	108

Швеллеры стальные горячекатаные (по ГОСТ 8240-89)

Обозначения:

- h — высота швеллера;
 b — ширина полки;
 d — толщина стенки;
 t — средняя толщина полки;
 F — площадь поперечного сечения;



- J — осевой момент инерции;
 W — момент сопротивления;
 i — радиус инерции;
 S — статический момент полусечения;
 z_0 — расстояние от оси u до наружной грани стенки.

Номер швеллера	Размеры, мм				F , см ²	J_z , см ⁴	W_z , см ³	i_z , см	S_z , см ³	J_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см	z_0 , см	Масса I м, кг
	h	b	d	t										
5	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16	4,84
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9,0	8,7	3,68	1,08	1,24	5,9
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31	7,05
10	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44	8,59
12	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54	10,4
14	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,6	40,8	45,4	11,0	1,7	1,67	12,3
16	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,80	14,2
18	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94	16,3
20	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,2	2,07	18,4
22	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21	21,0
24	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42	24,0
27	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47	27,7
30	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52	31,8
33	330	105	7,0	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59	36,5
36	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68	41,9
40	400	115	8,0	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75	48,3

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П.* Сопротивление материалов. — М.: Высшая школа, 1995.
2. *Александров А.В., Потапов В.Д.* Основы теории упругости и пластичности. — М.: Высшая школа, 1990.
3. *Александров А.В.* и др. Сборник задач по сопротивлению материалов. — М.: Стройиздат, 1977.
4. *Анохин Н.Н.* Строительная механика в примерах и задачах. — М.: АСВ. Ч. 1. 1999. Ч. 2. 2000.
5. *Беляев Н.М.* Сопротивление материалов. — М.: Физматгиз, 1962.
6. *Беляев Н.М.* и др. Сборник задач по сопротивлению материалов / Под ред. В.К. Качурина. — М.: Наука, 1970.
7. *Варданян Г.С., Андреев В.И., Атаров Н.М., Горшков А.А.* Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности. — М.: АСВ, 1995.
8. *Варданян Г.С., Атаров Н.М., Горшков А.А.* Сопротивление материалов (с основами строительной механики). — М.: ИНФРА-М, 2003.
9. *Леонтьев Н.Н., Соболев Д.Н., Амосов А.А.* Основы строительной механики стержневых систем. — М.: АСВ, 1996.
10. *Тимошенко С.П.* Сопротивление материалов. Т. 1, 2. — М.: Наука, 1965.
11. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. — М.: Физматгиз, 1966.
12. *Уманский А.А.* и др. Сборник задач по сопротивлению материалов / Под ред. А.А. Уманского. — М.: Наука, 1973.
13. *Федосьев В.И.* Сопротивление материалов. — М.: Наука, 1979.
14. *Филоненко-Бородин М.М.* и др. Курс сопротивления материалов. — М.: ГИТТЛ. Ч. 1. 1955. Ч. 2. 1956.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. Центральное растяжение и сжатие стержней	5
Глава 2. Напряженное и деформированное состояния в точке тела	52
Глава 3. Геометрические характеристики поперечных сечений стержней	80
Глава 4. Кручение стержней	95
Глава 5. Построение эпюр внутренних усилий в балках и рамах при изгибе	114
Глава 6. Напряженное состояние в балках при прямом изгибе и расчеты на прочность	143
Глава 7. Определение перемещений в балках и рамах при прямом изгибе	181
Глава 8. Основы расчета статически неопределимых балок и плоских рам с помощью метода сил	211
Глава 9. Расчет балок на упругом основании	233
Глава 10. Сложное сопротивление стержней	251
Глава 11. Устойчивость сжатых стержней. Продольный изгиб	300
Глава 12. Продольно-поперечный изгиб стержней	322
Глава 13. Динамическое действие нагрузок	342
Глава 14. Плоская задача теории упругости	357
Глава 15. Изгиб пластин	376
Приложение. Сокращенный сортамент прокатной стали	398
Список литературы	405

По вопросам приобретения книг обращайтесь:
Отдел продаж «ИНФРА-М» (оптовая продажа):
127282, Москва, ул. Полярная, д. 31в, стр. 1
Тел. (495) 380-4260; факс (495) 363-9212
E-mail: books@infra-m.ru

•

Отдел «Книга—почтой»:
тел. (495) 363-4260 (доб. 232, 246)

Учебное издание

Николай Михайлович Атаров
СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Учебное пособие

Корректор *М. В. Литвинова*
Компьютерная верстка *А. И. Паркани*

НАУЧНО-ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР ИНФРА-М



Электронно-
Библиотечная
znanium.com

представляет

серию учебников:

«Менеджмент в высшей школе»

МЕНЕДЖМЕНТ В ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ
УПРАВЛЕНИЕ ВЫСШИМ
УЧЕБНЫМ ЗАВЕДЕНИЕМ

**Управление высшим учебным
заведением:**

Учебник / Под ред. С.Д. Резника
и В.М. Филиппова

Код – 0115000.01.01

МЕНЕДЖМЕНТ В ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ
УПРАВЛЕНИЕ
ФАКУЛЬТЕТОМ

Управление факультетом:

Учебник / Под ред. С.Д. Резника

Код – 091400.01.01

МЕНЕДЖМЕНТ В ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ
УПРАВЛЕНИЕ
КАФЕДРОЙ

Управление кафедрой:

Учебник / С.Д. Резник

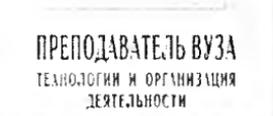
Код – 053300.05.01

КАК РУКОВОДИТЬ
ПРОФЕССОРАМИ И ДОЦЕНТАМИ
•
КАК УПРАВЛЯТЬ
НЕУПРАВЛЯЕМОЙ УЧЕБНИЦЕЙ
•
КАК ПОДГОТОВИТЬ
ВОСТРЕБОВАННОГО СПЕЦИАЛИСТА
•
КАК ОРГАНИЗОВАТЬ САМОГО СЕБЯ

**Еженедельник
ректора**
(электронная
версия)



Уникальная серия книг предназначена для всех, кто интересуется проблемами внутривузовского управления



ПРЕПОДАВАТЕЛЬ ВУЗА
ТЕХНОЛОГИИ И ОРГАНИЗАЦИЯ
ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Преподаватель вуза: технологии и организация деятельности:
Учебное пособие / Под ред. С.Д. Резника.

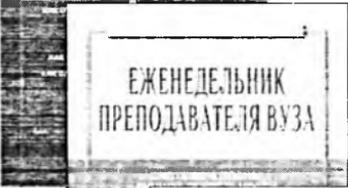
Код – 113800.01.01



СТУДЕНТ ВУЗА
ТЕХНОЛОГИИ И ОРГАНИЗАЦИЯ
ОБУЧЕНИЯ

Студент вуза: технологии и организация обучения:
Учебное пособие / Под ред. С.Д. Резника.

Код – 108300.01.01



ЕЖЕНЕДЕЛЬНИК
ПРЕПОДАВАТЕЛЯ ВУЗА

Еженедельник преподавателя:
Составитель С.Д. Резник

Код – 120750.01.01



ЕЖЕНЕДЕЛЬНИК
СТУДЕНТА

Еженедельник студента:
Составитель С.Д. Резник

Код – 120700.01.01



Б.А. Райзберг
ДИССЕРТАЦИЯ
И УЧЕНАЯ СТЕПЕНЬ

Диссертация и ученая степень:
Пособие для соискателей /
Б.А. Райзберг

Код – 026850.01.01

КНИГИ



ИНФРА-М

ПОЧТОЙ

ООО «Научно-издательский центр ИНФРА-М» осуществляет рассылку книг по почте на территории Российской Федерации.

Информацию о наличии книг можно получить, воспользовавшись прайс-листом Научно-издательского центра ИНФРА-М, который можно бесплатно заказать и получить по почте. Также информацию о книгах можно посмотреть на сайте <http://www.infra-m.ru> в разделах «Прайс-лист» и «Иллюстрированный каталог».

Для оформления заказа необходимо прислать заявку, где следует указать:

- для организаций:

название, полный почтовый адрес, банковские реквизиты (ИНН/КПП), номера телефона, факса, контактное лицо (получателя), наименование книг, их количество;

- для частных лиц:

Ф.И.О., полный почтовый адрес, номер телефона для связи, наименование книг, их количество.

При заполнении заявки необходимо указывать код книги что значительно ускорит оформление Вашего заказа.

Заказ оформляется по оптовым ценам, указанным в прайс-листе. На основании заявки Вам будет выставлен счет на имеющуюся в наличии литературу с учетом почтовых расходов (при сумме заказа свыше 5000 рублей, предоставляются скидки).

Произвести оплату вы можете:

по безналичному расчету:

перечислите сумму на расчетный счет ООО «Научно-издательский центр ИНФРА-М»;

за наличный расчет:

в отделении Сбербанка: по квитанции, извещению на сумму счета, где получатель платежа - ООО «Научно-издательский центр ИНФРА-М».

В течение 5 рабочих дней с момента зачисления денежных средств на расчетный счет заказ будет подобран и отправлен по указанному в заявке адресу с сопроводительными документами (счет-фактура, накладная).

Заявку можно прислать по факсу, электронной почте или по адресу:

127282, г. Москва, ул. Полярная, д. 31В, стр. 1

Телефон: (495) 363-4260 (доб.: 246, 248)

Факс: (495) 363-4260 (доб. 232)

E-mail: podpiska@infra-m.ru; poster3@infra-m.ru

Книги Научно-издательского центра ИНФРА-М:

В МОСКВЕ

БУКВА

ул. Марксистская, 9
тел.: (495) 670-52-17,
670-52-19

Московский дом книги на Арбате (сеть магазинов)
ул. Новый Арбат, 8
тел.: (495) 789-35-91

Библио-Глобус

ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1
тел.: (495) 621-53-36, 621-73-96

Молодая гвардия

ул. Большая Полянка, 28
тел.: (495) 780-33-70, (499) 238-50-01;
ул. Братиславская, 26М
тел.: (495) 346-99-00

Медведково

Заревый пр-д, 12
тел.: (499) 476-16-90, (495) 656-92-97

ТДК «Москва»

ул. Тверская, д. 8, стр. 1
тел.: (495) 629-64-83, 797-87-71

В САНКТ-ПЕТЕРБУРГЕ

Дом книги

Невский пр-т, д. 28, литера А
тел.: 8 (812) 448-83-55

Буквоед

Парк культуры и чтения «Буквоед»
Невский пр-т, 46;
Лиговский пр-т, 10 (гостиница «Октябрьская»)
тел.: 8 (812) 601-06-01

В РЕГИОНАХ

Библиомаркет

г. Вологда, Советский пр-т, 12
тел.: 8 (8172) 75-74-24

ИП Мухина Ирина Вячеславовна

г. Омск, ул. Интернациональная, 43
тел.: 8 (3812) 20-18-21

КМ «Библиомаркет»

г. Вологда, ул. Мира, 22
тел.: 8 (8172) 72-22-99

ГЛОБУС

г. Мурманск, Театральный б-р, 8
тел.: 8 (8152) 47-34-50

Знание

г. Новочеркасск, ул. Московская, 56
тел.: 8 (8635) 22-50-21

Ростовкнига

г. Ростов-на-Дону, ул. Б. Садовая, 41
тел.: 8 (8632) 40-80-40

ИНТЕРНЕТ-магазины

<http://www.ozon.ru>

<http://www.colibri.ru>

<http://www.neobook.ru>

<http://www.urait-book.ru>

<http://www.bookler.ru>

<http://www.bolero.ru>

<http://www.setbook.ru>

<http://www.chaconne.ru>



Научно-издательский центр ИНФРА-М

П Р Е Д С Т А В Л Я Е Т

В состав серии входят книги:

- Управление диссертационным советом
- Диссертационный менеджмент: в вопросах и ответах
- Рабочая книга ученого секретаря диссертационного совета
- Рабочая книга научного руководителя аспирантов
- Как защитить свою диссертацию
- Аспирант вуза
- Еженедельник аспиранта



Методический комплекс диссертационного совета

МЕНЕДЖМЕНТ В НАУКЕ

РАБОЧАЯ КНИГА УЧЕНОГО СЕКРЕТАРЯ ДИССЕРТАЦИОННОГО СОВЕТА

- Система диссертационного совета
- Виды работы совета
- Порядок приема кандидатских
- Структура и содержание работы
- Диссертации
- Вопросы приема диссертаций в печать

РАБОЧАЯ КНИГА ПРЕДСЕДАТЕЛЯ ДИССЕРТАЦИОННОГО СОВЕТА



РАБОЧАЯ КНИГА НАУЧНОГО РУКОВОДИТЕЛЯ АСПИРАНТОВ

- Структура и содержание
- Требования к кандидатскому
- Авторские публикации
- Виды кандидатских работ
- Академические советы
- Роль совета: кандидат и кандидатский диссертационный комитет
- Диссертации и вопросы публикации
- Справочная информация

АСПИРАНТ ВУЗА

- Виды и уровни научной работы
- Содержание диссертации и научные качества кандидата
- Подготовка научного труда
- Как написать и защитить диссертацию
- Как работать над кандидатской диссертацией
- Как написать научную статью и выступить с докладом на конференции
- Как организовать работу над диссертацией
- Как написать тезисы и кандидатскую диссертацию

ЕЖЕНЕДЕЛЬНИК АСПИРАНТА

- Диссертация
- Подготовка научной работы
- Статьи и тезисы статей, доклады на конференциях, тезисы на симпозиумах
- Авторские публикации
- Научные статьи, диссертационные публикации
- Публикации: "Как писать кандидатские диссертации", "Как писать тезисы к диссертации"

Быстрый доступ к знаниям ЭБС «ЗНАНИУМ»

Электронно-
Библиотечная
Система
znanium.com

Научно-издательский центр ИНФРА-М разработал единое образовательное пространство ЭБС «ЗНАНИУМ» для библиотек, профессорско-преподавательского состава и студентов, где разместились электронные версии книг ведущих издательств России в формате on-line.

ВЫ ПОЛУЧАЕТЕ:

- Удобный, гибкий, самостоятельный функционал для работы
- Доступ к более 3000 электронных изданий по базовым и вариативным дисциплинам
- Быстрый доступ из любой точки при наличии Интернета
- Постоянное насыщение новыми электронными версиями книг

Приобретая ЭБС «ЗНАНИУМ», можете быть уверены — вы будете обеспечены актуальной востребованной литературой

ПРЕИМУЩЕСТВА

- 20-летний опыт работы издательства на российском рынке учебной литературы
- Мы являемся создателем, правообладателем и распорядителем электронных ресурсов
- Права наших авторов переданы нам на длительный период времени, и поэтому не нужно остерегаться, что какая-то книга через год или два исчезнет из каталога
- Индивидуальный подход
- Низкие цены

ВОЗМОЖНОСТИ

- Гибкий функционал для работы при подготовке различных научных работ значительно экономит ваше время
- Специально для вас мы разработали возможность самостоятельного формирования издательских коллекций, которые будут учитывать потребности вуза
- Преподаватель может создавать собственную аудиторию для каждой студенческой группы или всего курса
- Цитирование текста

АССОРТИМЕНТ

- Учебники, учебные пособия, в т.ч. для бакалавриата и магистратуры
- УМК, монографии, авторефераты, диссертации, энциклопедии, словари и справочники, законодательно-нормативные документы, издания, выпускаемые издательствами вузов и специальные периодические издания
- Литература по основным изучаемым дисциплинам

физико-математические науки, гуманитарные науки, образование и педагогика, экономика и управление, сфера обслуживания, естественные науки, социальные науки, культура и искусство, информационная безопасность, сельское и рыбное хозяйство, энергетика, энергетическое ма-

шиностроение и электротехника, металлургия, машиностроение и материалобработка, транспортные средства, приборостроение и оптотехника; электронная техника, радиотехника и связь, автоматика и управление, информатика и вычислительная техника, химическая технология и биотехнология, технология продовольственных продуктов и потребительских товаров, архитектура и строительство, безопасность жизнедеятельности, природообустройство и защита окружающей среды

ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭБС

- Соответствие основным требованиям ФГОС ВПО
- Одновременный доступ неограниченного числа пользователей предоставляется через сеть Интернет
- Персональная статистика для каждого вуза (посещаемость, книговыдача и т.д.)
- Каждое издание сопровождается библиографическим описанием и изображением обложки

ИНСТРУМЕНТЫ ДЛЯ РАБОТЫ В ЭБС

- Регистрация собственного личного кабинета
- Удобная навигация в системе позволит провести быстрый поиск по издательству, автору, наименованию, тематике, ISBN
- Создание и хранение электронных конспектов
- Установка «Закладки» для быстрого возвращения к прерванной работе
- Отправка конспекта по электронной почте для дальнейшего использования
- Автоматическое формирование списка используемой литературы

ЦЕНОВАЯ ПОЛИТИКА

- Стоимость подписки зависит от количества пользователей
- Бесплатный доступ к новым поступлениям в течение срока подписки

ДЛЯ ОЗНАКОМЛЕНИЯ РЕКОМЕНДУЕМ ВОСПОЛЬЗОВАТЬСЯ БЕСПЛАТНОЙ ДЕМОВЕРСИЕЙ

Для подключения демоверсии нужно сообщить только IP-адрес (диапазон IP-адресов) организации по тел.: **(495) 363-42-60, доб. 250** или e-mail. library@infra-m.ru

КОНТАКТНАЯ ИНФОРМАЦИЯ

Состав ЭБС

и финансовые вопросы

Главный редактор

Научно-издательский центр

«ИНФРА-М»

ПРУДНИКОВ

Владимир Михайлович

(495) 380-05-41

Сот.: **8 (926) 577-13-36**

e-mail: 291@infra-m.ru

e-mail: f3800@yandex.ru

Для заключения договора

Директор библиотечного агентства

НЕСТЕРОВА Надежда Ивановна

(495) 363-42-60, доб. 230

e-mail: nadin@infra-m.ru

Технические вопросы

Директор информационной службы

ПАШИНЦЕВ Игорь Владимирович

(495) 363-42-60, доб. 320

e-mail: ivp@infra-m.ru

**С ИНФОРМАЦИЕЙ О НАС И НАШЕЙ ЛИТЕРАТУРЕ
МОЖНО ОЗНАКОМИТЬСЯ НА САЙТЕ WWW.INFRA-M.RU**

*Лучший
подарок
ректору!*



МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС РЕКТОРА ВУЗА

Уникальная серия книг предназначена для руководящих кадров высших учебных заведений, ректоров, деканов, заведующих кафедрами, преподавателей, а также студентов, аспирантов, докторантов и всех, кто интересуется проблемами внутривузовского управления.