В. Н. ИОНОВ, П. М. ОГИБАЛОВ

ПРОЧНОСТЬ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

ДИНАМИКА И ВОЛНЫ НАПРЯЖЕНИЙ

Допущено Министерством
высшего и среднего
специального образования
СССР
в качестве учебного пособия
для студентов высших
технических учебных заведений

Москва «Высшая школа» 1980

ББК 22.25
И75
УДК 620.1(075)

Рецензент

докт. физ.-матем. наук, проф. Кнйко И. А.

Ионов В. Н., Огибалов П. М.

И75 Прочность пространственных элементов конструкций: Учеб. пособие. Динамика и волны напряжений. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Высш. школа, 1980. — 440 с., ил.

В пер.: 1 р. 10 к.

В учебном пособии на современном научном уровне рассматривается процесс распространения волн напряжений в средах и телах с различными физико-механическими свойствами, возникающих при их импульсивном нагружении.

Изложены общая теория процесса распространения волн напряжений, методы решения задач, связанных с расчетом напряжений в средах и телах при импульсивном нагружении, а также в оболочках вращения при динамическом нагружении.

Задачи сопровождаются решениями, представленными в форме, которая позволяет указать алгоритм расчета для составления программ и использования ЭВМ.

Предназначается для студентов втузов и механических специальностей вузов.

$И\frac{30106-128}{001(01)-80}$ 35—80 2105000000 605 ББК 22.25

Валентин Николаевич Ионов
Петр Матвеевич Огибалов

ПРОЧНОСТЬ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

Динамика и волны напряжений

Зав. редакцией Е. С. Гридасова. Редактор Ж. И. Яковлева. Младшие редакторы С. А. Доровских, Н. П. Майкова. Художник А. Н. Решетцов. Художественный редактор В. И. Пономаренко. Технический редактор Н. В. Яшукова. Корректор М. М. Малиновская

ИБ № 2157

Изд. № ФМ-647. Сдано в набор 11.05.79. Подп. в печать 22.01.80. Формат 60×90¹/₁₆. Бум. тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 27,5 усл. печ. л. 25,21 уч.-изд. л. Тираж 7.000 экз. Зак. № 1101. Цена 1 р. 10 к.

Издательство «Высшая школа»,
Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
Москва 129041, Б. Переяславская ул., 46

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 4

Глава 1. Опытные данные, постановка и решение задачи о распространении возмущений 6

§ 1. Физическая картина распространения возмущений, способы их возбуждения 6

§ 2. Методы измерения кинематических и динамических параметров волн напряжений 18

§ 3. Постановка и решение задачи о распространении волн напряжений 30

§ 4. Области возмущений волн нагрузки и разгрузки 50

§ 5. Отражение и взаимодействие волн напряжений при их распространении 70

Глава 2. Волны напряжений в деформируемой среде 86

§ 1. Взрыв в вязкоупругопластическом пространстве 86

§ 2. Удар по вязкоупругопластическому полупространству 109

§ 3. Удар в преграду конечной толщины 137

§ 4. Внедрение тела в деформируемую среду 158

§ 5. Напряжения в деформируемой среде при внедрении 198

Глава 3. Волны напряжений в деформируемых телах 221

§ 1. Удар по тонкому стержню 221

§ 2. Плита при взрыве и ударе 251

§ 3. Взрыв в полой сфере 279

§ 4. Удар сферы о преграду 288

§ 5. Взрыв в полом цилиндре и конусе 307

§ 6. Цилиндр и конус при ударе 333

Глава 4. Динамика оболочек вращения 362

§ 1. Тензор кинетических напряжений оболочки нулевой гауссовой кривизны 362

§ 2. Сжатие цилиндрической и конической оболочек осевыми нагрузками при тепловом воздействии 377

§ 3. Цилиндрическая и коническая оболочки под действием внутреннего и внешнего давлений 394

§ 4. Тензор кинетических напряжений оболочки ненулевой гауссовой кривизны 405

§ 5. Сферическая и оживальная оболочки под действием внутреннего и внешнего давлений 421

Литература 438

Предметный указатель 440

ПРЕДИСЛОВИЕ

В инженерной практике нередко нельзя ограничиться нахождением решений задач в статической или квазистатической постановке и, следовательно, приходится рассматривать динамические задачи в собственном смысле этого слова. Настоящая книга представляет собой третью часть учебного пособия «Прочность пространственных элементов конструкций»* и посвящена рассмотрению такого рода задач.

В первой главе дано физическое описание процесса распространения возмущений в виде волн напряжений. Указаны способы возбуждения возмущений и методы измерения кинематических и динамических параметров волн напряжений. Сформулирована задача о распространении волн напряжений и указан метод решения ее для областей возмущений нагрузки, разгрузки и отраженной волны. Рассмотрены особенности взаимодействия волн напряжений при их распространении.

Вторая глава посвящена рассмотрению напряженного состояния деформируемой среды при распространении волн напряжений. Изучено напряженное состояние в вязкоупругопластическом пространстве при взрыве, а также в вязкоупругопластическом полупространстве при ударе. Рассмотрено распределение напряжений в областях возмущений преграды конечной толщины с учетом отражения и взаимодействия волн.

Дано подробное описание процесса внедрения тела в деформируемую среду.

В третьей главе изложены результаты исследования напряженного состояния деформируемых тел при распространении волн напряжений. Дано решение задач о напряженном состоянии тонкого стержня при ударе, плиты при взрыве и ударе, сферы при взрыве и ударе о преграду.

Рассмотрено напряженное состояние в полом цилиндре и конусе при взрыве и ударе.

Четвертая глава посвящена рассмотрению напряженного состояния в оболочках вращения при динамическом нагружении. В частности, дано решение задач для оболочек вращения нулевой и не-

* *Ионов В. Н., Огибалов П. М.* Прочность пространственных элементов конструкций. 2-е изд., перераб. и доп. — Ч. 1. Основы механики сплошной среды. М., 1979; Ч. 2. Статика и колебания. М., 1979.

нулевой гауссовой кривизны при действии внешнего и внутреннего давлений, оболочек вращения цилиндрической и конической форм при сжатии и тепловом воздействии.

В книге изложена общая динамическая теория деформируемых тел, даны постановки краевых задач и эффективные методы их решения. Решения конкретных задач представлены в замкнутой форме или указан алгоритм их решения, позволяющий широко использовать ЭВМ.

Учебное пособие предназначается для студентов и аспирантов высших технических учебных заведений, может быть полезно лицам, занимающимся механикой деформируемых тел и расчетами прочности конструкций.

Авторы

Глава 1

ОПЫТНЫЕ ДАННЫЕ, ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

В настоящей главе разъясняются физическая природа возникновения и распространения возмущений, рассматриваются разнообразные методы измерения кинематических и динамических параметров. Приводятся динамические уравнения и определяющие соотношения, даются необходимые механические пояснения, важные для понимания сущности рассматриваемой проблемы. Приведена физико-математическая постановка динамической задачи и изложен общий эффективный метод ее решения. Достаточно детально обсуждены условия на фронте волны возмущений, выяснены области возмущений, инициированные волнами нагрузки и разгрузки, а также проанализировано отражение и взаимодействие волн напряжений при их распространении.

Таким образом, в этой главе изложены все сведения, уравнения и соотношения, необходимые для корректной постановки краевых задач с учетом физико-механических свойств материала при импульсном нагружении, и указан эффективный общий метод решения.

§ 1. Физическая картина распространения возмущений, способы их возбуждения

Нагружение, при котором действующие на тело внешние факторы характеризуются внезапностью приложения и кратковременностью действия, измеряемого микросекундами, причем интенсивность их достаточно велика, для того чтобы произвести разрушение и большие необратимые изменения в теле, на которое они действуют, называется *импульсивным*. Импульсивное нагружение имеет место при взрыве и ударе. Возмущения распространяются с конечной скоростью, образуя *области возмущений*, в которых тело находится в напряженно-деформированном состоянии.

Наиболее полной характеристикой динамического и импульсивного нагружений является *скорость деформации*, определяемая в общем случае тензором скоростей деформаций

$$(\dot{e}) = \frac{d}{dt}(e). \qquad (1.1.1)$$

Для одноосного деформирования

$$\dot{e} = \frac{de}{dt}. \qquad (1.1.2)$$

Учитывая, что $e = u/l$, где u — перемещение, l — длина, (1.1.2) можно записать в виде

$$\dot{e} = \frac{1}{l} \cdot \frac{du}{dt}, \tag{1.1.3}$$

но $du/dt = v$ — скорость перемещения, которая характеризует процесс нагружения, следовательно,

$$\dot{e} = v/l. \tag{1.1.4}$$

Таким образом, динамичность нагружения можно характеризовать скоростью нагружения v.

Нагружение динамическое в случае, если скорость нагружения v больше критической скорости $v_{кр}$:

$$v > v_{кр}; \tag{1.1.5}$$

$$v_{кр} = \sqrt{\frac{2}{\rho}\left(\int_0^{e_i} \sigma_i\, de_i + \frac{9}{2} K e^2\right)}, \tag{1.1.6}$$

где σ_i, e_i — соответственно интенсивности напряжений и деформаций; e — средняя деформация; K — модуль объемного сжатия; ρ — плотность материала.

В теле при динамическом и импульсивном нагружениях возникают возмущения различной природы (нагрузки, разгрузки, отражения и т. д.), распространяющиеся с определенными конечными скоростями, величина которых зависит от состояния тела и характера деформаций, в виде волн возмущений (волн нагрузки, волн разгрузки, отраженных волн), называемых *волнами напряжений.*

Возмущения, распространяясь в теле, образуют области возмущений, которые расширяются с течением времени и ограничены частью поверхности тела и поверхностью фронта волны напряжений. Каждой области возмущений соответствует свое напряженно-деформированное состояние, характеризуемое тензором напряжений (σ) и тензором деформаций (e) и определяемое природой возмущения. В зависимости от вида и природы волн напряжений области возмущений разделяются на первичные и вторичные. *Первичной* является область возмущений волны нагрузки, так как в случае ее отсутствия не существуют волны разгрузки и отраженные волны. Области возмущений волны разгрузки и отраженных волн *вторичные*, они всегда находятся внутри области возмущений волны нагрузки и являются областями с начальными напряжениями и деформациями.

Область возмущений волны нагрузки зарождается в окрестности непосредственного действия того или иного фактора и с течением времени расширяется с конечной скоростью, равной скорости распространения волны нагрузки a_0. Эта область ограничена частью поверхности тела, включая загруженную поверхность, и поверхностью фронта волны нагрузки (рис. 1). Движение частиц тела характеризуется вектором скорости $\mathbf{v}_{нагр}$ и плотностью $\rho_{нагр}$; напряженно-деформированное состояние тела — тензором напряжений $(\sigma)_{\text{нагр}}$ и тензором деформаций $(e)_{\text{нагр}}$, компоненты которых являются функциями координат x^j и времени t. Состояние тела в области возмущений нагрузки зависит от физико-механических свойств материала и может быть упругим, вязким, пластическим, упругопластическим, вязкоупругим и т. д. В области покоя $v = 0$, плотность $\rho = \rho_0$, тензор напряжений (σ) и тензор деформаций (e) также равны нулю.

В момент времени t_1, когда прекращается рост интенсивности возмущений нагрузки (интенсивность уменьшается или остается постоянной), начинается процесс разгрузки. Возмущения, соответствующие процессу разгрузки, распространяются в теле с конечной скоростью в виде волны, названной Х. А. Рахматулиным [35] *волной разгрузки*, образуя область возмущений волны разгрузки, которая расположена внутри области возмущений нагрузки и является вторичной. Область возмущений разгрузки ограничена частью поверхности тела, включая загруженную часть, и фронтом волны разгрузки, которая с течением времени расширяется со скоростью b (рис. 2). Движение частиц тела в этой области характеризуется вектором скорости $v_{\text{разгр}}$ и плотностью $\rho_{\text{разгр}}$; напряженно-деформированное состояние — тензором напряжений $(\sigma)_{\text{разгр}}$ и тензором деформаций $(e)_{\text{разгр}}$, компоненты которых являются функциями координат x^j и времени t. Состояние тела в области возмущений разгрузки в зависимости от физико-механических свойств материала может быть упругим, вязким и вязкоупругим.

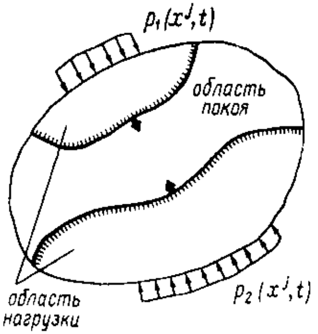

Рис. 1

При выходе волны нагрузки или волны разгрузки на поверхность тела или при столкновении двух волн напряжений друг с другом имеет место явление отражения, при этом зарождается отраженная волна нагрузки или разгрузки, распространяющаяся с конечной скоростью a_0 или b в обратном направлении, образуя область возмущений отраженной волны. Эта область расположена внутри области возмущений соответствующей прямой волны и является вторичной. Она ограничена той частью поверхности тела, где имеется отражение, и фронтом отраженной волны (рис. 3, *а*) или фронтом отраженной волны и поверхностями фронтов прямых волн (рис. 3, *б*). Движение частиц тела в области возмущений отраженной волны описывается вектором скорости $v_{\text{отр}}$ и плотностью $\rho_{\text{отр}}$; напряженно-деформированное состояние — тензором напряжений $(\sigma)_{\text{отр}}$ и тензором деформаций $(e)_{\text{отр}}$. Состояние тела в области возмущений может быть упругим, вязкоупругим, упругопластическим и другим и зависит от природы возмущения и физико-механических свойств материала.

Волны напряжений различной природы, распространяясь в теле, взаимодействуют друг с другом, что приводит к образованию новых областей возмущений, перераспределению напряжений и деформаций и другим явлениям, характерным для динамического и импульсивного нагружений. При интерференции волн напряжений их интенсивности складываются и могут достигать значений, превосходящих предел прочности материала. В этом случае наступает разрушение. После трех-четырехкратного прохождения и отражения волн напряжений в теле процесс распространения возмущений становится установившимся, напряжения и деформации усредняются, тело находится в колебательном движении.

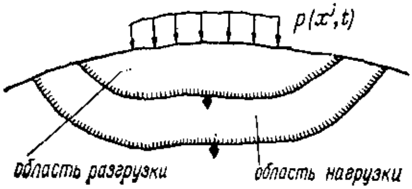

Рис. 2

На фронте волны напряжений при переходе из одной области возмущений в другую перемещения частиц тела изменяются непрерывно (в противном случае происходит нарушение сплошности материала), напряжения терпят разрыв, величина которого определяется значениями интенсивностей возмущений в соприкасающихся областях.

Возмущения, распространяющиеся в теле при его нагружении, характеризуются величиной интенсивности. Могут быть возмущения большой интенсивности (большой амплитуды) и возмущения малой интенсивности (малой амплитуды), которым соответствуют определен-

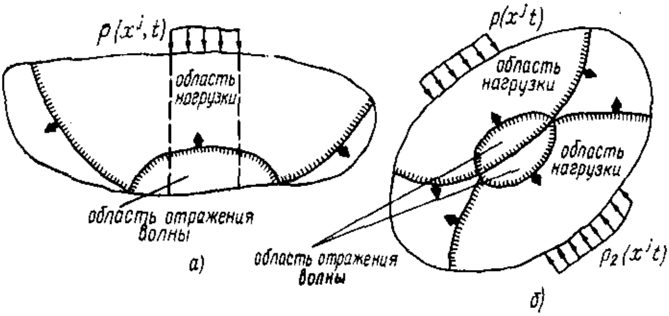

Рис. 3

ные конечные скорости распространения. В особых случаях, когда на тело действуют внешние силовые факторы большой интенсивности в короткие промежутки времени, возмущения большой амплитуды имеют бóльшую скорость, чем возмущения малой амплитуды. При их распространении возмущения большой амплитуды догоняют возмущения малой амплитуды, в результате образуется волна со ступенчатым фронтом, который представляет собой поверхность, где претерпевают разрыв непрерывности параметры состояния и движения среды. Такую волну принято называть *ударной* (более подробно эта волна будет рассмотрена в дальнейшем).

Рассмотренная физическая картина волнового процесса распространения возмущений позволяет провести исследование напряженно-деформированного состояния тела в областях возмущений в любой момент времени с учетом всех специфических особенностей рассматриваемой области возмущений*. Поведение материала при динамическом и импульсивном нагружениях предполагается известным, т. е. учитывается локальность напряженно-деформированного состояния, что характерно для динамического и особенно импульсивного нагружения.

Возмущения могут быть вызваны различно. В одних случаях возбуждение возмущений естественное, связанное с явлениями, которые происходят в недрах Земли, атмосфере, Вселенной; в других случаях возмущения создаются искусственно с помощью взрыва или удара. Изучение естественного возбуждения возмущений позволит наиболее полно познать природу таких явлений, как землетрясения, ураганы и др., предугадывать их возникновение и своевременно принимать меры к частичной или полной ликвидации их вредного действия.

Рассмотрим искусственное возбуждение возмущений. Искусственное возбуждение позволяет получать возмущения любой интенсивности. Существующие способы искусственного возбуждения возмущений подразделяются на три типа: ударные, взрывные, смешанные.

Ударные способы возбуждения возмущений. Возмущения возбуждаются в результате удара по телу каким-либо другим телом, при этом силы, вызванные соударением тел, называют *ударными*. Целесообразно различать ударник и приемник удара. Тело, которое ударяет, назовем *ударником*; тело, по которому ударяют, — *приемником*. Приемником удара могут быть полубесконечные тела, плиты, стержни и т. д.; в качестве ударника используются шары, стержни, пули, снаряды.

Изменяя скорость ударника, его материал и геометрические размеры, можно получить импульсы, которым соответствуют кривые $\sigma - t$, изменяющиеся в широких пределах, а также распределение давления на поверхности контакта как функцию времени и закон, по которому нагрузка распределяется в ударнике и приемнике удара (причем следует принимать во внимание упругие, вязкие и пластические эффекты как в ударнике, так и в приемнике удара). В связи с этим ударяющие тела удобно разделить на два вида: 1) тела, которые при ударе теряют свои размеры и форму; 2) тела, которые при ударе сохраняют свои размеры и форму.

Примером тела, которое при ударе сильно деформируется, может служить пуля, сделанная из мягкого материала и летящая с достаточно большой скоростью. В этом случае напряжения, возникающие при ударе, значительно превышают предел прочности материала при сжатии и в первом приближении (по Гопкинсону [50], [51]) ударник ведет себя как жидкость, что позволяет вычислить напряжения при ударе и построить кривую $\sigma - t$. При нормальном ударе

---

* *Огибалов П. М., Кийко И. А.* Поведение вещества под давлением. М., 1962; *Огибалов П. М., Кийко И. А.* Очерки по механике высоких параметров. М., 1966.

круглого цилиндра длины l о жесткую плиту со скоростью v_c переднее основание цилиндра останавливается, тогда как заднее основание продолжает движение вперед с неизменной скоростью (рис. 4). Каждое сечение цилиндра, достигая плиты, растекается в поперечном направлении, и основное движение прекращается. Задние части цилиндра продолжают движение со скоростью v_c, доходят до плиты и теряют свои количества движения. Когда заднее основание цилиндра достигает плиты, поступательное движение частей цилиндра прекращается. Продолжительность удара равна времени перемещения цилиндра на расстояние l:

$$t_c = l/v_c, \tag{1.1.7}$$

напряжение, соответствующее удару,

$$\sigma = \rho_c v_c^2, \tag{1.1.8}$$

ударная сила

$$F = \rho_c v_c^2 S, \tag{1.1.9}$$

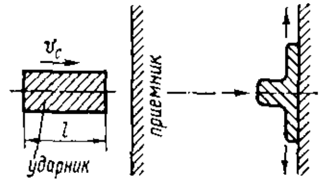

Рис. 4

где ρ_c — плотность материала ударника; S — площадь контакта, величина которой определяется значениями ρ_c, v_c и радиусом ударника в различных сечениях. В экспериментах подобного типа в качестве ударника используются свинцовые пули с головкой различной формы, что позволяет получать различные по конфигурации кривые σ—t. При обработке данных эксперимента со стержнями предполагаются известными плотность ρ и модуль упругости E материала; скорость волны расширения $c_0 = \sqrt{E/\rho}$; напряжения равномерно распределены по поперечному сечению. Эксперименты показали, что кривые σ—t, полученные по теории Гопкинсона, имеют погрешности. На начальном участке они возникают из-за трудностей, связанных с точным измерением размеров ударника, на конечном участке погрешности являются следствием того, что на заключительной стадии удара сопротивление ударника становится сравнимым с инерционными силами, существенно влияющим на продолжительность удара, причем наблюдаемые величины на 30—40% превышают расчетные. С другой стороны, при условии, что в соударяемых телах пластические деформации при ударе отсутствуют, расчетные значения максимального давления в пределах точности эксперимента совпадают со значениями, полученными в экспериментах с мерным стержнем Гопкинсона. Однако такое представление о поведении ударника сильно упрощено. В действительности не наблюдается полного соответствия свойств материала ударника свойствам идеальной жидкости, поэтому необходимо рассмотреть второй предельный случай— ударник как идеально-упругое тело.

Пусть ударник — идеально упругий стержень длины l, тогда при ударе о жесткий приемник (плиту) со скоростью v_c передний конец стержня останавливается, возникает напряжение $\sigma = \rho c_0 v_c$, где ρ — плотность материала стержня, c_0 — скорость распространения волны расширения (рис. 5). Возникшее на конце ударника напряжение распространяется по стержню со скоростью c_0 (на рис. 5 показано состояние стержня в различные стадии удара). В некоторый момент времени часть стержня, пройденная волной, находится в покое и сжата, остальная часть продолжает движение вперед с неизменной скоростью. Каждое сечение в момент прихода волны резко останавливается; когда волна достигает свободного конца, стержень приходит в состояние покоя и подобен сжатой пружине. На свободном конце давление отсутствует, стержень начинает расширяться, вдоль него в обратном направлении распространяется волна разгрузки, сечения последовательно приобретают скорость v_c. В момент времени $2l/c_0$ волна разгрузки достигает переднего конца, стержень отходит от плиты и движется в обратном направлении со скоростью v_c. Продолжительность удара

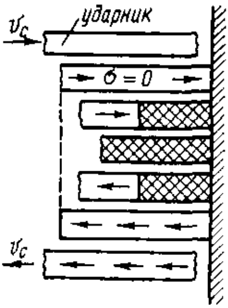

Рис. 5

$$t_c = 2l/c_0; \tag{1.1.10}$$

давление на поверхности контакта постоянно:

$$p = \rho c_0 v_c. \tag{1.1.11}$$

Изложенное применимо только к вполне упругому удару по бесконечной в поперечном направлении плите конечной толщины, следовательно, справедливо только в начальной стадии любого удара.

Во многих экспериментах ударником являются сферические, цилиндрические и другой формы тела вращения, для которых продолжительность удара велика по сравнению с временем прохождения волной напряжений наибольшего размера ударника. В этом случае для построения кривой σ—t используется решение Герца [23], [28], которое требует численного интегрирования. Достаточно знать продолжительность удара t_c, максимальный радиус контакта r_m и максимальную осевую силу P_m, развивающуюся во время соударения. Эти величины определяются экспериментально, значения их приведены в табл. 1 [8].

Таблица 1

h, см	v_c, см/с	t_c, мкс	r_m, см	$P_m \cdot 10^6$, дин
0,1	14,0	33,5	0,0071	1,63
0,25	22,2	30,6	0,0085	2,84
0,5	31,4	28,3	0,0098	4,31
1	44,3	26,4	0,0113	6,57
5	99,1	22,5	0,0155	17,1
10	140	21,0	0,0178	25,9
25	222	19,1	0,214	44,9
50	443	16,7	0,282	103,2

Здесь h — высота падения ударника; диаметр шара $2R = 0{,}636$ см. Все изложенное справедливо при условии, что возникающие в ударнике напряжения по своей величине не превосходят предела упругости. В действительности всегда имеют место пластические деформации, влияние которых можно уменьшить, если использовать наковальню, представляющую собой короткий элемент (плиту) из прочного материала. Ударник попадает на переднюю поверхность наковальни, задняя поверхность которой выровнена, отшлифована и с помощью смазки плотно прижата к поверхности приемника, что обеспечивает передачу упругих волн без искажения.

Итак, на поверхности приемника имеют место ударные нагрузки, которые являются возбудителями возмущений, распространяющихся в теле. Однако, как будет показано в дальнейшем, вид нагрузок и их интенсивность во многом зависят от поведения приемника.

Для сообщения ударнику требуемой скорости используются ударные машины: копры различной конструкции и пневмо-газовые пушки*. Копры бывают трех типов: *с падающим грузом*, *маятниковые и ротационные*. Работа копра первого типа основана на использовании энергии удара падающего с определенной высоты груза. Такой копер может иметь любую мощность, однако конструкция его громоздка и неудобна в эксплуатации, поэтому практически скорость удара от 3 до 10 м/с. В маятниковых копрах по телу ударяет маятник массы m, имеющий заданную скорость движения. Такие копры, в основном, используются при испытаниях образцов на ударное разрушение. Измеряемой величиной является энергия, поглощаемая образцом при разрушении, которая равна разности между энергией удара, определяемой по начальному положению маятника, и основной энергией маятника, определяемой по наивысшему положению маятника, которое достигается им после разрушения образца. Скорость удара обычно не превышает 10 м/с, хотя можно достигнуть и бо́льших значений. Копры, в которых удар по телу осуществляется за счет вращения маховика, называются ротационными. Он имеет неподвижную наковальню, образец крепится на маховике. Энергия удара определяется по изменению скорости вращения маховика до и после удара. Скорость удара не превышает 60 м/с.

Для получения большой скорости удара разработаны специальные ударные машины — пневмогазовые пушки [14,4] различной конструкции. В таких машинах ударник выстреливается с большой скоростью и ударяет по образцу в заданном сечении, сжимая или растягивая его в зависимости от места приложения ударной нагрузки. Наибольшая скорость ударника, получаемая на таких машинах, не превышает 300 м/с.

При высокоскоростном соударении ударник приобретает скорость в результате выстрела из артиллерийского орудия или с помощью специальной установки. В этом случае ударником является снаряд, приемником удара — испытуемая плита. Скорость удара может достигать $(3—5) \cdot 10^3$ м/с.

---

* *Ильюшин А. А., Огибалов П. М.* Новый пневматический скоростной копер. — Изв. АН СССР., ОТН, 1957, № 3, с. 57—65.

Взрывные способы возбуждения возмущений. Возмущения в деформируемом теле можно вызвать с помощью взрывчатых веществ (В. В.). Как известно, взрывчатым веществом называют вещество, способное под влиянием внешних воздействий (тепла, давления, механического удара) за короткий промежуток времени полностью или частично превращаться в другие, более устойчивые вещества (большей частью газообразные). Процесс превращения одного вещества в другие называется *взрывом*, а образующиеся при этом газообразные вещества — *продуктами взрыва*. Взрывчатые вещества могут быть *детонирующими* (характеризуются высокой скоростью реакции и высоким давлением) и *воспламеняющимися* (характеризуются медленным сгоранием и более низким давлением). Больший интерес представляют детонирующие В. В., находящиеся, как правило, в твердом состоянии и обладающие свойствами упругости, вязкости и пластичности. Сравнительная оценка взрывчатых веществ проводится по фугасному и бризантному действиям. *Фугасным действием* называется способность В. В. производить разрушающее взрывное воздействие, оно зависит от скоростей расширяющихся газов в области взрыва. *Бризантность* является мерой дробящего воздействия В. В. Возбуждение взрыва во взрывчатом веществе вызывается каким-либо внешним воздействием и может быть реализовано в одной или нескольких точках с помощью различных детонаторов. Детонация — процесс химического превращения В. В., распространяющийся в виде детонационной волны с большой постоянной скоростью D, измеряемой в тыс. м/с и зависящей от ряда факторов [47, 38]. Процесс взрыва сопровождается высокими давлением и температурой, обладает энергией, освободившейся при химическом превращении В. В. и способной совершить механическую работу при расширении продуктов взрыва со скоростью

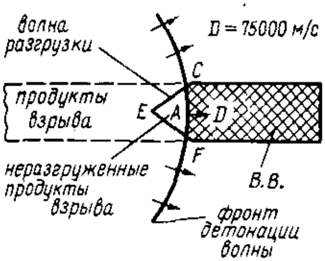

Рис. 6

$$v = kD, \tag{1.1.12}$$

где $k = 1/3$.

Высокие давления и температуры, имеющие место при расширении продуктов взрыва, постепенно уменьшаются, причем процесс расширения протекает различно и в сильной степени определяется геометрической формой заряда. Динамика взрыва и расширения продуктов взрыва для плоской полосы В. В. показана на рис. 6, при этом предполагается, что детонация вызвана на большом расстоянии от рассматриваемой области. Перед фронтом детонационной волны находится В. В., за ее фронтом — продукты взрыва. Так как продукты взрыва имеют высокое давление и высокую температуру, то они расширяются в поперечном направлении, при этом образуется волна разгрузки, скорость распространения которой равна скорости звука в продуктах взрыва ($\approx 2D/3$ [47, 38]). Расширение начинается на двух граничных поверхностях заряда, следовательно, при установившемся процессе детонации всегда имеется область CEF, в которой не ощущается влияние волны разгрузки. Для цилиндрического заряда область CEF является конической. При ограниченной длине заряда давление внутри конуса дает выброс вследствие резко выраженного краевого эффекта. Процесс расширения продуктов взрыва регулируется изменением формы заряда.

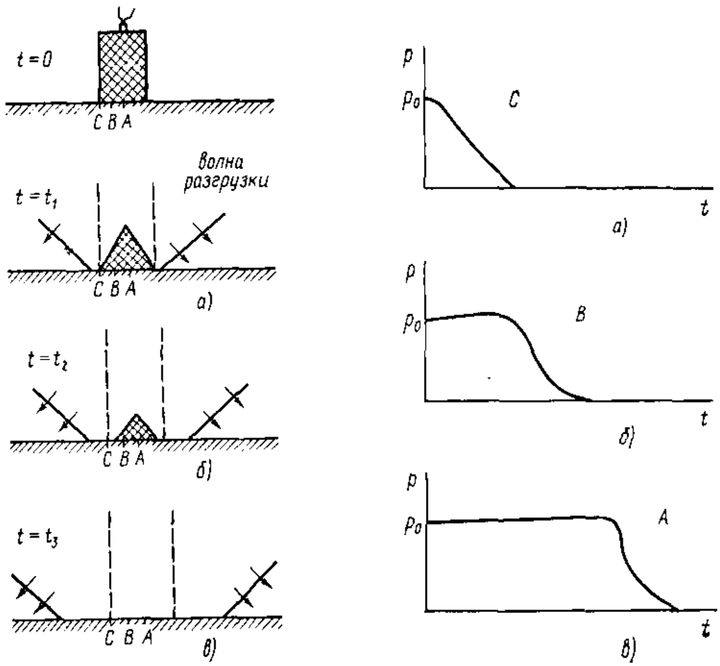

Рис. 7

Тела, находящиеся в области взрыва, испытывают действие продуктов взрыва. На поверхности тела возникают импульсивные нагрузки (в виде давления), которые и являются возбудителями возмущений, распространяющихся в теле. Давление p распределено некоторым образом по поверхности тела и изменяется с течением времени: $p = p\,(x^j,\ t)$. Форма кривой p—t в точке определяется характером расширения продуктов взрыва и зависит от формы заряда В. В., количества В. В. и степени стеснения продуктов взрыва. Рассмотрим, например, цилиндрический заряд В. В., помещенный на абсолютно жесткой поверхности (рис. 7). При взрыве заряда по цилиндру В. В. распространяется детонационная волна. В момент полного прохождения волной цилиндра продукты взрыва начнут расширяться, в этот момент зарождается волна разгрузки. Если цилиндр В. В. достаточно длинный, то волна достигает точек A B, C

почти одновременно, давление в точках одинаково (картина расширения приведена на рис. 7, *а*). По мере распространения волны разгрузки давление уменьшается вначале в точке *С* (рис. 7, *а*), затем в точке *В* (рис. 7, *б*) и, наконец, в точке *А* (рис. 7, *в*). Однако суммарный импульс в точке *А* больше, чем в точке *В*, и гораздо больше, чем в точке *С*. При взрыве плоского заряда динамика процесса нагружения тела иная (рис. 8, *а*), детонация распространяется слева

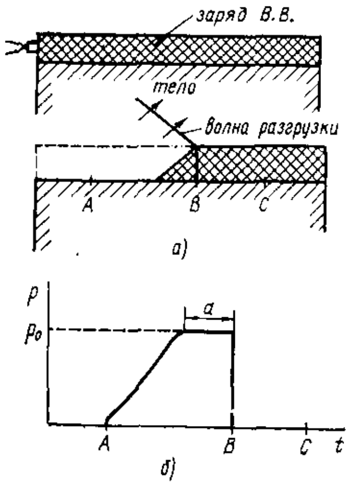

Рис. 8

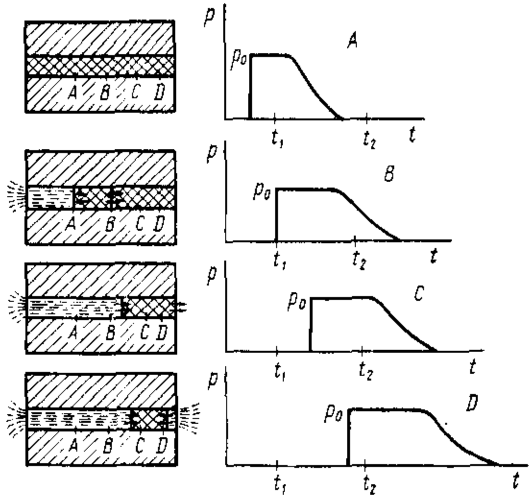

Рис. 9

направо вдоль поверхности тела; кривая давления p—t приведена на рис. 8, *б*. Длина *d* участка, на котором давление постоянно, зависит от толщины заряда.

Если заряд В. В. помещен в толстостенный цилиндр, то динамика взрыва принципиально отлична от вышеописанных (рис. 9). После инициирования вдоль заряда В. В. распространяется детонационная волна со скоростью *D* вправо, образующиеся продукты взрыва выталкиваются через левый торец цилиндра, зарождается волна разгрузки, которая распространяется вдоль цилиндра с меньшей скоростью, чем детонационная волна. В результате расстояние между фронтами волн с течением времени увеличивается. Детонационная волна, достигнув правого торца цилиндра, порождает волну разгрузки, которая распространяется в обратном направлении (влево) навстречу детонационной волне, идущей вправо по цилиндру. В точках *А*, *В*, *D* давления изменяются неодинаково, кривые давления p—t в каждой из указанных точек изображены на рис. 9. В точке *С* давление действует большее время, чем в любой другой точке цилиндра, продолжительность действия давления в этой точке определяется значениями скоростей волн детонации и разгрузки, а также длиной цилиндра, в котором помещен заряд В. В. Все вышеизложенное позволяет судить о влиянии формы заряда, его размещении на теле и виде В. В. на характер распределения давления по поверхности тела, его интенсивность и продолжительность действия.

Реальное тело не обладает абсолютной жесткостью. Поверхность тела, на которую действует давление продуктов взрыва, деформируется, что оказывает влияние на интенсивность импульсивных нагрузок. Реакция тела на действие нагрузок сводится к следующему: 1) вблизи поверхности материал тела под действием высокого давления продуктов взрыва вначале сильно сжимается; 2) при внезапном уменьшении давления поверхность тела возвращается в ненапряженное состояние, хотя материал может получить значительную пластическую деформацию; 3) в теле возникают возмущения, вызванные действующим давлением продуктов взрыва, длительность действия которых мала, так что длина импульса в материале невелика, однако возмущения имеют вид волны с крутым фронтом. Распространение этих волн проходит с высокими скоростями, т. е. в этом случае, очевидно, зарождаются ударные волны. При большой интенсивности возмущений тело может разрушаться либо в отдельных локальных областях, либо по всему объему.

Таким образом, взрывные способы позволяют не только вызывать возмущения в теле, но и управлять этими возмущениями, изменяя вид В. В., форму заряда, место его приложения, способ инициирования и т. д.

Смешанные способы возбуждения возмущений. В тех случаях, когда требуется получить и сохранить возмущения малой амплитуды, используются электрические и электронные способы возбуждения. В этих способах для приведения в действие преобразователя, превращающего электрическую энергию возбуждающего тока в механическую энергию волны напряжений в теле, используется переменный ток, частота волн при этом лежит между 20 кГц и 50 мГц. С помощью соответствующих контуров можно получать или непрерывный ряд волн, или импульсы, состоящие из коротких серий волн высокой частоты, повторяющихся регулярно с низкой частотой. Для этого используются преобразователи, принцип действия которых основан на магнитострикционном или пьезоэлектрическом эффектах. Материалами для пьезоэлектрических преобразователей кроме кристаллов кварца служат искусственные ферроэлектрические кристаллы (в частности, титанат бария в виде поликристаллической керамики), имеющие по сравнению с естественными кристаллами бо́льшую чувствительность и меньшее сопротивление. Однако температура Кюри искусственных кристаллов сравнительно низка (при нагревании выше этой температуры пьезоэлектрические свойства пропадают). Материалами для магнитострикционных преобразователей служат ферромагнитные элементы и сплавы. Максимальные деформации в обоих случаях определяются механическими свойствами материала тела. Для возбуждения слабых импульсов напряжений используют искровой способ, предложенный Кауфманом и Ревером [52]. Преимущество этого способа состоит в том, что искра действует как точечный источник, тогда как пьезоэлектрический преобразователь, благодаря дифракции, дает сложную волновую картину.

Таким образом, в теле можно возбудить возмущения, имеющие любые характеристики, которым соответствуют волны напряжений любой интенсивности, а также ударные волны.

§ 2. Методы измерения кинематических и динамических параметров волн напряжений

Изучение процесса распространения волн возмущений в теле сводится к установлению зависимостей изменения во времени напряжений, деформаций, скоростей или перемещений частиц и других параметров состояния материала в любой точке области возмущений. При экспериментальном исследовании необходимо измерять перечисленные параметры в любой момент времени для произвольной

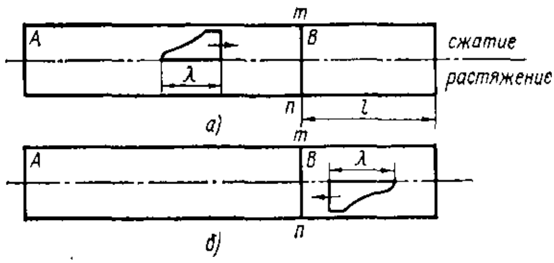

Рис. 10

точки тела. Эта задача имеет большое научное и практическое значение, однако решение ее весьма сложно из-за быстрого изменения параметров во времени, малой продолжительности процесса и некоторых других причин. Разработаны методы экспериментального исследования процесса распространения волн возмущений в теле, основанные на различных принципах измерения кинематических и динамических параметров. Это *механические*, *фотографические* и *электрические* методы.

В основу механических методов измерения положен принцип Гопкинсона [50,51], сущность которого состоит в экспериментальном определении последовательных приращений количества движения, т. е. площадей под кривой $\sigma(t)$, и построении по ним полной кривой $\sigma(t)$.

Рассмотрим два стержня A и B, изготовленных из одного и того же материала и находящихся в контакте друг с другом по поверхности торца mn (рис. 10, *а*, *б*). Контакт стержней не сопротивляется растягивающим напряжениям и пропускает волну сжатия без искажения. Импульсивная нагрузка $p(t)$, приложенная к левому торцу стержня A, порождает волну напряжений сжатия, которая распространяется по стержню A вправо, переходит без искажения в стержень B и, достигнув свободного (правого) торца стержня B, отражается как волна растяжения, распространяющаяся в обратном направлении; скорость распространения волн постоянна: c_0 =

$\sqrt{E/\rho}$. Напряжения в произвольном сечении стержня определяются как сумма напряжений от прямой и отраженной волн. При достижении волной растяжения контактной поверхности стержень B отлетает вправо, стержень A остается в покое; это произойдет в случае, если растягивающее напряжение превысит сжимающее, в противном случае стержень B не отскакивает. Приобретенное стержнем B количество движения можно вычислить. Пусть S — площадь поперечного сечения стержня B, l — его длина, σ — напряжение в волне в момент времени t. Количество движения, приобретенное стержнем B, соответствует промежутку времени $2l/c_0$ и равно

$$M_B = \int_0^{2l/c_0} S\sigma(t)\,dt. \tag{1.2.1}$$

Следовательно, M_B зависит от длины l стержня B. Если $l > \lambda/2$ (λ — длина волны напряжений), то все количество движения приобретается стержнем B, причем это движение соответствует полной площади под кривой $\sigma(t)$. Если $l < \lambda/2$, то только часть количества движения приобретается стержнем B [ее можно вычислить по формуле (1.2.1)], остальная же часть не выходит из стержня A, если волна имеет ударный фронт.

Таким образом, изменяя длину стержня B, можно находить площади под кривой $\sigma(t)$ в различные промежутки времени.

Точную форму кривой $\sigma(t)$ определить невозможно, так как неизвестны моменты времени, соответствующие началу различных интервалов; продолжительность импульса T и максимальное значение напряжения σ_m можно найти. Действительно, для стержня B продолжительность импульса

$$T = 2l/c_0. \tag{1.2.2}$$

При определении σ_m используют очень короткие стержни, так что в промежуток времени T достигается максимальное напряжение, причем количество движения, заключенное в стержне B,

$$M_B = \sigma_m S\,(2l/c_0). \tag{1.2.3}$$

Если стержень B отскакивает со скоростью v, то

$$M_B = \rho S l v. \tag{1.2.4}$$

Сравнивая (1.2.3) и (1.2.4), находим

$$v = 2\sigma_m/\rho c_0. \tag{1.2.5}$$

Для продольных упругих волн справедливо соотношение

$$\sigma = \rho c_0 \dot{u}, \tag{1.2.6}$$

доказательство которого приведено в гл. 3. Если $\dot{u}_m$ — максимальная скорость частицы в волне, то согласно (1.2.5) и (1.2.6) имеем

$$v = 2\dot{u}_m. \tag{1.2.7}$$

Если волна напряжений отражается нормально от свободной поверхности, то скорость поверхности $2\dot{u}$, поэтому скорость отделения v очень короткого стержня B равна максимальной скорости, которая сообщается волной напряжений свободному концу. Все сказанное справедливо для равномерного распределения по поперечному сечению напряжений и перемещений в волне, вызванной переходным распределением нормальных напряжений, которые действуют на конце стержня.

Рассмотрим прибор, реализующий принцип Гопкинсона. Он состоит из цилиндрического длинного стержня A определенного диаметра, подвешенного в горизонтальном положении на четырех нитях и способного совершать колебания в вертикальной плоскости. К одному концу стержня A прижат цилиндрический стержень B, называемый хронометром, к другому концу стержня прикладывается импульсивная нагрузка (давление при ударе или взрыве). Хронометр изготовлен из того же материала, что и стержень A, имеет одинаковый с ним диаметр. Один торец хронометра и концевое сечение стержня A, к которому он прижат, притерты; хронометр удерживается магнитным притяжением или нанесением тонкого слоя смазки на притертые поверхности. Такой прибор использовался Гопкинсоном при изучении удара снаряда в преграду. С помощью баллистического маятника замеряется количество движения хронометра, затем, используя приведенные зависимости, можно определить напряжение и другие параметры. Описанное устройство, называемое *мерным стержнем Гопкинсона*, имеет два существенных недостатка: 1) используя его, можно определить только продолжительность импульса T и значение σ_m и нельзя выяснить вид кривой $\sigma(t)$; 2) растягивающее усилие, необходимое для нарушения контакта между стержнем и хронометром, мешает использовать прибор для измерений импульсов малой амплитуды.

Р. Девис [8, 26] предложил мерный стержень, в котором измерения осуществляются электрическим способом, при этом обеспечивается непрерывная запись продольного перемещения, производимого импульсом напряжения на свободном конце стержня. С помощью стержня Девиса на основании соотношений (1.2.6) и (1.2.7) кривую $u(t)$ можно получить непосредственно, затем, дифференцируя эту кривую, найти кривую $\sigma(t)$ для импульса. Если же вместо продольного перемещения u конца стержня измерять радиальное перемещение w в том же сечении стержня, то получим

$$w = (\nu r_0/E)\,\sigma, \tag{1.2.8}$$

где r_0 — радиус стержня; E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона. В этом случае кривую $\sigma(t)$ можно получить из кривой $\omega(t)$ умножением на $\nu r_0/E$. С помощью стержня Девиса получается правильная запись импульсивной нагрузки, если напряжение не превышает предела упругости материала, а импульсивная нагрузка изменяется так, что длины волн, связанных с импульсом давления, сравнимы с радиусом стержня. Принципиальная схема стержня Девиса приведена на рис. 11. Продольное перемещение u концевого сечения стержня можно измерить, используя стержень в качестве заземленной обкладки в плоском конденсаторе. Изолированная обкладка состоит из металлической пластинки, вмонтированной в узел стержневого конденсатора, который свободно скользит по концу стержня и содержит изолированную пластинку, параллельную концевому сечению стержня. При медленном движении стержня обе обкладки движутся одновременно; при наличии импульса конец стержня перемещается свободно, тогда как изолированная пластинка по инерции в течение короткого промежутка времени остается в покое. Изолированная пластинка заряжается до высокого напряжения с помощью узла питания конденсатора, который имеет

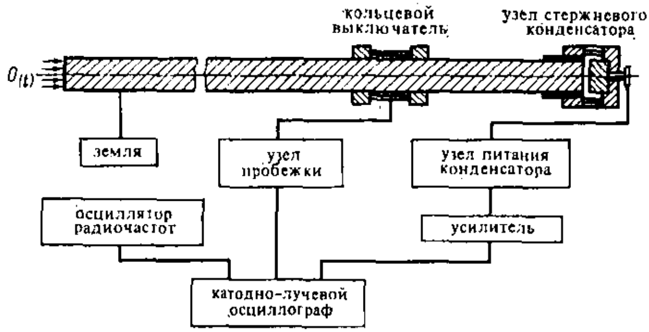

Рис. 11

контур сопротивление — емкость с большой постоянной времени, чем обеспечивается медленное изменение заряда изолированной пластинки. Быстрое изменение емкости плоскопараллельного конденсатора приводит к соответствующим изменениям разности потенциалов между его обкладками, при малом изменении емкости разность потенциалов прямо пропорциональна перемещению концевого сечения стержня. Изменения разности потенциалов усиливаются и подаются на катодно-лучевой осциллограф, где они регистрируются. На экране осциллографа имеются два пятнышка, которые движутся одинаково в горизонтальном направлении, но могут иметь независимые вертикальные перемещения. Электрический сигнал от узла плоскопараллельного конденсатора после усиления используется для перемещения одного из пятнышек осциллографа, тогда как другое пятнышко получает питание от *осциллятора радиочастот*. Горизонтальное перемещение пятнышка производится с помощью узла пробежки, который включается инерционным выключателем, расположенным на стержне. Выключатель состоит из изолированного металлического конца, который свободно скользит по стержню и находится в *контакте* с *металлическими штифтами*, ввинченными в стержень. Набегающий импульс отделяет кольцо от штифтов и зажигает газонаполненную термоионную лампу в узле пробежки, кроме этого, узел пробежки накладывает мгновенное положительное напряжение на контрольную сетку катодно-лучевой трубки, в результате чего яркость пятнышка возрастает при движении по экрану. В описанное устройство Девисом были введены два конденсатора цилиндрического типа, в которых изолированная металлическая цилиндрическая трубка удерживается так, что ее ось совпадает с осью стержня. Первый конденсатор поставлен на конце стержня и измеряет продольные перемещения, второй устанавливается в любом месте стержня и измеряет радиальные перемещения. Девисом показано, что для импульсов короткой продолжительности оба цилиндрических конденсатора дают эффекты искажения более сильные, чем плоскопараллельный конденсатор, поэтому эти конденсаторы применялись только для длинных импульсов. При измерении продольного перемещения u цилиндрический конденсатор имеет постоянную чувствительность даже при больших перемещениях; конденсатор, измеряющий радиальные перемещения ω, дает показания, пропорциональные напряжению σ, следовательно, нет необходимости дифференцировать кривую $w(t)$.

Для измерения параметров волн напряжений, вызванных взрывом или ударом, при распространении их в металлах Райнхарт и Пирсон [37] предложили другую реализацию принципа Гопкинсона, сводящуюся к следующему. На поверхности массивной металлической плиты устанавливается цилиндрический заряд В. В., на ее противоположной (тыльной) поверхности помещается маленькая шайба из того же материала, что и плита, по одной линии с зарядом (рис. 12). Заряд В. В. подрывали и измеряли скорость шайбы. Такая процедура повторялась с шайбами различной толщины h. В результате были получены необходимые данные для построения кривой $\sigma(t)$ в соответствии с приведенными зависимостями. Способ шайб дает хорошие результаты в том случае, если интенсивность волны невелика. При большой интенсивности волны напряжений шайба будет пластически деформироваться и может произойти откол. Представленная на рис. 12 схема не позволяет измерять скорость частиц (напряжение) точно в каком-либо месте внутри плиты, она определяет среднее напряжение в волне напряжений при падении ее на тыльную поверхность плиты, которое приближенно соответствует пространственному распределению напряжений внутри плиты. Различие невелико для волны, интенсивность которой затухает слабо, и значительно при быстром затухании, имеющем место в волне большой интенсивности. Отмеченные недостатки можно устранить или значительно уменьшить их влияние с помощью видоизмененного устройства, схема которого представлена на рис. 13. В плите с тыльной поверхности просверливается гнездо, в которое вкладывается несколько шайб, причем по отношению к распространению волны сжатия шайбы действуют так, как если бы они были частями плиты. Откол шайб можно исключить путем разумного подбора их толщин. Шайбы в гнезде необходимо поместить так, чтобы стык соседних шайб всегда находился в том месте, где ожидается разрушение. Такое устройство позволяет получить в результате одного испытания достаточно данных для построения полного распределения скоростей частиц. Оно позволяет также измерять напряжения, которые достаточно высоки, для того чтобы вызвать откол тонких шайб, т. е. разрушение, параллельное их поверхности, под действием отраженной волны растяжения, порожденной отражением прямой волны сжатия от свободной поверхности шайбы. Полученные результаты правильны, если волна имеет ударный фронт, за которым следует монотонное убывание интенсивности напряжений. Продолжительность действия напряжений порядка 10 мкс, максимальное напряжение $\sigma_m = 7{,}5 \cdot 10^{10}$ дин/см^2, что в 5—6 раз превышает предел прочности материала. Измерение скоростей частиц на тыльной поверхности плиты можно проводить с помощью отпечатка (вдавливания) по схеме, приведенной на рис. 12. Пусть S — площадь контакта шайбы и плиты, h — толщина шайбы, t — время, от-

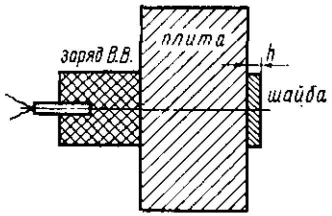

Рис. 12

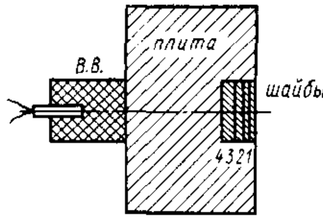

Рис. 13

считываемое от момента прихода фронта волны напряжений на тыльную поверхность плиты. В момент $t = 0$ частицы на площади S начинают двигаться вперед и их скорость равна половине скорости частиц, расположенных в окрестности площади S, так как в этой окрестности скорости частиц удваиваются из-за отражения волн напряжений от свободной поверхности. Некоторое различие скоростей в этих двух областях сохраняется до момента $T = 2h/a_0$, когда контакт нарушится вследствие прихода в S волны растяжения, отраженной от свободной поверхности шайбы. Если материал плиты находится в пластическом состоянии, то различие в скоростях приводит к остаточному отпечатку (вмятине) на поверхности плиты. Если предположить, что упругая деформация отсутствует, то глубина вдавливания

$$l = \int_0^{2h/a_0} v(t)\,dt, \tag{1.2.9}$$

где $v(t)$ — скорость частиц за фронтом волны. Следовательно, если брать шайбы различной толщины, то можно определить зависимость $v(t)$. Очевидно, такой способ измерения скорости частиц наиболее эффективен для материалов с явно выраженными пластическими свойствами, где обеспечено получение отчетливых вмятин.

Все вышеизложенное позволяет утверждать, что принцип Гопкинсона применим к любым деформирумым телам при условии, что волны напряжений распространяются с постоянной скоростью a_0, напряжение σ и скорость частиц $u = v$ связаны соотношением $\sigma = \rho a_0 v$.

В схемы устройств для измерения кинематических и динамических параметров процесса распространения волн напряжений входят датчики, являющиеся преобразователями механических возмущений в электрические сигналы, и измерительная аппаратура, позволяющая регистрировать эти сигналы. Рассмотрим принцип работы и устройство датчиков и измерительной аппаратуры. Установим требования, предъявляемые к ним, на примере аксельрометра [прибора для замера ускорения, представляющего собой систему с одной степенью свободы и состоящую из инерционного элемента массы M, упругого чувствительного элемента с жесткостью K и демпфера с коэффициентом затухания m (рис. 14)]. При определенных допущениях [1] систему можно считать линейной и ее движение характеризовать уравнением $\ddot{x} + 2\vartheta\dot{x} + \omega^2 x = f(t)$, решение которого имеет вид

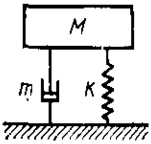

Рис. 14

$$x = gn/\omega^2 - \eta, \tag{1.2.10}$$

где g — ускорение свободного падения; $n = (1/g) f(t)$ — перегрузка; $f(t)$ — функция, определяющая измеряемое ускорение; ω — собственная частота колебаний системы; $\vartheta = m/(2M)$ — коэффициент демпфирования системы;

$$\eta = \frac{g}{\omega^2} e^{-\vartheta t} \int_0^t [e^{-\vartheta\tau} n(\tau)]' \cos\omega(t-\tau)\, d\tau \tag{1.2.11}$$

— динамическая поправка к перемещению системы. При отсутствии затухания в системе ($m = 0$), как показано А. Н. Крыловым,

$$\eta < (g/\omega^2)(T/2)\, n'(t_{max}). \tag{1.2.12}$$

Учитывая, что период свободных колебаний датчика $T = 2\pi/\omega$, неравенство (1.2.12) запишем в виде

$$\bar{\eta} = \frac{\pi}{\omega n_{max}} n'(t_{max}), \tag{1.2.13}$$

где t_{max} — момент времени, когда производная имеет максимум; $\bar{\eta}$ — отношение динамической поправки η к максимальному статическому отклонению $(x_{max})_{ст} = (g n_{max})/\omega^2$; n_{max} — максимальная перегрузка. А. Н. Крыловым были рассчитаны и построены кривые записи импульса, из анализа которых следует, что при записи перегрузок с помощью аксельрометра погрешности могут быть как положительными, так и отрицательными, что следует учитывать при оценке суммарной погрешности измерения. Следовательно, при измерении кратковременных импульсных процессов, какими являются нагружения тела при ударе и взрыве, желательно использовать датчики с высокой частотой собственных колебаний при наличии требуемой чувствительности.

Емкостный датчик, применяемый для изучения волн напряжений в деформируемом теле, состоит из изолированного проводника, установленного на той части тела, которая исследуется. Вследствие малой продолжительности процесса должны выполняться следующие условия: 1) при медленных перемещениях изолированный проводник относительно тела находится в покое; 2) при перемещениях, вызванных волнами напряжений, поверхность тела движется свободно, тогда как изолированный проводник остается в покое.

Если тело заземлено, то движение, вызванное волной напряжений, изменит емкость датчика. Изменение емкости преобразуется в изменение разности потенциалов, которая может быть усилена и преобразована как функция времени на экране электронно-лучевого осциллографа. Вообще говоря, изменение емкости датчика является функцией статической геометрии системы и соответствующих компонент поверхностных перемещений, осредненных по площади изолированного проводника. Изменяя геометрию устройства, можно измерять компоненты поверхностных перемещений. На рис. 15 схематически изображены датчики, сделанные из проволоки с высоким электрическим сопротивлением, сложенной так, что образуется система последовательно соединенных замкнутых параллельных витков; полученная решетка закреплена между слоями тонкой бумаги. Датчик приклеивается по всей площади к образцу, при деформировании площадки контакта деформация образца передается датчику. Если имеет место деформация растяжения, то длина проволочки возрастает, ее диаметр уменьшается; такое деформирование приводит к повышению сопротивления проволоки, в результате суммарное сопротивление датчика увеличивается. Деформация сжатия приводит к уменьшению сопротивления датчика. Пусть Ox — направление оси стержня. Предположим, что датчик ориентирован так, что его ось параллельна Ox и что в недеформированном состоянии он простирается от 0 до l. Если ε — деформация в точке с абсциссой x в момент времени t, то полное увеличение длины датчика Δt в момент t равно $\int_0^l \varepsilon dx$. В этом случае имеем

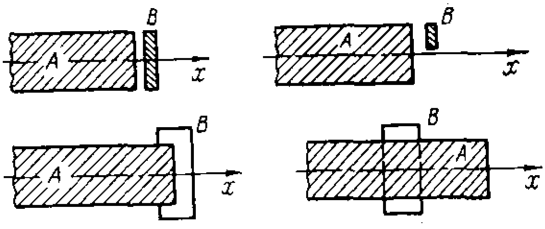

Рис. 15

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{S}{l}\int_0^l \varepsilon dx, \tag{1.2.14}$$

где R — сопротивление датчика до деформации; ΔR — увеличение сопротивления, соответствующее увеличению длины l датчика на

Δl; S — коэффициент чувствительности датчика. Для плоской волны вида

$$\varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{при } x/c \geqslant t, \\ \varepsilon^0 \exp\left(\dfrac{x/c - t}{\theta}\right) & \text{при } x/c \leqslant t, \end{cases}$$

где θ — время, необходимое для того, чтобы деформация в данной точке упала от максимального значения ε^0 до значения ε^0/l, получим

$$\Delta R/R = (S\varepsilon^0 c\theta/l)\,(e^{l/c\theta} - 1)\,e^{-t/\theta}. \qquad (1.2.15)$$

Отсюда следует, что по изменению сопротивления ΔR можно определить деформацию ε^0. По сравнению с емкостными датчиками, используемыми в мерном стержне Девиса, датчики сопротивления имеют преимущество, а именно: с их помощью возможно непосредственное измерение деформации и отпадает необходимость в дифференцировании кривой $u(t)$. Однако датчики сопротивления обладают следующими недостатками: конечная длина датчика ограничивает его разрешающую способность при быстро изменяющихся деформациях; датчик сопротивления измеряет деформацию на поверхности стержня. В последнее время при исследовании процесса распространения волн напряжений широко используются датчики, основанные на пьезоэлектрическом эффекте. В зависимости от конструкции пьезодатчиков можно получить высокие частоты собственных колебаний (до 60 кГц), что находится в соответствии с указанными требованиями. Датчик содержит чувствительный элемент (цилиндрический или кольцевой) из поляризованной пьезокерамики, инерционный груз и контактное устройство, соединяющее пьезоэлемент с регистрирующей аппаратурой. Пьезоэлемент датчика, как правило, изготовляется из титаната бария. Недостатком таких датчиков является непостоянство чувствительности, что требует тарировки каждого датчика отдельно. Как и датчик сопротивления, пьезодатчик измеряет среднее напряжение на площадке контакта, поэтому при проведении эксперимента, в котором спектр волн напряжений содержит компоненты высокой частоты, должна быть обеспечена высокая точность его выполнения. В отличие от датчиков сопротивления, которые позволяют производить измерения в одном направлении, датчики с титанатом бария одинаково чувствительны к напряжениям в направлении длины и радиальном направлении.

Для регистрации сигнала, снимаемого с датчика, используется измерительная аппаратура, описание которой дано многими авторами, в частности, для пьезодатчиков это сделано Г. С. Батуевым и др. [1]; ими же подробно рассмотрены вопросы тарировки датчиков, калибровки аппаратуры и оценки точности измерений кинематических параметров процесса распространения волн напряжений, что имеет большое значение при подготовке и проведении эксперимента, а также при обработке экспериментальных данных.

Фотографические методы исследования успешно используются для изучения движения точки поверхности тела при прохождении через нее волны напряжений, а также при изучении распространения фронта волны напряжений. При изучении движения поверхности тела в одних случаях используется непрерывная запись движения, получаемая с помощью вращающегося барабана или вращающейся зеркальной камеры, в других применяется прерывная запись, получаемая с помощью источника света, дающего вспышки малой продолжительности. Изучение движения фронта волны напряжений основано на использовании многократных вспышек.

Применение скоростной фотосъемки при исследовании процесса распространения волн напряжений в деформируемых телах связано прежде всего с обеспечением необходимого освещения изучаемого процесса. Освещение быстропротекающих процессов производится тремя способами: самоосвещением, источниками света, рентгеновским излучением. Выбор того или иного способа зависит от природы изучаемого явления, реакции на используемый источник освещения, типа камеры, фотооборудования и материалов, используемых для записи явления.

Некоторые явления, сопровождающие процесс распространения волн напряжений, являются самосветящимися и могут быть записаны с помощью скоростной фотосъемки без внешнего освещения (к таким явлениям относятся детонация В. В., светящиеся ударные волны и др.). Интенсивность освещения в этих случаях бывает достаточной для записи явления при помощи специальных камер с движущейся пленкой. Частичная запись явления осуществляется с помощью щелей, механических и магнитооптических затворов и других приспособлений.

Источники света могут излучать свет непрерывно и прерывисто, в виде серии вспышек или в виде единичной вспышки высокой интенсивности, продолжительностью в несколько мкс. При непрерывном освещении дискретность изображения на пленке получается с помощью оптико-механической схемы или же явление записывается в виде фотографического следа. В качестве непрерывных источников света используются вольфрамовые лампы и ртутные дуговые источники [37]. Прерывистое освещение используется в сочетании с камерами, имеющими непрерывно движущуюся пленку. Величину экспозиции определяет интенсивность вспышки источника света. Источники, дающие единичные управляемые вспышки света, можно использовать для камер с неподвижной пленкой, картина движения получается за счет кратковременности вспышки. Для освещения высокоскоростных процессов применяются газоразрядные трубки с холодным катодом. Такая трубка может давать одиночную вспышку или несколько вспышек подряд. Трубку поджигают разрядом конденсатора высокого напряжения, получается кратковременная вспышка света высокой интенсивности. Действие газоразрядной трубки с холодным катодом основано на следующем принципе. Напряжение от конденсаторов прилагают к главным электродам, однако вспышки газа не происходит до тех пор, пока на третий (пусковой) электрод не подан импульс. Трубка заполняется инертным газом (криптоном, аргоном, ксеноном). Высокая плотность тока в трубке дает повышение эффекта освещения и одновременно увеличивает длительность вспышки. Интервал экспозиции от 500 до 1 мкс. Освещение продолжительностью от 10 до 500 мс лучше всего обеспечивается лампой-вспышкой, дающей вспышку при сгорании алюминиевой проволоки в кислороде. Кратковременные источники света очень высокой интенсивности используют свет от взрыва [37, 53]. Экспозиция короткой длительности (от 1 до 0,1 мкс) обеспечивается с помощью электрической вспышки в воздухе. Искровые промежутки — результат разряда заряженного до высокого потенциала конденсатора малой емкости (например, конденсатор на 0,1 мкФ, заряженный до $8 \cdot 10^3$ В). Увеличение потенциала и уменьшение емкости приводят к уменьшению длительности искры. Электрическую искру как источник света используют в различных устройствах, например при получении теневой фотографии, многократное использование которой обеспечивает запись на неподвижную пленку до 10^6 кадров/с, однако в этом случае за один раз можно получить ограниченное число снимков. При изучении процесса распространения волн напряжений в оптически непрозрачных материалах используется техника вспышечной рентгенографии. Вспышечные рентгенограммы получаются синхронизацией с исследуемым явлением вспышки x-лучей продолжительностью в микросекунду. Характерным для всех типов рентгено-импульсного оборудования является осуществление разряда высоковольтной емкости через рентгеновскую трубку. Длительность x-лучей составляет около 1,5 мкс.

Съемка процесса распространения волн напряжений производится с помощью скоростных фотокамер различной конструкции. Выбор камеры зависит от желаемого времени развертки, длительности процесса, необходимого качества изображения, размера снимка, надежности и экономичности съемки, количества и сложности необходимого для съемки оборудования. Камеры могут быть с неподвижной и с непрерывно движущейся пленкой. В свою очередь, камеры с неподвижной пленкой бывают двух типов: в первом нет никаких движущихся частей, только освещение изучаемого явления обусловливает появление изображения; во втором изображение быстро перемещается по пленке с помощью какой-нибудь оптико-механической системы. Камеры первого типа применяются вместе с аппаратурой для одиночной вспышки или для многоискровой съемки. При освещении процесса одной вспышкой света затвор камеры остается открытым, после вспышки он закрывается либо вручную, либо с помощью специального приспособления. При многоискровой съемке применяется схема, позволяющая использовать несколько камер ящичного типа и устроенная так, что каждая вспышка дает изображение только в одной камере. Существуют камеры, в которых пленка остается неподвижной, а само изображение перемещается по пленке с большой скоростью. Используются схемы, в которых совпадение прорезей во вращающихся дисках аналогично работе затвора, что позволяет получить изображение в нужном месте неподвижной пленки. Вращающиеся зеркала в сочетании с неподвижной пленкой используются для получения штриховых или смазанных изображений. Камеры с непрерывно движущейся пленкой построены по одной из трех приведенных на рис. 16 схем. В камере схемы, изображенной на рис. 16, *а*, пленка устанавливается в исходное положение, в течение процесса она быстро перемещается в другое положение; в камере схемы, изображенной на рис. 16, *б*, кусок пленки прикрепляется к барабану, вращающемуся с большой скоростью; в камере схемы, приведенной на рис. 16, *в*, используется быстровращающийся диск, покрытый листом фотоматериала. Время развертки, которое можно получить с помощью ка-

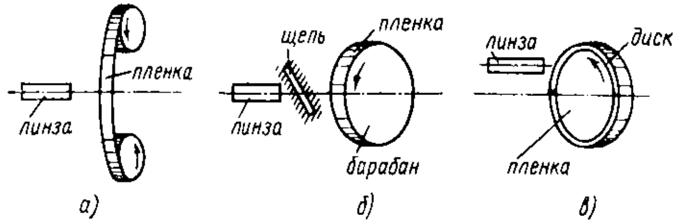

Рис. 16

меры, зависит от линейной скорости, которая в первом случае равна 30 м/с, во втором — около 250 м/с. Скорость пленки в камере должна быть такой, чтобы последовательные изображения не перекрывались; для этого необходимо выполнение условия

$$v \geqslant \frac{f}{100D} HR, \qquad (1.2.16)$$

где v — скорость пленки, м/с; f — фокусное расстояние линзы, см; D — расстояние до объектива, м; H — высота объекта, м; R — число вспышек в секунду. Существуют три типа камер с подвижной оптикой: камеры с вращающимися зеркалами, камеры с вращающимися призмами и камеры с вращающимися линзами и щелями. В каждой из этих камер изображение, отбрасываемое линзой (объективом), остается неподвижным относительно непрерывно движущейся пленки. Вращение зеркала, призмы или линзы приводит к движению изображения по пленке со скоростью, которая определяется движением самой пленки. Проектирование изображения и движение пленки согласованы так, что получается ряд отчетливых изображений. Увеличение скорости записи изображений без увеличения скорости движения пленки основано на принципе расщепления кадра, суть которого состоит в том, что с помощью специального устройства оптической системы на кадре вместо одного изображения, покрывающего всю площадь, образуются четыре последовательных изображения в порядке, показанном на рис. 17. Тогда за время, в течение которого образовался бы один кадр, записываются четыре картинки, повторяемость кадров увеличивается в четыре раза. Аналогично можно произвести расщепление кадра на 9, 16, 36, 64 части с соответствующим увеличением повторяемости. Этот принцип используется в камерах барабанного типа, однако его можно использовать и в других типах камер с непрерывно движущейся пленкой.

Трудности, возникающие в эксперименте при фотографировании процесса распространения волн напряжений, обусловлены малой продолжительностью явления, сочетающейся при изучении движения поверхности с малостью перемещений, а при изучении движения фронта волны—с высокими значениями скорости распространения. Возникает потребность в синхронизации источника освещения с исследуемым явлением, при этом главная задача состоит в получении хорошего снимка. Для этого используют особенности изучаемого явления, так, например, удар снаряда о преграду можно использовать для начального включения искры, разрыв проволочек на пути движения снаряда в преграде обеспечивает последующие включения искры. Для получения одиночного изображения движущегося объекта применяется метод, в котором объект перекрывает пучок света между фотоэлементом и конденсатором. Синхронизация движения объекта с одиночной вспышкой достигается изменением расстояния между предметом и его положением, при котором он прерывает луч. Если фотографируемое явление сопровождается звуком, то можно использовать микрофонный адаптер. Синхронизация между явлениями, порождающими звук, и источником света достигается изменением положения предмета относительно микрофона; ряд последовательных фотографий повторяющихся операций получают изменением положения микрофона от экспозиции к экспозиции. В зависимости от конкретной задачи возможны различные комбинации микрофонного адаптера и связанной с ним аппаратуры.

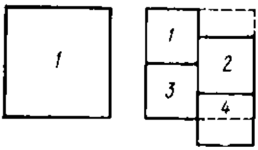

Рис. 17

Таким образом, фотографические методы позволяют непосредственно измерять только кинематические парамеры процесса распространения волн напряжений, а именно перемещение и в некоторых случаях скорость, другие же параметры определяются косвенно с помощью соответствующих формул, тогда как методы, основанные на принципе Гопкинсона, в сочетании с электрическими устройствами (датчики, измерительная аппаратура) позволяют непосредственно измерять некоторые динамические параметры процесса распространения волн напряжений.

§ 3. Постановка и решение задачи о распространении волн напряжений

Пусть тело находится в условиях динамического или импульсивного нагружения, вызванного действием внешних объемных и поверхностных сил, температуры и других факторов. При таком нагружении в теле распространяются волны напряжений, образуя области возмущений, в которых тело оказывается в напряженно-деформированном состоянии с тензором напряжений (σ) и тензором деформаций (ε), его частицы находятся в движении с вектором скорости $\mathbf{v}$.

Отнесем тело к системе координат x^i ($i = 1, 2, 3$), которую выберем так, чтобы границы тела и области возмущений частично или полностью входили в число координатных поверхностей. В этом случае граничные условия формулируются наиболее просто, следовательно, облегчается построение решения задачи о напряженно-деформированном состоянии тела и движении его частиц в области возмущений. Система координат x^i характеризуется метрическим тензором $(g) = g_{ij}\mathbf{r}^i\mathbf{r}^j = g^{ij}\mathbf{r}_i\mathbf{r}_j = g^i_j\mathbf{r}_i\mathbf{r}^j$, где $g_{ij} = (\mathbf{r}_i\mathbf{r}_j)$, $g^{ij} = (\mathbf{r}^i\mathbf{r}^j)$, $g^i_j = (\mathbf{r}^i\mathbf{r}_j)$ — соответственно ковариантные, контравариантные и смешанные компоненты, причем $g^{ij} = G_{ij}/g$; здесь G_{ij} — алгебраические дополнения элементов g_{ij} определителя $g = \det((g_{ij}))$.

Искривленность пространства с системой координат x^i определяется символами Кристоффеля первого рода

$$\Gamma_{ijn} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{in}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jn}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^n}\right)$$

и второго рода $\Gamma^k_{ij} = g^{nk}\Gamma_{ijn}$, а также тензором кривизны (R) с компонентами

$$R_{ijmn} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{ni}}{\partial x^j\,\partial x^m} + \frac{\partial^2 g_{mj}}{\partial x^i\,\partial x^n} - \frac{\partial^2 g_{mi}}{\partial x^j\,\partial x^n} - \frac{\partial^2 g_{nj}}{\partial x^i\,\partial x^m}\right) + \\ + \left(\Gamma^k_{mj}\,\Gamma_{kni} - \Gamma^k_{mi}\,\Gamma_{knj}\right).$$

Форма тела и области возмущений произвольная, геометрия задается уравнениями ограничивающих поверхностей S.

Задача динамики деформируемого тела состоит в том, чтобы по известной геометрии формы тела и области возмущений, действующим внешним силовым факторам и физико-механическим свойствам материала определить характеристики напряженно-деформированного состояния тела и движения его частиц в любой момент времени. Искомыми являются тензор напряжений (σ), вектор скорости частиц $\mathbf{v}$ и плотность материала ρ; компоненты их в зависимости от физико-механических свойств материала тела подчинены уравнениям движения

$$\nabla_i\,\sigma^{ij} + F^j = \rho\,\frac{dv^j}{dt}, \tag{1.3.1}$$

уравнению неразрывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla_i\,(\rho v^i) = 0 \tag{1.3.2}$$

и вариационному уравнению

$$\delta R = \int\limits_{S_2} n_j\,u_{is}\,\delta\sigma^{ij}\,dS$$

или (1.3.3)

$$\delta W = \int\limits_{S_2} n_j\,v_{is}\,\delta\sigma^{ij}\,dS,$$

а также при $t = 0$ начальным условиям

$$(\sigma) = (\sigma)_0, \ \mathbf{v} = \mathbf{v}_0, \ \rho = \rho_0 \tag{1.3.4}$$

и граничным условиям в напряжениях на части поверхности S_1

$$p^i_{(n)} = \sigma^{ij}(S)\, n_j,$$

в перемещениях на части поверхности S_2

$$u_i(S) = u_{is}, \tag{1.3.5}$$

и на всей поверхности тела

$$v_i(S) = v_{is}, \ \rho(S) = \rho_s.$$

Сформулированная задача относится к области возмущений D объема V, ограниченной поверхностью S; с течением времени область D расширяется, так как возмущения распространяются с некоторой конечной скоростью.

Задаче динамики деформируемого тела можно поставить в соответствие задачу о равновесии фиктивного четырехмерного тела. Для этого в рассмотрение вводится четырехмерное пространство с системой координат $x^\alpha (\alpha = 1, 2, 3, 0)$, в которой первые три координаты x^i $(i = 1, 2, 3)$ — пространственные; они совпадают с координатами x^i основной системы координат, четвертая координата — временная: $x^0 = v^0 t$, где v^0 — коэффициент пропорциональности, имеющий размерность скорости. Координатная линия x^0 — прямая, ортогональная к другим координатным линиям системы координат. Метрический тензор системы координат x^α имеет компоненты $g_{00} = -1$, $g_{i0} = 0$, остальные компоненты g_{ij} совпадают с соответствующими компонентами метрического тензора основной системы координат x^i $(i = 1, 2, 3)$. Введем в рассмотрение четырехмерный тензор кинетических напряжений (T), компоненты которого имеют вид [24]

$$T^{ij} = \rho v^i v^j - \sigma^{ij}; \quad T^{i0} = \rho v^i v^0, \qquad T^{00} = \rho v^0 v^0 \tag{1.3.6}$$

и удовлетворяют уравнениям

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} + F^\beta = 0, \ F^0 = 0. \tag{1.3.7}$$

Тензор (T) характеризует напряженное состояние фиктивного тела, свойства которого определяются [19] следующими постулатами:

1) в направлении пространственных координат x^i свойства фиктивного тела совпадают со свойствами реального тела;

2) в направлении временной координаты x^0 фиктивное тело абсолютно жесткое (недеформируемое).

Перемещения частиц фиктивного тела характеризуются вектором $\mathbf{w}$ с компонентами

$$w_i = u_i \ (i = 1, 2, 3), \ w_0 = w_0(t); \tag{1.3.8}$$

деформированное состояние — тензором малых деформаций фиктивного тела $(\tilde{e})$ с компонентами

$$\tilde{e}_{\alpha\beta} = (1/2)(\nabla_\alpha w_\beta + \nabla_\beta w_\alpha)\,(\alpha, \ \beta = 1, 2, 3, 0). \tag{1.3.9}$$

Движение частиц фиктивного тела характеризуется четырехмерным вектором скорости $\tilde{v}$ с компонентами

$$\tilde{v}_i = v_i \ (i = 1,\ 2,\ 3),\ \tilde{v}_0 = v_0. \qquad (1.3.10)$$

Ему соответствует тензор скоростей деформаций фиктивного тела, компоненты которого

$$\dot{\tilde{e}}_{\alpha\beta} = (1/2)\left(\nabla_\alpha \tilde{v}_\beta + \nabla_\beta \tilde{v}_\alpha\right). \qquad (1.3.11)$$

Тензор кинетических напряжений имеет основные инварианты:

$$\mathrm{T}_1(T) = g_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = \rho\,(v^2 + v^{02}) - \mathrm{T}_1(\sigma),$$

$$\mathrm{T}_2(T) = T_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = [\rho\,(v^2 + v^{02})]^2 - 2\rho\sigma^{ij} v_i v_j + \mathrm{T}_2(\sigma),$$

$$\mathrm{T}_3(T) = T_\alpha^\beta T_\beta^\gamma T_\gamma^\alpha$$

и производные:

$$T = \mathrm{T}_1(T)/3,\ T_i = (1/\sqrt{2})\sqrt{3\mathrm{T}_2(T) - \mathrm{T}_1^2(T)}.$$

Тензор деформаций фиктивного тела имеет основные инварианты:

$$\mathrm{T}_1(\tilde{e}) = \tilde{e}_{\alpha\beta}\, g^{\alpha\beta} = \mathrm{T}_1(e),$$

$$\mathrm{T}_2(\tilde{e}) = \tilde{e}_{\alpha\beta}\, \tilde{e}^{\alpha\beta} = (v/2v^0)^2 + \mathrm{T}_2(e),\ \mathrm{T}_3(\tilde{e}) = \tilde{e}_\alpha^\beta \tilde{e}_\beta^\gamma \tilde{e}_\gamma^\alpha$$

и производные:

$$\tilde{e} = (1/3)\ \mathrm{T}_1(\tilde{e}),\ \tilde{e}_i = (\sqrt{2}/3)\sqrt{3\mathrm{T}_2(\tilde{e}) - \mathrm{T}_1^2(\tilde{e})}.$$

Основные инварианты тензора скоростей деформаций фиктивного тела:

$$\mathrm{T}_1\left(\dot{\tilde{e}}\right) = \dot{\tilde{e}}_{\alpha\beta}\, g^{\alpha\beta} = \mathrm{T}_1(\dot{e}),$$

$$\mathrm{T}_2\left(\dot{\tilde{e}}\right) = \dot{\tilde{e}}_{\alpha\beta}\, \dot{\tilde{e}}^{\alpha\beta} = \mathrm{T}_2(\dot{e}) + \left(\frac{\partial v_i}{\partial x^0}\,\frac{\partial v^i}{\partial x^0}\right),\ \mathrm{T}_3\left(\dot{\tilde{e}}\right) = \dot{\tilde{e}}_\alpha^\beta\, \dot{\tilde{e}}_\beta^\gamma\, \dot{\tilde{e}}_\gamma^\alpha,$$

производные инварианты:

$$\dot{\tilde{e}} = (1/3)\mathrm{T}_1\left(\dot{\tilde{e}}\right),\ \dot{\tilde{e}}_i = (\sqrt{2}/3)\sqrt{3\mathrm{T}_2\left(\dot{\tilde{e}}\right) - \mathrm{T}_1^2\left(\dot{\tilde{e}}\right)}.$$

В соответствии с постулатами о фиктивном теле физические соотношения, устанавливающие связь между компонентами тензоров (T) и $(\tilde{e})$, следующие:

а) для упругопластического тела при нагрузке

$$\tilde{e}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2G}\left[T_{\alpha\beta} + \left(\left(\frac{2G}{3K} - 1\right)T + 2G\alpha T^0\right) g_{\alpha\beta} + \varphi\,(T_{\alpha\beta} - T g_{\alpha\beta})\right],$$

при разгрузке

$$\Delta\tilde{e}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2G}\left[\Delta T_{\alpha\beta} + \left(\left(\frac{2G}{3K} - 1\right)\Delta T + 2G\alpha\Delta T^0\right) g_{\alpha\beta}\right], \qquad (1.3.12)$$

при $\varphi = 0$ получаем соотношения для упругого тела;

б) для вязкоупругого тела

$$\tilde{e}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2G}\left[T_{\alpha\beta}+\left(\left(\frac{2G}{3K}-1\right)T+2G\alpha T^0\right)g_{\alpha\beta}\right]+$$

$$+\frac{1}{v^0}\int_0^{x^0}\left[\tilde{R}(x^0y^0)T_{\alpha\beta}(y^0)+(\tilde{R}_1(x^0y^0)-\tilde{R}(x^0y^0))T(y^0)g_{\alpha\beta}\right]dy^0. \tag{1.3.13}$$

Физические соотношения, устанавливающие связь между компонентами тензоров (T) и $(\tilde{e})$, имеют вид:

а) для вязкопластического тела при нагрузке

$$\dot{e}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2\eta}\left[T_{\alpha\beta}+\left(\left(\frac{2\eta}{\lambda}-1\right)T+\frac{2\eta}{\lambda}p_0\right)g_{\alpha\beta}\right], \tag{1.3.14}$$

при $\eta=\mu$ получаем соотношения для вязкой жидкости;

б) для вязкоупругопластического тела при нагрузке

$$\dot{\tilde{e}}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2G}\left[\dot{T}_{\alpha\beta}+\left(\left(\frac{2G}{3K}-1\right)\dot{T}+2G\alpha\dot{T}^0\right)g_{\alpha\beta}\right]+\tilde{A}g_{\alpha\beta}+$$

$$+\tilde{B}D_{\alpha\beta}(T)+\tilde{C}\tau_{\alpha\beta};$$

$$\tau_{\alpha\beta}=D_{\alpha\gamma}(T)D^{\gamma}_{\beta}(T)-(2/3)\,\mathrm{T}_2(D_T)\,g_{\alpha\beta}, \tag{1.3.15}$$

где

$$\tilde{A}=\gamma\tilde{\Phi}\left[\frac{\tilde{f}}{\tilde{\varkappa}}-1\right]\frac{\partial\tilde{f}}{\partial T_1(T)};\ \tilde{B}=\gamma\tilde{\Phi}\left[\frac{\tilde{f}}{\tilde{\varkappa}}-1\right]\frac{\partial f}{\partial T_2(D_T)};$$

$$\tilde{C}=\gamma\tilde{\Phi}\left[\frac{\tilde{f}}{\tilde{\varkappa}}-1\right]\frac{\partial f}{\partial T_3(D_T)}.$$

Здесь $\tilde{\varkappa}=\tilde{\varkappa}\left(\int_0^{\dot{e}^{(p)}_{\gamma\delta}}T^{\alpha\beta}\dot{\tilde{e}}^{(p)}_{\alpha\beta}\right)$ — параметр упрочнения фиктивного тела, $\tilde{f}(T_{\alpha\beta})=f(\mathrm{T}_1(T),\ \mathrm{T}_2(D_T),\ \mathrm{T}_3(D_T))$ — функция текучести, определяемая экспериментально.

Неупругую составляющую $\dot{\tilde{e}}^{(p)}_{\alpha\beta}$ можно представить в виде

$$\dot{\tilde{e}}^{(p)}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2\tilde{\eta}}\left[T_{\alpha\beta}+\left(\left(\frac{2\tilde{\eta}}{\lambda}-1\right)T+\frac{2\tilde{\eta}}{\lambda}p_0\right)g_{\alpha\beta}\right],$$

где

$$\tilde{\eta}=\mu+\tilde{\tau}_i/\dot{\gamma}_i,$$

$$\tilde{\tau}_i=(2/3)\sqrt{3\mathrm{T}_2(T)-\mathrm{T}_1^2(T)},\ \dot{\tilde{\gamma}}_i=(2/3)\sqrt{3\mathrm{T}_2(\dot{\tilde{e}})-\mathrm{T}_1^2(\dot{\tilde{e}})}.$$

Принцип минимума дополнительной работы деформации фиктивного тела характеризуется вариационным уравнением

$$\delta R_\Phi=\int_{S_2}n_\beta\,w_{\alpha s}\,\delta T^{\alpha\beta}\,dS; \tag{1.3.16}$$

при этом для вязкоупругого тела

$$\delta R_{\Phi}=\frac{1}{2G}\int\limits_{V}\left\{\left[T_{\alpha\beta}+\left(\left(\frac{2G}{3K}-1\right)T+2G\alpha T^{0}\right)g_{\alpha\beta}\right]+\right.$$

$$+\frac{2G}{v^{0}}\int\limits_{0}^{x_0}\left[\widetilde{R}(x^{0}y^{0})\,T_{\alpha\beta}(y^{0})+(\widetilde{R}_{1}(x^{0}y^{0})-\right.$$

$$\left.\left.-\widetilde{R}(x^{0}y^{0}))\,T(y)_{0}\,g_{\alpha\beta}\right]dy^{0}\right\}\delta T^{\alpha\beta}\,dV, \qquad (1.3.17)$$

для упругопластического тела

$$\delta R_{\Phi}=\frac{1}{2G}\int\limits_{V}\left[T_{\alpha\beta}+\left(\left(\frac{2G}{3K}-1\right)T+2G\alpha T^{0}\right)g_{\alpha\beta}+\right.$$

$$\left.+\varphi(T_{i})(T_{\alpha\beta}-Tg_{\alpha\beta})\right]\delta T^{\alpha\beta}\,dV. \qquad (1.3.18)$$

При разгрузке имеем вариационное уравнение

$$\delta\Delta R_{\Phi}=\int\limits_{S_2}n_{\beta}\,\Delta w_{\alpha S}\,\delta\Delta T^{\alpha\beta}\,dS, \qquad (1.3.19)$$

где

$$\delta\Delta R_{\Phi}=\frac{1}{2G}\int\limits_{V}\left[\Delta T_{\alpha\beta}+\left(\left(\frac{2G}{3K}-1\right)\Delta T+2G\alpha\Delta T^{0}\right)g_{\alpha\beta}\right]\delta\Delta T^{\alpha\beta}\,dV.$$

Принцип минимума дополнительной мощности деформаций фиктивного тела при нагрузке характеризуется вариационным уравнением

$$\delta W_{\Phi}=\int\limits_{S_2}n_{\beta}\,\widetilde{v}_{\alpha S}\,\delta T^{\alpha\beta}\,dS; \qquad (1.3.20)$$

при этом для вязкопластического тела

$$\delta W_{\Phi}=\int\limits_{V}\frac{1}{2\widetilde{\eta}}\left[T_{\alpha\beta}+\left(\left(\frac{2\widetilde{\eta}}{\lambda}-1\right)T+\frac{2\widetilde{\eta}}{\lambda}\,p_{0}\right)g_{\alpha\beta}\right]\delta T^{\alpha\beta}\,dV, \qquad (1.3.21)$$

для вязкоупругопластического тела

$$\delta W_{\Phi}=\int\limits_{V}\left\{\frac{1}{2G}\left[\dot{T}_{\alpha\beta}+\left(\left(\frac{2G}{3K}-1\right)\dot{T}+2G\alpha\,\dot{T}^{0}\right)g_{\alpha\beta}\right]+\right.$$

$$\left.+\widetilde{A}g_{\alpha\beta}+\widetilde{B}D_{\alpha\beta}(T)+\widetilde{C}\tau_{\alpha\beta}\right\}\delta T^{\alpha\beta}\,dV. \qquad (1.3.22)$$

При разгрузке имеем вариационное уравнение

$$\delta\Delta W_{\text{ф}} = \int\limits_{S_1} n_\beta \, \Delta\widetilde{v}_{\alpha s} \, \delta\Delta T^{\alpha\beta} \, dS, \tag{1.3.23}$$

где для вязкопластического тела

$$\delta\Delta W_{\text{ф}} = \int\limits_V \frac{1}{2\widetilde{\eta}_p} \left[\Delta T_{\alpha\beta} + \left(\left(\frac{2\widetilde{\eta}_p}{\lambda} - 1 \right) \Delta T + \frac{2\widetilde{\eta}_p}{\lambda} \Delta p_0 \right) g_{\alpha\beta} \right] \delta\Delta T^{\alpha\beta} \, dV.$$

Здесь функция $\widetilde{\eta}_p = \mu + \widetilde{\tau}_i^p / \dot{\gamma}_i$, причем $\widetilde{\tau}_i^p = \widetilde{\tau}_i^p(\dot{\gamma}_i)$ характеризует разгрузку тела и определяется экспериментально.

Начальные (1.3.4) и граничные (1.3.5) условия для реального тела переходят в граничные условия для фиктивного тела: на части поверхности S_1

$$T^{\alpha\beta}(S) \, n_\beta = q^\alpha_{(n)}, \tag{1.3.24}$$

где $q^\alpha_{(n)} = q^{\alpha\beta}_{(n)} n_\beta$, $q^{\alpha\beta}_{(n)} = (\rho v^\alpha v^\beta)_s - p^{\alpha\beta}_n$;

на части поверхности S_2

$$w^\alpha_s(S) = w^\alpha_s. \tag{1.3.25}$$

При динамическом нагружении тела возмущения распространяются с определенной конечной скоростью в виде волн напряжений. Фронт волны напряжений является поверхностью разрыва S, на которой дожны выполняться кинематические и динамические условия. В момент времени t с одной стороны поверхности S среда возмущена, имеют место перемещения $\mathbf{u}$ ее частиц; с другой стороны поверхности среда находится в покое, перемещений частиц нет. Однако выполнение гипотезы сплошности среды (материала тела) требует, чтобы при переходе через поверхность S перемещения оставались непрерывными, вследствие чего они должны исчезать на поверхности S:

$$\mathbf{u} = 0. \tag{1.3.26}$$

Пусть $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S. Обозначим через $\mathbf{s}$ какое-нибудь направление в касательной плоскости, которая проведена в произвольной точке поверхности так, что $\mathbf{n}$ и $\mathbf{s}$ взаимно ортогональны: $n^i s_i = 0$. Так как перемещения $\mathbf{u}$ исчезают во всех точках S, то для всех направлений $\mathbf{s}$ имеем уравнения

$$\nabla_j u^i s^j = 0.$$

Отсюда следует, что во всех точках поверхности S

$$\frac{\nabla_1 u^i}{n^1} = \frac{\nabla_2 u^i}{n^2} = \frac{\nabla_3 u^i}{n^3} = \frac{\partial u^i}{\partial n}. \tag{1.3.27}$$

Условие $u^i = 0$, относящееся к поверхности S, должно выполняться при замене x^i и t соответственно на $x^i + cn^i dt$ и $t + dt$, поэтому в каждой точке поверхности S должно иметь место равенство

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} + c\nabla_j u^i n^j = 0. \tag{1.3.28}$$

Комбинируя (1.3.27) и (1.3.28), получим кинематические условия

$$\frac{\nabla_1 u^i}{n^1} = \frac{\nabla_2 u^i}{n^1} = \frac{\nabla_3 u^i}{n^3} = \frac{\partial u^i}{\partial n} = -\frac{1}{c}\frac{\partial u^i}{\partial t}, \qquad (1.3.29)$$

которые должны удовлетворяться в каждой точке поверхности. Для нахождения динамических условий на поверхности S рассмотрим изменение количества движения тонкого слоя, выделенного в среде вблизи поверхности. Рассмотрим на поверхности малый элемент dS и соответствующий ему элемент объема $dV = dScdt$. В течение малого промежутка времени dt этот элемент переходит из состояния покоя (деформации отсутствуют) в состояние движения (деформации имеют место), определяемое перемещением $\mathbf{u}$. Сила, соответствующая этому переходу, равна усилию на элемент dS; изменение количества движения численно равно интегралу по времени от этого усилия. Внешней нормалью к элементу поверхности dS является вектор $\mathbf{n}$, и усилие на этом элементе действует на массы, расположенные в направлении нормали $\mathbf{n}$, поэтому компонентами вектора напряжений являются σ_n^i, усилие равно $\sigma_n^i dS$, импульс $-\sigma_n^i dSdt$, уравнение количества движения имеет вид

$$\rho dScdt\,\frac{\partial u^i}{\partial t} = -\sigma_n^i\,dSdt,$$

откуда

$$\rho c\,\frac{\partial u^i}{\partial t} = -\sigma_n^i, \qquad (1.3.30)$$

причем все величины вычисляются с той стороны от S, где возмущения существуют. Уравнения (1.3.30) являются динамическими условиями и должны удовлетворяться во всех точках поверхности S.

Если движение и деформации реализуются по обе стороны от S и перемещения в этих областях различны ($\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{u}_2$), то на поверхности S должны выполняться следующие условия:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2, \qquad (1.3.31)$$

кинематические

$$\frac{\nabla_1 (u_1^i - u_2^i)}{n^1} = \frac{\nabla_2 (u_1^i - u_2^i)}{n^2} = \frac{\nabla_3 (u_1^i - u_2^i)}{n^3} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial n}(u_1^i - u_2^i) = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial}{\partial t}(u_1^i - u_2^i), \qquad (1.3.32)$$

динамические

$$\rho c\,\frac{\partial}{\partial t}(u_1^i - u_2^i) = -(\sigma_1^i - \sigma_2^i). \qquad (1.3.33)$$

Приведенные условия на фронте волны напряжений характерны для слабого разрыва, которому соответствуют почти непрерывные изменения параметров состояния и движения среды при переходе через фронт волны. Следовательно, волны напряжений являются слабыми волнами, им соответствуют малые скорости частиц по сравнению со скоростью распространения волны даже при интенсивных возмущениях.

При постоянном модуле упругости E импульс напряжений может распространяться на значительное расстояние без изменения формы, изменение модуля упругости приводит к искажению импульса напряжений конечной амплитуды. Для большинства деформируемых тел E уменьшается за пределом упругости и в материале при достаточно больших деформациях возникают пластические волны, распространяющиеся со скоростью, меньшей скорости распространения упругой волны. Однако существуют такие деформируемые тела (резины, полимерные материалы), в которых большие деформации приводят к ориентации длинных молекулярных цепочек, что вызывает возрастание модуля упругости E. Поэтому при распространении возмущений в таких материалах зарождаются волны особой природы, называемые *ударными волнами*. В деформируемых телах ударные волны возникают и в том случае, когда распространяются волны расширения большой амплитуды. Как показано Бриджменом, зависимость между средней деформацией e и средним напряжением σ в твердых телах может иметь вид $e = (-a\sigma + b\sigma^2)/3$, где a, b — постоянные величины. Модуль объемного сжатия K при малых давлениях стремится к постоянной $1/a$, при высоких давлениях принимает значение $1/(a - 2b\sigma)$ (т. е. при высоких давлениях K растет). Упругие волны расширения распространяются со скоростью a_0, но модуль K при высоких давлениях возрастает, это приводит к тому, что скорость волны большой амплитуды больше скорости волны малой амплитуды. В результате образуется ступенчатый фронт, характерный для ударной волны. Модуль сдвига G в этом случае играет незначительную роль, так как задолго до достижения достаточно высокого давления предел текучести будет пройден и материал ведет себя подобно жидкости.

Ударную волну в деформируемом теле определим как волну сильного разрыва, на фронте которой терпят разрыв непрерывности параметры ρ, $\mathbf{v}$, (σ) и другие параметры, характеризующие состояние и движение среды. На поверхности разрыва должны выполняться определенные условия, выражающие законы сохранения массы, количества движения и энергии, которым соответствуют [11]: уравнение неразрывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \nabla_i(\rho v^i) = 0, \tag{1.3.34}$$

уравнения движения

$$\rho\frac{dv^i}{dt} = \nabla_j\sigma^{ij} \tag{1.3.35}$$

и термодинамическое соотношение

$$d\Phi - T^0 ds = D^{ij}(\sigma)dD_{ij}(e) + 3\sigma de - W^* dt, \tag{1.3.36}$$

где Φ — удельная энергия деформации, s — энтропия среды, W^* — функция рассеяния.

В деформируемых телах атомы находятся на близких расстояниях друг от друга и сильно взаимодействуют между собой, что удерживает их в теле. Силы взаимодействия имеют двойственный характер: с одной стороны, частицы, находясь на большом расстоянии, притягиваются друг к другу, с другой стороны, при тесном сближении — отталкиваются. Для того чтобы развести атомы на большие расстояния, необходимо преодолеть силы сцепления и затратить энергию, равную энергии связи; чтобы сжать среду, необходимо преодолеть силы отталкивания, которые быстро растут при сближении атомов. Таким образом, при сжатии деформируемого тела в нем развивается огромное внутреннее давление только за счет отталкивания атомов друг от друга. Все изложенное позволяет считать процесс образования и распространения ударной волны адиабатическим, протекающим при высоких давлениях.

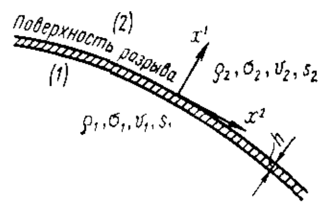

Рис. 18

В этом случае $W^* = 0$, тензор напряжений $(\sigma) = (S_\sigma)$, поэтому уравнения (1.3.35) и соотношение (1.3.36) можно записать в виде

$$\rho \frac{dv^i}{dt} = \frac{\partial\sigma}{\partial x^j} g^{ij}, \quad d\Phi - T^0\, ds - 3\sigma dl = 0. \tag{1.3.37}$$

Для установления условий на поверхности разрыва (рис. 18) рассмотрим тонкий слой с большим градиентом всех параметров и проинтегрируем (1.3.34), (1.3.37) по толщине слоя h, затем выполним предельный переход, устремляя h к нулю. В результате получим следующие условия на фронте ударной волны:

$$(\rho v)_1 = (\rho v)_2 = m, \qquad m\,(v_2 - v_1) = -\sigma_1 + \sigma_2,$$
$$-\sigma_1 v_1 + \sigma_2 v_2 = m\,[(1/2)\,(v_2^2 - v_1^2) + \Delta F], \tag{1.3.38}$$

предполагая (для простоты рассуждений) $(v_k)_1 = (v_k)_2 = 0$ $(k = 2, 3)$. Здесь $\Delta F = F_2 - F_1$ — изменение внутренней энергии в единице массы, причем $F = \Phi - T^0 s$.

Если $v_1 = v_2$, то из (1.3.38) следует, что $\rho_1 = \rho_2$, $\sigma_1 = \sigma_2$ и разрыва нет; если $v_1 \neq v_2 \neq 0$, то плотность ρ, среднее напряжение σ и другие параметры претерпевают на поверхности разрыва скачок, характерный для ударной волны, которая распространяется со скоростью D по направлению нормали к поверхности разрыва.

Из первых двух соотношений (1.3.38) находим в невозмущенном материале скорость распространения фронта ударной волны

$$v_2 = D = \sqrt{((-\sigma_1 + \sigma_2)/(\rho_1 - \rho_2))\,(\rho_1/\rho_2)} \tag{1.3.39}$$

и скорость частиц за фронтом ударной волны

$$v_y = v_1 - v_2 = \sqrt{(-\sigma_1 + \sigma_2)\,(1/\rho_2 - 1/\rho_1)}\,. \tag{1.3.40}$$

Из третьего соотношения (1.3.38) получаем уравнение ударной адиабаты материала

$$\Delta F = (1/2)\,(\sigma_1 + \sigma_2)\,(1/\rho_2 - 1/\rho_1). \tag{1.3.41}$$

Следуя К. П. Станюковичу [46], полагаем термодинамические параметры перед фронтом ударной волны постоянными; дифференцируя (1.3.41), после некоторых преобразований получим

$$\frac{ds_1}{d\rho_1}\frac{\rho_1\rho_2}{\rho_1-\rho_2}\left[2T_1^0+\frac{\partial\sigma_1}{\partial s_1}\frac{\rho_1-\rho_2}{\rho_1\rho_2}\right]=-\frac{\partial\sigma_1}{\partial\rho_1}+\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\rho_1-\rho_2}\frac{\rho_2}{\rho_1},$$

но на ударной адиабате

$$2T_1^0+\frac{\partial\sigma_1}{\partial s_1}\frac{\rho_1-\rho_2}{\rho_1\rho_2}>0,$$

поскольку в соответствии со вторым законом термодинамики $ds_1>0$, $\rho_1>\rho_2$. Тогда имеем

$$-\frac{\partial\sigma_1}{\partial\rho_1}\geqslant-\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\rho_1-\rho_2}\frac{\rho_2}{\rho_1},$$

что эквивалентно условию

$$c_1\geqslant v_1, \tag{1.3.42}$$

т. е. за фронтом ударной волны скорость дозвуковая.

Считая термодинамические параметры за фронтом ударной волны постоянными, устанавливаем

$$-\frac{\partial\sigma_2}{\partial\rho_2}\leqslant-\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\rho_1-\rho_2}\frac{\rho_1}{\rho_2},$$

что эквивалентно условию

$$c_2\leqslant v_2, \tag{1.3.43}$$

т. е. перед фронтом ударной волны скорость сверхзвуковая.

Знак равенства в (1.3.42) соответствует исчезновению поверхности разрыва, следовательно, и ударной волны. Таким образом, условиями существования ударной волны являются неравенства

$$v_1<c_1,\ v_2>c_2, \tag{1.3.44}$$

что соответствует возрастанию энтропии частиц тела, проходящих через фронт ударной волны, причем если $\rho_1>\rho_2$, то $c_1>c_2$, $v_1<v_2$; среда за фронтом ударной волны движется в сторону движения фронта со скоростью v_y.

Итак, ударные волны характеризуются следующими свойствами: 1) скорость распространения ударной волны больше скорости звука в невозмущенной среде; 2) на фронте ударной волны параметры состояния и движения среды изменяются скачкообразно; 3) ударная волна сопровождается перемещением частиц тела в направлении движения фронта волны; 4) скорость ударной волны зависит от интенсивности возмущений; 5) при образовании ударной волны энтропия возрастает: $ds_1>0$.

Сжатие деформируемого тела ударными волнами, как было отмечено ранее, сопровождается высоким давлением нетеплового происхождения (упругое давление). Однако в ударных волнах большой амплитуды наблюдается сильное нагревание тела, приводящее к появлению давления (называемого тепловым), которое связано с тепловым движением атомов. В ударных волнах с давлением 10^6 кгс/см^2 давления обоих типов сравнимы друг с другом, тогда как в ударных волнах с давлением в 10^5 кгс/см^2 и ниже упругое давление преобладает, мала и тепловая энергия среды, сжатой ударной волной. Вся внутренняя энергия, приобретаемая средой в волне, затрачивается на преодоление сил отталкивания при сжатии тела и является упругой энергией. Скорость распространения малых возмущений (малой амплитуды) в деформируемых телах не связана с температурой и определяется упругой сжимаемостью. Ударная волна с амплитудой порядка 10^5 кгс/см^2 является слабой, она мало отличается от упругой волны и распространяется со скоростью, близкой к скорости a_0, сжимает тело на несколько процентов и сообщает частицам скорость в десятки раз меньшую скорости распространения самой волны. Сильными ударными волнами в деформируемых телах считаются волны, давление которых 10^7 —10^8 кгс/см^2 (волны большой амплитуды). Такие волны имеют место при контактном взрыве заряда или при высокоскоростном ударе.

Задача о равновесии фиктивного тела сводится к определению тензора кинетических напряжений в области возмущений.

При нагрузке требуется построить тензор $(T)_{\text{нагр}}$, компоненты которого удовлетворяют уравнениям равновесия (1.3.7), граничным условиям в напряжениях (1.3.24) и в перемещениях (1.3.25), причем на фронте волны нагрузки

$$w_s^\alpha = 0, \tag{1.3.45}$$

и вариационному уравнению (1.3.16) или (1.3.20) в зависимости от физико-механических свойств материала.

При разгрузке требуется построить тензор кинетических напряжений

$$(T)_{\text{разгр}} = (T)_{\text{нагр}} - \Delta(T). \tag{1.3.46}$$

Компоненты тензора $\Delta(T)$ удовлетворяют уравнению равновесия

$$\nabla_\alpha \Delta T^{\alpha\beta} + \Delta F^\beta = 0 \tag{1.3.47}$$

и граничным условиям: в напряжениях на части поверхности S_1

$$\Delta T^{\alpha\beta}(S)\, n_\beta = \Delta q^\alpha_{(n)}, \tag{1.3.48}$$

где $\Delta q^\alpha_{(n)} = \Delta q^{\alpha\beta}_{(n)} n_\beta$, $\Delta q^{\alpha\beta}_{(n)} = \Delta\,(\rho v^\alpha v^\beta)_s - \Delta p^{\alpha\beta}_{(n)}$;

в перемещениях на части поверхности S_2: $\Delta w^\alpha(s) = \Delta w_s^\alpha$, на фронте волны разгрузки $\Delta w_s^\alpha = 0$. Компоненты тензора удовлетворяют также вариационному уравнению (1.3.19) или (1.3.23) в зависимости от физико-механических свойств материала.

По известному тензору кинетических напряжений находим для реального тела в области возмущений плотность

$$\rho = T^{00}/(v^0 v^0),$$

компоненты вектора скорости частиц:

$$v^i = v^0 T^{i0}/T^{00}, \tag{1.3.49}$$

компоненты тензора напряжений

$$\sigma^{ij} = T^{i0}T^{j0}/T^{00} - T^{ij}.$$

Представим искомый тензор (T) в виде суммы основного $(T_о)$ и корректирующего $(T_к)$ тензоров:

$$(T) = (T_о) + (T_к). \tag{1.3.50}$$

Компоненты основного тензора $(T_о)$ должны удовлетворять уравнениям равновесия (1.3.7) и граничным условиям в напряжениях (1.3.24). В этом случае учитывается действие внешних объемных и поверхностных сил, приложенных к телу, и независимость основного тензора от физико-механических свойств материала. Компоненты корректирующего тензора $(T_к)$ должны удовлетворять однородным уравнениям равновесия:

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0, \tag{1.3.51}$$

нулевым граничным условиям в напряжениях:

$$T^{\alpha\beta}(S)\, n_\beta = 0 \tag{1.3.52}$$

и содержать достаточное число свободных параметров C_n, варьируя которые, можно было бы с любой степенью точности выполнить вариационное уравнение (1.3.16) или (1.3.20). Корректирующий тензор учитывает физико-механические свойства материала, тепловое воздействие и другие факторы.

При разгрузке тензор кинетических напряжений $(T)_{разгр}$ определяется формулой (1.3.46). Тензор $(T)_{нагр}$ известен, следовательно, необходимо построить тензор $\Delta(T)$ исходя из сформулированных требований. Представим тензор $\Delta(T)$ в виде

$$\Delta(T) = \Delta(T_о) + \Delta(T_к). \tag{1.3.53}$$

Компоненты основного тензора должны удовлетворять уравнениям равновесия (1.3.47) и граничным условиям в напряжениях (1.3.48). Выполнение этих условий позволяет учесть действие изменений внешних объемных и поверхностных сил при разгрузке, а также независимость основного тензора от физико-механических свойств материала. Компоненты корректирующего тензора должны удовлетворять однородным уравнениям равновесия:

$$\nabla_\alpha \Delta T^{\alpha\beta} = 0, \tag{1.3.54}$$

нулевым граничным условиям в напряжениях:

$$\Delta T^{\alpha\beta}(S)\, n_\beta = 0 \tag{1.3.55}$$

и содержать достаточное число свободных параметров ΔC_n, варьируя которые можно было бы выполнить вариационное уравнение (1.3.19) или (1.3.23) [в зависимости от физико-механических свойств материала]. С помощью корректирующего тензора учитываются свойства материала при разгрузке, изменение температуры и другие внешние факторы.

Требования, предъявляемые к основному и корректирующему тензорам, одинаковы для всех видов нагружения, что позволяет предложить единый метод построения этих тензоров для любого процесса нагружения независимо от его вида. Построение тензоров основано на использовании общего решения уравнений равновесия фиктивного тела, которое выражает компоненты тензора кинетических напряжений через соответствующие компоненты тензора функций кинетических напряжений (П) [24]:

$$T^{\alpha\beta} = 2\widetilde{e}^{\alpha\beta}(p) - 2(\nabla_\gamma p^\gamma + \varphi g^{\alpha\beta} + (1/2)(g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu} - \\ -(1/2) g^{\alpha\beta} g^{\nu\mu}) g^{\lambda\delta}(\widetilde{R}_{\lambda\nu\mu\delta} + 2N_{\lambda\nu\mu\delta}), \tag{1.3.56}$$

где

$$\varphi = \frac{1}{4\pi}\int_V F^\alpha \left(\frac{1}{\xi}\right)_\alpha dV, \quad p^\alpha = \frac{1}{4\pi}\int_V F^\alpha \frac{1}{\xi}\, dV,$$

$$\widetilde{e}^{\alpha\beta}(p) = (1/2)(g^{\alpha\delta}\nabla_\delta p^\beta + g^{\beta\delta}\nabla_\delta p^\alpha) \tag{1.3.57}$$

— характеристики объемных сил,

$$\widetilde{R}_{\lambda\nu\mu\delta} = \frac{\partial^2 \Pi_{\lambda\delta}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 \Pi_{\nu\mu}}{\partial x^\lambda \partial x^\delta} - \frac{\partial^2 \Pi_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu \partial x^\delta} - \frac{\partial^2 \Pi_{\nu\delta}}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} - \\ - \Gamma^\alpha_{\delta\nu}\left(\frac{\partial \Pi_{\alpha\lambda}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \Pi_{\alpha\mu}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial \Pi_{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha}\right) - \Gamma^\beta_{\lambda\mu}\left(\frac{\partial \Pi_{\beta\delta}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \Pi_{\beta\nu}}{\partial x^\delta} - \frac{\partial \Pi_{\delta\lambda}}{\partial x^\beta}\right) + \\ + \Gamma^j_{\nu\mu}\left(\frac{\partial \Pi_{j\delta}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial \Pi_{j\lambda}}{\partial x^\delta} - \frac{\partial \Pi_{\delta\lambda}}{\partial x^j}\right) + \Gamma^k_{\delta\lambda}\left(\frac{\partial \Pi_{k\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \Pi_{k\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Pi_{\nu\mu}}{\partial x^k}\right); \tag{1.3.58}$$

$$N_{\lambda\nu\mu\delta} = -\Gamma_{\alpha\lambda\mu}\,\xi^{\alpha j}\,\Gamma_{j\delta\nu} + \Gamma_{k\nu\mu}\,\xi^{k\beta}\,\Gamma_{\beta\delta\lambda},$$

причем $\xi^{\alpha\beta} = (1/g)K_{\alpha\beta}$, $g = \det((g_{\alpha\beta}))$.

Функции $K_{\alpha\beta}$ выражаются через функции кинетических напряжений:

$$K_{\alpha\alpha} = (-1)^{\alpha+\alpha}\left(\begin{vmatrix} g_{\beta\beta} & g_{\beta\gamma} & \Pi_{\beta\delta} \\ g_{\beta\gamma} & g_{\gamma\gamma} & \Pi_{\gamma\delta} \\ g_{\beta\delta} & g_{\gamma\delta} & \Pi_{\delta\delta}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_{\beta\beta} & \Pi_{\beta\gamma} & g_{\beta\delta} \\ g_{\beta\gamma} & \Pi_{\gamma\gamma} & g_{\gamma\delta} \\ g_{\beta\delta} & \Pi_{\gamma\delta} & g_{\delta\delta}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Pi_{\beta\beta} & g_{\beta\gamma} & g_{\beta\delta} \\ \Pi_{\beta\gamma} & g_{\gamma\gamma} & g_{\gamma\delta} \\ \Pi_{\beta\delta} & g_{\gamma\delta} & g_{\delta\delta}\end{vmatrix}\right); \tag{1.3.59}$$

$$K_{\alpha\beta} = (-1)^{\alpha+\beta}\left(\begin{vmatrix} g_{\alpha\beta} & g_{\alpha\gamma} & \Pi_{\alpha\delta} \\ g_{\beta\gamma} & g_{\gamma\gamma} & \Pi_{\gamma\delta} \\ g_{\beta\delta} & g_{\gamma\delta} & \Pi_{\delta\delta}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_{\alpha\beta} & \Pi_{\alpha\gamma} & g_{\alpha\delta} \\ g_{\beta\gamma} & \Pi_{\gamma\gamma} & g_{\gamma\delta} \\ g_{\beta\delta} & \Pi_{\gamma\delta} & g_{\delta\delta}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Pi_{\alpha\beta} & g_{\alpha\gamma} & g_{\alpha\delta} \\ \Pi_{\beta\gamma} & g_{\gamma\gamma} & g_{\gamma\delta} \\ \Pi_{\beta\delta} & g_{\gamma\delta} & g_{\delta\delta}\end{vmatrix}\right).$$

В общее решение (1.3.56) входят десять компонент тензора функций кинетических напряжений, тогда как для полного представления компонент тензора (T) необходимы только четыре компоненты тензора (П). Следовательно, общее решение (1.3.56) содержит C^4_{10} различных эквивалентных форм, которые могут быть использованы при построении тензора кинетических напряжений.

Основной тензор (T_0) строится в форме общего решения (1.3.56), при этом уравнения равновесия фиктивного тела тождественно удовлетворяются. Функции кинетических напряжений $\Pi_\alpha^{(0)}$ ($\alpha = 1, 2, 3, 0$) основного тензора определяются при нагрузке граничными условиями в напряжениях (1.3.24) и условиями (1.3.48) при разгрузке. Внешние поверхностные силы, действующие на фиктивное тело, задаются матрицей нагрузок $q = ((q_{(\alpha\beta)}))$, элементы которой

$$q_{(ij)} = (\rho v_{(i)} v_{(j)})_s - p_{(ij)},$$
$$q_{(i0)} = (\rho v_{(i)})_s v^0, \ q_{(0i)} = (\rho v_{(i)})_0 v^0, \ q_{00} = \rho v^0 v^0. \qquad (1.3.60)$$

Матрице нагрузок ставится в соответствие четырехмерный тензор нагрузок (q) с компонентами

$$q^{\alpha\beta} = q_{(\alpha\beta)} \sqrt{g^{\alpha\alpha} g^{\beta\beta}}, \ q_{\alpha\beta} = q_{(\alpha\beta)} \sqrt{q_{\alpha\alpha} g_{\beta\beta}}. \qquad (1.3.61)$$

Объемные силы характеризуются четырехмерным вектором $\mathbf{F}$ с компонентами F^α, которым соответствует потенциал φ и вектор-потенциал p, определяемые по формулам (1.3.57). Функции кинетических напряжений основного тензора представим в виде

$$\Pi_\alpha^{(0)} = \sum_{\beta=0}^{3} [\vartheta_1 (x^\beta) F_{\alpha\beta} + \vartheta_2 (x^\beta) \Phi_{\alpha\beta}], \qquad (1.3.62)$$

при этом функции $\vartheta_\gamma (x^\beta)$ ($\gamma = 1, 2$) выбираются так, чтобы выполнялись следующие условия на концах интервала задания координат x^β: при $x^\beta = x^\beta_{(1)}$

$$\vartheta_1 (x^\beta) = 1, \ \vartheta_1 (x^\beta) = 0, \ \vartheta_2 (x^\beta) = 0, \ \vartheta_2'(x^\beta) = 0, \qquad (1.3.63)$$

при $x^\beta = x^\beta_{(2)}$

$$\vartheta_1(x^\beta) = 0, \ \vartheta_1'(x^\beta) = 0, \ \vartheta_2(x^\beta) = 1, \ \vartheta_2'(x^\beta) = 0.$$

Вид этих функций можно легко установить, например,

$$\vartheta_1(x^\beta) = (1/2)\,(1 + \cos \bar{x}^\beta), \ \vartheta_2(x^\beta) = (1/2)\,(1 - \cos \bar{x}^\beta), \qquad (1.3.64)$$

где $\bar{x}^\beta = \pi\,(x^\beta - x^\beta_{(1)})/(x^\beta_{(2)} - x^\beta_{(1)})$ — безразмерная координата.

Функции $F_{\alpha\beta}$ удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям

$$(g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu} - (1/2)\, g^{\alpha\beta} g^{\nu\mu})\, g^{\delta\lambda} \left(\tilde{R}^{(0)}_{\lambda\nu\mu\delta}(F) + 2N^{0}_{\lambda\nu\mu\delta}(F)\right) = 2Q^{\alpha\beta}_{(1)};$$

функции $\Phi_{\alpha\beta}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu} - (1/2)\, g^{\alpha\beta} g^{\nu\mu})\, g^{\delta\lambda} \left(\tilde{R}^{(0)}_{\lambda\nu\mu\delta}(\Phi) + 2N^{(0)}_{\lambda\nu\mu\delta}(\Phi)\right) = 2Q^{\alpha\beta}_{(2)}. \qquad (1.3.65)$$

Правые части этих уравнений

$$Q^{\alpha\beta}_{(\gamma)} = q^{\alpha\beta}_{(\gamma)} - 2\left[\tilde{e}^{\alpha\beta}(\mathrm{p}) - (\nabla_\nu p^\nu + \varphi)\, g^{\alpha\beta}\right]_{(\gamma)}. \qquad (1.3.66)$$

Уравнениям (1.3.65) соответствуют граничные условия: при $x^\alpha = x^\alpha_{(\gamma)}$

$$(g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu} \quad (1/2)\, g^{\alpha\beta} g^{\nu\mu})\, g^{\delta\lambda} \left(\tilde{R}^{(0)}_{\lambda\nu\mu\delta} + 2N^{(0)}_{\lambda\nu\mu\delta}\right) = 0. \qquad (1.3.67)$$

При записи уравнений (1.3.65) и граничных условий (1.3.67) в развернутом виде необходимо заменить в выражениях (1.3.58) функции $\Pi_{\alpha\beta}$ соответственно на $F_{\alpha\beta}$ или $\Phi_{\alpha\beta}$, опуская члены, в которые входит производная функций $\vartheta_\gamma\ (x^\beta)$. Структура уравнений (1.3.65) одинакова, поэтому достаточно знать решение одной из указанных систем, решение второй получается заменой индекса $\gamma = 1$ на индекс $\gamma = 2$. В результате решения уравнений определяем функции $F_{\alpha\beta}$ и $\Phi_{\alpha\beta}$, следовательно, и функции кинетических напряжений основного тензора $\Pi_\alpha^{(0)}$, подставляя которые в общее решение (1.3.56), получим компоненты основного тензора (T_0) фиктивного тела.

Корректирующий тензор $(T_к)$ строим в форме общего решения однородных уравнений равновесия фиктивного тела, полагая равными нулю в (1.3.56) потенциал φ и вектор-потенциал p^α. Компоненты корректирующего тензора выражаются через функции кинетических напряжений $\Pi_\alpha^{(k)}(\alpha = 1,\ 2,\ 3,\ 0)$, удовлетворяющие сформулированным условиям для тензора $(T_к)$. Функции кинетических напряжений $\Pi_\alpha^{(k)}$, соответствующие нулевым граничным условиям (1.3.51) или (1.3.55), в форме Морера имеют вид:

$$
\begin{aligned}
\Pi_1^{(k)} &= \sum_{mnpl}{}' A_{mnpl}\, \xi_m (\bar{x}^1)\, \eta_n (\bar{x}^2)\, P_p (\bar{x}^3)\, P_l (\bar{x}^0), \\
\Pi_2^{(k)} &= \sum_{mnpl} B_{mnpl}\, \xi_m (\bar{x}^1)\, P_n (\bar{x}^2)\, \zeta_p (\bar{x}^3)\, P_l (\bar{x}^0), \\
\Pi_3^{(k)} &= \sum_{mnpl} C_{mnpl}\, P_m (\bar{x}^1)\, \eta_n (\bar{x}^2)\, \zeta_p (\bar{x}^3)\, P_l (\bar{x}^0), \\
\Pi_0^{(k)} &= \sum_{mnpl} D_{mnpl}\, P_m (\bar{x}^1)\, P_n (\bar{x}^2)\, P_p (\bar{x}^3)\, P_l (\bar{x}^0).
\end{aligned}
\tag{1.3.68}
$$

Системы функций $\xi_m(\bar{x}^1)$, $\eta_n(\bar{x}^2)$, $\zeta_p(\bar{x}^3)$, $P_\alpha(\bar{x}^\beta)$ образуют полные системы фундаментальных функций, удовлетворяющие нулевым граничным условиям и подчиненные [19] следующим требованиям: 1) функции ограничены по модулю; 2) модуль функции убывает с ростом ее индекса; 3) функции простые. Подставляя (1.3.68) в общее решение (1.3.56), после алгебраических преобразований получим выражения компонент корректирующего тензора

$$
T_к^{\alpha\beta} = \sum_{mnpl} [A_{mnpl} f_{(1)}^{\alpha\beta} + B_{mnpl} f_{(2)}^{\alpha\beta} + C_{mnpl} f_{(3)}^{\alpha\beta} + D_{mnpl} f_{(0)}^{\alpha\beta}], \tag{1.3.69}
$$

где $f_{(\gamma)}^{\alpha\beta}(mnpl)$ $(\gamma = 1, 2, 3, 0)$ — известные функции координат, которые определяются по соответствующим формулам [19]. Параметры A_{mnpl}, $\ldots, D_{mnpl}$ при нагрузке находим из условия выполнения вариационного уравнения (1.3.16) или (1.3.20) в зависимости от свойств фиктивного тела, которому соответствует система алгебраических уравнений

$$
\sum_{mnpl} [A_{mnpl} F_{1\beta} + B_{mnpl} F_{2\beta} + C_{mnpl} F_{3\beta} + D_{mnpl} F_{0\beta}] + L_\beta = 0. \tag{1.3.70}
$$

Коэффициенты $F_{\gamma\beta}\ (mnplijkq)$ уравнений и свободные члены $L_\beta\ (ijkq)$ вычисляются по следующим формулам:

а) для упругопластического тела

$$F_{\gamma\beta}=\frac{1}{2G}\int\limits_V\left[\alpha_1 g_{\alpha\nu}\,g_{\beta\mu}\left(f^{\nu\mu}_{(\gamma)}\,f^{\alpha\beta}_{(\beta)}+f^{\alpha\beta}_{(\gamma)}\,f^{\nu\mu}_{(\beta)}\right)+\alpha_2\,g_{\nu\mu}\,g_{\alpha\beta}\,f^{\nu\mu}_{(\gamma)}\,f^{\alpha\beta}_{(\beta)}\right]dV;$$

$$L_\beta=\frac{1}{2G}\int\limits_V\left[\alpha_1\,g_{\alpha\nu}\,g_{\beta\mu}\left(T^{\nu\mu}_{(0)}\,f^{\alpha\beta}_{(\beta)}+T^{\alpha\beta}_{(0)}\,f^{\nu\mu}_{(\beta)}\right)+2G\alpha T^0\,g_{\alpha\beta}\,f^{\alpha\beta}_{(\beta)}+\right.$$

$$\left.+\alpha_2\,g_{\nu\mu}\,g_{\alpha\beta}\,T^{\nu\mu}_{(0)}\,f^{\alpha\beta}_{(\beta)}\right]dV-\int\limits_{S_2}f^{\alpha\beta}_{(\beta)}\,n_\beta\,w_{\alpha s}\,dS, \qquad (1.3.71)$$

где

$$\alpha_1=1+\varphi+\frac{1}{2}T_i\,\frac{d\varphi}{dT_i},$$

$$\alpha_2=\frac{2}{3}\left[\left(\frac{2G}{3K}-1\right)-\varphi-\frac{1}{2}\,T_i\,\frac{d\varphi}{dT_i}\right] \qquad (1.3.72)$$

— функции состояния тела;

б) для вязкоупругого тела

$$F_{\gamma\beta}=\frac{1}{2G}\int\limits_V\left[\alpha_1^{(e)}\,g_{\alpha\nu}\,g_{\beta\mu}\left(f^{\alpha\beta}_{(\gamma)}\,f^{\nu\mu}_{(\beta)}+f^{\nu\mu}_{(\gamma)}\,f^{\alpha\beta}_{(\beta)}\right)+\alpha_2^{(e)}\,g_{\alpha\beta}\,g_{\nu\mu}\,f^{\nu\mu}_{(\gamma)}\,f^{\alpha\beta}_{(\beta)}\right]dV+$$

$$+\frac{1}{v^0}\int\limits_V\int\limits_0^{x^0}\left[\widetilde{R}\,(x^0\,y^0)\,g_{\alpha\nu}\,g_{\beta\mu}\left(f^{\nu\mu}_{(\gamma)}\,(x^0)\,f^{\alpha\beta}_{(\beta)}\,(y^0)+f^{\nu\mu}_{(\beta)}\,(x^0)\,f^{\alpha\beta}_{(\gamma)}\,(y^0)\right)+\right.$$

$$+(1/3)\left(\widetilde{R}_1\,(x^0\,y^0)-\widetilde{R}\,(x^0\,y^0)\right)g_{\alpha\beta}\,g_{\nu\mu}\left(f^{\nu\mu}_{(\gamma)}\,(x^0)\,f^{\alpha\beta}_{(\beta)}\,(y^0)+\right.$$

$$\left.\left.+f^{\nu\mu}_{(\beta)}\,(y^0)\,f^{\alpha\beta}_{(\gamma)}\,(x^0)\right)\right]dy^0\,dV;$$

$$L_\beta=\frac{1}{2G}\int\limits_V\left[\alpha_1^{(e)}\,g_{\alpha\nu}\,g_{\beta\mu}\left(T^{\alpha\beta}_{(0)}\,f^{\nu\mu}_{(\beta)}+T^{\nu\mu}_{(0)}\,f^{\alpha\beta}_{(\beta)}\right)+2G\alpha T^0\,g_{\alpha\beta}\,f^{\alpha\beta}_{(\beta)}+\right.$$

$$\left.+\alpha_2^{(e)}\,g_{\alpha\beta}\,g_{\nu\mu}\,T^{\nu\mu}_{(0)}\,f^{\alpha\beta}_{(\beta)}\right]dV+$$

$$+\frac{1}{v^0}\int\limits_V\int\limits_0^{x^0}\left[\widetilde{R}\,(x^0\,y^0)\,g_{\alpha\nu}\,g_{\beta\mu}\left(T^{\alpha\beta}_{(0)}\,(x^0)\,f^{\nu\mu}_{(\beta)}\,(y^0)+T^{\nu\mu}_{(0)}\,(y^0)\,f^{\alpha\beta}_{(\beta)}\,(x^0)\right)+\right.$$

$$+(1/3)\left(R_1\,(x^0\,y^0)-\widetilde{R}\,(x^0\,y^0)\right)\left(T^{\alpha\beta}_{(0)}\,(x^0)\,f^{\nu\mu}_{(\beta)}\,(y^0)+\right. \qquad (1.3.73)$$

$$\left.\left.+T^{\alpha\beta}_{(0)}\,(y^0)\,f^{\nu\mu}_{(\beta)}\,(x^0)\right)g_{\alpha\beta}\,g_{\nu\mu}\right]dy^0\,dV-\int\limits_{S_2}f^{\alpha\beta}_{(\beta)}\,n_\beta\,w_{\alpha s}\,dS,$$

где

$$\alpha_1^{(e)}=1,\ \ \alpha_2^{(e)}=\frac{2}{3}\left(\frac{2G}{3K}-1\right) \qquad (1.3.74)$$

— функции состояния тела;

в) для вязкопластического тела

$$F_{\nu\beta}=\int\limits_V\left[\alpha_1^{(b)} g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu}\left(f_{(\nu)}^{\nu\mu} f_{(\beta)}^{\alpha\beta}+f_{(\nu)}^{\alpha\beta} f_{(\beta)}^{\nu\mu}\right)+\alpha_2^{(b)} g_{\alpha\beta} g_{\nu\mu} f_{(\nu)}^{\nu\mu} f_{(\beta)}^{\alpha\beta}\right] dV;$$

$$L_\beta=\int\limits_V\left[\alpha_1^{(b)} g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu}\left(T_{(0)}^{\nu\mu} f_{(\beta)}^{\alpha\beta}+T_{(0)}^{\alpha\beta} f_{(\beta)}^{\nu\mu}\right)+\frac{p_0}{\lambda} g_{\alpha\beta} f_{(\beta)}^{\alpha\beta}+\right.$$

$$\left.+\alpha_2^{(b)} g_{\alpha\beta} g_{\nu\mu} T_{(0)}^{\nu\mu} f_{(\beta)}^{\alpha\beta}\right] dV-\int\limits_{S_2} f_{(\beta)}^{\alpha\beta} n_\beta v_{\alpha s}\, dS, \qquad (1.3.75)$$

где

$$\alpha_1^{(b)}=\frac{1}{2\eta}+\frac{\widetilde{\tau}_i}{4}\frac{d}{d\widetilde{\tau}_i}\left(\frac{1}{\eta}\right), \qquad (1.3.76)$$

$$\alpha_2^{(b)}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{2\eta}\right)-\frac{\widetilde{\tau}_i}{6}\frac{d}{d\widetilde{\tau}_i}\left(\frac{1}{\eta}\right)$$

— функции состояния тела.

При разгрузке функции кинетических напряжений корректирующего тензора таковы:

$$\Delta\Pi_1^{(k)}=\sum_{mnpl}\Delta A_{mnpl}\,\xi_m(\overline{x}^1)\,\eta_n(\overline{x}^2)\,P_p(\overline{x}^3)\,P_l(\overline{x}^0),$$

$$\Delta\Pi_2^{(k)}=\sum_{mnpl}\Delta B_{mnpl}\,\xi_m(\overline{x}^1)\,P_n(\overline{x}^2)\,\zeta_p(\overline{x}^3)\,P_l(\overline{x}^0),$$

$$\Delta\Pi_3^{(k)}=\sum_{mnpl}\Delta C_{mnpl}\,P_m(\overline{x}^1)\,\eta_n(\overline{x}^2)\,\zeta_p(\overline{x}^3)\,P_l(\overline{x}^0),$$

$$\Delta\Pi_0^{(k)}=\sum_{mnpl}\Delta D_{mnpl}P_m(\overline{x}^1)\,P_n(\overline{x}^2)\,P_p(\overline{x}^3)\,P_l(\overline{x}^0). \qquad (1.3.77)$$

Подставляя эти функции в общее решение (1.3.56), получим выражения компонент корректирующего тензора:

$$\Delta T_{(\kappa)}^{\alpha\beta}=\sum_{mnpl}\left[\Delta A_{mnpl} f_{(1)}^{\alpha\beta}+\Delta B_{mnpl} f_{(2)}^{\alpha\beta}+\Delta C_{mnpl} f_{(3)}^{\alpha\beta}+\Delta D_{mnpl} f_{(0)}^{\alpha\beta}\right]. \qquad (1.3.78)$$

Параметры $\Delta A_{mnpl}, \ldots, \Delta D_{mnpl}$ определяются из условия выполнения вариационного уравнения (1.3.19) или (1.3.23) при разгрузке в зависимости от свойств фиктивного тела. Это условие эквивалентно системе алгебраических уравнений

$$\sum_{mnpl}\left[\Delta A_{mnpl} F_{1\beta}+\Delta B_{mnpl} F_{2\beta}+\Delta C_{mnpl} F_{3\beta}+\right.$$

$$\left.+\Delta D_{mnpl} F_{0\beta}\right]+\Delta L_\beta=0. \qquad (1.3.79)$$

Коэффициенты $F_{\gamma\beta}$ $(mnplijkq)$ уравнений и свободные члены $\Delta L_\beta(ijkq)$ вычисляются по следующим формулам:

а) для упругопластического тела

$$F_{\gamma\beta}=\frac{1}{2G}\int\limits_V\left[\alpha_1^{(e)}g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}\left(f_{(\gamma)}^{\nu\mu}f_{(\beta)}^{\alpha\beta}+f_{(\gamma)}^{\alpha\beta}f_{(\beta)}^{\nu\mu}\right)+\right.$$

$$\left.+\alpha_2^{(e)}g_{\nu\mu}g_{\alpha\beta}f_{(\gamma)}^{\nu\mu}f_{(\beta)}^{\alpha\beta}\right]dV;$$

$$\Delta L_\beta=\frac{1}{2G}\int\limits_V\left[\alpha_1^{(e)}g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}\left(\Delta T_{(0)}^{\nu\mu}f_{(\beta)}^{\alpha\beta}+\Delta T_{(0)}^{\alpha\beta}f_{(\beta)}^{\nu\mu}\right)+\right.$$

$$\left.+2G\alpha\Delta T^0g_{\alpha\beta}f_{(\beta)}^{\alpha\beta}+\alpha_2^{(e)}g_{\nu\mu}g_{\alpha\beta}\Delta T_{(0)}^{\alpha\beta}f_{(\beta)}^{\nu\mu}\right]dV-\int\limits_{S_1}f_{(\beta)}^{\alpha\beta}n_\beta\Delta w_{\alpha s}\,dS;\tag{1.3.80}$$

б) для вязкопластического тела

$$F_{\gamma\beta}=\frac{1}{2\eta_p}\int\limits_V\left[g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}\left(f_{(\gamma)}^{\nu\mu}f_{(\beta)}^{\alpha\beta}+f_{(\gamma)}^{\alpha\beta}f_{(\beta)}^{\nu\mu}\right)+\alpha^{(p)}g_{\alpha\beta}g_{\nu\mu}f_{(\gamma)}^{\nu\mu}f_{(\beta)}^{\alpha\beta}\right]dV;$$

$$\Delta L_\beta=(1/2\eta_p)\int\limits_V\left[g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}\left(\Delta T_{(0)}^{\nu\mu}f_{(\beta)}^{\alpha\beta}+\Delta T_{(0)}^{\alpha\beta}f_{(\beta)}^{\nu\mu}\right)+\right.$$

$$\left.+(2\eta_p/\lambda)\Delta p_0g_{\alpha\beta}f_{(\beta)}^{\alpha\beta}+\alpha^{(p)}g_{\alpha\beta}g_{\nu\mu}\Delta T_{(0)}^{\nu\mu}f_{(\beta)}^{\alpha\beta}\right]dV-$$

$$-\int\limits_{S_1}f_{(\beta)}^{\alpha\beta}n_\beta\Delta v_{\alpha s}\,dS,\tag{1.3.81}$$

где

$$\alpha^{(p)}=(2/3)(2\eta_p/\lambda-1)\tag{1.3.82}$$

— функция состояния тела.

Решая системы уравнений (1.3.70) и (1.3.79), определим параметры $A_{mnpl}, \ldots, D_{mnpl}$, а также $\Delta A_{mnpl}, \ldots, \Delta D_{mnpl}$, следовательно, и компоненты корректирующего тензора как при нагрузке, так и при разгрузке. Однако для реализации решения необходимо иметь диаграммы $\sigma_i \div e_i$ и $\tau_i \div \dot{\gamma}_i$, а также механические характеристики G, ν, μ, λ функции сдвиговой $\widetilde{R}(t, \tau)$ и объемной $\widetilde{R}_1(t, \tau)$ ползучести материала.

Функцию пластичности $\varphi(T_i)$ и ее производную $d\varphi/dT_i$ можно вычислить по динамической диаграмме $\sigma_i \div e_i$ материала с помощью формул

$$\sigma_i^2=T_i^2-(A\rho v^{0^2})^2;$$

$$\frac{d\varphi}{dT_i}=\frac{d\varphi}{d\sigma_i}\frac{T}{\sqrt{T_i^2-(A\rho v^{0^2})^2}},\tag{1.3.83}$$

где $A = 2 - 3T/(\rho v^{0^2})$.

Системы уравнений, которым подчинены параметры компонент корректирующего тензора, однотипны. Различаются они коэффициентами $F_{\gamma\beta}$ и свободными членами L_β, однако все являются бесконечными системами алгебраических уравнений с переменными коэффициентами, решение которых строится с помощью процедуры последовательных приближений [19]. Упругому, вязкоупругому фиктивным телам и вязкой фиктивной жидкости соответствует бесконечная система алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами. Решение ее строится с помощью процедуры последовательных приближений, сущность которой сводится к следующему. В первом приближении полагаем $m = n = p = l = 1$. Имеем четыре уравнения с четырьмя неизвестными параметрами $A_{1111}, \ldots, D_{1111}$, решая которые находим параметры. Во втором приближении полагаем, что каждый из индексов m, n, p, l принимает два значения (1 и 2). В этом случае имеем 64 уравнения с таким же числом неизвестных параметров, решая которые, находим искомые параметры. Последующие приближения строятся аналогично, однако в этом нет необходимости, так как второе приближение обеспечивает точность решения в пределах 5%. В результате находим компоненты корректирующего тензора. Суммируя основной и корректирующий тензоры, получим тензор кинетических напряжений для упругого, вязкоупругого тел и вязкой жидкости.

Упругопластическому и вязкопластическому фиктивным телам соответствует бесконечная система алгебраических уравнений с переменными коэффициентами и свободными членами. Решение такой системы строится с помощью процедуры последовательных приближений, согласно которой первым (исходным) приближением считается решение соответствующей задачи для упругого тела или вязкой жидкости, т. е. известен тензор $(T^{(e)})$ для рассматриваемой задачи. По известным компонентам тензора $(T^{(e)})$, используя приведенные формулы, вычисляем интенсивность кинетических напряжений $T_i^{(e)}$, интенсивность напряжений $\sigma_i^{(e)}$ и интенсивность касательных напряжений $\tau_i^{(e)}$. Имея динамические диаграммы материала $\sigma_i \div e_i$ и $\tau_i \div \gamma_i$, где

$$\tau_i = (2\sqrt{2}/3)\,\sigma_i, \quad \dot{\gamma} = (2\sqrt{2})\,\dot{e}_i, \tag{1.3.84}$$

строим функции пластичности упругопластического тела $\varphi(\sigma_i)$ и вязкопластического тела $\varkappa(\tau_i)$ и определяем значения динамического предела текучести $\sigma_{\text{т.д.}}$ и $\tau_{\text{т.д.}}$. Затем по формулам (1.3.72) и (1.3.76) находим значения функций состояния α_1, α_2, $\alpha_1^{(b)}$, $\alpha_2^{(b)}$. По формулам для коэффициентов $F_{\gamma\beta}$ и свободных членов L_β уравнений вычисляем их значения, в результате получаем бесконечную систему алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами, решая которую рассмотренным способом, находим параметры A_{mnpl}, D_{mnpl}, следовательно, и компоненты корректирующего тензора. Суммируя тензоры (T_0) и $(T_\text{к})$, получим тензор кинетических напряжений $(T^{(e)})$ второго приближения. По формулам

$$T_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}^{(e)} - M\,(T_{\alpha\beta}^{(e)} - T^{(e)}\; g_{\alpha\beta}), \tag{1.3.85}$$

где $M = \varphi/(1+\varphi)$ в случае упругопластического тела и $M = \varkappa/(1+\varkappa)$ для вязкопластического тела, определяем компоненты тензора кинетических напряжений (T) во втором приближении. Последующие приближения строятся аналогично, однако в этом нет необходимости, так как точность приближенного решения не превышает 5%.

Таким образом, изложен общий метод решения задачи динамики деформируемого тела, применение которого позволяет определить тензор кинетических напряжений (T) для любой области возмущений и всего тела, находящегося в условиях динамического нагружения. По известному тензору (T) можно найти тензор напряжений (σ), вектор скорости $\mathbf{v}$, плотность ρ и оценить прочность и степень разрушения тела в рассматриваемой области возмущений.

§ 4. Области возмущений волн нагрузки и разгрузки

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние тела в областях возмущений нагрузки и разгрузки.

Область возмущений нагрузки является первичной, тело находится в естественном состоянии (напряжения и деформации равны нулю, частицы тела находятся в состоянии покоя). Область ограничена частью поверхности тела $S_т$ и поверхностью фронта волны нагрузки $S_ф$. С течением времени область расширяется, так как фронт волны нагрузки движется с конечной скоростью a. В зависимости от интенсивности возмущений и свойств материала деформации могут быть упругими, вязкоупругими, пластическими и др., однако передний фронт волны нагрузки перемещается с постоянной скоростью a_0 распространения упругих возмущений, поэтому область возмущений нагрузки представляет собой совокупность сферических областей и области, имеющей конфигурацию той части поверхности тела, где приложена нагрузка (рис. 19). Скорость a_0 определяется из следующих соображений. Области возмущений нагрузки соответствует сложное напряженно-деформировенное состояние, характеризуемое тензором напряжений (σ) и тензором деформаций (e), которые можно представить в виде

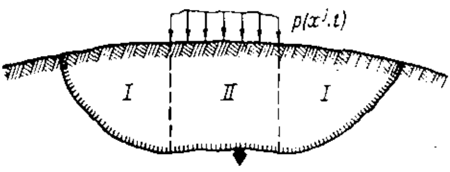

Рис. 19

$$(\sigma) = (S_\sigma) + (D_\sigma),\ (e) = (S_e) + (D_e). \tag{1.4.1}$$

Шаровые тензоры (S_σ) и (S_e) соответствуют объемному деформированию. Возмущения этого вида деформации распространяются со скоростью a_V. Отнесем тело к системе координат x^i и запишем уравнения движения элемента тела:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x^i} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}.$$

Дифференцируя по координатам x^i и суммируя, получим

$$\nabla^2 \sigma = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \operatorname{div} \mathbf{u}. \tag{1.4.2}$$

Учитывая, что $\sigma = 3Ke$, $\operatorname{div} \mathbf{u} = 3e$, уравнение (1.4.2) запишем в виде

$$K\nabla^2 e = \rho \frac{\partial^2 e}{\partial t^2}.$$

Отсюда следует выражение скорости распространения возмущений объемного деформирования

$$a_V^2 = K/\rho. \tag{1.4.3}$$

Девиаторы (D_σ), (D_e) связаны с деформацией формоизменения. Возмущения, соответствующие этому виду деформирования, распространяются со скоростью $a_ф$. Уравнения движения элемента в этом случае имеют вид

$$\nabla_j D^{ij}(\sigma) = \rho \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2}, \tag{1.4.4}$$

предполагается, что тело находится в упругом состоянии:

$$D^{ij}(\sigma) = 2GD^{ij}(e). \tag{1.4.5}$$

Учитывая последнее равенство и выражения деформаций $e_{ij} = (1/2)(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i)$, преобразуем уравнения (1.4.4) к виду

$$G\left(\nabla^2 u_i + \frac{\partial e}{\partial x^i}\right) = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \tag{1.4.6}$$

Дифференцируя (1.4.6) по координатам x^i и суммируя их, получим

$$3\rho \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} = 4G\nabla^2 e.$$

Отсюда следует, что скорость распространения возмущений деформации формоизменения

$$a_ф^2 = 4G/3\rho. \tag{1.4.7}$$

Для сложного напряженно-деформированного состояния тела, которое имеет место в области возмущений нагрузки, справедливы соотношения

$$\sigma = 3Ke, \quad (D_\sigma) = 2G(D_e), \tag{1.4.8}$$

так как на переднем фронте волны состояние упругое. Уравнение движения в перемещениях имеет вид

$$G\nabla^2 u_i + (3K + G)\frac{\partial e}{\partial x^i} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}; \tag{1.4.9}$$

дифференцируя по координатам x^i и суммируя, находим

$$(3K + 4G)\nabla^2 e = 3\rho \frac{\partial^2 e}{\partial t^2},$$

отсюда следует выражение для скорости распространения волны нагрузки при расширении

$$a_0^2 = (K + 4/3G)/\rho. \tag{1.4.10}$$

Последнее выражение можно представить в виде

$$a_0^2 = a_V^2 + (4/3)\, a_{cq}^2, \qquad (1.4.10')$$

где

$$a_{cq}^2 = G/\rho \qquad (1.4.11)$$

— скорость распространения возмущений сдвига. Формула (1.4.10′) показывает, что волна нагрузки расширения образуется в результате интерференции волны возмущений объемной деформации и волны возмущений сдвиговой деформации.

Установим теперь физический смысл коэффициента пропорциональности v^0, входящего в определение координаты $x^0 = v^0 t$, при распространении волны нагрузки. Из физических соотношений для упруго-пластического фиктивного тела следует зависимость

$$\tilde{e}_{i0} = (1/2G)\,(1+\varphi)\,T_{i0}. \qquad (1.4.12)$$

Учитывая, что $e_{i0} = (1/2)\,(v_i/v^0)$, $T_{i0} = \rho v_i v^0$, имеем

$$\frac{1}{2}\,\frac{v_i}{v^0} = \frac{1+\varphi}{2G}\,\rho v_i\, v^0. \qquad (1.4.13)$$

Отсюда находим $v^{0^2} = G/[\rho\,(1+\varphi)]$; при $\varphi = 0$ (упругое состояние тела) $v^{0^2} = G/\rho = a_{cq}^2$.

Следовательно, v^0 — скорость распространения волны нагрузки сдвиговой деформации. Если тело вязкоупругое, то из физических соотношений, справедливых для фиктивного тела, получим зависимость

$$1 = \frac{\rho}{G}\,v^{02}\left[1 + 2G\int_0^t \tilde{R}(t,\tau)\,d\tau\right],$$

ткуда

$$v^{0^2} = \frac{G}{\rho}\left[1 + 2G\int_0^t \tilde{R}(t,\tau)\,d\tau\right]^{-1}. \qquad (1.4.14)$$

При $\tilde{R}(t,\tau) = 0$ имеем $v^0 = a_{cq}$, следовательно, и в этом случае v^0 — скорость распространения волны нагрузки сдвиговой деформации.

Напряженно-деформированное состояние и движение частиц тела в области возмущений нагрузки характеризуются тензором кинетических напряжений $(T)_{\text{нагр}}$, компоненты которого удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} + F^\beta = 0; \qquad (1.4.15)$$

граничным условиям $T^{\alpha\beta}(S)\,n_\beta = q_{(n)}^\alpha$ — в напряжениях на $S_т$,

$$w_\alpha(S) = 0 \qquad (1.4.16)$$

— в перемещениях на $S_ф$, $v_{\alpha s} = v_\alpha(S)$ — в скоростях на S;

вариационному уравнению

$$\delta\left(R_ф - \int\limits_{S_2} w_{\alpha s}\, n_\beta\, T^{\alpha\beta}\, dS\right) = 0 \qquad (1.4.17)$$

или

$$\delta\left(W_ф - \int\limits_{S_2} v_{\alpha s}\, n_\beta\, T^{\alpha\beta}\, dS\right) = 0$$

(в зависимости от физико-механических свойств материала фиктивного тела). Области возмущений волны нагрузки имеют различную конфигурацию, поэтому тензор $(T)_{нагр}$ целесообразно строить для каждой составляющей области отдельно, выполняя при этом условия сопряжения на границах раздела. В сферических областях I (рис. 20) задача о построении тензора $(T)_{нагр}$ рассматривается в сферической системе координат $(\theta, \varphi, r, x^0)$ с началом в точке O, при этом предполагается, что текущие координаты изменяются в следующих пределах: $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$, $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$, $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, $x_1^0 \leqslant x^0 \leqslant x_2^0$, где $\theta_1 = \pi/2$, $\varphi_1 = 0$, $r_1 = 0$, $x_1^0 = 0$, $\varphi_2 = \pi$, $r_2 = a_0 t$, θ_2 и x_2^0 — известные величины, зависящие от геометрии тела и продолжительности процесса деформации. Граничные условия в напряжениях имеют следующий вид:

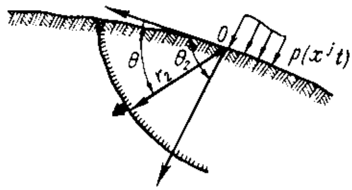

Рис. 20

$$\begin{aligned} T^{1\alpha} &= T_{II}^{1\alpha}\ (\alpha = 1,\ 2,\ 3,\ 0) && \text{при } \theta = \theta_1 \neq 0, \\ T^{1\alpha} &= (\rho v^1 v^\alpha)_s && \text{при } \theta = \theta_2, \\ T^{00} &= \rho_0 v^{0^2}, \quad T^{0i} = (\rho v^0 v^i)_0 && \text{при } x^0 = x_1^0 = 0; \end{aligned} \qquad (1.4.18)$$

граничные условия в перемещениях таковы:

$$w_\alpha(S) = 0 \text{ при } r = r_2. \qquad (1.4.18')$$

Сферическая система координат характеризуется метрическим тензором (g) с компонентами

$$g_{11} = r^2,\ g_{22} = r^2 \sin^2\theta,\ g_{33} = 1,\ g_{00} = -1,\ g_{ij} = 0,\ g_{i0} = 0 \qquad (1.4.19)$$

и символами Кристоффеля

$$\begin{gathered} \Gamma_{1.22} = -r^2 \sin\theta\cos\theta,\ \Gamma_{3.11} = -r,\ \Gamma_{3.22} = -r\sin^2\theta, \\ \Gamma_{1.13} = r,\ \Gamma_{2.21} = r^2\sin\theta\cos\theta,\ \Gamma_{2.23} = r\sin^2\theta, \\ \Gamma_{22}^1 = -\sin\theta\cos\theta,\ \Gamma_{31}^3 = -r,\ \Gamma_{22}^3 = -r\sin^2\theta, \\ \Gamma_{13}^1 = 1/r,\ \Gamma_{21}^2 = \operatorname{ctg}\theta,\ \Gamma_{23}^2 = 1/r. \end{gathered} \qquad (1.4.19')$$

Тензор кинетических напряжений можно представить в виде суммы основного и корректирующего тензоров:

$$(T)_{нагр} = (T_о) + (T_к). \qquad (1.4.20)$$

Построение этих тензоров основано на использовании общего решения (1.3.56) уравнений равновесия, которое в сферических координатах имеет вид:

$$T^{11} = -\frac{2}{r^2}\varphi + \frac{1}{2r^4\sin^2\theta}\left[-(\tilde{R}_{3223} + 2N_{3223}) + (R_{0220} + 2N_{0220}) + r^2\sin^2\theta\,(\tilde{R}_{0330} + 2N_{0330})\right],$$

$$T^{22} = -\frac{2}{r^2\sin^2\theta}\varphi + \frac{1}{2r^4\sin^2\theta}\left[-(\tilde{R}_{3113} + 2N_{3113}) + (\tilde{R}_{0110} + 2N_{0110}) + r^2(\tilde{R}_{0330} + 2N_{0330})\right],$$

$$T^{33} = -2\varphi + \frac{1}{2r^4\sin^2\theta}\left[-(\tilde{R}_{1221} + 2N_{1221}) + r^2\sin^2\theta\,(\tilde{R}_{0110} + 2N_{0110}) + r^2(\tilde{R}_{0220} + 2N_{0220})\right],$$

$$T^{00} = 2\varphi + \frac{1}{2r^4\sin^2\theta}\left[(\tilde{R}_{1221} + 2N_{1221}) + r^2\sin^2\theta\,(\tilde{R}_{3113} + 2N_{3113}) + r^2(\tilde{R}_{3223} + 2N_{3223})\right], \tag{1.4.21}$$

$$T^{12} = -\frac{1}{r^4\sin^2\theta}\left[-(\tilde{R}_{3213} + 2N_{3213}) + (\tilde{R}_{0210} + 2N_{0210})\right],$$

$$T^{13} = \frac{1}{r^4\sin^2\theta}\left[(\tilde{R}_{3212} + 2N_{3212}) + r^2\sin^2\theta\,(\tilde{R}_{0310} + 2N_{0310})\right],$$

$$T^{23} = -\frac{1}{r^4\sin^2\theta}\left[-(\tilde{R}_{3112} + 2N_{3112}) + r^2(\tilde{R}_{0320} + 2N_{0320})\right],$$

$$T^{10} = \frac{1}{r^4\sin^2\theta}\left[(\tilde{R}_{0212} + 2N_{0212}) + r^2\sin^2\theta\,(\tilde{R}_{0313} + 2N_{0313})\right],$$

$$T^{20} = \frac{1}{r^4\sin^2\theta}\left[r^2(\tilde{R}_{0323} + 2N_{0323}) - (\tilde{R}_{0112} + 2N_{0112})\right],$$

$$T^{30} = \frac{-1}{r^4\sin^2\theta}\left[r^2\sin^2\theta\,(\tilde{R}_{0113} + 2N_{0113}) + r^2(\tilde{R}_{0223} + 2N_{0223})\right].$$

Функции $R_{\lambda\nu\mu\sigma}$ для формы Морера таковы:

$$\tilde{R}_{1221} = -2\left(\frac{\partial^2\Pi_1}{\partial\theta\partial\varphi} + r\sin^2\theta\frac{\partial\Pi_2}{\partial\theta}\right),\quad \tilde{R}_{3113} = -2\frac{\partial^2\Pi_2}{\partial r\partial\theta},$$

$$\tilde{R}_{3223} = -2\left(\frac{\partial^2\Pi_3}{\partial r\partial\varphi} + \sin\theta\cos\theta\frac{\partial\Pi_2}{\partial r}\right),\quad \tilde{R}_{0110} = \frac{\partial^2\Pi_0}{\partial\theta^2},$$

$$\tilde{R}_{0220} = \frac{\partial^2\Pi_0}{\partial\varphi^2} + \sin\theta\cos\theta\frac{\partial\Pi_0}{\partial\theta} + r\sin^2\theta\frac{\partial\Pi_0}{\partial r},\quad \tilde{R}_{0330} = \frac{\partial^2\Pi_0}{\partial r^2},$$

$$\tilde{R}_{3112} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\Pi_3}{\partial\theta} - \frac{\partial\Pi_2}{\partial\varphi} - \frac{\partial\Pi_1}{\partial r}\right) + \frac{2}{r}\frac{\partial\Pi_1}{\partial\theta} - \operatorname{ctg}\theta\left(\frac{\partial\Pi_3}{\partial\theta} - \frac{\partial\Pi_2}{\partial\varphi} + \frac{\partial\Pi_1}{\partial r}\right),$$

$$\tilde{R}_{3212} = \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial\Pi_3}{\partial\theta} - \frac{\partial\Pi_2}{\partial\varphi} + \frac{\partial\Pi_1}{\partial r}\right) - \frac{2}{r}\frac{\partial\Pi_1}{\partial\varphi},$$

$$\tilde{R}_{0323} = \frac{\partial^2\Pi_3}{\partial r\partial x^0} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Pi_3}{\partial x^0},\quad \tilde{R}_{0113} = -\frac{\partial^2\Pi_2}{\partial\theta\partial x^0},$$

$$\widetilde{R}_{3213} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial \Pi_3}{\partial \theta} + \frac{\partial \Pi_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Pi_1}{\partial r}\right) + 2\operatorname{ctg}\theta \frac{\partial \Pi_3}{\partial r} - \frac{2}{r}\frac{\partial \Pi_1}{\partial r},$$

$$\widetilde{R}_{0320} = \frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\partial^2 \Pi_3}{\partial x^{0^2}} - \frac{1}{r}\frac{\partial \Pi_0}{\partial \varphi}, \quad \widetilde{R}_{0112} = -\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial \theta \partial x^0} - \operatorname{ctg}\theta \frac{\partial \Pi_1}{\partial x^0}, \tag{1.4.22}$$

$$\widetilde{R}_{0212} = \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial \varphi \partial x^0} + r\sin^2\theta \frac{\partial \Pi_2}{\partial x^0}, \quad \widetilde{R}_{0313} = \frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial r \partial x^0} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Pi_2}{\partial x^0},$$

$$\widetilde{R}_{0223} = -\frac{\partial^2 \Pi_3}{\partial \varphi \partial x^0} - \cos\theta \sin\theta \frac{\partial \Pi_2}{\partial x^0},$$

$$\widetilde{R}_{0210} = \frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial \theta \partial \varphi} + \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial x^{0^2}} - \operatorname{ctg}\theta \frac{\partial \Pi_0}{\partial \varphi},$$

$$\widetilde{R}_{0310} = \frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial x^{0^2}} - \frac{1}{r}\frac{\partial \Pi_0}{\partial \theta}.$$

Функции $N_{\lambda\nu\mu\sigma}$ для формы Морера имеют вид:

$$N_{1221} = r^2\left[(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\Pi_0 + (1/r)\sin\theta\cos\theta\Pi_2\right], \quad N_{3113} = \Pi_0,$$

$$N_{3223} = \sin^2\theta\Pi_0, \quad N_{3112} = \frac{1}{r\sin\theta}(\Pi_1\cos\theta + \Pi_3 r\sin\theta), \tag{1.4.23}$$

$$N_{3212} = -\sin\theta(2r\cos\theta\Pi_0 - \sin\theta\Pi_2), \quad N_{3213} = (1/r)\Pi_1.$$

Основной тензор строится по схеме, приведенной в § 3.

Для координаты θ функции нагрузок $Q^{1\beta}_{(\gamma)}$ следующие:

$$Q^{1\beta}_{(1)} = T^{1\beta}_{\text{II}}, \; Q^{1\beta}_{(2)} = (\rho v' v^\beta)_s; \tag{1.4.24}$$

им соответствуют функции кинетических напряжений

$$\Pi^{(0)}_{\alpha 1} = (1/2)(1 + \cos\bar{\theta})F_{\alpha 1} + (1/2)(1 - \cos\bar{\theta})\Phi_{\alpha 1}, \tag{1.4.25}$$

где $\bar{\theta} = \pi(\theta + \pi/2)/(\theta_2 + \pi/2)$ — безразмерная координата.

Функции $F_{\alpha 1}$ и $\Phi_{\alpha 1}$ определяются в результате решения уравнений:

$$2\left(\frac{\partial^2 F_{31}}{\partial r \partial \varphi} + \sin\theta_1\cos\theta_1 \frac{\partial F_{21}}{\partial r}\right) - 2\sin^2\theta_1 F_{01} +$$
$$+ \frac{\partial^2 F_{01}}{\partial \varphi^2} + r\sin^2\theta_1 \frac{\partial F_{01}}{\partial r} + r^2\sin^2\theta_1 \frac{\partial^2 F_{01}}{\partial r^2} = 2r^4\sin^2\theta_1 Q^{11}_{(1)},$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial F_{21}}{\partial \varphi} - \frac{\partial F_{11}}{\partial r}\right) - \operatorname{ctg}\theta_1 \frac{\partial F_{31}}{\partial r} + \frac{2}{r}\frac{\partial F_{11}}{\partial r} - \frac{2}{r^2}F_{11} +$$
$$+ \frac{\partial^2 F_{11}}{\partial x^{0^2}} - \operatorname{ctg}\theta_1 \frac{\partial F_{01}}{\partial \varphi} = -2r^4\sin^2\theta_1 Q^{12}_{(1)}, \tag{1.4.26}$$

$$-\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial F_{21}}{\partial \varphi} - \frac{\partial F_{11}}{\partial r}\right) - 2\sin\theta_1(2r\cos\theta_1 F_{01} - \sin\theta_1 F_{21}) +$$
$$+ r^2\sin^2\theta_1 \frac{\partial^2 F_{21}}{\partial x^{0^2}} = -2r^4\sin^2\theta_1 Q^{13}_{(1)},$$

$$\frac{\partial^2 F_{11}}{\partial \varphi \partial x^0} + r\sin^2\theta_1 \frac{\partial F_{21}}{\partial x^0} + r^2\sin^2\theta_1\left(\frac{\partial^2 F_{21}}{\partial r \partial x^0} + \frac{1}{r}\frac{\partial F_{21}}{\partial x^0}\right) = 2r^4\sin^2\theta_1 Q^{10}_{(1)}$$

совместно с граничными условиями:

$$F_{01}=0,\quad F_{21}=0,\quad F_{31}=0 \qquad \text{при } \varphi=\varphi_\gamma;$$
$$F_{01}=0,\quad F_{11}=0,\quad F_{21}=0,\quad F_{31}=0 \qquad \text{при } r=r_\gamma;$$
$$F_{11}=0,\ \frac{\partial F_{11}}{\partial x^0}=0,\ F_{21}=0,\ \frac{\partial F_{21}}{\partial x^0}=0 \qquad \text{при } x^0=x^0_\gamma. \tag{1.4.27}$$

Интегрирование уравнений (1.4.26) рассмотрено авторами [19]; функцию F_{01}, учитывая произвольность выбора искомых функций, подчиним уравнению

$$\frac{\partial^2 F_{01}}{\partial\varphi^2}+r^2\sin^2\theta_1\frac{\partial^2 F_{01}}{\partial r^2}+r\sin^2\theta_1\frac{\partial F_{01}}{\partial r}-2\sin^2\theta_1 F_{01}=0$$

и нулевым граничным условиям, следовательно,

$$F_{01}=0. \tag{1.4.28}$$

Для функции F_{21} имеем уравнение

$$\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}+\sin^2\theta_1\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial y}{\partial r}\right)+2\sin^2\theta_1\frac{\partial}{\partial r}(ry)-2\sin^2\theta_1 y-$$
$$-r^2\sin^2\theta_1\frac{\partial^2 y}{\partial x^{0^2}}=\widetilde{A}_{11}, \tag{1.4.29}$$

где

$$\frac{\partial F_{21}}{\partial x^0}=y,\ \widetilde{A}_{11}=2\sin^2\theta_1,\ A_{11}=r^4\frac{\partial Q^{13}_{(1)}}{\partial x^0}+\frac{\partial}{\partial r}(r^4 Q^{12}_{(1)}),$$

и нулевые граничные условия (1.4.27). Решением такой краевой задачи является функция

$$y=\sum_m\sum_n\frac{1}{\omega_{mn}}\int_0^{x^0}A^{(mn)}_{11}(\xi)\sin\omega_{mn}(\xi-x^0)\,d\xi\, r^{-3/2}J_\nu(\omega_{mn}r)\sin m\varphi,$$

$$\nu=(1/2)\sqrt{9+\frac{4m^2}{\sin^2\theta_1}}; \tag{1.4.30}$$

собственные частоты ω_{mn} являются корнями характеристического уравнения $J_\nu(\omega r_2)=0$. Коэффициенты $A^{(mn)}_{11}$ вычисляются по формулам

$$A^{(mn)}_{11}=\frac{\int_0^{r_2}\int_0^{\pi}2r^{-7/2}A_{11}J_\nu(\omega_{mn}r)\sin m\varphi\,d\varphi\,dr}{\int_0^{r_2}\int_0^{\pi}(r^{-3/2}J_\nu(\omega_{mn}r)\sin m\varphi)^2\,d\varphi\,dr};$$

функция F^0_{21} такова:

$$F_{21}=\int_0^{x^0}y(r,\varphi,x^0)\,dx^0. \tag{1.4.31}$$

Функция F_{31} удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 F_{31}}{\partial r \partial \varphi} = B_{11}, \tag{1.4.32}$$

причем

$$B_{11} = \sin\theta_1 \left(r^4 \sin\theta_1 Q_1^{11} - \cos\theta_1 \int_0^{x^0} y'_r \, dx^0 \right).$$

Решая это уравнение с учетом граничных условий (4.27), находим

$$F_{31} = \int_0^r \int_0^\varphi B_{11} \, dr d\varphi. \tag{1.4.33}$$

Для функции F_{11} имеем уравнение

$$\frac{\partial^2 F_{11}}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial F_{11}}{\partial r} + \frac{2}{r^2} F_{11} - \frac{\partial^2 F_{11}}{\partial x^{0^2}} = C_{11},$$

где

$$C_{11} = 2r^4 \sin^2\theta_1 Q_{(1)}^{12} + \int_0^{x^0} \frac{\partial^2 y}{\partial r \partial \varphi} dx^0 - \operatorname{ctg}\theta_1 \int_0^\varphi B_{11} \, d\varphi, \tag{1.4.34}$$

и нулевые граничные условия (1.4.27). Решением этой краевой задачи является функция

$$F_{11} = \sum_n \frac{1}{\omega_n} \int_0^{x^0} C_{11}^{(n)} (\xi) \sin \omega_n (\xi - x^0) \, d\xi r^{3/2} J_{1/2} (\omega_n r), \tag{1.4.35}$$

причем

$$C_{11}^{(n)} = \int_0^{r_2} C_{11} r^{3/2} J_{1/2}(\omega_n r) \, dr \Bigg/ \int_0^{r_2} (r^{3/2} J_{1/2} (\omega_n r))^2 \, dr.$$

Здесь собственные частоты ω_n — корни характеристического уравнения $J_{1/2}(\omega r_2) = 0$. Функции $\Phi_{\alpha 1}$ находятся по тем же формулам, что и $F_{\alpha 1}$, однако индекс $\gamma = 1$ необходимо заменить на индекс $\gamma = 2$ у функций нагрузок $Q_{(\gamma)}^{1\beta}$, координаты θ_γ и функции y_γ.

Для координаты x^0 функции нагрузок таковы:

$$Q_{(1)}^{00} = \bar{\rho}_0 v^0 v^0, \qquad Q_{(1)}^{0i} = (\rho v^0 v^i)_0; \tag{1.4.36}$$

соответствующие им функции кинетических напряжений $\Pi_{\alpha_0}^{(0)}$ имеют вид:

$$\Pi_{i0}^{(0)} = (1/2) \int_0^{x^0} (1 + \cos \bar{x}^0) \, dx^0 \, F_{i0}, \quad \Pi_{00}^{(0)} = (1/2)(1 + \cos \bar{x}^0) F_{00}, \tag{1.4.37}$$

где $\overline{x_0} = \pi x^0/x_2^0$ — безразмерная координата. Функции $F_{\alpha 0}$ имеют вид [19]:

$$F_0 = r^2 \sin^2 \theta\, Q_{(1)}^{00},\ F_{30} = 2r^2 \sin^2 \theta \int_0^{\varphi} Q_{(1)}^{03}\, d\varphi,\ F_{20} = 0,$$

$$F_{10} = 2r^4 \operatorname{tg} \theta \left[\sin^2 \theta\, Q_{(1)}^{02} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin^2 \theta \int_0^{\varphi} Q_{(1)}^{01}\, d\varphi \right) \right]. \tag{1.4.38}$$

Полные функции кинетических напряжений основного тензора таковы:

$$\Pi_1^{(0)} = (1/2)(1+\cos\overline{\theta}) F_{11} + (1/2)(1-\cos\overline{\theta}) \Phi_{11} +$$
$$+ (1/2) \int_0^{x^0} (1+\cos\overline{x^0})\, dx^0\, F_{10},$$

$$\Pi_2^{(0)} = (1/2)(1+\cos\overline{\theta}) F_{21} + (1/2)(1-\cos\overline{\theta}) \Phi_{21}, \tag{1.4.39}$$

$$\Pi_3^{(0)} = (1/2)(1+\cos\overline{\theta}) F_{31} + (1/2)(1-\cos\overline{\theta}) \Phi_{31} +$$
$$+ (1/2) \int_0^{x^0} (1+\cos\overline{x^0})\, dx^0\, F_{30},$$

$$\Pi_0^{(0)} = (1/2)(1+\cos\overline{x^0}) F_{00}.$$

Подставляя последние выражения в (1.4.22) и (1.4.23), а затем в (1.4.21), получим компоненты тензора $T_0^{(1)}$ для самоуравновешенных частей функций нагрузок $\widetilde{Q}_{(\gamma)}^{1\beta}$ и $\widetilde{Q}_{(\gamma)}^{0\beta}$. Несамоуравновешенным частям функций нагрузок $\widetilde{Q}_{(\gamma)}^{1\beta}$ и $\widetilde{Q}_{(1)}^{0\beta}$ соответствует тензор $(T_0^{(2)})$ с компонентами:

$$T_{(0)}^{11} = (1/2)(1+\cos\overline{\theta}) \overline{Q}_{(1)}^{11} + (1/2)(1-\cos\overline{\theta}) \overline{Q}_{(2)}^{11},$$

$$T_{(0)}^{12} = (1/2)(1+\cos\overline{\theta}) \overline{Q}_{(1)}^{12} + (1/2)(1-\cos\overline{\theta}) \overline{Q}_{(2)}^{12}, \tag{1.4.40}$$

$$T_{(0)}^{13} = (1/2)(1+\cos\overline{\theta}) \overline{Q}_{(1)}^{13} + (1/2)(1-\cos\overline{\theta}) \overline{Q}_{(2)}^{13},$$

$$T_{(0)}^{10} = (1/2)(1+\cos\overline{\theta}) \overline{Q}_{(1)}^{10} + (1/2)(1-\cos\overline{\theta}) \overline{Q}_{(2)}^{10} + (1/2)(1+\cos\overline{x^0}) \overline{Q}_{(1)}^{01},$$

$$T_{(0)}^{20} = (1/2)(1+\cos\overline{x^0}) \overline{Q}_{(1)}^{02},\ T_{(0)}^{30} = (1/2)(1+\cos\overline{x^0}) \overline{Q}_{(1)}^{03},$$

$$T_{(0)}^{00} = (1/2)(1+\cos\overline{x^0}) \overline{Q}_{(1)}^{00}.$$

Сумма тензоров $(T_0^{(1)}) + T_0^{(02)})$ образует основной тензор (T_0) в сферической области I (см. рис. 20).

Построение корректирующего тензора $(T_к)$ для сферической области I выполняется по схеме, рассмотренной в § 3, с учетом физико-механических свойств фиктивного тела. Системы фундаментальных функций принимаются следующими:

$$\xi_m(\overline{\theta}) = (1/m!)\, Q_m(\theta) \sin m\overline{\theta},\quad \eta_n(\overline{\varphi}) = (1/n!) \sin n\overline{\varphi},$$

$$\zeta_p(\overline{r}) = (1/p!)\, J_p(\overline{r}) \sin p\overline{r}. \tag{1.4.41}$$

где $Q_m(\theta)$ — полиномы Лежандра; $J_p(\vec{r})$ — функции Бесселя. Компоненты корректирующего тензора

$$T^{\alpha\beta}_{(\text{к})} = \sum_{mnpl} \left(A_{mnpl} f^{\alpha\beta}_{(1)} + B_{mnpl} f^{\alpha\beta}_{(2)} + C_{mnpl} f^{\alpha\beta}_{(3)} + D_{mnpl} f^{\alpha\beta}_{(2)}\right). \qquad (1.4.42)$$

Здесь $f^{\alpha\beta}_{(\gamma)}(mnpl)$ — известные функции координат [19]. Параметры $A_{mnpl}, \ldots, D_{mnpl}$ определяются в результате решения системы алгебраических уравнений (1.3.70), соответствующей свойствам фиктивного тела. Итак, корректирующий тензор для сферической области I построен.

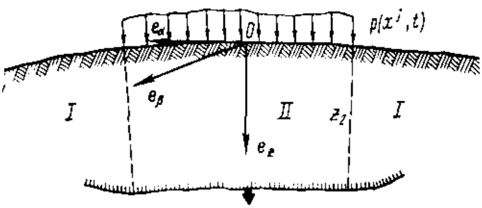

Рис. 21

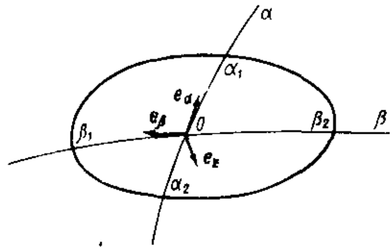

Рис. 22

В области II (рис. 21) задача о построении тензора $(T)_{\text{нагр}}$ рассматривается в криволинейной системе координат (α, β, z, x^0) с базисом $(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta, \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_{x^0})$ и началом в центре области нагружения поверхности тела. Координатные линии α и β расположены на поверхности тела и являются линиями главных кривизн поверхности, координатная линия z направлена по нормали к нагруженной части поверхности. Координаты α и β связаны с областью нагружения тела (рис. 22) и изменяются в следующих пределах: $\alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2$, $\beta_1 \leqslant \beta \leqslant \beta_2$, причем α_γ и β_γ $(\gamma = 1, 2)$ — размеры области нагружения; координаты z и x^0 изменяются в пределах $0 \leqslant z \leqslant z_2$, $0 \leqslant x^0 \leqslant x_2{}^0$, где z_2 — глубина области нагрузки $(z_2 = a_0 t)$, $x_2{}^0 = v_{\text{н}}{}^0 t_2$ — координата, соответствующая времени продолжительности процесса. Метрический тензор системы координат имеет компоненты:

$$g_{11} = A^2,\ g_{22} = B^2,\ g_{33} = 1,\ g_{00} = -1,\ g_{ij} = 0,\ g_{i0} = 0; \qquad (1.4.43)$$

символы Кристоффеля следующие:

$$\Gamma_{1.11} = A\frac{\partial A}{\partial \alpha},\ \Gamma_{2.22} = B\frac{\partial B}{\partial \beta},\ \Gamma_{1.22} = -B\frac{\partial B}{\partial \alpha},\ \Gamma_{2.11} = -A\frac{\partial A}{\partial \beta},$$

$$\Gamma_{1.12} = A\frac{\partial A}{\partial \beta},\ \Gamma_{2.21} = B\frac{\partial B}{\partial \alpha}, \qquad (1.4.43')$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial \alpha},\ \Gamma^2_{22} = \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial \beta},\ \Gamma^1_{22} = -\frac{B}{A^2}\frac{\partial B}{\partial \alpha},$$

$$\Gamma^2_{11} = -\frac{A}{B^2}\frac{\partial A}{\partial \beta},\ \Gamma^2_{21} = \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial \alpha},\ \Gamma^1_{12} = \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial \beta},$$

где A и B — параметры Ляме поверхности тела.

Для области II имеют место граничные условия:

$$
\begin{aligned}
T^{3\alpha} &= [(\rho v^3 v^\alpha)_s - p^{3\alpha}]_{(1)} && \text{при } z = 0, \\
w_\alpha(s) &= 0 && \text{при } z = z_2, \\
T^{00} &= (\rho v^0 v^0)_{(0)},\ T^{0i} = (\rho v^0 v^i)_{(0)} && \text{при } x^0 = 0.
\end{aligned} \tag{1.4.44}
$$

Представим тензор кинетических напряжений для области II в виде суммы основного и корректирующего тензоров:

$$
(T)_{\text{нагр}} = (T_0) + (T_{\text{к}}). \tag{1.4.45}
$$

Общее решение уравнений равновесия в выбранной системе координат имеет вид:

$$
\begin{aligned}
T^{11} &= -\frac{1}{A^2}\left[2\varphi + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{B^2}(\widetilde{R}_{3223} + 2N_{3223}) - \frac{1}{B^2}\widetilde{R}_{0220} - \widetilde{R}_{0330}\right)\right], \\
T^{22} &= -\frac{1}{B^2}\left[2\varphi + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{A^2}(\widetilde{R}_{3113} + 2N_{3113}) - \frac{1}{A^2}\widetilde{R}_{0110} - \widetilde{R}_{0330}\right)\right], \\
T^{33} &= -\left[2\varphi + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{A^2B^2}(\widetilde{R}_{2112} + 2N_{2112}) - \frac{1}{A^2}\widetilde{R}_{0110} - \frac{1}{B^2}\widetilde{R}_{0220}\right)\right], \\
T^{00} &= 2\varphi + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{A^2B^2}(\widetilde{R}_{2112} + 2N_{2112}) + \frac{1}{A^2}(\widetilde{R}_{3113} + 2N_{3113}) + \right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{B^2}(\widetilde{R}_{3223} + 2N_{3223})\right], \\
T^{12} &= -\frac{1}{2A^2B^2}(\widetilde{R}_{1323} + 2N_{1323} + \widetilde{R}_{0210}), \\
T^{13} &= -\frac{1}{2A^2}\left[\frac{1}{B^2}(R_{2321} + 2N_{2321}) + \widetilde{R}_{0310}\right], \\
T^{10} &= \frac{1}{2A^2}\left(\frac{1}{B^2}\widetilde{R}_{0212} + \widetilde{R}_{0313}\right), \\
T^{23} &= \frac{1}{2B^2}\left[\frac{1}{A^2}(\widetilde{R}_{1231} + 2N_{1231}) + R_{0320}\right], \\
T^{20} &= -\frac{1}{2B^2}\left(\frac{1}{A^2}\widetilde{R}_{0112} - \widetilde{R}_{0323}\right), \\
T^{30} &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{A^2}\widetilde{R}_{0113} + \frac{1}{B^2}\widetilde{R}_{0223}\right).
\end{aligned} \tag{1.4.46}
$$

Функции $R_{\lambda\nu\mu\sigma}$ для формы Морера таковы:

$$
\widetilde{R}_{1221} = -2\left(\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial\alpha\partial\beta} - \Gamma^1_{11}\frac{\partial\Pi_1}{\partial\beta} - \Gamma^2_{22}\frac{\partial\Pi_1}{\partial\alpha}\right),
$$

$$
\widetilde{R}_{3113} = -2\left(\frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial\alpha\partial z} - \Gamma^1_{11}\frac{\partial\Pi_2}{\partial z} - \Gamma^2_{11}\frac{\partial\Pi_3}{\partial z}\right),
$$

$$
\widetilde{R}_{3223} = -2\left(\frac{\partial^2 \Pi_3}{\partial\beta\partial z} - \Gamma^1_{22}\frac{\partial\Pi_2}{\partial z} - \Gamma^2_{22}\frac{\partial\Pi_3}{\partial z}\right),\quad \widetilde{R}_{0330} = \frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial z^2},
$$

$$
\widetilde{R}_{0110} = \frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial\alpha^2} - \Gamma^1_{11}\frac{\partial\Pi_0}{\partial\alpha} - \Gamma^2_{11}\frac{\partial\Pi_0}{\partial\beta},\quad \widetilde{R}_{0220} = \frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial\beta^2} - \Gamma^1_{22}\frac{\partial\Pi_0}{\partial\alpha} - \Gamma^2_{22}\frac{\partial\Pi_0}{\partial\beta},
$$

$$\widetilde{R}_{3112}=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial\Pi_3}{\partial\alpha}-\frac{\partial\Pi_2}{\partial\beta}-\frac{\partial\Pi_1}{\partial z}\right)+\Gamma^1_{11}\left(\frac{\partial\Pi_1}{\partial z}+\frac{\partial\Pi_2}{\partial\beta}-\frac{\partial\Pi_3}{\partial\alpha}\right)-$$

$$-\Gamma^2_{12}\left(\frac{\partial\Pi_3}{\partial\alpha}-\frac{\partial\Pi_2}{\partial\beta}+\frac{\partial\Pi_1}{\partial z}\right),$$

$$\widetilde{R}_{3212}=\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial\Pi_3}{\partial\alpha}-\frac{\partial\Pi_2}{\partial\beta}+\frac{\partial\Pi_1}{\partial z}\right)-\Gamma^1_{12}\left(\frac{\partial\Pi_3}{\partial\alpha}-\frac{\partial\Pi_2}{\partial\beta}-\frac{\partial\Pi_1}{\partial z}\right)-$$

$$-\Gamma^2_{22}\left(\frac{\partial\Pi_3}{\partial\alpha}-\frac{\partial\Pi_2}{\partial\beta}+\frac{\partial\Pi_1}{\partial z}\right), \qquad (1.4.47)$$

$$\widetilde{R}_{3213}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\Pi_1}{\partial z}-\frac{\partial\Pi_2}{\partial\beta}-\frac{\partial\Pi_3}{\partial\alpha}\right)+2\Gamma^1_{12}\frac{\partial\Pi_2}{\partial z}+2\Gamma^2_{12}\frac{\partial\Pi_3}{\partial z},$$

$$\widetilde{R}_{0112}=-\frac{\partial^2\Pi_1}{\partial\alpha\partial x^0}+(\Gamma^1_{11}-\Gamma^2_{12})\frac{\partial\Pi_1}{\partial x^0}, \quad \widetilde{R}_{0320}=\frac{\partial^2\Pi_0}{\partial\beta\partial z}+\frac{\partial^2\Pi_3}{\partial x^{0^2}},$$

$$\widetilde{R}_{0113}=-\frac{\partial^2\Pi_2}{\partial\alpha\partial x^0}+\Gamma^1_{11}\frac{\partial\Pi_2}{\partial x^0}+\Gamma^2_{11}\frac{\partial\Pi_3}{\partial x^0}, \quad \widetilde{R}_{0310}=\frac{\partial^2\Pi_0}{\partial\alpha\partial z}+\frac{\partial^2\Pi_2}{\partial x^{0^2}},$$

$$\widetilde{R}_{0223}=-\frac{\partial^2\Pi_3}{\partial\beta\partial x^0}+\Gamma^1_{22}\frac{\partial\Pi_2}{\partial x^0}+\Gamma^2_{22}\frac{\partial\Pi_3}{\partial x^0}, \quad \widetilde{R}_{0313}=\frac{\partial^2\Pi_2}{\partial z\partial x^0},$$

$$\widetilde{R}_{0212}=\frac{\partial^2\Pi_1}{\partial\beta\partial x^0}+(\Gamma^1_{12}-\Gamma^2_{22})\frac{\partial\Pi_1}{\partial x^0}, \quad \widetilde{R}_{0323}=\frac{\partial^2\Pi_3}{\partial z\partial x^0},$$

$$\widetilde{R}_{0210}=\frac{\partial^2\Pi_0}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\partial^2\Pi_1}{\partial x^{0^2}}-\Gamma^1_{12}\frac{\partial\Pi_0}{\partial\alpha}-\Gamma^2_{12}\frac{\partial\Pi_0}{\partial\beta}.$$

Функции $N_{\lambda\upsilon\mu\sigma}$ для формы Морера имеют вид

$$N_{1221}=-\frac{1}{A^2B^2}\{\Pi_0[B^2(-\Gamma_{112}\Gamma_{112}+\Gamma_{122}\Gamma_{111})+$$

$$+A^2(-\Gamma_{221}\Gamma_{221}+\Gamma_{222}\Gamma_{211})]+\Pi_1(-2\Gamma_{112}+\Gamma_{221}+\Gamma_{122}\Gamma_{211}+\Gamma_{222}\Gamma_{111})\}. \qquad (1.4.47')$$

Построение основного тензора выполняется по схеме, приведенной в § 3. Функции нагрузок для координаты z следующие:

$$Q^{3\beta}_{(1)}=(\rho v^3 v^\beta)_s-p^{3\beta}_{(1)} \quad (\beta=1,\ 2,\ 3,\ 0); \qquad (1.4.48)$$

соответствующие им функции кинетических напряжений

$$\Pi^{(0)}_{\alpha 3}=(1/2)\,(1+\cos\bar{z})\,F_{\alpha 3}, \qquad (1.4.49)$$

где $\bar{z}=\pi z/z_2$ — безразмерная координата. Функции $F_{\alpha 3}$ удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial F_{33}}{\partial\alpha}-\frac{\partial F_{23}}{\partial\beta}\right)-\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}+\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\beta}\right)\left(\frac{\partial F_{33}}{\partial\alpha}-\frac{\partial F_{23}}{\partial\beta}\right)+$$

$$+B^2\frac{\partial^2F_{23}}{\partial x^{0^2}}=-2A^2B^2Q^{31}_{(1)},$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial F_{33}}{\partial\alpha}-\frac{\partial F_{23}}{\partial\beta}\right)-\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\alpha}+\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)\left(\frac{\partial F_{33}}{\partial\alpha}-\frac{\partial F_{23}}{\partial\beta}\right)-$$
$$-A^2\frac{\partial^2 F_{33}}{\partial x^{0^2}}=2A^2B^2Q^{32}_{(1)},$$

$$\frac{\partial^2 F_{13}}{\partial\alpha\partial\beta}-\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\alpha}\frac{\partial F_{13}}{\partial\beta}-\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\beta}\frac{\partial F_{13}}{\partial\alpha}+\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial A}{\partial\alpha}\frac{\partial B}{\partial\beta}-\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)F_{13}+$$
$$+\frac{1}{2}\left\{B^2\frac{\partial^2 F_{03}}{\partial\alpha^2}+A^2\frac{\partial^2 F_{03}}{\partial\beta^2}+\left(B\frac{\partial B}{\partial\alpha}-\frac{B^2}{A}\frac{\partial A}{\partial\alpha}\right)\frac{\partial F_{03}}{\partial\alpha}+\right.$$
$$+\left(A\frac{\partial A}{\partial\beta}-\frac{A^2}{B}\frac{\partial B}{\partial\beta}\right)\frac{\partial F_{03}}{\partial\beta}-2\left[\left(\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial B}{\partial\alpha}+\frac{A}{B}\frac{\partial B}{\partial\beta}\frac{\partial A}{\partial\beta}\right)+\right. \tag{1.4.50}$$
$$\left.\left.+\left(\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial A}{\partial\beta}+\frac{B}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial A}{\partial\alpha}\right)\right]F_{03}\right\}=A^2B^2Q^{33}_{(1)},$$
$$B^2\frac{\partial^2 F_{23}}{\partial\alpha\partial x^0}-B\left(\frac{B}{A}\frac{\partial A}{\partial\alpha}-\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)\frac{\partial F_{23}}{\partial x^0}+A^2\frac{\partial^2 F_{33}}{\partial\beta\partial x^0}-$$
$$-A\left(\frac{A}{B}\frac{\partial B}{\partial\beta}-\frac{\partial A}{\partial\beta}\right)\frac{\partial F_{33}}{\partial x^0}=2A^2B^2Q^{30}_{(1)}$$

и граничным условиям: при $x^0=0$

$$F_{03}=0,\ F_{23}=0,\ F_{33}=0,\ \frac{\partial F_{23}}{\partial x^0}=0,\ \frac{\partial F_{33}}{\partial x^0}=0. \tag{1.4.51}$$

Учитывая произвольность функций $F_{\alpha 3}$, подчиним F_{03} уравнению

$$B^2\frac{\partial^2 F_{03}}{\partial\alpha^2}+A^2\frac{\partial^2 F_{03}}{\partial\beta^2}+\left(B\frac{\partial B}{\partial\alpha}-\frac{B^2}{A}\frac{\partial A}{\partial\alpha}\right)\frac{\partial F_{03}}{\partial\alpha}+$$
$$+\left(A\frac{\partial A}{\partial\beta}-\frac{A^2}{B}\frac{\partial B}{\partial\beta}\right)\frac{\partial F_{03}}{\partial\beta}-2\left[\left(\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial B}{\partial\alpha}+\frac{A}{B}\frac{\partial B}{\partial\beta}\frac{\partial A}{\partial\beta}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial A}{\partial\beta}+\frac{B}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial A}{\partial\alpha}\right)\right]F_{03}=0. \tag{1.4.52}$$

Тогда третье из уравнений (1.4.50) можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 F_{13}}{\partial\alpha\partial\beta}-\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\alpha}\frac{\partial F_{13}}{\partial\beta}-\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\beta}\frac{\partial F_{13}}{\partial\alpha}+$$
$$+\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial A}{\partial\alpha}\frac{\partial B}{\partial\beta}-\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)F_{13}=A^2B^2Q^{33}_{(1)}. \tag{1.4.53}$$

Рассматривая совместно первое и второе уравнения (1.4.50), для

$$\xi=\frac{\partial F_{33}}{\partial\alpha}-\frac{\partial F_{23}}{\partial\beta} \tag{1.4.54}$$

получаем уравнение

$$\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial\beta^2}-a_1\frac{\partial\xi}{\partial\alpha}-a_2\frac{\partial\xi}{\partial\beta}-a_0\xi-\frac{\partial^2\xi}{\partial x^{0^2}}=2P, \tag{1.4.55}$$

где

$$P = \frac{\partial}{\partial\alpha}(B^2 Q^{32}_{(1)}) - \frac{\partial}{\partial\beta}(A^2 Q^{31}_{(1)}),$$

$$a_0 = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A^2}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\alpha} + \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B^2}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta} + \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\beta}\right)\right),$$

$$a_1 = \frac{1}{A^2}\left(\frac{3}{A}\frac{\partial A}{\partial\alpha} + \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right), \quad a_2 = \frac{1}{B^2}\left(\frac{3}{B}\frac{\partial B}{\partial\beta} + \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}\right),$$

и граничные условия: при $x^0 = 0$

$$\xi = 0, \quad \frac{\partial\xi}{\partial x^0} = 0. \tag{1.4.56}$$

Считая $\xi(\alpha, \beta, x^0)$ известной функцией и рассматривая совместно (1.4.54) и четвертое из уравнений (1.4.50), записанное в виде

$$B^2\frac{\partial F_{23}}{\partial\alpha} - B\left(\frac{B}{A}\frac{\partial A}{\partial\alpha} - \frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)F_{23} + A^2\frac{\partial F_{33}}{\partial\beta} - \\ - A\left(\frac{A}{B}\frac{\partial B}{\partial\beta} - \frac{\partial A}{\partial\beta}\right)F_{33} = 2A^2B^2\int_0^{x^0} Q^{30}_{(1)}\,dx^0, \tag{1.4.57}$$

можно определить функции F_{23} и F_{33}. Интегрирование уравнений целесообразно выполнять для конкретно рассматриваемой задачи при известной области возмущений.

Для координаты x^0 имеем функции нагрузок

$$Q^{00}_{(1)} = \rho_0 v^0 v^0, \; Q^{0i}_{(1)} = (\rho v^0 v^i)_{(1)}; \tag{1.4.58}$$

им соответствуют функции кинетических напряжений

$$\Pi^{(0)}_{00} = (1/2)(1 + \cos\bar{x}^0)F_{00}, \quad \Pi^{(0)}_{i0} = (1/2)\int_0^{x^0}(1 + \cos\bar{x}^0)\,dx^0\,F_{i0}. \tag{1.4.59}$$

Функции $F_{\alpha 0}$ удовлетворяют уравнениям:

$$\Delta F_{00} = A^2B^2Q^{00}_{(1)},$$

$$\frac{\partial F_{10}}{\partial\beta} + \left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta} - \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\beta}\right)F_{10} + B^2\frac{\partial F_{20}}{\partial z} = 2A^2B^2Q^{01}_{(1)},$$

$$-\frac{\partial F_{10}}{\partial\alpha} + \left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\alpha} - \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)F_{10} - A^2\frac{\partial F_{30}}{\partial z} = 2A^2B^2Q^{02}_{(1)}, \tag{1.4.60}$$

$$B^2\frac{\partial F_{20}}{\partial\alpha} + B\left(\frac{\partial B}{\partial\alpha} - \frac{B}{A}\frac{\partial A}{\partial\alpha}\right)F_{20} + A^2\frac{\partial F_{30}}{\partial\beta} + \\ + A\left(\frac{\partial A}{\partial\beta} - \frac{A}{B}\frac{\partial B}{\partial\beta}\right)F_{30} = 2A^2B^2Q^{03}_{(1)},$$

где

$$\Delta=\left(\frac{\partial B}{\partial \alpha}\right)^2+\left(\frac{\partial A}{\partial \beta}\right)^2+\frac{A}{B}\frac{\partial B}{\partial \beta}\frac{\partial A}{\partial \beta}+\frac{B}{A}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\frac{\partial A}{\partial \alpha}.$$

Из первого уравнения (1.4.60) находим

$$F_{00}=\frac{A^2B^2}{\Delta}Q^{00}_{(1)}. \tag{1.4.61}$$

Исключая функции F_{20} и F_{30}, для функции F_{10} получим уравнение

$$-\frac{\partial^2 F_{10}}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\beta}\frac{\partial F_{10}}{\partial\alpha}+\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\alpha}\frac{\partial F_{10}}{\partial\beta}-aF_{10}=P, \tag{1.4.62}$$

где

$$a=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}-\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\beta}\right)-\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\alpha}-\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)\right]+$$
$$+\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial A}{\partial\alpha}\frac{\partial B}{\partial\beta}-\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right),$$

$$P=A^2B^2\frac{\partial Q^{03}_{(1)}}{\partial z}-B^2\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(A^2Q^{01}_{(1)}\right)-A^2B\left(\frac{\partial B}{\partial\alpha}-\frac{B}{A}\frac{\partial A}{\partial\alpha}\right)Q^{01}_{(1)}+$$
$$+A^2\frac{\partial}{\partial\beta}\left(B^2Q^{02}_{(1)}\right)+A^2B\left(\frac{\partial A}{\partial\beta}-\frac{A}{B}\frac{\partial B}{\partial\beta}\right)Q^{02}_{(1)}.$$

В результате интегрирования уравнения (1.4.62) определяем функцию F_{10}, затем из второго и третьего уравнений (1.4.60) находим функции F_{20}, F_{30} (решение этих уравнений следует строить для конкретной задачи).

Функции кинетических напряжений основного тензора имеют вид

$$\Pi_i^{(0)}=(1/2)(1+\cos z)F_{i3}+(1/2)\int_0^{x^0}(1+\cos\bar{x}^0)\,dx^0\,F_{i0},$$
$$\Pi_0^{(0)}=(1/2)(1+\cos\bar{z})F_{03}+(1/2)(1+\cos\bar{x}^0)F_{00}. \tag{1.4.63}$$

Подставляя их в (1.4.47), а затем в (1.4.46), получим выражения компонент основного тензора области возмущений II от самоуравновешенных частей $\bar{Q}^{3\beta}_{(1)}$ и $\tilde{Q}^{0\beta}_{(1)}$ функций нагрузок.

Несамоуравновешенным частям $\bar{Q}^{3\beta}_{(1)}$ и $\bar{Q}^{0\beta}_{(1)}$ функций нагрузок соответствует тензор $(T^{(2)}_0)$ с компонентами:

$$T^{13}_{(0)}=(1/2)(1+\cos\bar{z})\bar{Q}^{13}_{(1)},\quad T^{23}_{(0)}=(1/2)(1+\cos\bar{z})\bar{Q}^{23}_{(1)},$$
$$T^{33}_{(0)}=(1/2)(1+\cos\bar{z})\bar{Q}^{33}_{(1)},$$

$$\tag{1.4.64'}$$

$$T^{10}_{(1)}=(1/2)(1+\cos\bar{x}^0)\bar{Q}^{01}_{(1)},\quad T^{20}_{(0)}=(1/2)(1+\cos\bar{x}^0)\bar{Q}^{02}_{(1)},$$
$$T^{30}_{(0)}=(1/2)(1+\cos\bar{z})\bar{Q}^{30}_{(1)}+(1/2)(1+\cos\bar{x}^0)\bar{Q}^{03}_{(1)},$$
$$T^{00}_{(0)}=(1/2)(1+\cos\bar{x}^0)\bar{Q}^{00}_{(1)}.$$

Основной тензор области возмущений II

$$(T_0) = (T_0^{(1)}) + (T_{(0)}^{(2)}). \qquad (1.4.64)$$

Построение корректирующего тензора для области возмущений II выполняется в соответствии с соображениями, изложенными в § 3 в координатах α, β, z, x^0 с учетом физико-механических свойств материала тела. Системы фундаментальных функций $\xi_m(\alpha)$, $\eta_n(\beta)$, $\zeta_p(z)$, $P_k(x^0)$ выбирают применительно к рассматриваемой области возмущений на основании общих требований [19]. Для формы Морера компоненты корректирующего тензора таковы:

$$T_{(k)}^{\alpha\beta} = \sum_{mnpl} \left(A_{mnpl} f_{(1)}^{\alpha\beta} + B_{mnpl} f_{(2)}^{\alpha\beta} + C_{mnpl} f_{(3)}^{\alpha\beta} + D_{mnpl} f_{(0)}^{\alpha\beta}\right), \qquad (1.4.65)$$

функции $f_{(\gamma)}^{\alpha\beta}$ $(mnpl)$ определяют по общим формулам [19] с учетом геометрии области нагрузки и вида фундаментальных функций. Параметры $A_{mnpl}, \ldots, D_{mnpl}$ компонент корректирующего тензора находим в результате решения системы алгебраических уравнений (1.3.70), соответствующей физико-механическим свойствам материала фиктивного тела. Итак, компоненты корректирующего тензора для области возмущений II известны. Следовательно, полностью определен тензор кинетических напряжений области возмущений нагрузки.

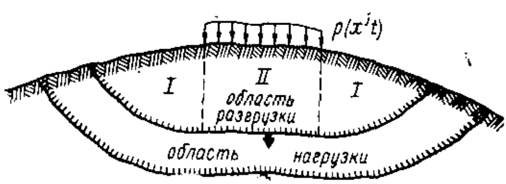

Рис. 23

Возмущения, распространение которых рассмотрено, соответствуют процессу нагрузки. Нагрузка является процессом активного деформирования и характеризуется неравенством $e_i(t_2) > e_i(t_1)$ при $t_2 > t_1$.

Для реализации такого процесса требуется непрерывный рост внешних силовых факторов. Однако наступает такой момент времени t_p, для которого условие нагрузки не выполняется. В этом случае начинается процесс разгрузки (пассивное деформирование), характеризуемый неравенством $e_i(t_2) \leqslant e_i(t_1)$ при $t_2 > t_1$.

В момент t_p зарождается новый вид возмущений, который соответствует процессу разгрузки. Возмущения разгрузки распространяются с конечной скоростью в виде волны разгрузки, образуя новую область, называемую *областью возмущений волны разгрузки*, которая находится внутри области возмущений волны нагрузки и является вторичной (рис. 23). Область возмущений волны разгрузки ограничена частью поверхности тела, включая загруженную, где идет разгрузка, и фронтом волны разгрузки. Движение частиц тела в этой области характеризуется вектором скорости $\mathbf{v}_{\text{разгр}}$ и плотностью $\rho_{\text{разгр}}$. Напряженно-деформированное состояние характеризуется тензором напряжений $(\sigma)_{\text{разгр}}$ и тензором деформаций $(e)_{\text{разгр}}$, которым соответствует тензор кинетических напряжений $(T)_{\text{разгр}}$ и тензор деформаций фиктивного тела $(\tilde{e})_{\text{разгр}}$, связанные между собой физическими соотношениями. Вид соотношений определяется свойствами материала фиктивного тела в рассматриваемой области возмущений. С течением времени область возмущений разгрузки расширяется, так как фронт волны разгрузки перемещается с конечной скоростью b в предварительно напряженной области возмущений нагрузки, которая характеризуется тензором $(T)_{\text{нагр}}$. Для упругого и вязкоупругого тел физико-механические свойства при нагрузке и разгрузке одинаковы, поэтому для соответствующих областей возмущений нагрузки и разгрузки имеем единые физические соотношения. Следовательно, скорости распространения волн нагрузки и разгрузки одинаковы и определяются по одним и тем же формулам. Для упругого тела

$$v^0_{(e)} = \sqrt{G/\rho}; \tag{1.4.66}$$

для вязкоупругого тела

$$v^0_{(b)} = v^0_{(e)} \left[1 - 2G \int_0^t \tilde{R}(t, \tau)\, d\tau \right]^{-1/2}.$$

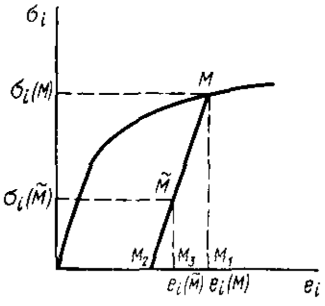

Рис. 24

Для тел, обладающих пластическими свойствами, физико-механические характеристики материала при нагрузке и разгрузке различны. Если при нагрузке материал тела пластичен, то при разгрузке он является упругим. В связи с этим физические соотношения для областей возмущений волны нагрузки и разгрузки различны. Следовательно, скорость распространения волны разгрузки иная, отличная от скорости волны нагрузки ($b \neq a$). Скорость $v^0_{(r)}$ при разгрузке определяется исходя из следующих соображений. Пусть началу рагрузки соответствует точка $\tilde{M}$ диаграммы $\sigma_i \div e_i$ (рис. 24) с характеристиками $(\sigma)_M$, ρ_M, $\tilde{\mathbf{v}}_M$. Разгрузке в точке $\tilde{M}$ диаграммы соответствуют характеристики $(\sigma)_{\tilde{M}}$, $\rho_{\tilde{M}}$, $\tilde{\mathbf{v}}_{\tilde{M}}$. Воспользуемся физическими соотношениями, справедливыми при разгрузке,

$$T^{(r)}_{l0} = 2G\tilde{e}^{(r)}_{l0} + N_{l0}, \quad N_{l0} = T^{(н)}_{l0} - 2G\tilde{e}^{(н)}_{l0}. \tag{1.4.67}$$

По определению $T^{(r)}_{l0} = \rho^{(r)} v^{(r)}_l v^{(r)}_0$, $\tilde{e}^{(r)}_{l0} = (1/2)\,(v^{(r)}_l / v^{(r)}_0)$; подставляя последние равенства (1.4.67), получим

$$\rho^{(r)} v^{(r)}_l v^{(r)}_l = G\, v^{(r)}_l / v^{(r)}_0 + N_{l0}.$$

Разделив обе части равенства на $\rho^{(н)} v^{(н)}_l$, имеем

$$v^{(r)2}_0 - d_1 v^{(r)}_0 - d_0 = 0, \tag{1.4.68}$$

где

$$d_0 = \frac{G}{\rho^{(н)}} \frac{\rho^{(н)}}{\rho^{(r)}}, \quad d_1 = -\frac{N_{l0}}{\rho^{(н)} v^{(н)}_l} \left(\frac{\rho^{(н)}}{\rho^{(r)}} \right) \left(\frac{v^{(н)}_l}{v^{(r)}_l} \right). \tag{1.4.68′}$$

Уравнение (1.4.68) имеет корни

$$v_{01,2}^{(r)} = d_1/2 \pm \sqrt{(d_1/2)^2 + d_0},$$

однако $v_{02}^{(r)} < 0$ $v_{01}^{(r)} > 0$ при $N_{i0} = 0$, $d_1 = 0$, поэтому

$$v_0^{(r)} = d_1/2 + \sqrt{(d_1/2)^2 + d_0}. \tag{1.4.69}$$

Запишем коэффициенты (1.4.68′) в виде $d_0 = v_0^{(н)} \bar{\rho}\, (G/T_{00}^{(н)})$, $d_1 = v_0^{(н)} \bar{\rho} \bar{v}_i\, (1 - G/T_{00}^{(н)})$, где $\bar{\rho} = \rho^{(н)}/\rho^{(r)}$, $\bar{v}_i = \bar{v}_i^{(н)}/v_i^{(r)}$. Подставляя значения коэффициентов в (1.4.69), получим

$$v_0^{(r)} = (1/2)\, v_0^{(н)} \bar{\rho} \left[(1 - G/T_{00}^{(н)})\, \bar{v}_i + \sqrt{(1 - G/T_{00}^{(н)})^2\, \bar{v}_i^2 + 4\, (G/T_{00}^{(н)})^2}\right]. \tag{1.4.70}$$

При $\bar{\rho} = 1$, $\bar{v}_i = 1$ имеем

$$v_0^{(r)} = (1/2)\, v_0^{(н)} \left[(1 - G/T_{00}^{(н)}) + \sqrt{(1 - G_0/T_{00}^{(н)})^2 + 4\, (G/T_{00}^{(н)})^2}\right]. \tag{1.4.70′}$$

В области возмущений разгрузки, как и в области возмущений нагрузки, напряженное состояние сложное, ему соответствуют объемные и сдвиговые деформации, поэтому волна возмущений разгрузки распространяется со скоростью

$$b^2 = a_V^2 + 4v_0^{(r)2}/3. \tag{1.4.71}$$

Напряженно-деформированное состояние и движение частиц тела в области возмущений разгрузки характеризуется тензором кинетических напряжений

$$(T)_{\text{разгр}} = (T)_{\text{нагр}} - \Delta\, (T). \tag{1.4.72}$$

Если тензор $(T)_{\text{нагр}}$ известен, то тензор $\Delta\, (T)$ необходимо строить так, чтобы его компоненты $\Delta T^{\alpha\beta}$ удовлетворяли уравнениям равновесия

$$\nabla_\alpha \Delta T^{\alpha\beta} + \nabla F^\beta = 0, \tag{1.4.73}$$

граничным условиям в напряжениях на $S_г$

$$\Delta T^{\alpha\beta}\, (S)\, n_\beta = \Delta q_{(n)}^{\alpha}, \tag{1.4.74}$$

в перемещениях на $S_ф$

$$\Delta w_\alpha\, (S) = 0$$

и вариационному уравнению

$$\delta \left(\Delta R_ф - \int\limits_{S_2} \Delta w_{\alpha s}\, n_\beta\, \Delta T^{\alpha\beta}\, dS \right) = 0 \tag{1.4.75}$$

или

$$\delta \left(\Delta W_ф - \int\limits_{S_2} \Delta v_{\alpha s}\, n_\beta\, \Delta T^{\alpha\beta}\, dS \right) = 0$$

(в зависимости от физико-механических свойств материала фиктивного тела).

Учитывая сложную конфигурацию области возмущений разгрузки, разобьем ее на составляющие: сферические области I и область II, форма которой зависит от вида загруженной поверхности тела. Тензор $\Delta\ (T)$ следует строить для указанных областей отдельно, выполняя при этом условия сопряжения на границах раздела областей.

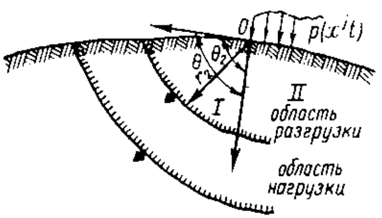

Рис. 25

В сферических областях (рис. 25) задача о построении тензора $\Delta\ (T)$ рассматривается в сферических координатах $(\theta, \varphi, r, x^0)$ с началом в точке O; при этом предполагается, что текущие координаты изменяются в следующих пределах: $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$, $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$, $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, $x_1^0 \leqslant x^0 \leqslant x_2^0$, где θ_1, φ_1, $r_1 = 0$, $x_1^0 = v_0^{(н)} t_p$, $\varphi_2 = \pi$, $r_2 = b\ (t - t_p)$; θ_2 и x_2^0 — известные величины, зависящие от геометрии тела и продолжительности процесса разгрузки. Для этой области имеют место следующие граничные условия:

$$\begin{aligned}
&\Delta T^{1\beta} = \Delta T_{II}^{1\beta}\ (\beta = 1,\ 2,\ 3,\ 0) && \text{при } \theta = \theta_1,\\
&\Delta T^{1\beta} = (\Delta\rho\Delta v^1\Delta v^\beta)_S && \text{при } \theta = \theta_2,\\
&\Delta w_{\alpha s} = 0 && \text{при } r = r_2,\\
&\Delta T^{00} = 0,\ \Delta T^{i0} = 0 && \text{при } x^0 = x_1^0;
\end{aligned} \tag{1.4.76}$$

им соответствуют функции нагрузок

$$\Delta Q_{(1)}^{1\beta} = \Delta T_{II}^{1\beta},\ \Delta Q_{(1)}^{00} = 0,\ \Delta Q_{(1)}^{0i} = 0,\ \Delta Q_{(2)}^{1\beta} = (\Delta\rho\Delta v^1\Delta v^\beta)_s. \tag{1.4.77}$$

Тензор $\Delta\ (T)$ можно представить в виде суммы основного и корректирующего тензоров:

$$\Delta\ (T) = \Delta\ (T_о) + \Delta\ (T_к), \tag{1.4.78}$$

построение которых проводится на основании общих соображений, приведенных в § 3, как и в случае нагрузки, причем

$$\Delta\ (T_о) = \Delta\ (T_0^{(1)}) + \Delta\ (T_0^{(2)}). \tag{1.4.79}$$

Тензор $\Delta\ (T_0^{(1)})$соответствует самоуравновешенным, а $\Delta\ (T_0^{(2)})$ — несамоуравновешенным частям функций нагрузок; корректирующий тензор в форме Морера имеет компоненты

$$\Delta T_{(к)}^{\alpha\beta} = \sum_{mnpl} (\Delta A_{mnpl} f_{(1)}^{\alpha\beta} + \Delta B_{mnpl} f_{(2)}^{\alpha\beta} + \Delta C_{mnpl} f_{(3)}^{\alpha\beta} + \Delta D_{mnpl} f_{(0)}^{\alpha\beta}), \tag{1.4.80}$$

параметры $\Delta A_{mnpl}, \ldots, \Delta D_{mnpl}$ определяются в результате решения системы алгебраических уравнений (1.3.79), при этом учитываются свойства фиктивного тела.

В области возмущений II (рис. 26) задача о построении тензора $\Delta(T)$ рассматривается в криволинейной системе координат (α, β, z, x^0) с базисом $(\tilde{e}_\alpha, \tilde{e}_\beta, \tilde{e}_z, \tilde{e}_{x^0})$, начало которой находится в центре области нагружения поверхности, где идет процесс разгрузки. Координатные линии α и β расположены на поверхности тела и являются линиями главных кривизн поверхности, координатная линия z направлена по нормали к поверхности. Координаты α и β изменяются (рис. 27) в пределах: $\alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2$, $\beta_1 \leqslant \beta \leqslant \beta_2$, где α_γ, и β_γ — размеры области разгрузки. Координаты z и x^0 изменяются в следующих пределах: $0 \leqslant z \leqslant \leqslant z_2$, $x_1^0 \leqslant x^0 \leqslant x_2^0$, где $z_2 = b\Delta t$ — глубина области возмущений раз-

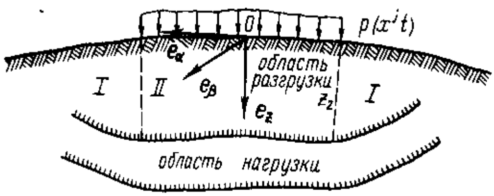

Рис. 26

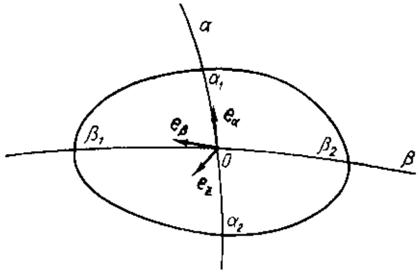

Рис. 27

грузки, причем $\Delta t = t - t_р$, $x_2^0 = v_0^{(r)} \Delta t_2$ — характеристика продолжительности процесса разгрузки, которой соответствует время $\Delta t_2 = t_2 - t_р$.

Компоненты метрического тензора и символы Кристоффеля системы координат определяются по формулам (1.4.43). Для области возмущений имеем следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \Delta T^{3\beta} &= (\Delta\rho\Delta v^3 \Delta v^\beta)_s - \Delta p^{3\beta}_{(1)} \quad \text{при } z = 0, \\ \Delta w_{\alpha s} &= 0 \qquad\qquad \text{при } z = z_2, \\ \Delta T^{00} &= 0,\ \Delta T^{0l} = 0 \quad \text{при } x^0 = x_1^0. \end{aligned} \tag{1.4.81}$$

Им соответствуют функции нагрузок

$$\Delta Q^{3\beta}_{(1)} = (\Delta\rho\Delta v^3\Delta v^\beta)_s - \Delta p^{3\beta}_{(1)},\ \Delta Q^{00}_{(1)} = 0, \quad \Delta Q^{0l}_{(1)} = 0. \tag{1.4.82}$$

Тензор $\Delta(T)$ можно представить в виде суммы:

$$\Delta T = \Delta(T_о) + \Delta(T_к). \tag{1.4.83}$$

Построение основного $\Delta(T_о)$ и корректирующего $\Delta(T_к)$ тензоров выполняется на основании общих соображений, изложенных в § 3, так же как это было сделано в случае нагрузки.

Функции кинетических напряжений основного тензора

$$\Delta\Pi^0_\alpha = (1/2)(1 + \cos\bar{z})\,\Delta F_{\alpha 3}. \tag{1.4.84}$$

Здесь функции $\Delta F_{\alpha 3}$ определяются в результате решения уравнений (1.4.50), при этом $Q^{3\beta}_{(1)}$ заменяется на $\Delta Q^{3\beta}_{(1)}$. В результате подстановки формул (1.4.84) в общее решение (1.4.46) находим компоненты тензора $\Delta(T_0^{(1)})$ для самоуравновешенных частей функций нагрузок.

Несамоуравновешенные части функций нагрузок учитываются тензором $\Delta\,(T_0^{(2)})$ с компонентами

$$\Delta T_{(0)}^{33} = (1/2)\,(+\cos \bar{z})\,\Delta \bar{Q}_{(1)}^{33}, \quad \Delta T_{(0)}^{13} = (1/2)\,(1+\cos \bar{z})\,\Delta_{(1)}^{31},$$
$$\Delta T_{(0)}^{30} = (1/2)\,(1+\cos \bar{z})\,\Delta \bar{Q}_{(1)}^{30}. \tag{1.4.85}$$

Основной тензор

$$\Delta\,(T_0) = \Delta\,(T_0^{(1)}) + \Delta\,(T_0^{(2)}). \tag{1.4.86}$$

Корректирующий тензор $\Delta(T_к)$ имеет компоненты

$$\Delta T_{(к)}^{\alpha\beta} = \sum_{mnpl} (\Delta A_{mnpl} f_{(1)}^{\alpha\beta} + \Delta B_{mnpl} f_{(2)}^{\alpha\beta} + \Delta C_{mnpl} f_{(3)}^{\alpha\beta} + \Delta D_{mnpl} f_{(0)}^{\alpha\beta}). \tag{1.4.87}$$

Параметры $\Delta A_{mnpl}, \ldots, \Delta D_{mnpl}$ находим в результате решения системы уравнений (1.3.79), учитывая физико-механические свойства материала фиктивного тела при разгрузке. Итак, тензор $\Delta\,(T)$ построен, следовательно, определен и тензор кинетических напряжений $(T)_{разгр}$.

Все вышеизложенное позволяет исследовать напряженное состояние тела при нагрузке и разгрузке в условиях динамического нагружения, которому соответствует распространение волн напряжений в теле.

§ 5. Отражение и взаимодействие волн напряжений при их распространении

При выходе волны нагрузки или волны разгрузки на поверхность тела или при столкновении двух волн напряжений наблюдается явление отражения волн, при этом зарождается отраженная волна нагрузки или разгрузки, распространяющаяся с конечной скоростью в обратном направлении по предварительно напряженной области. Образуется вторичная область возмущений отраженной волны, которая ограничена частью поверхности тела, где наблюдается отражение волны, и передним фронтом отраженной волны (рис. 28). Эта область увеличивается по мере распространения отраженной волны. Движение частиц

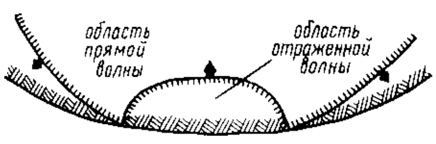

Рис. 28

тела в области возмущений отраженной волны описывается вектором скорости $\tilde{v}_{отр}$ и плотностью $\rho_{отр}$. Напряженно-деформированное состояние характеризуется тензором напряжений $(\sigma)_{отр}$ и тензором деформаций $(e)_{отр}$. Им соответствуют тензор кинетических напряжений $(T)_{отр}$ и тензор деформаций фиктивного тела $(\tilde{e})_{отр}$, связанные между собой физическими соотношениями, которые определяются физико-механическими свойствами материала в рассматриваемой области возмущений.

Тензор кинетических напряжений $(T)_{\text{отр}}$ можно представить в виде суммы:

$$(T)_{\text{отр}} = (T)_{\text{пр}} - \Delta_1 (T), \tag{1.5.1}$$

где $(T)_{\text{пр}}$ — известный тензор кинетических напряжений прямой волны нагрузки или разгрузки; $\Delta_1 (T)$ — дополнительный тензор кинетических напряжений, подлежащий определению. Построение тензора $\Delta_1 (T)$ выполняется на основании соображений, изложенных в § 3 настоящей главы, при этом используются результаты, полученные в § 4. Компоненты тензора $\Delta_1 (T)$ должны удовлетворять уравнениям равновесия

$$\nabla_\alpha \Delta_1 T^{\alpha\beta} = 0; \tag{1.5.2}$$

граничным условиям в напряжениях: $\Delta_1 T^{\alpha\beta} (S) n_\beta = \Delta_1 q^\alpha_{(n)}$ и в скоростях

$$\Delta_1 v^\alpha (S) = \Delta_1 v^\alpha_s \tag{1.5.3}$$

на поверхности тела, где имеет место отражение волны; граничным условиям в перемещениях

$$\Delta_1 w^\alpha (S) = \Delta_1 w^\alpha_s; \tag{1.5.3'}$$

вариационному уравнению

$$\delta \left(\Delta_1 R_\text{ф} - \int\limits_{S_2} n_\alpha \Delta_1 w_{\beta s} \Delta_1 T^{\alpha\beta} \, dS \right) = 0 \tag{1.5.4}$$

или

$$\delta \left(\Delta_1 W_\text{ф} - \int\limits_{S_2} n_\alpha \Delta_1 v_{\alpha s} \Delta_1 T^{\alpha\beta} \, dS \right) = 0$$

(в зависимости от свойств фиктивного тела), причем $\Delta_1 R_\text{ф}$ и $\Delta_1 W_\text{ф}$ вычисляются по соответствующим формулам, приведенным в § 3, компоненты $T^{\alpha\beta}$ заменяются на $\Delta_1 T^{\alpha\beta}$.

При переходе из области возмущений прямой волны в область возмущений отраженной сплошность материала должна сохраняться. Условие сохранения сплошности эквивалентно выполнению на фронте отраженной волны условия $\Delta_1 w^\alpha_s = 0$, следовательно, граничное условие (1.5.3′) принимает вид

$$\Delta_1 w^\alpha (s) = 0. \tag{1.5.5}$$

Внешние силы $\Delta_1 q^\alpha_{(n)}$, входящие в граничные условия (1.5.3), определяются из следующих соображений. В момент подхода переднего фронта прямой волны к поверхности тела на последней возникают напряжения, связанные между собой соотношением $T^\alpha_{\text{пр}} = T^{\alpha\beta}_{\text{пр}} n_\beta$, здесь n_β — компоненты внешней нормали к поверхности тела; $T^{\alpha\beta}_{\text{пр}}$ — компоненты тензора $(T)_{\text{пр}}$, на поверхности тела, где имеет место отражение волны. Напряжение $T^\alpha_{\text{пр}}$ является внешней силой $\Delta_1 q^\alpha_{(n)}$ по отношению к области отраженной волны:

$$\Delta_1 q^\alpha_{(n)} = T^\alpha_{\text{пр}} = T^{\alpha\beta}_{\text{пр}} (S)\, n_\beta. \tag{1.5.6}$$

Итак, компоненты тензора $\Delta_1(T)$ должны удовлетворять уравнениям равновесия (1.5.2), граничным условиям в напряжениях

$$\Delta_1 T^{\alpha\beta}(S) = T^{\alpha\beta}_{\text{пр}}(S) \qquad (1.5.7)$$

на поверхности тела, где отражается волна, граничным условиям в перемещениях

$$\Delta_1 w^{\alpha}(S) = 0 \qquad (1.5.7')$$

на фронте отраженной волны; вариационному уравнению (1.5.4) с учетом свойств материала фиктивного тела. Тензор $\Delta_1(T)$ можно представить в виде суммы:

$$\Delta_1(T) = \Delta_1(T_{\text{о}}) + \Delta_1(T_{\text{к}}). \qquad (1.5.8)$$

Компоненты основного тензора $\Delta_1(T_{\text{о}})$ должны удовлетворять уравнениям равновесия (1.5.2) и граничным условиям (1.5.7); компоненты корректирующего тензора $\Delta_1(T_{\text{к}})$ должны удовлетворять уравнениям равновесия (1.5.2), нулевым граничным условиям в напряжениях

$$\Delta_1 T^{\alpha\beta}(S) = 0, \qquad (1.5.9)$$

граничным условиям в перемещениях (1.5.7′) и вариационному уравнению (1.5.4) с учетом свойств материала.

Учитывая сложную конфигурацию области возмущений отраженной волны, разобъем ее на составляющие и построим тензор $\Delta_1(T)$ для каждой составляющей области отдельно, выполняя условия сопряжения на границах раздела областей.

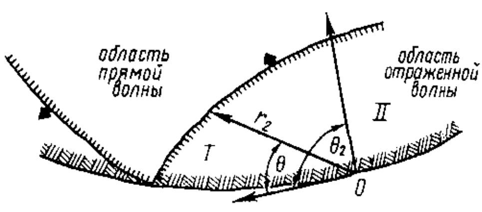

Рис. 29

В сферических областях возмущений I (рис. 29) задача о построении тензора $\Delta_1(T)$ решается в сферической системе координат $(\theta, \varphi, r, x^0)$ с началом в точке O, причем полагается, что текущие координаты изменяются в следующих пределах: $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$, $\varphi_1 \leqslant \varphi < \varphi_2$, $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, $x_1^0 \leqslant x^0 \leqslant x_2^0$, где $\theta_1 = 0$, $\varphi_1 = 0$, $r_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$, $r_2 = a_0 t$, $x_1^0 = v_{\text{отр}} t_2$; θ_2 и x_2^0 — известные величины, зависящие от геометрии области и продолжительности процесса распространения отраженной волны.

Граничные условия для этой области таковы:

$$\begin{aligned}
\Delta_1 T^{1\beta} &= \Delta_1 T^{1\beta}_{\text{II}} && \text{при } \theta = \theta_1,\\
\Delta_1 T^{1\beta} &= (\Delta_1\rho\,\Delta_1 v^1 \Delta_1 v^\beta)_s && \text{при } \theta = \theta_1, \qquad (1.5.10)\\
\Delta_1 w^{\alpha}(S) &= 0 && \text{при } r = r_2,\\
\Delta_1 T^{00} = 0,\ \Delta_1 T^{i0} &= 0 && \text{при } x^0 = 0.
\end{aligned}$$

Построение тензоров $\Delta_1(T_{\text{о}})$ и $\Delta_1(T_{\text{к}})$ для этих областей выполняется аналогично изложенному в § 4.

В области возмущений II (рис. 30) задача о построении тензора $\Delta_1(T)$ рассматривается в криволинейной системе координат (α, β, z, x^0) с началом в точке O поверхности тела, где имеет место отражение. Характеристика этой системы дана в § 4, текущие координаты изменяются в следующих пределах: $\alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2$, $\beta_1 \leqslant \beta \leqslant \beta_2$, $0 \leqslant z \leqslant z_2$, $0 \leqslant x^0 \leqslant x_2^0$, здесь α_γ и β_γ $(\gamma = 1,2)$ — размеры области на поверхности, где наблюдается отражение волны; $z_2 = at$ — глубина области возмущений II; $x_2^0 = v^0 t_2$ — координата, соответствующая продолжительности процесса распространения отраженной волны.

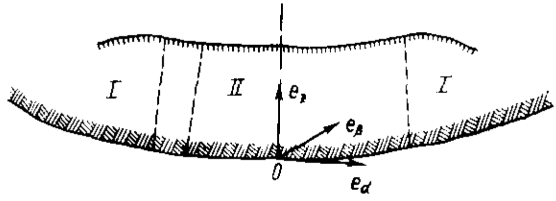

Рис. 30

Для области возмущений II имеем граничные условия:

$$\begin{aligned} &\Delta_1 T^{3\beta}(S) = T^{3\beta}_{\text{пр}}(S) && \text{при } z = 0, \\ &\Delta_1 w_\alpha(S) = 0 && \text{при } z = z_2, \\ &\Delta_1 T^{00} = 0, \Delta_1 T^{0i} = 0 && \text{при } x^0 = 0. \end{aligned} \tag{1.5.11}$$

Построение тензоров $\Delta_1(T_{\text{о}})$ и $\Delta_1(T_{\text{к}})$ выполняется аналогично изложенному в § 4 для области возмущений II.

Таким образом, для области возмущений отраженной волны дополнительный тензор кинетических напряжений $\Delta_1(T)$ можно построить, следовательно, определить тензор кинетических напряжений $(T)_{\text{отр}}$ отраженной волны нагрузки или разгрузки. Пользуясь формулами, приведенными в § 3, по известному тензору $(T)_{\text{отр}}$ находим плотность $\rho_{\text{отр}}$, вектор скорости $\mathbf{v}_{\text{отр}}$ и тензор напряжений $(\sigma)_{\text{отр}}$ в области возмущений отраженной волны нагрузки или разгрузки.

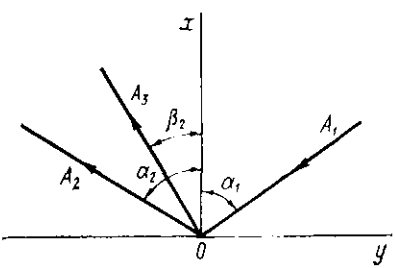

Рис. 31

Покажем теперь, что при отражении прямой волны напряжений возникают отраженные волна расширения и волна сдвига. Для простоты рассуждений условимся считать прямую волну плоской волной расширения, направление распространения которой в плоскости xOy составляет угол α_1 с осью Ox; свободной границей является плоскость yOz (рис. 31). Рассмотрим простую гармоническую волну, в которой перемещение перпендикулярно фронту волны:

$$U_1 = A_1 \sin(pt + f_1 x + g_1 y), \tag{1.5.12}$$

где A_1 — амплитуда прямой волны; $f_1 = p\cos\alpha_1/a_1$; $g_1 = p\sin\alpha_1/a_1$ (a_1 — скорость распространения волны). Перемещения u_1, v_1, соответствующие прямой волне вдоль осей Ox и Oy, таковы:

$$u_1 = U_1\cos\alpha_1 = A_1\sin(pt + f_1x + g_1y)\cos\alpha_1,$$
$$v_1 = U_1\sin\alpha_1 = A_1\sin(pt + f_1x + g_1y)\sin\alpha_1.$$

Пусть отраженная волна расширения составляет угол α_2 с осью Ox и ее перемещение, перпендикулярное фронту волны,

$$U_2 = A_2\sin(pt - f_2x + g_2y + \delta_1), \tag{1.5.13}$$

где A_2 — амплитуда отраженной волны; $f_2 = p\cos\alpha_2/a_1$; $g_2 = p\sin\alpha_2/a_1$ (δ_1 — постоянная изменения фазы волны при отражении). Перемещения u_2, v_2, соответствующие отраженной волне, имеют вид:

$$u_2 = -U_2\cos\alpha_2 = -A_2\sin(pt - f_2x + g_2y + \delta_1)\cos\alpha_2,$$
$$v_2 = U_2\sin\alpha_2 = A_2\sin(pt - f_2x + g_2y + \delta_1)\sin\alpha_2.$$

Полные перемещения u, v, производимые прямой и отраженными волнами, таковы:

$$\begin{aligned} u = u_1 + u_2 = A_1\sin(pt + f_1x + g_1y)\cos\alpha_1 - \\ - A_2\sin(pt - f_2x + g_2y + \delta_1)\cos\alpha_2, \\ v = v_1 + v_2 = A_1\sin(pt + f_1x + g_1y)\sin\alpha_1 + \\ + A_2\sin(pt - f_2x + g_2y + \delta_1)\sin\alpha_2; \end{aligned} \tag{1.5.14}$$

этим перемещениям соответствуют деформации:

$$e_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} = U_1' f_1\cos\alpha_1 + U_2' f_2\cos\alpha_2,$$

$$e_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = U_1'(g_1\cos\alpha_1 + f_1\sin\alpha_1) - U_2'(g_2\cos\alpha_2 + f_2\sin\alpha_2),$$

$$\begin{aligned} e = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{1}{3}[U_1'(f_1\cos\alpha_1 + g_1\sin\alpha_1) + \\ + U_2'(f_2\cos\alpha_2 + g_2\sin\alpha_2)], \end{aligned} \tag{1.5.15}$$

где

$$\begin{aligned} U_1' = A_1\cos(pt + f_1x + g_1y), \\ U_2' = A_2\cos(pt - f_2x + g_2y + \delta_1). \end{aligned} \tag{1.5.16}$$

Физические соотношения упругого тела $\sigma_{11} = (3K - 2G)e + 2Ge_{11}$, $\sigma_{12} = Ge_{12}$, учитывая выражения (1.5.15), запишем в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = U_1'(p/a_1)[(K - (2/3)G) + 2G\cos^2\alpha_1] + \\ + U_2'(p/a_1)[(K - (2/3)G) + 2G\cos^2\alpha_2], \\ \sigma_{12} = 2G(p/a_1)[U_1'\cos\alpha_1\sin\alpha_1 - U_2'\cos\alpha_2\sin\alpha_2]. \end{aligned} \tag{1.5.17}$$

На свободной поверхности при $x = 0$ имеем $\sigma_{11} = 0$, $\sigma_{12} = 0$. Эти условия эквивалентны соотношениям:

$$
\begin{gathered}
A_1 \cos (pt + g_1 y) \left[(K - (2/3)G) + 2G \cos^2 \alpha_1\right] + \\
+ A_2 \cos (pt + g_2 y + \delta_1) \left[(K - (2/3)G) + 2G \cos^2 \alpha_2\right] = 0, \qquad (1.5.18) \\
A_1 \cos (pt + g_1 y) \cos \alpha_1 \sin \alpha_1 - \\
- A_2 \cos (pt + g_2 y + \delta_1) \cos \alpha_2 \sin \alpha_2 = 0.
\end{gathered}
$$

Первое из соотношений (1.5.18) выполняется, если $g_1 = g_2$ (что равносильно $\alpha_1 = \alpha_2$), $\delta_1 = 0$ и $A_1 = A_2$. Второе из соотношений при указанных условиях не выполняется, следовательно, предположения об отражении только волны расширения недостаточно для полного удовлетворения условий на свободной поверхности. Если же предположить, что отражается не только волна расширения, но и волна сдвига, то возможно удовлетворить обоим граничным условиям. Действительно, пусть направление распространения отраженной волны сдвига образует угол β_2 с осью Ox; перемещение производимое ею,

$$U_3 = A_3 \sin (pt - f_3 x + g_3 y + \delta_2), \qquad (1.5.19)$$

где A_3 — амплитуда отраженной волны сдвига, $f_3 = p \cos\beta_2/a_2$, $g_3 = p \sin \beta_2/a_2$ (a_2 — скорость распространения волны сдвига), δ_2 — постоянная изменения фазы при отражении. Перемещения вдоль осей Ox и Oy, соответствующие волне сдвига,

$$
\begin{gathered}
u_3 = U_3 \sin \beta_2 = A_3 \sin (pt - f_3 x + g_3 y + \delta_2) \sin \beta_2, \\
v_3 = U_3 \cos \beta_2 = A_3 \sin (pt - f_3 x + g_3 y + \delta_2) \cos \beta_2.
\end{gathered}
$$

Полные перемещения вдоль осей Ox и Oy таковы:

$$
\begin{gathered}
u = u_1 + u_2 + u_3 = A_1 \sin (pt + f_1 x + g_1 y) \cos \alpha_1 - A_2 \sin (pt - f_2 x + \\
+ g_2 y + \delta_1) \cos \alpha_2 + A_3 \sin (pt - f_3 x + g_3 y + \delta_2) + \sin \beta_2, \qquad (1.5.20) \\
v = v_1 + v_2 + v_3 = A_1 \sin (pt + f_1 x + g_1 y) \sin\alpha_1 + \\
+ A_2 \sin (pt - f_2 x + g_2 y + \delta_1) \sin \alpha_2 + A_3 \sin (pt - f_3 x + g_3 y + \\
+ \delta_2) \cos \beta_2.
\end{gathered}
$$

Им соответствуют деформации:

$$
\begin{gathered}
e_{11} = U_1' f_1 \cos \alpha_1 + U_2' f_2 \cos \alpha_2 - U_3' f_3 \sin \beta_2, \\
e_{12} = U_1' (g_1 \cos \alpha_1 + f_1 \sin \alpha_1) - U_2' (g_2 \cos \alpha_2 + f_2 \sin \alpha_2) + \\
+ U_3' (g_3 \sin \beta_2 - f_3 \cos \beta_2), \qquad (1.5.21) \\
e = (1/3) \left[U_1' (f_1 \cos\alpha_1 + g_1 \sin \alpha_1) + U_2' (f_2 \cos \alpha_2 + g_2 \sin \alpha_2) - \right. \\
\left. - U_3' (f_3 \sin \beta_2 - g_3 \cos \beta_2)\right],
\end{gathered}
$$

где

$$U_3' = A_3 \cos (pt - f_3 x + g_3 y + \delta_2). \qquad (1.5.22)$$

Отсутствие касательного напряжения на свободной поверхности равносильно условию $e_{12} = 0$. Подставляя в это условие (1.5.21), получим соотношение

$$A_1 (p/a_1) \cos (pt + g_1 y) \sin 2\alpha_1 - A_2 (p/a_1) \cos (pt + g_2 y + \delta_1) \times \\ \times \sin 2\alpha_2 - A_3 (p/a_2) \cos (pt + g_3 y + \delta_2) \cos 2\beta_2 = 0,$$

которое можно удовлетворить для всех y и t только в случае, если $g_1 = g_2 = g_3$ или, что равносильно, когда

$$\sin \alpha_1/a_1 = \sin \alpha_2/a_1 = \sin \beta_2/a_2. \quad (1.5.23)$$

Отсюда имеем $\alpha_1 = \alpha_2$, $\sin \alpha_1/\sin \beta_2 = a_1/a_2$. Это означает, что волна расширения отражается под углом, равным углу падения прямой волны; отражение волны сдвига подобно преломлению с коэффициентом

$$a_1/a_2 = a_0/a_{cg} = \sqrt{K/G + 4/3}, \quad (1.5.24)$$

кроме этого, должны удовлетворяться условия $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 0$. В этом случае получим следующее соотношение между амплитудами:

$$(A_1 - A_2) \cos \alpha_1 - A_3 \cos \beta_2 = 0. \quad (1.5.25)$$

Равенство нулю нормального напряжения σ_{11} на свободной поверхности эквивалентно соотношению

$$(A_1 + A_2) [(K - (2/3) G) + 2G \cos^2 \alpha_1] - A_3 2G \sin \alpha_1 \cos \beta_2 = 0. \quad (1.5.26)$$

Решая совместно уравнения (1.5.25) и (1.5.26), определяем амплитуды A_2 и A_3 отраженных волн.

При нормальном падении волны расширения $A_3 = 0$ и отраженные волны сдвига не возникают; амплитуда отраженной волны расширения A_2 равна амплитуде прямой волны A_1, фаза при отражении может изменяться на π.

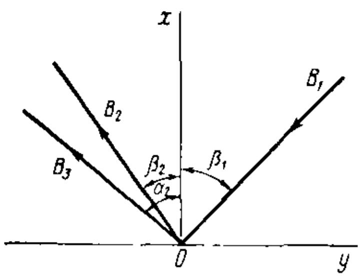

Рис. 32

Приведенные рассуждения относятся к гармоническим волнам любой частоты, следовательно, справедливы и для волн произвольной формы.

Процесс отражения плоской волны сдвига также связан с возникновением отраженных волн расширения и сдвига. Рассмотрим отражение волны сдвига, распространяющейся параллельно плоскости xOy и падающей на свободную границу (плоскость yOz) под углом β_1 (рис. 32) с направлением колебаний, перпендикулярных оси Oz. В этом случае движения в направлении оси Oz нет, на границе имеем условия $\sigma_{11} = 0$, $\sigma_{12} = 0$, которым можно удовлетворить только в предположении, что отражается не только волна сдвига, но и волна расширения, причем первая отражается под углом β_2, равным углу падения β_1, а вторая — под углом α_2, для которого

$$a_1/a_2 = \sin \alpha_2/\sin \beta_1. \quad (1.5.27)$$

Пусть амплитуда прямой волны сдвига B_1, отраженной волны сдвига B_2 и отраженной волны расширения B_3. В этом случае условия на границе при $x = 0$ эквивалентны соотношениям:

$$\begin{gathered}(B_1 + B_2)\sin 2\beta_1 \sin \beta_1 - B_3 \sin \alpha_2 \cos 2\beta_1 = 0,\\ (B_1 - B_2)\cos 2\beta_1 - 2B_3 \sin \beta_1 \cos \alpha_2 = 0,\end{gathered} \qquad (1.5.28)$$

решая которые, определим амплитуды B_2 и B_3 отраженных волн через амплитуду B_1 прямой волны.

При нормальном падении отраженная волна расширения не возникает ($B_3 = 0$). Если направление колебаний параллельно оси Oz, то движения в направлениях осей Ox и Oy нет ($u = 0$, $v = 0$). Следовательно, волна сдвига с такой же амплитудой и противоположная по фазе, которая отражается под углом, равным углу падения, удовлетворяет граничным условиям на свободной поверхности и волна расширения не возникает.

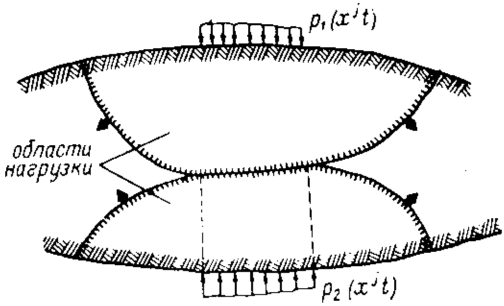

Рис. 33

Задачу об отражении волн для любого другого направления колебаний можно решить, комбинируя найденные выше решения, при этом на свободной границе имеют место следующие условия: $\sigma_{11} = 0$, $\sigma_{12} = 0$, $\sigma_{13} = 0$ при $x = 0$. Таким образом, волна напряжений любого типа при отражении порождает как отраженную волну расширения, так и отраженную волну сдвига, которые распространяются с конечными скоростями в предварительно напряженном теле, образуя вторичные области возмущений отраженных волн.

Распространение волн напряжений в теле при его нагружении внешними динамическими силами связано с их взаимодействием, что приводит к перераспределению напряжений и деформаций в теле и появлению новых явлений, характерных для волновых процессов. Взаимодействие волн напряжений друг с другом связано прежде всего с явлением интерференции волн, а также с явлениями отражения и преломления волн и др.

При интерференции волн напряжений происходит наложение полей напряжений (полей деформаций) друг на друга. В результате образуется новое поле напряжений (поле деформаций), интенсивность которого существенно отличается от интенсивностей исходных полей. Интенсивность суммарного поля напряжений может превышать предел прочности материала, что приводит к разрушению (образование трещин, появление отколов).

Рассмотрим с этих позиций взаимодействие двух волн нагрузки (рис. 33). Пусть волны несут возмущения с интенсивностями кинетических напряжений $T_i^{(\gamma)}{}_{\text{нагр}}$ $(\gamma = 1, 2)$. При интерференции волн суммарная интенсивность кинетических напряжений результирующего возмущения

$$T_{i\,\text{пол}} = T_{i\,\text{нагр}}^{(1)} + T_{i\,\text{нагр}}^{(2)}. \tag{1.5.29}$$

Если выполняется условие

$$T_{i\,\text{пол}} > T_{i\,\text{пред}}, \tag{1.5.30}$$

где $T_{i\,\text{пред}}$ — предельное значение интенсивности кинетических напряжений, то в рассматриваемой области наступает разрушение тела. Разрушение продолжается до тех пор, пока $T_{i\,\text{пол}}$ не станет меньше $T_{i\,\text{пред}}$ и не будет выполнено условие

$$T_{i\,\text{пол}} < T_{i\,\text{пред}}. \tag{1.5.31}$$

В качестве $T_{i\,\text{пред}}$ можно принять T_B — интенсивность кинетических напряжений, соответствующую пределу прочности материала, которая определяется из следующих соображений. Согласно соотношениям, полученным в § 3, $\sigma_i^2 = T_i^2 + 3T_i\,(\rho v^{02}) - 2\,(\rho v^{02})^2$; для предельного состояния $\sigma_i = \sigma_B$, $T_i = T_B$, $v^{02} = G/[\rho\,(1 + \varphi_B)]$, поэтому

$$\rho v^{02} = \frac{G}{1+\varphi_B}, \quad (\rho v^{02})^2 = \left(\frac{G}{1+\varphi_B}\right)^2.$$

Таким образом, предельному состоянию соответствует уравнение

$$T_B^2 + 3\,\frac{G}{1+\varphi_B}\,T_B = \sigma_B^2 + 2\left(\frac{G}{1+\varphi_B}\right)^2,$$

решая которое, находим

$$T_B = \frac{G}{2\,(1+\varphi_B)}\left[-3 + \sqrt{17 + 4\left(\frac{\sigma_B}{G}\,(1+\varphi_B)\right)^2}\,\right]. \tag{1.5.32}$$

Следовательно, по известному пределу прочности σ_B материала с помощью динамической диаграммы $\sigma_i - e_i$ можно вычислить значение кинетического предела прочности материала T_B. Во многих случаях для материала тела известна деформация e_B, соответствующая пределу прочности σ_B, в этом случае необходимо выразить T_B через e_B.

В соответствии с постулированием фиктивного тела связь между T_i и $\tilde{e}_i$ можно представить в виде

$$\tilde{e}_i = [1 + \varphi\,(T_i)]\,T_i/(3\,G). \tag{1.5.33}$$

Функция пластичности $\varphi\,(T_i)$ определяется по динамической диаграмме $\sigma_i - e_i$, при этом используются соотношения (1.3.83). Учитывая, что $\tilde{e}_i^2 = e_i^2 + (1/3)\,(v/v^0)^2$, получим уравнение связи между T_i и e_i:

$$\sqrt{e_i^2 + (1/3)\,(v/v^0)^2} = \frac{1+\varphi\,(T_i)}{3G}\,T_i.$$

Отсюда при $e_i = e_B$ находим

$$T_B = \frac{3G}{1+\varphi(T_B)} \sqrt{e_B^2 + (1/3)(v_B/v^0)^2} = 3G(1-\omega(e_B))\sqrt{e_B^2+(1/3)(v_B/v^0)^2}. \tag{1.5.34}$$

Однако для большинства деформируемых тел $v_B/v^0 \ll 1$, поэтому приближенно можно принять

$$T_B \approx \frac{3G}{1+\varphi(T_B)} = 3Ge_B(1-\omega(e_B)). \tag{1.5.35}$$

Изложенное позволяет оценить явление откола, которое может иметь место при отражении волны напряжений от поверхности тела. Механизм откола сводится к тому, что при отражении волны нагрузки от поверхности тела возникает отраженная волна, обратная прямой. Прямая и обратная волны нагрузки интерферируют между собой и создают такое результирующее распределение напряжений в теле, интенсивность которого может превысить предел прочности материала, что приводит к разрушению (отколу). Количественную оценку явления откола можно получить с помощью приведенных выше соотношений. Откол происходит, когда

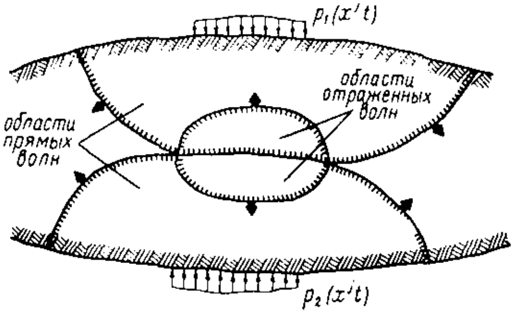

Рис. 34

$$T_{i\,\text{пол}} = T_{i\,\text{пр}} + T_{i\,\text{отр}} > T_B; \tag{1.5.36}$$

множественный откол имеет место, если

$$T_{i\,\text{пол}} > 2T_B. \tag{1.5.37}$$

При этом число отколов n равно первому целому числу, определяемому неравенством

$$n \leqslant T_{i\,\text{пол}}/T_B. \tag{1.5.38}$$

Взаимодействие волн напряжений характеризуется не только их интерференцией, но и взаимным отражением и преломлением, в результате которых возникают отраженные и преломленные волны напряжений и образуются новые области возмущений (рис. 34). Исследование напряженно-деформированного состояния в областях возмущений проводится на основании общих соображений, изложенных в § 3, аналогично рассмотренному в § 4 и настоящем параграфе, причем последовательно переходят от одной области возмущений к другой.

Оценка взаимодействия волн напряжений проводится по их интенсивностям, исходя из изложенных соображений, при этом предполагаются известными тензоры кинетических напряжений для соответствующих областей возмущений. Результатом взаимодействия волн напряжений является образование местных внутренних трещин и отколов, что приводит к ослаблению прочности тела и его ускоренному разрушению.

Рассмотрим процесс отражения и преломления волн напряжений внутри тела при их взаимодействии друг с другом, учитывая при этом, что переднему фронту волны напряжений всегда соответствует упругое состояние и тот факт, что отражение и преломление прямой волны проходят в предварительно напряженных областях тела. Передний фронт прямых волн напряжений при их взаимодействии является границей раздела двух сред (областей возмущений с различными физико-механическими свойствами материала). Предположим, что волна расширения нагрузки распространяется параллельно плоскости xOy и падает на границу раздела под углом α_1, углы отражения и преломления волн расширения соответственно равны α_2 и α_3, углы отражения и преломления волн сдвига — β_2 и β_3 (рис. 35). Пусть A_1 — амплитуда прямой волны расширения, A_2 и A_4 — соответственно отраженной и преломленной волн расширения, A_3 и A_5 — отраженной и преломленной волн сдвига.

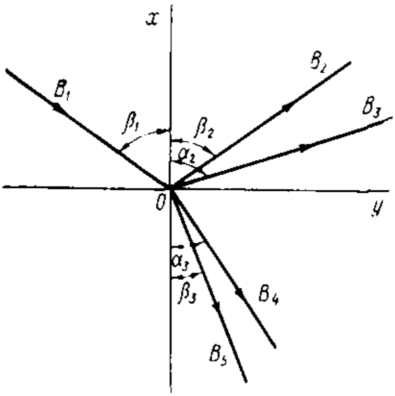

Рис. 35

На границе раздела при $x = 0$ имеем:

$$u_a = u_b,\ v_a = v_b,\ w_a = w_b,$$
$$(\sigma_{11})_a = (\sigma_{11})_b,\ (\sigma_{12})_a = (\sigma_{12})_b,\ (\sigma_{13})_a = (\sigma_{13})_b. \qquad (1.5.39)$$

Здесь индекс a относится к первой среде, индекс b — ко второй. Рассуждая аналогично, в результате некоторых преобразований приходим к соотношениям

$$\sin\alpha_1/a_1 = \sin\alpha_2/a_2 = \sin\beta_2/a_2 = \sin\alpha_3/a_3 = \sin\beta_3/a_4, \qquad (1.5.40)$$

где a_1, a_2 — скорости распространения волн расширения и сдвига в первой среде, a_3 и a_4 — во второй среде. Фронт волны представляет собой огибающую сферических волн, исходящих из точек фронта волны в предшествующем состоянии. Из граничных условий (1.5.39) имеем:

$$(A_1 - A_2)\cos\alpha_1 + A_3\sin\beta_2 - A_4\cos\alpha_3 - A_5\sin\beta_3 = 0,$$
$$(A_1 + A_2)\sin\alpha_1 + A_3\cos\beta_2 - A_4\sin\alpha_3 + A_5\cos\beta_3 = 0,$$
$$(A_1 + A_2)a_1\cos 2\beta_2 - A_3 a_2\sin 2\beta_2 - \qquad (1.5.41)$$
$$- A_4 a_3(\rho_b/\rho_a)\cos 2\beta_3 - A_5 a_4(\rho_b/\rho_a)\sin 2\beta_3 = 0,$$
$$\rho_a a_2^2[(A_1 - A_2)\sin 2\alpha_1 - A_3(a_1/a_2)\cos 2\beta_2] -$$
$$- \rho_b a_4^2[A_4(a_1/a_3)\sin 2\alpha_3 - A_5(a_1/a_4)\cos 2\beta_3) = 0.$$

Решая эти уравнения, выразим амплитуды отраженных и преломленных волн через амплитуду прямой волны.

При нормальном падении волны расширения $\alpha_1 = 0$, согласно (1.5 40), и все другие углы также равны нулю, следовательно, из уравнений (1.5.41) получим $A_3 = A_5 = 0$. Таким образом, возникают только волны расширения с амплитудами

$$A_2 = \frac{\rho_b a_3 - \rho_a a_1}{\rho_b a_3 + \rho_a a_1} A_1, \qquad A_4 = \frac{2\rho_a a_1}{\rho_b a_3 + \rho_a a_1} A_1. \qquad (1.5.42)$$

Следовательно, амплитуда отраженной волны зависит от величины разности $\rho_b a_3 - \rho_a a_1$. Если эта величина равна нулю, что равносильно равенству $\rho_b a_3 = \rho_a a_1$, то отраженные волны не возникают. Произведение ρa называется *характеристическим импедансом* среды. Из (1.5.42) следует: если $\rho_b a_3 > \rho_a a_1$, то амплитуда перемещения при отражении сохраняет знак амплитуды прямой волны, фаза колебаний изменяется на π; если $\rho_b a_3 < \rho_a a_1$, то амплитуда перемещения при отражении меняет знак, фаза не изменяется.

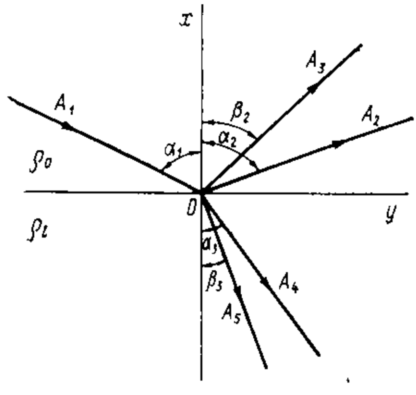

Рис. 36

Пусть прямая волна является волной сдвига, амплитуда которой B_1. Эта волна распространяется параллельно плоскости xOy и встречает границу раздела под углом β_1, затем происходит отражение и преломление волны сдвига, в результате возникают четыре волны (рис. 36). На границе раздела ($x = 0$) имеют место условия (1.5.39), выполняя которые, приходим к соотношению

$$\sin \beta_1/a_2 = \sin \beta_2/a_2 = \sin \alpha_2/a_1 = \sin \alpha_3/a_3 = \sin \beta_3/a_4 \qquad (1.5.43)$$

и следующим соотношениям между амплитудами:

$$\begin{gathered} (B_1 - B_2) \sin \beta_1 + B_3 \cos a_2 + B_4 \cos \alpha_3 - B_5 \sin \beta_3 = 0, \\ (B_1 + B_2) \cos \beta_1 + B_3 \sin \alpha_2 - B_4 \sin \alpha_3 - B_5 \cos \beta_3 = 0, \\ a_2 (B_1 + B_2) \sin 2\beta_2 - B_3 a_1 \cos 2\beta_1 + \\ + B_4 a_3 (\rho_b/\rho_a) \cos 2\beta_2 - B_5 a_4 (\rho_b/\rho_a) \sin 2\beta_3 = 0, \\ \rho_a a_2 [(B_1 - B_2) \cos 2\beta_1 - B_3 (a_2/a_1) \sin 2\alpha_2] = \\ = \rho_b a_4 ([(a_4/a_3) B_4 \sin 2 \alpha_3 + B_5 \cos 2 \beta_3], \end{gathered} \qquad (1.5.44)$$

решая которые, определяем амплитуды отраженных и преломленных волн через амплитуду прямой волны.

При нормальном падении волны сдвига отраженная и преломленная волны расширения не возникают, уравнения (1.5.44) упрощаются и принимают вид

$$B_1 + B_2 - B_5 = 0,\ \rho_a a_2 (B_1 - B_2) - \rho_b a_4 B_5 = 0. \qquad (1.5.45)$$

Если $\rho_a a_2 = \rho_b a_4$, то $B_2 = 0$ и волна сдвига не отражается. Если колебания параллельны оси Oz, то перпендикулярно границе раздела движения нет, следовательно, отраженные и преломленные волны расширения не возникают. Амплитуды отраженной B_2 и преломленной B_5 волн сдвига можно определить. Первая из них отразится под углом, равным углу падения, вторая — преломится под углом β_3, так что

$$\sin \beta_3 / \sin \beta_1 = a_4/a_2. \qquad (1.5.46)$$

Из граничных условий (1.5.39) находим:

$$B_1 + B_2 - B_5 = 0,$$
$$(B_1 - B_2)\, \rho_a \sin 2\beta_1 - B_5 \rho_b \sin 2\beta_3 = 0. \qquad (1.5.47)$$

Решая эти уравнения, выразим B_2 и B_5 через B_1.

Все изложенное позволяет сделать вывод о сложной картине волнового процесса, возникающего в теле при динамическом и импульсивном нагружениях в начальный период. После четырех-пятикратного прохождения волн напряжений в объеме тела процесс стабилизируется и становится установившимся. Напряженно-деформированное состояние тела характеризуется тензором напряжений (σ) и тензором деформаций (e).

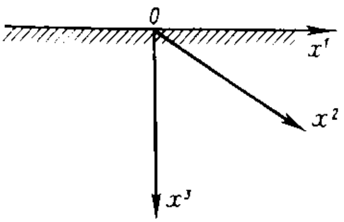

Рис. 37

При распространении волн напряжений у поверхности тела зарождаются поверхностные волны, впервые обнаруженные Релеем [39] и Лявом [28]. Описание этих волн рассмотрим на примере упругого полупространства, отнесенного к системе координат x^i ($i = 1, 2, 3$) с началом в точке O на свободной от напряжений поверхности (рис. 37). Уравнения движения в перемещениях, записанные в форме

$$a_{cq}^2 \nabla^2 u_j + (a_0^2 - a_{cq}^2) \nabla_j \nabla_k u^k = \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}, \qquad (1.5.48)$$

где $\nabla^2 u_j$ — оператор Лапласа от компонент вектора перемещений, имеют решение

$$u_j = A_j e^{-\alpha x^3 + iq(x^1 - at)}. \qquad (1.5.49)$$

Подставляя это решение в уравнения (1.5.48), получим соотношения:

$$A_1 [a_{cq}^2 \alpha^2 - (a_0^2 - a^2) q^2] - A_3 i\alpha q (a_0^2 - a_{cq}^2) = 0,$$
$$A_2 [a_{cq}^2 (\alpha^2 - q^2) + a^2 q^2] = 0, \qquad (1.5.50)$$
$$- A_1 i\alpha q (a_0^2 - a_{cq}^2) + A_3 [a_0^2 \alpha^2 + (a^2 - a_{cq}^2) q^2] = 0.$$

Из второго соотношения (1.5.50) следует, что $A_2 = 0$; первое и третье соотношения можно рассматривать как систему однородных уравнений относительно A_1 и A_3, определитель которой должен быть равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 - (a_0^2/a_{cq}^2 - a^2/a_{cq}^2)\, q^2 & -i\alpha q\, (a_0^2/a_{cq}^2 - 1) \\ -i\alpha q\, (1 - a_{cq}^2/a_0^2) & \alpha^2 - (a_{cq}^2/a_0^2 - a^2/a_0^2)\, q^2 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\alpha^4 - \alpha^2 q^2\, (2 - a^2/a_0^2 - a^2/a_{cq}^2) + q^4\, (1 - a^2/a_0^2)\, (1 - a^2/a_{cq}^2) = 0. \tag{1.5.51}$$

Отсюда находим:

$$\alpha_1^2 = (1 - a^2/a_0^2) q^2, \quad \alpha_2^2 = (1 - a^2/a_{cq}^2) q^2. \tag{1.5.52}$$

В результате подстановки этих значений в (1.5.50) приходим к зависимостям $i\alpha_1 A_1 = qA_3, - i\alpha_2 A_3 = qA_1$. Первую зависимость можно удовлетворить, если $A_1 = -iqC_1$, $A_3 = \alpha_1 C_1$. Величинам A_1 и A_3 соответствует перемещение

$$\mathbf{u}_1 = \left.\begin{matrix} -iqC_1 \\ 0 \\ \alpha_1 C_1 \end{matrix}\right\} e^{-\alpha_1 x^3 + iq\,(x^1 - at)}. \tag{1.5.53}$$

Вторую зависимость удовлетворим, если $A_1 = -i\alpha_2 C_2$, $A_3 = qC_2$; величинам A_1 и A_3 соответствует перемещение

$$\mathbf{u}_2 = \left.\begin{matrix} -i\alpha_2 C_2 \\ 0 \\ qC_2 \end{matrix}\right\} e^{-\alpha_2 x^3 + iq\,(x^1 - at)}. \tag{1.5.54}$$

Общее перемещение $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ имеет компоненты

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= -i\, (qC_1 e^{-\alpha_1 x^3} + \alpha_2 C_2 e^{-\alpha_2 x^3}) \\ u_3 &= (\alpha_1 C_1 e^{-\alpha_1 x^3} + qC_2 e^{-\alpha_2 x^3}) \end{aligned}\right\} e^{iq\,(x^1 - at)}; \tag{1.5.55}$$

напряжения, соответствующие этим перемещениям, таковы:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{13} &= iGq\, [2\alpha_1 C_1 e^{-\alpha_1 x^3} + (2 - a^2/a_{cq}^2)\, qC_2 e^{-\alpha_2 x^3}] \\ \sigma_{33} &= Gq\, [q\, (a^2/a_{cq}^2 - 2)\, C_1 e^{-\alpha_1 x^3} - 2\alpha_2 C_2 e^{-\alpha_2 x^3}] \end{aligned}\right\} e^{iq\,(x^1 - at)}. \tag{1.5.56}$$

На свободной поверхности ($x^3 = 0$) имеют место условия $\sigma_{13} = 0$, $\sigma_{33} = 0$, эквивалентные соотношениям

$$2\alpha_1 C_1 + (2 - a^2/a_{cq}^2)\, qC_2 = 0,$$
$$q\, (a^2/a_{cq}^2 - 2)\, C_1 - 2\alpha_2 C_2 = 0.$$

Последние соотношения можно рассматривать как однородные уравнения относительно C_1 и C_2, следовательно, их определитель равен нулю, что эквивалентно уравнению $4\alpha_1\alpha_2 = (2 - a^2/a_{cq}^2)^2 q^2$, подставляя в которое выражения (1.5.52), получим уравнение

$$\lambda^6 - 8\lambda^4 + 8\, (3 - 2\beta^2)\lambda^2 - 16\, (1 - \beta^2) = 0, \tag{1.5.57}$$

где $\lambda = a/a_{cq}$, $\beta = a_{cq}/a_0 = (K/G + 4/3)^{-1}$.

Легко показать, что уравнение (1.5.57) имеет единственный действительный корень λ_*, лежащий в интервале $0 < \lambda_* < 1$, следовательно,

$$a = a_{cq}\lambda_* \qquad (1.5.58)$$

— скорость распространения поверхностных волн Релея, которым соответствуют перемещения:

$$u_1 = Dq\,(2 - \lambda_*^2)\,[e^{-\alpha_1 x^3} - (1 - \lambda_*^2/2)e^{-\alpha_2 x^3}]\ \sin q\,(x^1 - at),$$
$$(1.5.59)$$
$$u_3 = 2\alpha_1 D\,[(1 - \lambda_*^2/2)\,e^{-\alpha_1 x^3} - e^{-\alpha_2 x^3}]\cos q\,(x^1 - at).$$

Волны Релея наблюдаются вдали от источника возмущения, поскольку энергия, которую они несут, сконцентрирована у поверхности и рассеивается по ней. Поэтому рассеяние происходит медленнее, чем в волнах нагрузки и разгрузки, где энергия рассеивается по объему области возмущений.

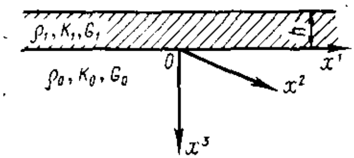

Рис. 38

Если тело двухслойное, причем области $x^3 > 0$ и $-h < x^3 < 0$ обладают различными свойствами (рис. 38), то появляются волны Лява. Следуя Ляву, принимаем следующие перемещения: в верхнем слое $-h < x^3 < 0$

$$\mathbf{u} = \left.\begin{matrix} 0 \\ V(x^3) \\ 0 \end{matrix}\right\} e^{iq(x^1 - at)}, \qquad (1.5.60)$$

в области $x^3 > 0$

$$\mathbf{u} = \left.\begin{matrix} 0 \\ V^0(x^3) \\ 0 \end{matrix}\right\} e^{iq(x^1 - at)}; \qquad (1.5.60')$$

подставляя (1.5.60) — (1.5.60′) в (1.5.48), получим

$$\frac{d^2V}{dx^{3^2}} + \lambda^2 q^2 V = 0, \quad \lambda^2 = \frac{a^2}{a_{cq}^2} - 1. \qquad (1.5.61)$$

Таким образом, в слое $-h < x^3 < 0$ имеем

$$V(x^3) = A\sin\lambda q x^3 + B\cos\lambda\, q x^3, \qquad (1.5.62)$$

в области $x^3 > 0$

$$V^0(x^3) = Ce^{-\lambda^0 q x^3}, \quad \lambda^0 = 1 - a^2/a_{0cq}^2. \qquad (1.5.63)$$

На верхней границе слоя $x^3 = -h$ напряжений нет:

$$\sigma_{i3} = 0\ (i = 1,2,3); \qquad (1.5.64)$$

на границе раздела $x^3 = 0$ имеем:

$$u_i = u_i^0,\ \sigma_{i3} = \sigma_{i3}^0; \qquad (1.5.64')$$

$$u_i \to 0 \ \text{ при } \ x^3 \to \infty. \qquad (1.5.64'')$$

Выполнение граничных условий (1.5.64) — (1.5.64″) приводит к соотношениям:

$$B = C,\ GA\lambda = -G_0C\lambda^0,$$
$$A\cos\lambda qh + B\sin\lambda qh = 0.$$

Отсюда следует

$$\begin{vmatrix} \cos\lambda qh & \sin\lambda qh & 0 \\ C\lambda & 0 & -G_0\lambda^0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

что эквивалентно уравнению

$$G_0\,(1 - a^2/a_{cq}^{0\,2})^{1/2} = G\,(a^2/a_{cq}^2 - 1)^{1/2}\operatorname{tg}[(a^2/a_{cq}^2 - 1)^{1/2}\,qh]. \tag{1.5.65}$$

Из уравнения (1.5.65) видно, что волны Лява существуют только в том случае, если скорость волн сдвига a_{cq}^0 больше скорости a_{cq}. Если a — действительный корень уравнения (1.5.65), то решение задачи определяется выражениями

$$\begin{aligned} V(x^3) &= V_0\cos[\lambda q\,(x^3 + h)] \quad (-h < x^3 < 0), \\ V^0(x^3) &= V_0\cos(\lambda\, qh)e^{-\lambda^0 qx^3}\quad (x^3 > 0), \end{aligned} \tag{1.5.66}$$

где V_0 — постоянная интегрирования.

Перемещение u_2 определяется следующими выражениями:

$$u_2 = \begin{cases} V_0\cos[\lambda q\,(x^3 + h)]\,e^{iq\,(x^1 - at)} \text{ (в слое)}, \\ V_0\cos(\lambda qh)\,e^{-\lambda^0 qx^3}\,e^{iq\,(x^1 - at)} \text{ (в области)}. \end{cases} \tag{1.5.67}$$

Таким образом, волна Лява распространяется вдоль оси Ox^1 со скоростью a, перемещения в волне лежат в плоскости, перпендикулярной направлению их распространения, и параллельны границе раздела (вдоль оси Ox^2).

Волны Лява имеют дисперсию, т. е. их фазовая скорость зависит от частоты $a\,(q)$, тогда как волны Релея дисперсии не имеют. Общность волн Релея и волн Лява состоит в том, что они наблюдаются при землетрясениях на значительных расстояниях от источника возмущений, энергия их концентрируется вблизи свободной поверхности, поэтому они затухают медленнее, чем другие волны напряжений.

Глава 2
ВОЛНЫ НАПРЯЖЕНИЙ В ДЕФОРМИРУЕМОЙ СРЕДЕ

Настоящая глава посвящена исследованию эффектов кратковременного возмущения большой интенсивности (взрыв и удар) в пространстве и полупространстве. Средой является материал, обладающий следующими свойствами: упругостью, вязкоупругостью, упругопластичностью и вязкоупругопластичностью. Рассматривается задача о внедрении тела в деформируемую среду и определяется напряжение в среде при внедрении, а также задача об ударе тела в преграду конечной толщины. Решения задач представлены в виде, позволяющем широко использовать при их реализации ЭВМ.

§ 1. Взрыв в вязкоупругопластическом пространстве

Рассмотрим пространство со сферической полостью радиуса r_0, заполненное деформируемой средой с известными физико-механическими свойствами; среда может быть упругой, упругопластической, вязкой, вязкоупругой, вязкопластической и др.

В сферической полости производится взрыв, в результате которого на ее поверхности возникают давление $p_{\text{пол}}$ и высокая температура $T_{\text{пол}}$; частицы среды, расположенные на поверхности, получают скорость $\mathbf{v}_{\text{пол}}$, полость расширяется. По среде распространяются возмущения в виде волн напряжений, образуются области возмущений, в которых среда находится в напряженно-деформированном состоянии, частицы ее оказываются в движении.

Определим характеристики напряженно-деформированного состояния среды: тензор напряжений (σ) и тензор деформаций (e), а также характеристики движения — вектор скорости $\mathbf{v}$ и плотность ρ среды в областях возмущений.

При изучении напряженного состояния среды и движения частиц ее в областях необходимо решить: 1) задачу о динамическом расширении сферической полости при взрыве; 2) задачу о расчете напряжений, скорости частиц и плотности среды в областях возмущений. Решения этих задач строятся на основании следующих физических представлений. Пусть в сферической полости, заполненной газом под давлением p_0, в момент времени $t = 0$ в результате взрыва образовался некоторый объем другого газа с большим давлением и высокой температурой. На поверхности объема оба газа находятся в свободном соприкосновении, поэтому с течением времени их давления выравняются, при этом в газе с низким давлением распространяется возмущение сжатия, а в газе с высоким давлением — возмущение разряжения. Возмущение, возникшее при взрыве, является результатом обмена энергией между продуктами взрыва и окружающей средой. Источником энергии служит сферический заряд радиуса r_0, физика детонации которого не зависит от окружающей среды. Если предположить, что инициирование производится в центре заряда, то движение фронта детонации во внешнюю область и изменения физико-химических свойств газов в сопутствующем потоке описываются гидродинамической теорией сферических детонационных волн [47, 10], причем на фронте детонации давление порядка 10^5 — 10^6 кгс/см^2, температура около 3000° С. В момент выхода детонационной волны на поверхность заряда, где окружающая среда находится в покое, по поверхности полости производится удар большой интенсивности, в результате которого распространяется ударная волна сжатия по невозмущенной среде; одновременно по продуктам взрыва внутрь распространяется отраженная ударная волна разряжения. В силу диссипативных процессов и сферического расхождения ударная волна, распространившаяся во внешнюю область среды, затухает и вырождается в упругую. За фронтом ударной волны среда нагревается и вовлекается в движение (направленное во внешнюю область), которое значительнее движения, вызванного непосредственным давлением продуктов взрыва на поверхность полости. В результате последовательного отражения волн от поверхности полости и ее центра происходят быстрые колебания давления в продуктах взрыва, однако повторные волновые движения вызывают в какой-то мере равномерное движение в продуктах взрыва. Основная энергия ударной волны излучается в среду за очень короткий промежуток времени, пополнение происходит за счет уменьшения энергии продуктов взрыва, связанного с их расширением, что приводит к расширению сферической полости. В начальной стадии процесса силы сцепления мало влияют на движение среды вблизи поверхности полости. Среда ведет себя подобно жидкости, сжимающейся под действием интенсивных напряжений, вызванных взрывом; в дальнейшем, при меньшей интенсивности напряжений, поведение среды определяется ее физико-механическими свойствами. С известной степенью точности можно считать, что движение поверхности полости от центра происходит вследствие равномерного расширения продуктов взрыва, общая энергия которых уменьшается из-за передачи энергии ударной волной в среду. Инерция среды, механические свойства продуктов взрыва и материала среды обеспечивают необходимые условия для образования демпфирования, что приводит к апериодическому процессу расширения полости с малой амплитудой. В начальный период расширения полости движение сильно демпфировано интенсивными пластическими деформациями среды, в дальнейшем происходит незначительное обратное движение. Окончательное затухание колебательного движения — результат распространения энергии на большие расстояния, вязкости среды и продуктов взрыва.

Теоретическое исследование расширения сферической полости при взрыве проводится при следующих предположениях: 1) известная часть первоначальной внутренней энергии расходуется непосредственно на образование ударной волны, причем энергия движения, связанного с ударной волной, не учитывается и принимается равной kU, где $k<1$ — коэффициент отдачи, U — энергия заряда В. В.; 2) функция p (ρ) продуктов взрыва аппроксимируется известными теоретическими зависимостями [47]; 3) волны сжатия в продуктах взрыва двигаются с высокой скоростью по сравнению со скоростью их движения в полости (в основной стадии движения полости продукты взрыва равномерно расширяются в адиабатических условиях). Эти предположения равносильны утверждению, что давление, приложенное к поверхности полости, определяется начальной величиной, соответствующим уменьшением плотности энергии продуктов, взрыва и текущим радиусом полости. В соответствии с этим, как показали Джонс и Миллер [55], закон изменения давления продуктов взрыва в полости радиуса $r_{\text{пол}}$ следующий:

$$p_r = p_0 + \begin{cases} P_0 (r_{\text{пол}}/r_0)^{-3\gamma_1}, & 1 \leqslant r_{\text{пол}}/r_0 \leqslant r^*/r_0, \\ P_0 (r^*/r_0)^{-3\gamma_1} (r_{\text{пол}}/r_*)^{-3\gamma_2}, & r_{\text{пол}}/r_0 \geqslant r^*/r_0, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

причем при взрыве тротила $r^*/r_0 = 1{,}53$; по данным Джонса и Миллера, $P_0 = 3{,}13 \cdot 10^4$ кгс/см²; постоянные γ_1 и γ_2 определяются по таблице [49] в зависимости от температуры взрыва.

Предположения относительно механического поведения среды сводятся к тому, что вблизи поверхности полости вынужденное движение среды вызывает большие пластические деформации, развивающиеся в относительно короткое время. На достаточно большом расстоянии это движение вызывает лишь упругие или вязкие возмущения малой амплитуды, средние значения скоростей деформаций во всех областях деформации за время образования полости, вплоть до конца первой стадии расширения, оказываются небольшими, влияние упрочнения и скорости деформаций учитывается динамической диаграммой $\sigma_i \div e_i$ или диаграммой $\tau_i \div \gamma_i$, полученной пересчетом с помощью зависимостей

$$\tau_i = (2\sqrt{2}/3)\,\sigma_i, \quad \dot{e}_i = de_i/dt, \quad \dot{e}_i = (1/\sqrt{2})\,\dot{\gamma}_i. \tag{2.1.2}$$

Материал среды принимается однородным, изотропным, подчиняющимся определяющим уравнениям среды, а также условию пластичности Треска. Предполагается, что движения продуктов взрыва и среды изохронны, причем распространение возмущений на большие расстояния происходит мгновенно, скорости частиц среды во всех точках выражаются через скорости частиц на поверхности полости.

Таким образом, на основании изложенного решение задачи о динамическом расширении сферической полости при взрыве строится при следующих предположениях: 1) движение имеет сферическую симметрию и проходит в радиальном направлении; 2) движение продуктов взрыва после излучения в среду ударной волны, которая уменьшает первоначальную энергию заряда, является равномерным и адиабатическим; 3) среда в пластическом состоянии несжимаема, ее движение подчинено соответствующим определяющим уравнениям и условию пластичности Треска; 4) эффект упрочнения и скорости деформаций учитывается динамической диаграммой $\sigma_i \div e_i$ или $\tau_i \div \gamma_i$.

Геометрия расширения сферической полости, соответствующая принятым гипотезам, представлена на рис. 39.

Задача о динамическом расширении полости сводится к определению радиального перемещения $w(r, t)$ или радиальной скорости движения частиц $v(r, t)$. Радиус полости

$$r_{\text{пол}} = r_0 + w(r, t),$$
$$r_{\text{пол}} = r_0 + \int_0^t v(r, \tau)\, d\tau, \tag{2.1.3}$$

поэтому решение будем строить в сферической системе координат θ, φ, r, t.

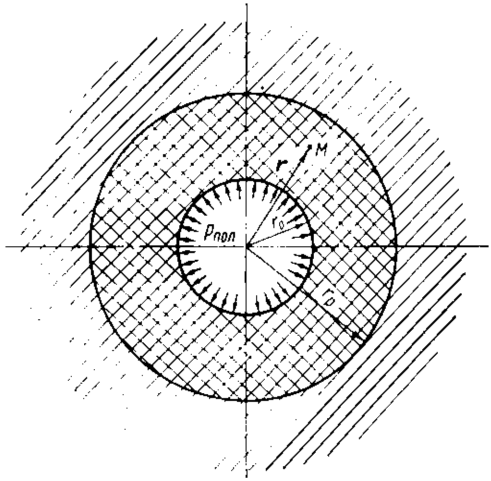

Рис. 39

Напряженно - деформированное состояние среды характеризуется тензором напряжений (σ) с матрицей

$$\begin{Vmatrix} \sigma_\theta & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_r \end{Vmatrix},$$

причем $\sigma_\varphi = \sigma_\theta$, и тензором малых деформаций (e) с матрицей

$$\begin{Vmatrix} e_\theta & 0 & 0 \\ 0 & e_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & e_r \end{Vmatrix},$$

элементы которой определяются через радиальное перемещение с помощью соотношений

$$e_\theta = w/r,\ e_\varphi = w/r, \quad e_r = dw/dr. \tag{2.1.4}$$

Частицы среды в областях возмущений движутся в радиальном направлении со скоростью v, которой соответствуют скорости деформаций

$$\dot{e}_\theta = v/r,\ \dot{e}_\varphi = v/r,\ \dot{e}_r = dv/dr; \tag{2.1.5}$$

плотность среды в областях возмущений равна ρ, в невозмущенной среде — ρ_0.

Уравнения движения (1.3.1) и уравнение неразрывности (1.3.2) принимают вид

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) = \rho \frac{dv}{dt}, \tag{2.1.6}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(\rho v) = 0. \tag{2.1.7}$$

В начальный момент при $t = 0$ имеем

$$w = 0, \quad v = v_0; \tag{2.1.8}$$

на поверхности полости при $r = r_{\text{пол}}$

$$\sigma_r = p_{\text{пол}}(t), \; v = v_{\text{пол}}(t),$$

при $r = \infty$

$$w = 0, \quad v = 0. \tag{2.1.9}$$

Связь между напряжениями и деформациями или скоростями деформаций задается определяющими уравнениями, вид которых зависит от физико-механических свойств рассматриваемой среды. Для упругой среды справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_r &= (K + (4/3)\,G)\,e_r + 2\,(K - (2/3)\,G)\,e_\theta, \\ \sigma_\theta &= (K - (2/3)\,G)\,e_r + 2\,(K + (1/3)\,G)\,e_\theta. \end{aligned} \tag{2.1.10}$$

Последовательно подставляя (2.1.4) в (2.1.10), а полученный результат — в (2.1.6), приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{2}{r^2}w = \frac{1}{a_0^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{2.1.11}$$

где $a_0^2 = (1/\rho)\,(K + (4/3)\,G)$ — скорость распространения волны напряжений в упругой среде. Для упругопластической среды справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_r &= (K + (4/3)\,G)\,e_r + 2(K - (2/3)\,G)\,e_\theta - (4/3)\,G\omega\,(e_r - e_\theta), \\ \sigma_\theta &= (K - (2/3)\,G)\,e_r + 2\,(K + (1/3)\,G)\,e_\theta + (2/3)\,G\omega\,(e_r - e_\theta), \end{aligned} \tag{2.1.12}$$

где $\omega\,(e_i) \neq 0$ — функция пластичности. Предполагается существование конечной пластической области $r_{\text{пол}} \leqslant r < r_{\text{пл}}(t)$, окружающей полость $r_{\text{пол}}$ бесконечной упругой области $r > r_{\text{пл}}(t)$. Упругие деформации $e_r^{(e)}$ и $e_\theta^{(e)}$ связаны с напряжениями σ_r и σ_θ законом Гука [см. формулу (2.1.10)], пластические деформации таковы:

$$e_\theta^{(p)} = e_\theta - e_\theta^{(e)}, \quad e_r^{(p)} = e_r - e_r^{(e)}. \tag{2.1.13}$$

Следуя Р. Хиллу [48], считаем, что скорости пластических деформаций $\dot{e}_\theta^{(p)}$, $\dot{e}_r^{(p)}$ связаны с параметром скорости пластического течения $\dot{\lambda} \geqslant 0$ зависимостями

$$\dot{e}_r^{(p)} = -2\varkappa\dot{\lambda}, \quad \dot{e}_\theta^{(p)} = \varkappa\dot{\lambda}, \tag{2.1.14}$$

где $\varkappa$ — параметр, меняющий свое значение при повторном пластическом деформировании (в случае расширения $\varkappa = 1$, в случае сжатия $\varkappa = -1$). Интегрируя по пути пластического деформирования соотношения (2.1.14), получим

$$e_r^{(p)} = -2\int \varkappa\,d\lambda, \quad e_\theta^{(p)} = \int \varkappa\,d\lambda. \tag{2.1.15}$$

Для идеальнопластической среды условие пластичности Треска имеет вид

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \varkappa\sigma_т. \tag{2.1.16}$$

Уравнение сжимаемости, полученное исключением несжимаемых пластических деформаций ($e_r^{(p)} + 2e_\theta^{(p)} = 0$), можно записать в следующем виде:

$$\sigma_r + 2\sigma_\theta = 3K\,(e_r + 2e_\theta). \tag{2.1.17}$$

Объединяя уравнения (2.1.6), (2.1.16) и (2.1.17), получаем уравнение для перемещения w:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{2}{r^2}w = 2\varkappa\frac{\sigma_т}{Kr} + \frac{1}{a_p^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{2.1.18}$$

где $a_p^2 = K/\rho$ — скорость распространения волны напряжений в идеальнопластической среде.

Для упрочняющейся упругопластической среды, которой соответствует зависимость

$$\sigma_i = \sigma_т + \sigma_i^*\,(e_i),$$

где $\sigma_i^*\,(e_i)$ — функция упрочнения, определяемая динамической диаграммой $\sigma_i \div e_i$ и связанная с функцией пластичности соотношением

$$\sigma_i^*\,(e_i) = 3\,Ge_i\,(1 - \omega - e_т/e_i)\,.$$

Условие (2.1.16) можно обобщить:

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \varkappa\sigma_т + \sigma_i^*\,(-e_\theta + \sigma_\theta/3\,K),\ \varkappa = \mp 1. \tag{2.1.19}$$

Система уравнений (2.1.6), (2.1.17) и (2.1.19) — нелинейная гиперболическая, решение ее в общем виде получить довольно трудно. Однако в случае линейного упрочнения $\sigma_i^*\,(e_i) = E_y = \text{const}$, система является линейной и решение ее можно получить в явной форме. Пусть уравнение (2.1.19) имеет вид

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \varkappa\sigma_т + E_y\,(-e_r + \sigma_\theta/3K - \varkappa\sigma_т/E). \tag{2.1.20}$$

Тогда, рассматривая совместно уравнения (2.1.6), (2.1.17) и (2.1.20), приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{2}{r^2}w = \frac{1}{a_p^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{6\varkappa\sigma_т\,(1 - E_y/E)}{3K + E_y}\,\frac{1}{r}, \tag{2.1.21}$$

где $a_p^2 = \dfrac{K}{\rho}\,\dfrac{1 + E_y/3K}{1 - E_y/9K}$ — скорость распространения волны напряжений в линейно-упрочняющейся упругопластической среде. Следует заметить, что уравнение

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{2}{r^2}w = \frac{1}{a_p^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\varkappa\frac{\sigma_т}{r}B \tag{2.1.22}$$

является обобщающим, принимает вид (2.1.18) при $B = 1/K$, $a_p^2 = K/\rho$; вид (2.1.21) при

$$B = \frac{3\,(1 - E_y/E)}{3K + E_y}, \quad a_p^2 = \frac{K}{\rho}\,\frac{1 + E_y/3K}{1 - E_y/9K}.$$

Вязкоупругая среда (полимерные материалы) характеризуется соотношениями

$$e_{ij} = \frac{1}{2G}\left[\sigma_{ij} + \left(\left(\frac{2G}{3K} - 1\right)\sigma + 2G\alpha T^0\right) g_{ij}\right] +$$

$$+ \int_0^t [(\widetilde{R}_1(t,\tau) - \widetilde{R}(t,\tau))\sigma(\tau) g_{ij} + \widetilde{R}(t,\tau)\sigma_{ij}(\tau)]\, d\tau. \qquad (2.1.23)$$

Экспериментальные исследования распространения волн напряжений в полимерных материалах позволяют сделать вывод, что в таких быстрых процессах, каким является процесс распространения импульса, на фронте волны напряжений среда упругая, коэффициент Пуассона изменяется в интервале $1/_4 \leqslant \nu \leqslant 1/_3$, модули упругости G и E имеют порядок $0{,}5K$ и K соответственно. Это обстоятельство позволяет при оценке степени расширения полости считать среду упругой ($\widetilde{R}_1(t, \tau) = 0$, $\widetilde{R}(t, \tau) = 0$), для которой справедливо уравнение (2.1.11).

Для вязкой жидкости справедливы соотношения

$$\sigma_r = -p_0 + (1/3)(\lambda + 4\mu)\dot{e}_r + (2/3)(\lambda - 2\mu)\dot{e}_\theta, \qquad (2.1.24)$$
$$\sigma_\theta = -p_0 + (2/3)(\lambda + \mu)\dot{e}_\theta + (1/3)(\lambda - 2\mu)\dot{e}_\theta.$$

В результате последовательной подстановки (2.1.5) в (2.1.24), а полученного результата — в (2.1.6) приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{2}{r^2} v = \frac{1}{a_0^2}\frac{dv}{dt}, \qquad (2.1.25)$$

где $a_0^2 = \frac{1}{3\rho}(\lambda + 4\mu)$ — скорость распространения возмущений в вязкой жидкости.

Для вязкопластической среды имеют место соотношения

$$\sigma_r = -p_0 + (1/3)(\lambda + 4\eta)\dot{e}_r + (2/3)(\lambda - 2\eta)\dot{e}_\theta, \qquad (2.1.26)$$
$$\sigma_\theta = -p_0 + (2/3)(\lambda + \eta)\dot{e}_\theta + (1/3)(\lambda - 2\eta)\dot{e}_r,$$

причем $\eta = \mu + \tau_i/\dot{\gamma}_i$. Компоненты тензора скоростей деформаций можно представить в виде суммы: $\dot{e}_r = \dot{e}_r^{(b)} + \dot{e}_r^{(p)}$, $\dot{e}_\theta = \dot{e}_\theta^{(b)} + \dot{e}_\theta^{(p)}$. Пластические составляющие скоростей деформаций $\dot{e}_r^{(p)}$, $\dot{e}_\theta^{(p)}$ удовлетворяют условию несжимаемости $\dot{e}_r^{(p)} + 2\dot{e}_\theta^{(p)} = 0$. В этом случае уравнение сжимаемости среды имеет вид

$$\sigma_r + 2\sigma_\theta + 3p_0 = \lambda(\dot{e}_r + 2\dot{e}_\theta). \qquad (2.1.27)$$

Если среда без упрочнения, то условие пластичности следующее:

$$\sigma_\theta - \sigma_r = 2\varkappa^{(b)}\tau_{\text{т}}. \qquad (2.1.28)$$

Рассматривая совместно уравнения (2.1.6), (2.1.27) и (2.1.28), приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{2}{r^2}v=\frac{1}{a_p^2}\frac{dv}{dt}+12\frac{\varkappa^{(b)}}{\lambda r}\tau_{\text{т}}, \tag{2.1.29}$$

где $a_p^2=\lambda/3\rho$ — скорость распространения возмущений в вязкопластической среде без упрочнения.

Если среда обладает линейным упрочнением: $\tau_i(\dot{\gamma}_i)=E_{\text{у}}\dot{\gamma}_i$, где E_y — модуль упрочнения (константа), то

$$\eta=\mu+\tau_i/\dot{\gamma}_i=\mu+E_{\text{у}}$$

и соотношения (2.1.26) принимают вид

$$\sigma_r=-p_0+(1/3)(\lambda+4(\mu+E_{\text{у}}))\dot{e}_r+(2/3)(\lambda-2(\mu+E_{\text{у}}))\dot{e}_\theta,$$

$$\sigma_\theta=-p_0+(2/3)(\lambda+(\mu+E_{\text{у}}))\dot{e}_\theta+(1/3)(\lambda-2(\mu+E_{\text{у}}))\dot{e}_r. \tag{2.1.30}$$

Последовательно подставляя (2.1.5) в (2.1.30), а полученный результат — в (2.1.6), приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{2}{r^2}v=\frac{1}{a_p^2}\frac{dv}{dt}, \tag{2.1.31}$$

где $a_p^2=[\lambda+4(\mu+E_{\text{у}})]/3\rho$ — скорость распространения возмущений в линейно-упрочняющейся вязкопластической среде.

Для среды с произвольным законом упрочнения $\tau_i(\dot{\gamma}_i)$ условие пластичности Треска записывается в обобщенной форме:

$$\sigma_\theta-\sigma_r=2\tau_i(\dot{\gamma}_i). \tag{2.1.32}$$

Объединяя (2.1.32) и (2.1.27), получим

$$\sigma_r=-p_0+(\lambda/3)(\dot{e}_r+2\dot{e}_\theta)-(4/3)\tau_i(\dot{\gamma}_i). \tag{2.1.33}$$

В результате подстановки (2.1.32) и (2.1.33) в (2.1.6) приходим к нелинейному уравнению

$$\left(\frac{\lambda}{3}-\frac{8\sqrt{2}}{9}\frac{d\tau_i}{d\dot{\gamma}_i}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\left(\frac{\lambda}{3}+\frac{4\sqrt{2}}{9}\frac{d\tau_i}{d\dot{\gamma}_i}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}\right)=$$

$$=\frac{4}{3}\tau_i+\rho\frac{dv}{dt}. \tag{2.1.34}$$

Анализ полученных уравнений показывает, что уравнения (2.1.25), (2.1.29) и (2.1.31) — линейные и могут быть записаны в форме

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{2}{r^2}v=f+\frac{1}{a^2}\frac{dv}{dt}, \tag{2.1.35}$$

где a^2 — скорость распространения возмущений в среде; f — свободный член, равный нулю для уравнений (2.1.25) и (2.1.31), для уравнения (2.1.29) $f=12\frac{\varkappa^b}{\lambda r}\gamma_{\text{т}}$. Уравнение (2.1.34) — нелинейное, решение его довольно сложно.

Таким образом, для рассмотренных сред получены уравнения, решения которых с учетом начальных (2.1.8) и граничных (2.1.9) условий определяют перемещение w и скорость v частиц на поверхности полости. Так как движение безвихревое, то, следуя Г. Гопкинсу [7], для уравнения (2.1.11) введем потенциал перемещения $\varphi(r, t)$ с помощью соотношения

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial r}. \tag{2.1.36}$$

Тогда уравнение (2.1.11) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\nabla^2 - \frac{1}{a_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi = 0,$$

где

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right). \tag{2.1.37}$$

Следовательно, потенциал φ удовлетворяет уравнению

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi = 0,$$

решением которого с учетом начальных и граничных условий является функция

$$\varphi(\tau) = -\frac{Ar_0^2}{\rho a_0 r}\int_0^\tau \exp\left(-\beta a_0 \frac{s}{r_0}\right)\sin\left(\frac{a_0}{A}\frac{s}{r_0}\right) p(\tau - s)\, ds, \tag{2.1.38}$$

где

$$A = \frac{2 + 3K/2G}{\sqrt{3(1 + 3K/G)}}, \qquad \beta = \frac{3}{2 + 3K/(2G)}, \qquad \tau = t - (r - r_0)/a_0.$$

При $t < 0$ $(\tau < 0)$ потенциал $\varphi \equiv 0$. Для малых τ давление $p(\tau - s)$ в (2.1.38) можно разложить в ряд Тейлора по степеням s и проинтегрировать, в результате для фронта волны $r = r_0 + a_0 t$ $(\tau = 0)$ имеем

$$\sigma_r = -\frac{r_0}{r}p(0), \quad \sigma_\theta = -C\frac{r_0}{r}p(0), \quad \rho a_0 v = \frac{r_0}{r}p(0), \quad C = \frac{3K/(2G) - 1}{3K/(3G) + 2}.$$

Таким образом, на фронте волны

$$\tau = 0, \ \sigma_r = -\rho a_0 v, \tag{2.1.39}$$

поэтому $v/a_0 = O(p(0)/E)$ и очевидно, что если предел упругости σ_p не превзойден, то $(p(0)/E) = O(\sigma_p/E)$, т. е.

$$v/a_0 = O(\sigma_p/E) \ll 1. \tag{2.1.40}$$

Подставляя (2.1.38) в (2.1.36), определяем перемещение:

$$w = \frac{Aa_{cq}}{\rho_0 a_0 a_{cq}}\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \int_0^\tau e^{-\beta a_0 s/r_0} \sin\left(\frac{a_0}{A}\frac{s}{r_0}\right) p(\tau - s)\, ds. \tag{2.1.41}$$

На поверхности полости $r = r_0$, $\tau = t$ имеем перемещение

$$w_0 = \frac{A}{\rho_0 a_0 a_{cq}} \int_0^{x_0} e^{-\beta \frac{a_0}{a_{cq}} \frac{y^0}{r_0}} \sin\left(\frac{1}{A} \frac{a_0}{a_{cq}} \frac{y^0}{r_0}\right) p\,(x^0 - y^0)\, dy^0, \quad (2.1.42)$$

ему соответствует скорость

$$v_0 = \frac{A}{\rho_0 a_0} e^{-\beta \frac{a_0}{a_{cq}} \frac{x^0}{r_0}} \sin\left(\frac{1}{A} \frac{a_0}{a_{cq}} \frac{x^0}{r_0}\right) p\,(0) \quad (2.1.43)$$

и радиус полости

$$r_{\text{пол}} = r_0\,(1 + w_0/r_0). \quad (2.1.44)$$

Уравнение (2.1.22) позволяет ввести в рассмотрение потенциал пластических перемещений $\psi\,(r,\ t)$ с помощью соотношения

$$w = \frac{\partial}{\partial r}\left[\psi + 2\varkappa\sigma_{\text{т}} \frac{B}{3} \int r \left(\ln \frac{r}{r_0} - \frac{1}{3}\right) dr\right]. \quad (2.1.45)$$

Здесь второе слагаемое — частное решение уравнения (2.1.22). В результате подстановки (2.1.45) в (2.1.22) приходим к уравнению

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{a_p^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \psi = 0,$$

решением которого с учетом начальных и граничных условий является функция

$$\psi = -\frac{A r_0}{\rho a_p} \left(\frac{r_0}{r}\right) \int_0^{\tau} e^{-\beta a_p \frac{s}{r_0}} \sin\left(\frac{a_p}{A} \frac{s}{r_0}\right) p\,(\tau - s)\, ds. \quad (2.1.46)$$

При расширении полости ($\varkappa = 1$) имеем: в пластической области при $r_0 \leqslant r \leqslant r_{\text{пл}}\,(t)$

$$\left(1 + \frac{E_{\text{у}}}{3K}\right) \frac{E}{\sigma_{\text{т}}} \frac{w}{r} = \frac{2 + 3K/(2G)}{1 + 3K/G} (1 - E_{\text{у}}/(9K))\,(r_{\text{пл}}/r_0)^3 -$$
$$- \frac{2}{1 + 3K/G} (1 - E_{\text{у}}/E) \left(1 + 3 \ln \frac{r_{\text{пл}}}{r}\right),$$

в упругой области при $r > r_{\text{пл}}\,(t)$

$$\frac{E}{\sigma_{\text{т}}} w = \frac{3K}{2G} \frac{1}{1 + 3K/G} r_{\text{пл}} \left(\frac{r_{\text{пл}}}{r}\right)^2. \quad (2.1.47)$$

На поверхности полости при $r = r_0$ имеет место перемещение

$$\frac{w_0}{r_0} = D_1 \left(\frac{r_{\text{пл}}}{r_0}\right)^3 - D_2 \left(1 + 3 \ln \frac{r_{\text{пл}}}{r_0}\right), \quad (2.1.48)$$

где

$$D_1 = \frac{\sigma_{\text{т}}}{E} \frac{1}{1 + E_{\text{у}}/(3K)} \frac{2 + 3K/(2G)}{1 + 3K/G} (1 - E_{\text{у}}/(9K)),$$

$$D_2 = \frac{\sigma_{\text{т}}}{E} \frac{1}{1 + E_{\text{у}}/(3K)} \frac{2}{1 + 3K/G} (1 - E_{\text{у}}/E);$$

давление в полости

$$p_т = \sigma_т\,[C_1\,(1 + 3\ln(r_{пл}/r_0)) + C_2\,(r_{пл}/r_0)^3], \qquad (2.1.49)$$

где

$$C_1 = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{E_у}{E}\right)\frac{1}{1+E_у/(3K)},$$

$$C_2 = \frac{4}{3}\,\frac{E_у}{E}\,\frac{2+3K/2G}{1+3K/G}\,\frac{1}{1+E_у/(3K)};$$

скорость частиц

$$v_0 = 3r_0\,a_{cq}\,\frac{d}{dx^0}\,(r_{пл}/r_0)\,[D_1\,(r_{пл}/r_0)^2 - D_2\,(r_{пл}/r_0)^{-1}].$$

Но $r_{пл} = r_0 + a_p t$, $x^0 = a_{cq} t$, поэтому

$$r_{пл}/r_0 = 1 + (a_p/a_{cq})\,(x^0/r_0), \qquad (2.1.50)$$

производная $d/dx^0\,(r_{пл}/r_0) = (1/r_0)\,(a_p/a_{cq})$, следовательно, скорость частиц

$$v_0 = 3a_p\,[D_1\,(r_{пл}/r_0)^2 - D_2\,(r_{пл}/r_0)^{-1}]. \qquad (2.1.50')$$

Введем в рассмотрение потенциал скоростей $\varphi\,(r,\,t)$:

$$v = d\varphi/dr. \qquad (2.1.51)$$

Подставляя (2.1.51), в уравнение (2.1.35), получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\nabla^2 - \frac{1}{a^2}\,\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi = f,$$

которому соответствует однородное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\nabla^2 - \frac{1}{a^2}\,\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi = 0.$$

Следовательно, в случае $f = 0$ потенциал скоростей φ удовлетворяет уравнению

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{a^2}\,\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi = 0. \qquad (2.1.52)$$

Вводя безразмерные переменные $\bar r = r/r_0$, $\bar t = a^2 t/r_0^2$, преобразуем уравнение (2.1.52) к виду

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\bar r^2} + \frac{2}{\bar r}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\bar r} = \frac{\partial\varphi}{\partial\bar t}, \qquad (2.1.52')$$

которому соответствуют начальные условия (2.1.8):

$$\varphi = r_0 v_0 \bar v_0\,(\bar r) \text{ при } \bar t = 0 \qquad (2.1.53)$$

и граничные условия (2.1.9):

$$\varphi = (r_0^2/\lambda)\,(\bar r_{пол})^2\,(p_{пол} + p_0) \text{ при } \bar r = \bar r_{пол}, \qquad (2.1.53')$$

$$\varphi = 0 \text{ при } \bar r = \infty.$$

Такие краевые задачи рассматривались Г. Карслоу и Д. Егером [22].

Для уравнения (2.1.52′) и условий (2.1.53) имеет место решение

$$\psi=\frac{r_0^2}{\bar r\sqrt{\pi}}\left\{\frac{v_0}{2r_0\sqrt{\bar t}}\int\limits_{\bar r_{\text{пол}}}^{\infty}\bar r'\,\bar v_0(\bar r')\left[e^{-(\bar r-\bar r')^2/4\bar t}-e^{-(\bar r+\bar r'-2\bar r_{\text{пол}})^2/4\bar t}\right]d\bar r'+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\lambda}\bar r_{\text{пол}}\int\limits_{(\bar r-\bar r_{\text{пол}})/2\sqrt{\bar t}}^{\infty}\bar r_{\text{пол}}^2\left[p_{\text{пол}}\left(\bar t-\frac{(\bar t-\bar r_{\text{пол}})^2}{4\tau^2}\right)+p_0\right]e^{-\tau^2}\,d\tau\right\}.$$

(2.1.54)

В данном случае $v_0=0$, следовательно, решение (2.1.54) можно записать в виде

$$\psi=\frac{2r_0}{\lambda\sqrt{\pi}}\frac{\bar r_{\text{пол}}}{\bar r}\int\limits_{(\bar r-\bar r_{\text{пол}})/2\sqrt{\bar t}}^{\infty}\bar r_{\text{пол}}^2\left[p_{\text{пол}}\left(\bar t-\frac{(\bar r-\bar r_{\text{пол}})^2}{4\tau^2}\right)+p_0\right]e^{-\tau^2}d\tau.$$

(2.1.54′)

Подставляя потенциал скоростей (2.1.54′) в (2.1.51), определяем скорость частиц среды:

$$v=-\frac{2r_0\bar r_{\text{пол}}}{\lambda\sqrt{\pi}\,\bar r}\left\{\frac{1}{\bar r}\int\limits_{(\bar r-\bar r_{\text{пол}})/2\sqrt{\bar t}}^{\infty}\bar r_{\text{пол}}^2\left[p_{\text{пол}}\left(\bar t-\frac{(\bar r-\bar r_{\text{пол}})^2}{4\tau^2}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+p_0\right]e^{-\tau^2}d\tau+\frac{1}{2}\int\limits_{(\bar r-\bar r_{\text{пол}})/2\sqrt{\bar t}}^{\infty}\frac{\bar r_{\text{пол}}^2}{\tau^2}\,p'_{\text{пол}}\left(\bar t-\frac{(\bar r-\bar r_{\text{пол}})^2}{4\tau^2}\right)e^{-\tau^2}\,d\tau\right\}.$$

(2.1.55)

На поверхности полости при $\bar r=\bar r_{\text{пол}}$ частицы среды имеют скорость

$$v_{\text{пол}}=-\frac{2r_0}{\lambda\sqrt{\pi}}\left\{\frac{1}{\bar r_{\text{пол}}}\int\limits_0^{\infty}\bar r_{\text{пол}}^2\left[p_{\text{пол}}(\bar t)+p_0\right]e^{-\tau^2}\,d\tau+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty}\frac{\bar r_{\text{пол}}^2}{\tau^2}\,p'_{\text{пол}}(\bar t)\,e^{-\tau^2}\,d\tau\right\},\qquad(2.1.56)$$

в частности, при $\bar r_{\text{пол}}=1$ имеем

$$v_{\text{пол}}=-\frac{2r_0}{\lambda\sqrt{\pi}}\left[(p_{\text{пол}}(\bar t)+p_0)\int\limits_0^{\infty}e^{-\tau^2}\,d\tau+\frac{1}{2}p'_{\text{пол}}(\bar t)\int\limits_0^{\infty}\frac{1}{\tau^2}\,e^{-\tau^2}\,d\tau\right].$$

(2.1.56′)

Таким образом, используя формулы для перемещений и скоростей, а также формулу (2.1.3), находим радиус полости $r_{\text{пол}}$ как функцию времени.

Исследование напряженно-деформированного состояния среды при взрыве в областях возмущений проводится в сферической системе координат ($x^1 = \theta$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = r$) с учетом сферической симметрии, изотропности и свойств среды, которые определяются уравнением состояния и динамической диаграммой $\sigma_i \div e_i$ или $\tau_i \div \dot{\gamma}_i$. Частицы среды движутся в радиальном направлении со скоростью $v_r = v$, $v_\theta = 0$, $v_\varphi = 0$; напряженное состояние характеризуется тензором напряжений (σ) с компонентами σ_θ, $\sigma_\varphi = \sigma_\theta$, σ_r; деформированное состояние характеризуется тензором малых деформаций (e) с компонентами e_θ, $e_\varphi = e_\theta$, e_r для упругой, упругопластической и вязкоупругой сред и тензором скоростей деформаций ($\dot{e}$) с компонентами $\dot{e}_\theta$, $\dot{e}_\varphi = \dot{e}_\theta$, $\dot{e}_r$ для вязкой жидкости и вязкопластической среды. Связь между тензорами (σ) и (e) или ($\dot{e}$) устанавливается соответствующими физическими соотношениями.

Искомыми величинами являются тензор напряжений (σ), скорость v и плотность ρ. Они удовлетворяют: уравнениям движения

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) = \rho \frac{dv}{dt}, \tag{2.1.57}$$

уравнению неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(\rho v) = 0 \tag{2.1.57'}$$

и вариационному уравнению

$$\int\limits_{r_0}^{r_{\text{н}}} (e_r\, \delta\sigma_r + 2e_\theta\, \delta\sigma_\theta)\, r^2\, dr = 0 \tag{2.1.57''}$$

или

$$\int\limits_{r_0}^{r_{\text{н}}} (\dot{e}_r\, \delta\sigma_r + 2\dot{e}_\theta\, \delta\sigma_\theta)\, r^2\, dr = 0,$$

а также начальным условиям

$$w = 0,\ \ v = v_0,\ \ \rho = \rho_0 \text{ при } t = 0, \tag{2.1.58}$$

и граничным условиям

$$\sigma_r = p_{\text{пол}}(t),\ \ v = v_{\text{пол}}(t) \text{ при } r = r_{\text{пол}}, \tag{2.1.58'}$$
$$w = 0 \text{ при } r = r_{\text{н}}.$$

Для расчета напряжений, скорости частиц и плотности среды в областях возмущений, как показано в гл. 1, необходимо построить тензор кинетических напряжений (T) с компонентами

$$T_\theta = -\sigma_\theta,\ T_\varphi = -\sigma_\varphi,\ T_r = \rho v^2 - \sigma_r,\ T_{\theta\theta} = \rho v^{\theta 2},\ T_{r\theta} = \rho v v^\theta. \tag{2.1.59}$$

При взрыве на поверхности полости возникает давление $p_{\text{пол}}(t)$, которое быстро достигает максимального значения, а затем падает, частицы среды на поверхности полости приобретают в радиальном направлении скорость $v_{\text{пол}}(t)$. Следовательно, вначале идет процесс нагрузки, связанный с распространением волны нагрузки и образованием области возмущений нагрузки, затем идет процесс разгрузки, связанный с распространением волн разгрузки и образованием области возмущений разгрузки.

Волна нагрузки зарождается в момент приложения давления $p_{\text{пол}}(t)$ к поверхности полости и распространяется в среде с конечной скоростью a_0, образуя область возмущений нагрузки, где среда находится в напряженно-деформированном состоянии, которое характеризуется тензором напряжений $(\sigma)_{\text{нагр}}$ и тензором деформаций $(e)_{\text{нагр}}$; частицы среды перемещаются в радиальном направлении со скоростью $v_{\text{нагр}}$, плотность среды $\rho_{\text{нагр}}$. Этим характеристикам соответствует тензор кинетических напряжений $(T)_{\text{нагр}}$, который необходимо построить. Область возмущений нагрузки ограничена поверхностью полости радиуса $r_{\text{пол}}$ и поверхностью фронта волны нагрузки $r_н = r_0 + a_0 t$ (рис. 40).

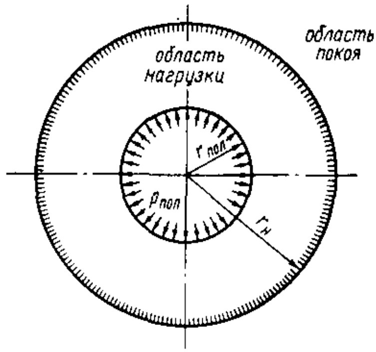

Рис. 40

Тензор кинетических напряжений $(T)_{\text{нагр}}$ можно представить в виде суммы основного $(T_о)$ и корректирующего $(T_к)$ тензоров:

$$(T)_{\text{нагр}} = (T_о) + (T_к). \qquad (2.1.60)$$

Построение этих тензоров основано на использовании общего решения (1.3.56) уравнений равновесия фиктивного тела, которое в рассматриваемом случае (при минимальном числе функций кинетических напряжений) имеет вид:

$$T^{11} = \frac{1}{r^4}\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial\Pi_2}{\partial r}, \quad T^{33} = -\frac{1}{r^3}\operatorname{ctg}\theta\Pi_2,$$

$$T^{00} = \frac{1}{r^2}\operatorname{ctg}\theta\left(\frac{1}{r}\Pi_2 - \frac{\partial\Pi_2}{\partial r}\right), \quad T^{30} = \frac{1}{r^2}\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial\Pi_2}{\partial x^0}.$$

Исключим $\operatorname{ctg}\theta$. Для этого представим Π_2 в следующем виде: $\Pi_2 = \operatorname{tg}\theta f(r, x^0)$. Тогда имеем:

$$T^{11} = \frac{1}{r^4}\frac{\partial f}{\partial r}, \quad T^{33} = -\frac{1}{r^3}f, \quad T^{00} = \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{r}f - \frac{\partial f}{\partial r}\right),$$

$$T^{30} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial x^0}, \qquad (2.1.61)$$

где $f(r, x^0)$ — функция кинетических напряжений $f = f^{(0)} + f^{(к)}$, причем слагаемое $f^{(0)}$ соответствует основному тензору, слагаемое $f^{(к)}$ — корректирующему.

Функция кинетических напряжений основного тензора $f^{(0)}(r, x^0)$ определяется из граничных условий в напряжениях:

$$T^{3\beta} = Q^{3\beta}_{(1)} \text{ при } r = r_{\text{пол}},$$
$$T^{00} = Q^{00}_{(1)},\ T^{30} = Q^{03}_{(1)} \text{ при } x^0 = x^0_1 = 0, \tag{2.1.62}$$

где $Q^{33}_{(1)} = (\rho v^2)_{\text{пол}} - p_{\text{пол}}$, $Q^{00}_{(1)} = (\rho_0 a^2_{cq})$, $Q^{03}_{(1)} = (\rho_0 v_0 a_{cq})$ — функции нагрузок.

Для координаты r функцию $f^{(0)}_3(r, x^0)$ представим в виде

$$f^{(0)}_3 = (1/2)(1 + \cos \bar{r}) F_3(x^0),$$

где $\bar{r} = \pi (r - r_{\text{пол}})/(r_{\text{н}} - r_{\text{пол}})$ — безразмерная координата. Граничным условиям (2.1.62) соответствует функция $F_3(x^0) = -r^3_{\text{пол}} Q^{33}_{(1)}$. В результате имеем

$$f^{(0)}_3 = -(1/2)(1 + \cos \bar{r})\, r^3_{\text{пол}} Q^{33}_{(1)}. \tag{2.1.63}$$

Для координаты x^0 функцию $f^{(0)}_0(r, x^0)$ можно представить в виде

$$f^{(0)}_0 = \frac{1}{2}(1 + \cos \bar{x}^0) F_0(r) + \frac{1}{2}\int (1 + \cos \bar{x}^0)\, dx^0 \Phi_0(r),$$

где $\bar{x}^0 = \pi x^0 / x^0_2$ — безразмерная координата, $x^0_2 = a_{cq} t_2$ — значение координаты x^0, соответствующее продолжительности процесса. Граничным условиям (2.1.62) соответствуют уравнения

$$\frac{\partial F_0}{\partial r} - \frac{1}{r} F_0 = -r^2 Q^{00}_{(1)}, \quad \Phi_0 = r^2 Q^{03}_{(1)},$$

решения которых

$$F_0 = -\frac{r}{r_{\text{пол}}} \int\limits_{r_{\text{пол}}}^{r} r^2 Q^{00}_{(1)} \left(\frac{r}{r_{\text{пол}}}\right)^{-1} dr,\ \Phi_0 = r^2 Q^{03}_{(1)}.$$

В результате имеем

$$f^{(0)}_0 = -\frac{1}{2}(1 + \cos \bar{x}^0) \frac{r}{r_{\text{пол}}} \int\limits_{r_{\text{пол}}}^{r} r^2 Q^{00}_{(1)} \left(\frac{r}{r_{\text{пол}}}\right)^{-1} dr +$$
$$+ \frac{1}{2}\int (1 + \cos \bar{x}^0)\, dx^0\, r^2 Q^{03}_{(1)}. \tag{2.1.64}$$

Функция кинетических напряжений основного тензора

$$f^{(0)} = -\frac{1}{2}(1 + \cos \bar{r})\, r^3_{\text{пол}} Q^{33}_{(1)} + \frac{1}{2}\int (1 + \cos \bar{x}^0)\, dx^0\, r^2 Q^{03}_{(1)} -$$
$$-\frac{1}{2}(1 + \cos \bar{x}^0) \frac{r}{r_{\text{пол}}} \int\limits_{r_{\text{пол}}}^{r} r^2 Q^{00}_{(1)} \left(\frac{r}{r_{\text{пол}}}\right)^{-1} dr. \tag{2.1.65}$$

Подставляя $f^{(0)}(0)$ в (2.1.61), находим компоненты основного тензора:

$$T^{11}_{(0)}=\frac{1}{r^4}\left[\frac{\pi r^3_{\text{пол}}}{2(r_{\text{н}}-r_{\text{пол}})}\sin\bar r\,\tilde Q^{33}_{(1)}+r\,\frac{x^0_2}{\pi}\int\limits_0^{\bar x^0}(1+\cos\bar x^0)\,d\bar x^0\,\tilde Q^{03}_{(1)}-\right.$$

$$\left.-\frac{r^4}{8r^2_{\text{пол}}}(1+\cos\bar x^0)\left(5-\frac{r^4_{\text{пол}}}{r^4}\right)\tilde Q^{00}_{(1)}\right],$$

$$T^{33}_{(0)}=\frac{1}{r^3}\left[\frac{1}{2}(1+\cos\bar r)\,r^3_{\text{пол}}\,Q^{33}_{(1)}-\frac{r^2}{2}\,\frac{x^0_2}{\pi}\int\limits_0^{\bar x^0}(1+\cos\bar x^0)\,d\bar x^0\,\tilde Q^{03}_{(1)}+\right.$$

$$\left.+\frac{r^5}{8r^2_{\text{пол}}}(1+\cos\bar x^0)\left(1-\frac{r^4_{\text{пол}}}{r^4}\right)\tilde Q^{00}_{(1)}\right],$$

$$T^{00}_{(0)}=\frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{2}(1+\cos\bar x^0)\frac{r^4}{r^2_{\text{пол}}}Q^{00}_{(1)}-\frac{r^3_{\text{пол}}}{2}\left(\frac{1}{r}(1+\cos\bar r)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\pi}{r_{\text{н}}-r_{\text{пол}}}\sin\bar r\right)\tilde Q^{33}_{(1)}-\frac{r}{2}\,\frac{x^0_2}{\pi}\int\limits_0^{\bar x^0}(1+\cos\bar x^0)\,d\bar x^0\,\tilde Q^{03}_{(1)}\right],\qquad(2.1.66)$$

$$T^{30}_{(0)}=\frac{1}{r^2}\left[\frac{r^2}{2}(1+\cos\bar x^0)\,Q^{03}_{(1)}-\frac{1}{2}(1+\cos\bar r)\frac{\partial}{\partial x^0}(r^3_{\text{пол}}\tilde Q^{33}_{(1)})+\right.$$

$$\left.+\frac{r^5}{8}\left(1-\frac{r^4_{\text{пол}}}{r^4}\right)\left(\frac{\pi^2}{x^0_2\,r^2_{\text{пол}}}\sin\bar x^0+\frac{2}{r^3_{\text{пол}}}(1+\cos\bar x^0)\frac{dr_{\text{пол}}}{dx^0}\right)\tilde Q^{00}_{(1)}\right],$$

где $\tilde Q^{33}_{(1)}$, $\tilde Q^{00}_{(1)}$, $\tilde Q^{03}_{(1)}$ — самоуравновешенные части функций нагрузок, которые в рассматриваемом случае можно принять равными нулю. В этом случае компоненты основного тензора упрощаются и принимают соответственно вид:

$$T^{11}_{(0)}=0,\ T^{30}_{(0)}=(1/2)\ (1+\cos\bar x^0)\,Q^{03}_{(1)},$$

$$T^{33}_{(0)}=(1/2)\,(1+\cos\bar r)\,(r_{\text{пол}}/r_0)^3\,(r_{\text{пол}}/r_0+\chi\bar r)^{-3}\,Q^{33}_{(1)},\qquad(2.1.66')$$

$$T^{00}_{(0)}=(1/2)\,(1+\cos\bar x^0)\ (r_{\text{пол}}/r_0)^{-2}\,(r_{\text{пол}}/r_0+\chi\bar r)^2\,Q^{00}_{(1)},$$

где $\chi = (1/\pi)(a_0 x^0/a_{cq} r_0 - w_0/r_0)$, $r_{пол}/r_0 = 1 + w_0/r_0$ для упруго-пластической и вязкоупругой сред;

$$\chi = \frac{1}{\pi}\left(\frac{a}{a_{cq}}\frac{x^0}{r_0} - \frac{1}{r_0}\int_0^{x^0}\frac{v_0(y_0)}{a_{cq}}\,dy^0\right),$$

$$\frac{r_{пол}}{r_0} = 1 + \frac{1}{r_0}\int_0^{x^0}\frac{v_0(y_0)}{a_{cq}}\,dy^0$$

для вязкопластической среды и вязкой жидкости.

Функцию кинетических напряжений корректирующего тензора $f^{(к)}(r, x^0)$ представим в виде

$$f^{(к)}(r, x^0) = \sum_{m,n} A_{mn}\,\xi_m(\bar{r})\,P_n(\bar{x}^0) \quad (m,\ n = 1,\ 2,\ \ldots). \qquad (2.1.67)$$

Здесь $\xi_m(\bar{r}) = (1/m!)(J_m(\bar{r})\ \sin m\bar{r})$ — система фундаментальных функций.

Подставляя (2.1.67) в (2.1.61), находим компоненты корректирующего тензора:

$$T^{11}_{(к)} = \sum_{m,n} A_{mn} f^{11}(mn), \quad T^{33}_{(к)} = \sum_{m,n} A_{mn} f^{33}(mn),$$

$$(2.1.68)$$

$$T^{00}_{(к)} = \sum_{m,n} A_{mn} f^{00}(mn), \quad T^{30}_{(к)} = \sum_{m,n} A_{mn} f^{30}(mn),$$

где

$$f^{11} = [\pi/(r_n - r_{пол})]\,(1/r^4)\,\xi'_m(\bar{r})\,P_n(\bar{x}^0),$$

$$f^{33} = -(1/r^3)\,\xi_m(\bar{r})\,P_n(\bar{x}^0), \qquad (2.1.68')$$

$$f^{00} = (1/r^2)\,((1/r)\,\xi_m(\bar{r}) - [\pi/(r_н - r_{пол})]\,\xi'_m(\bar{r}))\,P_n(\bar{x}^0),$$

$$f^{30} = (\pi/x^0_2)\,(1/r^2)\,\xi_m(\bar{r})\,P'_n(\bar{x}^0).$$

Коэффициенты A_{mn} компонент корректирующего тензора, как показано в гл. 1, удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$\sum_{m,n} A_{mn} F_{11}(mnij) + L_1(ij) = 0, \qquad (2.1.69)$$

коэффициенты $F_{11}(mnij)$ и свободные члены $L_1(ij)$ которой определяются различно в зависимости от физико-механических свойств рассматриваемой среды. Коэффициенты $F_{11}(mnij)$ соответственно равны: для упругой среды

$$F_{11} = (1/(2G))\,(\alpha_1^{(e)} F_{11}^{(1)} + \alpha_2^{(e)} F_{11}^{(2)}), \qquad (2.1.70)$$

где функции состояния $\alpha_1^{(e)} = 1$, $\alpha_2^{(e)} = (2/3)(2G/(3K) - 1)$; для упругопластической среды

$$F_{11} = (1/(2G))\,(\alpha_1 F_{11}^{(1)} + \alpha_2 F_{11}^{(2)}); \qquad (2.1.70')$$

где

$$\alpha_1 = 1 + \varphi + \frac{T_i}{2} \frac{d\varphi}{dT_i},$$

$$\alpha_2 = \frac{2}{3}\left[\left(\frac{2G}{3K} - 1\right) - \varphi - \frac{T_i}{2} \frac{d\varphi}{dT_i}\right];$$

для вязкоупругой среды

$$F_{11} = (1/(2G))\,(\alpha_1^{(e)} F_{11}^{(1)} + \alpha_2^{(e)} F_{11}^{(2)}) + (1/a_{cч})\,(F_{11}^{(3)} + (1/3)\, F_{11}^{(4)}); \tag{2.1.70''}$$

для вязкой жидкости

$$F_{11} = \alpha_1^{(b)} F_{11}^{(1)} + \alpha_2^{(b)} F_{11}^{(2)}, \tag{2.1.70'''}$$

где

$$\alpha_1^{(b)} = 1/(2\mu), \quad \alpha_2^{(b)} = (2/3\mu)\,(\mu/\lambda - 1/2);$$

для вязкопластической среды

$$F_{11} = \alpha_1 F_{11}^{(1)} + \alpha_2 F_{11}^{(2)}. \tag{2.1.70^{IV}}$$

Здесь

$$\alpha_1 = (1/(2\eta))\,(1 - 1/(2\eta)\,\tau_i/\dot{\gamma}_i),$$

$$\alpha_2 = (1/(3\eta))\,[2\,(\eta/\lambda - 1/2) + (1/(2\,\eta))\,(\tau_i/\dot{\gamma}_i)].$$

Интегралы $F_{11}^{(k)}\,(mnij)$, входящие в формулы (2.1.70) — (2.1.70^{IV}), соответственно равны:

$$F_{11}^{(1)} = -\frac{32}{r_0^2\, m!\, i!}\left(\frac{x_2^0}{r_0}\right)\int_0^{\pi}\left[\left(\frac{1}{\chi} I_1(mi,\ 2) + \chi I_2(mi,\ 4) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - I_3(mi, 3)\right) P_n P_j - \pi^2 \chi\,(r_0/x_2^0)^2 I_2(mi, 2)\, P_n' P_j'\right] d\bar{x}^0,$$

$$F_{11}^{(2)} = -\frac{16}{r_0^2\, m!\, i!}\left(\frac{x_2^0}{r_0}\right)\int_0^{\pi}\left[\left(\frac{1}{\chi} I_1(mi,\ 2) + \chi I_2(mi,\ 4) - \right.\right.$$

$$\left. - I_3(mi,\ 3) - I_3(im,\ 3)\right) P_n P_j +$$

$$\left. + \pi\chi\,(r_0/x_2^0)\, I_2(mi,\ 3)\,(P_n P_j' + P_n' P_j)\right] d\bar{x}^0, \tag{2.1.71}$$

$$F_{11}^{(3)} = -\frac{32 x_2^0}{r_0^2\, m!\, i!\, \pi}\left(\frac{x_2^0}{r_0}\right)\int_0^{\pi}\int \widetilde{R}\,(\bar{x}^0\, \bar{y}^0)\left[\left(\frac{1}{\chi} I_1(mi,\ 2) + \chi I_2(mi,\ 4) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - I_3(mi,\ 3)\right) P_n P_j - \pi^2 \chi\,(r_0/x_2^0)^2 I_2(mi,\ 2)\, P_n' P_j'\right] d\bar{y}^0\, d\bar{x}^0,$$

$$F_{11}^{(4)} = -\frac{16 x_2^0}{\pi r_0^2\, m!\, i!}\left(\frac{x_2^0}{r_0}\right)\int_0^{\pi}\int (\widetilde{R}_1(\bar{x}^0\, \bar{y}^0) - \widetilde{R}\,(x^0\, y^0)) \times$$

$$\times\left[((1/\chi)\, I_1(mi,\ 2) + \chi I_2(mi,\ 4) - (I_3(mi,\ 3) + I_3(im,\ 3)))\, P_n P_j + \right.$$

$$\left. + \pi\chi\,(r_0/x_2^0)\, I_2(mi,\ 3)\,(P_n P_j' + P_n' P_j)\right] d\bar{y}^0\, d\bar{x}^0,$$

где

$$I_1(mi,k)=\int_0^{\pi}\frac{(J_m(\bar r)\sin m\bar r)'\,(J_i(\bar r)\sin i\bar r)'\,d\bar r}{(r_{\text{пол}}/r_0+\chi\bar r)^k},$$

$$I_2(mi,\ k)=\int_0^{\pi}\frac{(J_m(\bar r)\sin m\bar r)\,(J_i(\bar r)\sin i\bar r)}{(r_{\text{пол}}/r_0+\chi\bar r)^k}\,d\bar r,$$

$$I_3(mi,\ k)=\int_0^{\pi}\frac{(J_m(\bar r)\sin m\bar r)\,(J_i(\bar r)\sin i\bar r)'}{(r_{\text{пол}}/r_0+\chi\bar r)^k}\,d\bar r.$$

Свободные члены $L_1\,(ij)$ таковы: для упругой среды

$$L_1=(1/(2G))\,(\alpha_1^{(e)}L_1^{(1)}+\alpha_2^{(e)}\,L_1^{(2)}+2G\alpha L_1^{(3)});$$

для упругопластической среды

$$L_1\,(1/(2G)\,(\alpha_1L_1^{(1)}+\alpha_2L_1^{(2)}+2G\alpha L_1^{(3)});$$

для вязкоупругой среды

$$L_1=\frac{1}{2G}\,(\alpha_1^{(e)}\,L_1^{(1)}+\alpha_2^{(e)}\,L_1^{(2)})+\alpha L_1^{(3)}+\frac{1}{a_{cq}}\left(L_1^{(4)}+\frac{1}{3}L_1^{(5)}\right);\quad(2.1.72)$$

для вязкой жидкости

$$L_1=\alpha_1^{(b)}L_1^{(1)}+\alpha_2^{(b)}L_1^{(2)}+\alpha L_1^{(3)}+(p_0/\lambda)\,L_1^{(6)};$$

для вязкопластической среды

$$L_1=\alpha_1L_1^{(1)}+\alpha_2L_1^{(2)}+\alpha L_1^{(3)}+(p_0/\lambda)\,L_1^{(6)}.$$

Интегралы $L_1^{(l)}\,(ij)$, входящие в (2.1.72), имеют вид:

$$L_1^{(1)}=-\frac{16r_0}{m!}\left(\frac{x_2^0}{r_0}\right)\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\left(\frac{r_0}{r_{\text{пол}}}\right)\chi\Big[\tilde Q_{(1)}^{33}P_nK_{11}+$$
$$+2\left(\frac{\pi r_0}{x_2^0}\right)\left(\frac{r_0}{r_{\text{пол}}}\right)\frac{\partial}{\partial\bar x^0}\left(\left(\frac{r_{\text{пол}}}{r_0}\right)^3\tilde Q_{(1)}^{33}\right)P_n'K_{12}-Q_{(1)}^{33}P_nK_{13}+$$
$$+(1+\cos\bar x^0)\,(Q_{(1)}^{00}P_nK_{14}-2\pi Q_{(1)}^{03}(r_0/x_2^0)\,P_n'K_{15})\Big]\,d\bar x^0,$$

$$L_1^{(2)}=-\frac{4r_0}{m!}\left(\frac{x_2^0}{r_0}\right)^2\int_0^{\pi}\chi\frac{r_0}{r_{\text{пол}}}P_n\times$$
$$\times\left[\tilde Q_{(1)}^{33}K_{21}+2Q_{(1)}^{33}K_{22}+(1+\cos\bar x^0)\,Q_{(1)}^{00}K_{23}\right]d\bar x^0,$$

$$L_1^{(3)}=-\frac{16r_0}{m!}\left(\frac{x_2^0}{r_0}\right)\int_0^{\pi}\int T^0\,(rx^0)\times$$
$$\times\left[(J_m\sin m\bar r)'-(1/(\Delta+\bar r))\,(J_m\sin m\bar r)\right]\,P_n\,d\bar r,\qquad(2.1.73)$$

$$L_1^{(4)} = -\frac{16 r_0 x_2^0}{\pi m!}\left(\frac{x_2^0}{\pi}\right)\int_0^{\pi}\int \tilde{R}(\bar{x}^0 \bar{y}^0)\frac{1}{2}\left(\frac{r_0}{r_{\text{пол}}}\right)\chi \times$$
$$\times[-Q_{(1)}^{33} P_n K_{13} + (1+\cos\bar{x}^0)(Q_{(1)}^{00} P_n K_{14} -$$
$$-2\pi Q_{(1)}^{03}(r_0/x_2^0) P_n' K_{15})]\, d\bar{y}^0\, d\bar{x}^0,$$

$$L_1^{(5)} = -\frac{4 r_0 x_2^0}{\pi m!}\left(\frac{x_2^0}{\pi}\right)\int_0^{\pi}\int (\tilde{R}_1(\bar{x}^0 \bar{y}^0 - \tilde{R}(\bar{x}^0 \bar{y}^0))\times$$
$$\times(\chi r_0/r_{\text{пол}}) P_n [2Q_{(1)}^{33} K_{22} + (1+\cos\bar{x}^0) Q_{(1)}^{00} K_{23}]\, d\bar{y}^0\, d\bar{x}^0,$$

$$L_1^{(6)} = -\frac{16 r_0}{m!}\left(\frac{x_2^0}{r_0}\right)\int_0^{\pi} K_6 P_n\, d\bar{x}^0,$$

где

$$K_{11} = \int_0^{\pi}\left(\frac{\Delta}{\Delta+\bar{r}}\right)^4 [(\Delta+\bar{r})^2 \sin\bar{r}\,(J_m \sin m\bar{r})' - (1+\cos\bar{r}+\Delta+\bar{r})\times$$
$$\times(J_m \sin m\bar{r} - (\Delta+\bar{r})(J_m \sin m\bar{r})')]\, d\bar{r},$$

$$K_{12} = \int_0^{\pi}\left(\frac{\Delta}{\Delta+\bar{r}}\right)^2 (1+\cos\bar{r})(J_m \sin m\bar{r})\, d\bar{r},$$

$$K_{13} = \int_0^{\pi}\left(\frac{\Delta}{\Delta+\bar{r}}\right)^4 (1+\cos\bar{r})(J_m \sin m\bar{r})\, d\bar{r},$$

$$K_{14} = \int_0^{\pi}\left(\frac{\Delta}{\Delta+\bar{r}}\right)^{-1} (J_m \sin m\bar{r} - (\Delta+\bar{r})(J_m \sin m\bar{r})')\, d\bar{r},$$

$$K_{15} = \int_0^{\pi} J_m \sin m\bar{r}\, d\bar{r},$$

$$K_{21} = \int_0^{\pi}\left(\frac{\Delta}{\Delta+\bar{r}}\right)^4 [-(3(\Delta+\bar{r})\sin\bar{r} + 2(1+\cos\bar{r})(J_m \sin m\bar{r}) +$$
$$+(\Delta+\bar{r})(1+\cos\bar{r}+2(\Delta+\bar{r})\sin m\bar{r})(J_m \sin m\bar{r})']\, d\bar{r},$$

$$K_{22} = \int_0^{\pi}\left(\frac{\Delta}{\Delta+\bar{r}}\right)^4 (1+\cos\bar{r})(-J_m \sin m\bar{r} + (\Delta+\bar{r})(J_m \sin m\bar{r})')\, d\bar{r},$$

$$K_{23} = \int_0^{\pi}\left(\frac{\Delta}{\Delta+\bar{r}}\right)^{-1} (2J_m \sin m\bar{r} - (\Delta+\bar{r})(J_m \sin m\bar{r})')\, d\bar{r},$$

$$K_6 = \int_0^{\pi}\left[(J_m \sin m\bar{r})' - \frac{1}{\Delta+\bar{r}}(J_m \sin m\bar{r})\right] d\bar{r},$$

причем $\Delta = (1/\chi)(r_{\text{пол}}/r_0)$.

Решение системы уравнений (2.1.69) находится с помощью процедуры последовательных приближений, изложенной в гл. 1. В результате вычислим коэффициенты A_{mn}, следовательно, и компоненты корректирующего тензора по формулам (2.1.68).

В случае упругой и вязкоупругой сред и вязкой жидкости коэффициенты F_{11} и свободные члены L_1 в системе уравнений (2.1.69) постоянны. Положим во втором приближении параметры m, n, i, j = 1; 2 и вычислим интегралы (2.1.71) и (2.1.73). По формулам (2.1.70) и (2.1.72) находим коэффициенты $F_{11}(mnij)$ и свободные члены $L_1(ij)$ уравнений, из которых затем составим определитель системы уравнений:

$$D = \begin{vmatrix} F_{11}(1111) & F_{11}(1211) & F_{11}(2111) & F_{11}(2211) \\ F_{11}(1112) & F_{11}(1212) & F_{11}(2112) & F_{11}(2212) \\ F_{11}(1121) & F_{11}(1221) & F_{11}(2121) & F_{11}(2221) \\ F_{11}(1122) & F_{11}(1222) & F_{11}(2122) & F_{11}(2222) \end{vmatrix} \qquad (2.1.74)$$

и определители

$$D_{11} = \begin{vmatrix} L_1(11) & F_{11}(1211) & F_{11}(2111) & F_{11}(2211) \\ L_1(12) & F_{11}(1212) & F_{11}(2112) & F_{11}(2212) \\ L_1(21) & F_{11}(1221) & F_{11}(2121) & F_{11}(2221) \\ L_1(22) & F_{11}(1222) & F_{11}(2122) & F_{11}(2222) \end{vmatrix}, \ldots.$$

Искомые коэффициенты таковы: $A_{mn} = D_{mn}/D$.

Компоненты корректирующего тензора $(T_{\text{к}})$ во втором приближении имеют вид

$$T^{\alpha\beta} = (1/D)\,(D_{11}f^{\alpha\beta}_{(11)} + D_{12}f^{\alpha\beta}_{(12)} + D_{21}f^{\alpha\beta}_{(21)} + D_{22}f^{\alpha\beta}_{(22)}). \qquad (2.1.75)$$

Суммируя основной (2.1.66) и корректирующий (2.1.75) тензоры, получим тензор кинетических напряжений $(T)_{\text{нагр}}$ во втором приближении с компонентами

$$T^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta}_{(0)} + T^{\alpha\beta}_{(\text{к})}. \qquad (2.1.76)$$

Для упругопластической и вязкопластической сред $\omega(e_i) \neq 0$ и $\tau_i \neq 0$, поэтому, зная компоненты построенного тензора $(T)^{(e)}_{\text{нагр}}$, вычисляем $T^{(e)}$ и $T^{(e)}_i$, а по формулам (1.3.83) и формуле

$$e^{(e)}_i = \sigma^{(e)}_i/(3G)$$

находим величины $\sigma^{(e)}_i$ и $e^{(e)}_i$, функцию пластичности $\varphi(\sigma_i)$ и ее производную, используя динамическую диаграмму $\sigma_i \div e_i$. Точно так же по диаграмме $\dot\tau_i \div \dot\gamma_i$ материала среды определяется функция $\eta = \mu + \tau_i/\dot\gamma_i$. Используя полученные результаты, по приведенным выше формулам находим соответствующие функции состояния среды α_1 и α_2. Затем вычисляем коэффициенты $F_{11}(mnij)$ и свободные члены $L_1(ij)$ уравнений, строим определители D и D_{mn}, находим компоненты корректирующего тензора по формулам (2.1.75). По формулам (2.1.76) находим для рассматриваемой среды компоненты тензора кинетических напряжений $(T)_{\text{нагр}}$ во втором приближении.

По известным компонентам тензора $(T)_{\text{нагр}}$ определяем: компоненты тензора напряжений $\sigma_\theta = -r^2 T^{11}_{\text{нагр}}$, $\sigma_\varphi = \sigma_\theta$, $\sigma_r = (T^{30}T^{30}/T^{00})_{\text{нагр}} - T^{33}_{\text{нагр}}$, скорость частиц $v = T^{30}_{\text{нагр}} a_{cq} / T^{00}_{\text{нагр}}$ и плотность

$$\rho = T^{00}_{\text{нагр}} / a^2_{cq} \tag{2.1.77}$$

в области возмущений нагрузки среды.

В момент времени $t_{\text{р}}$ давление в полости начинает уменьшаться, в среде у ее поверхности зарождается волна разгрузки, которая распространяется с конечной скоростью b, образуя область возмущений разгрузки, которая расположена внутри области визмущений нагрузки, ограничена поверхностью полости $r_{\text{пол}}$ и поверхностью фронта волны разгрузки $r_{\text{р}} = r_{\text{пол}} + bt$ (рис. 41). Напряженно-деформированное состояние области возмущений разгрузки описывается тензором напряжений $(\sigma)_{\text{разгр}}$ и тензором деформаций $(e)_{\text{разгр}}$; движение частиц среды — скоростью $v_{\text{разгр}}$; плотность среды $\rho_{\text{разгр}}$. Для определения перечисленных характеристик необходимо построить тензор кинетических напряжений

$$(T)_{\text{разгр}} = (T)_{\text{нагр}} - \Delta (T). \tag{2.1.78}$$

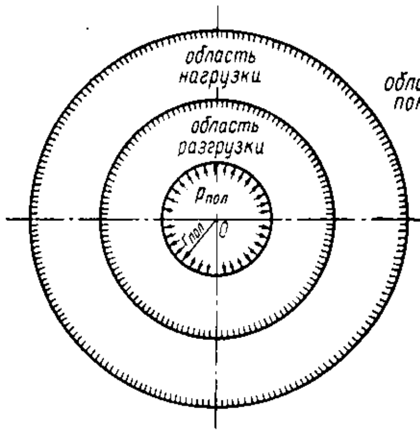

Рис. 41

В свою очередь,

$$\Delta (T) = \Delta (T_{\text{о}}) + \Delta(T_{\text{к}}). \tag{2.1.79}$$

Слагаемое $\Delta (T_{\text{о}})$ — основной тензор и имеет компоненты:

$$\Delta T^{11}_{(0)} = 0,\ \Delta T^{00}_{(0)} = 0,\ \Delta T^{30}_{(0)} = 0,$$

$$\Delta T^{33}_{(0)} = (1/2)\,(1 + \cos \bar{r})\,(r_{\text{пол}}/r)^3\ \Delta Q^{33}_{(1)}, \tag{2.1.80}$$

где $\Delta Q^{33}_{(1)} = (\Delta\rho\Delta v\Delta v)_{\text{пол}} - \Delta p_{\text{пол}}$ — функция нагрузок при разгрузке. Здесь учтено, что $\Delta Q^{00}_{(1)} = (\Delta\rho v^{02}_{(r)})_0 = 0$, $\Delta Q^{03}_{(1)} = (\Delta\rho\Delta v v^0_{(r)})_0 = 0$, так как в момент начала разгрузки $\Delta\rho = 0$, $\Delta v = 0$, а также что в рассматриваемой задаче $\Delta \tilde{Q}^{33}_{(1)} = 0$. Слагаемое $\Delta (T_{\text{к}})$ является корректирующим тензором и имеет компоненты:

$$\Delta T^{11}_{(\text{к})} = \sum_{m,n} \Delta A_{mn} f^{11}(mn), \quad \Delta T^{33}_{(\text{к})} = \sum_{m,n} \Delta A_{mn} f^{33}(mn),$$

$$\Delta T^{00}_{(\text{к})} = \sum_{m,n} \Delta A_{mn} f^{00}(mn), \quad \Delta T^{30}_{(\text{к})} = \sum_{m,n} \Delta A_{mn} f^{30}(mn). \tag{2.1.81}$$

Коэффициенты ΔA_{mn} находятся в результате решения системы алгебраических уравнений

$$\sum_{m,n} \Delta A_{mn} F_{11}(mnij) + \Delta L_1 (ij) = 0. \tag{2.1.82}$$

Коэффициенты F_{11} $(mnij)$ соответственно равны: для упругопластической среды

$$F_{11} = (1/(2G))\,(\alpha_1^{(e)}F_{11}^{(1)} + a_2^{(e)}F_{11}^{(2)}), \tag{2.1.83}$$

для вязкопластической среды

$$F_{11} = a_1^{(b)}F_{11}^{(1)} + \alpha_2^{(b)}F_{11}^{(2)}.$$

Свободные члены уравнений ΔL_1 (ij) таковы: для упругопластической среды

$$\Delta L_1 = (1/(2G))\,(\Delta L_1^{(1)}\alpha_1^{(e)} + a_2^{(e)}\Delta L_1^{(2)}) + \alpha\Delta L_1^{(3)},$$

для вязкопластической среды

$$\Delta L_1 = \alpha_1^{(b)}\Delta L_1^{(1)} + \alpha_2^{(b)}\Delta L_1^{(2)} + \alpha\Delta L_1^{(3)}. \tag{2.1.84}$$

Следует заметить, что интегралы ΔL_1 вычисляются по формулам (2.1.73), причем функции нагрузок $Q^{33}_{(1)}$, $Q^{00}_{(1)}$, $Q^{03}_{(1)}$ заменяются соответственно на $\Delta Q^{33}_{(1)}$, $\Delta Q^{00}_{(1)}$, $\Delta Q^{03}_{(1)}$, а температура T^0 на ΔT^0. Система уравнений (2.1.82) с постоянными коэффициентами и свободными членами решается с помощью процедуры последовательных приближений, изложенной в гл. 1, в результате решения находим коэффициенты ΔA_{mn}, следовательно, и компоненты корректирующего тензора $\Delta\,(T_{(\text{к})})$.

Во втором приближении полагаем параметры m, n, $i, j = 1;\ 2$ и составляем из коэффициентов F_{11} $(mnij)$ и свободных членов ΔL_1 (ij) уравнений определители D и ΔD_{mn} вида (2.1.74). Компоненты корректирующего тензора

$$\Delta T^{\alpha\beta}_{(\text{к})} = (1/D)\,(\Delta D_{11}f^{\alpha\beta}_{(11)} + \Delta D_{22}f^{\alpha\beta}_{(12)} + \Delta D_{21}\,f^{\alpha\beta}_{(21)} + \Delta D_{22}f^{\alpha\beta}_{(22)}). \tag{2.1.85}$$

Суммируя тензоры (2.1.80) и (2.1.85), получим тензор ΔT во втором приближении, затем в соответствии с формулой (2.1.78) находим тензор кинетических напряжений разгрузки $(T)_{\text{разгр}}$. По известному тензору $(T)_{\text{разгр}}$ определяем в области возмущений разгрузки следующие величины: компоненты тензора напряжений $\sigma_\theta = -r^2\,T^{11}_{\text{разгр}}$, $\sigma_\varphi = \sigma_\theta$, $\sigma_r = (T^{30}T^{30}/T^{00})_{\text{разгр}} - T^{33}_{\text{разгр}}$, скорость частиц $v = (T^{30}/T^{00})_{\text{разгр}}v^0_{(r)}$, плотность среды

$$\rho = (T^{00}/v^{02}_{(r)})_{\text{разгр}}. \tag{2.1.86}$$

Следует отметить, что скорость распространения волны разгрузки b, определяемая по формуле

$$b^2 = a_V^2 + (2v^0_{(r)}/\sqrt{3})^2, \tag{2.1.87}$$

зависит от физико-механических свойств среды. Так, для упругопластической среды

$$v^0_{(r)} = (a_{cq}/2)\left[(1 - G/T^{00}_{(\text{н})}) + \sqrt{(1 - G/T^{00}_{(\text{н})})^2 + 4\,(G/T^{00}_{(\text{н})})^2}\right], \tag{2.1.88}$$

для вязкопластической среды

$$a_V^2 = \lambda/(3\rho),$$

$$v^0_{(r)} = (a_{cq}/2)\left[(1 - \mu/T^{00}_{(\text{н})}) + \sqrt{(1 - \mu/T^{00}_{(\text{н})})^2 + 4\,(\mu/T^{00}_{(\text{н})})^2}\right].$$

§ 2. Удар по вязкоупругопластическому полупространству

Перейдем к исследованию напряженного состояния среды, заключенной в полупространстве, при ударе. Пусть в момент времени t_0, *принятый за начальный*, по деформируемой среде (упругой, упругопластической, вязкой, вязкоупругой или вязкопластической) произведен удар, в результате которого на некоторой области свободной поверхности полупространства возникло давление p, частицы среды этой области получили скорость $\mathbf{v}_c$.

По среде распространяются волны напряжений, образуя области возмущений, где среда находится в напряженно-деформированном состоянии. Это состояние характеризуется тензором напряжений (σ) и тензором деформаций (e); движение частиц среды характеризуется вектором скорости $\mathbf{v}$; плотность среды ρ. Требуется определить характеристики напряженно-деформированного состояния и движения частиц среды в областях возмущений. Для этого согласно общим соображениям, изложенным в гл. 1, необходимо для каждой области возмущений построить тензор кинетических напряжений (T) (с учетом физико-механических свойств среды), затем по формулам (1.3.49) найти тензор напряжений (σ), вектор скорости $\mathbf{v}$ и плотность среды ρ.

Первичной является область возмущений нагрузки, которая ограничена свободной поверхностью, включая загруженную часть, и поверхностью фронта волны нагрузки, распространяющейся со скоростью

$$a = \sqrt{a_V^2 + (4/3)\, a_{cq}^2}, \tag{2.2.1}$$

где $a_V^2 = K/\rho$, $a_{cq}^2 = G/\rho$, $a_{cq}^2 = G\,(1 - \omega)/\rho$ для упругой, вязкоупругой и упругопластической сред; $a_V^2 = \lambda/3\rho$, $a_{cq}^2 = \mu/\rho$, $a_{cq}^2 = (\mu + \tau_i/\gamma_i)/\rho$ для вязкой и вязкопластической сред.

Область возмущений нагрузки характеризуется тензором кинетических напряжений

$$(T)_{\text{нагр}} = (T_0) + (T_\text{к}). \tag{2.2.2}$$

Построение основного и корректирующего тензоров выполняется по схеме, приведенной в § 4 гл. 1.

Для области возмущений *II* эти тензоры строятся в системе координат (α, β, z, x^0), выбираемой в зависимости от формы загруженной области свободной поверхности, при этом учитывается, что последняя слабо искривлена и близка к плоскости. В общем случае считается, что загруженная область имеет произвольную форму, однако практически встречается прямоугольник или круг, поэтому рассмотрим декартову систему координат ($\alpha = x$, $\beta = y$) с параметрами Ляме $A = 1$, $B = 1$ и полярную систему координат ($\alpha = r$, $\beta = \theta$) с параметрами Ляме $A = 1$, $B = r$.

Декартовы координаты соответствуют загруженной области, имеющей форму прямоугольника, размеры которого l_x, l_y (рис. 42) изменяются в следующих пределах: $-l_x \leqslant x \leqslant l_x$, $-l_y \leqslant y \leqslant l_y$, $0 \leqslant z \leqslant at$, $0 \leqslant x^0 \leqslant a_{cq} t_2$, где t_2 — продолжительность процесса нагрузки. Для координаты Oz имеем следующие функции нагрузок: при косом ударе с углом $\delta \neq \pi/2$ к свободной поверхности (рис. 42, *а*)

$$Q^{33}_{(1)} = Q^{3}_{(1)} \sin \delta, \quad Q^{31}_{(1)} = Q^{3}_{(1)} \cos\delta \cos\alpha,$$

$$Q^{32}_{(1)} = Q^{3}_{(1)} \cos\delta \sin\alpha, \; Q^{30}_{(1)} = \rho_S a_{cq} v_c \sin\delta, \tag{2.2.3}$$

где $Q^{3}_{(1)} = \rho_S v_c^2 \sin\delta - p$; при нормальном ударе ($\delta = \pi/2$)

$$Q^{33}_{(1)} = Q^{3}_{(1)}, \; Q^{31}_{(1)} = Q^{32}_{(1)} = 0, \; Q^{30}_{(1)} = \rho_S a_{cq} v_c, \tag{2.2.4}$$

где $Q^{3}_{(1)} = \rho_S v_c^2 - p$.

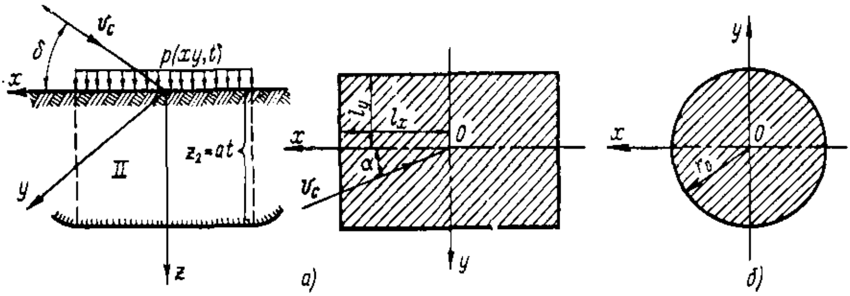

Рис. 42

Функциям нагрузок $Q^{3\beta}_{(1)}$ соответствуют функции кинетических напряжений (1.3.62), которые содержат неизвестные функции $F_{\alpha 3}$, удовлетворяющие уравнениям:

$$\frac{\partial^2 F_{03}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_{03}}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F_{13}}{\partial x \partial y} = Q^{3}_{(1)} \sin\delta,$$

$$\frac{\partial^2 F_{23}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_{23}}{\partial y^2} = C_{23}, \quad \frac{\partial^2 F_{33}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_{33}}{\partial y^2} = C_{33}, \tag{2.2.5}$$

где

$$C_{23} = 2\sin\delta \frac{\partial}{\partial x}\left(\int\limits_0^{x_0} \rho_s a_{cq} v_c \, dx^0\right) - \frac{\partial \xi}{\partial y},$$

$$C_{33} = 2\sin\delta \frac{\partial}{\partial y}\left(\int\limits_0^{x^0} \rho_s a_{cq} v_c \, dx^0\right) + \frac{\partial \xi}{\partial x},$$

и граничным условиям (1.4.51).

Функция $\xi\,(xyx^0)$ подчинена уравнению

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^{0^2}} = 2P,$$

где

$$P = \left(\frac{\partial Q^3_{(1)}}{\partial x} \cos\alpha - \frac{\partial Q^3_{(1)}}{\partial y} \sin\alpha \right) \cos\delta, \qquad (2.2.6)$$

и граничным условиям: $\xi = 0$, $d\xi/dx^0 = 0$ при $x^0 = 0$.

Решением такой краевой задачи является функция

$$\xi = \sum_{m,n} \frac{2}{\lambda_{mn}} \int_0^{x_0} P_{mn}(y^0) \sin\lambda_{mn}(y^0 - x^0)\, dy^0\, r_{mn}(xy). \qquad (2.2.7)$$

Здесь λ_{mn} — собственная частота, $r_{mn}(xy)$ — собственная функция, в частности,

$$r_{mn} = \sin n\pi\,(1 + x/l_x) \sin m\pi\,(1 + y/l_y),$$

$$\lambda_{mn} = \sqrt{(m\pi/l_y)^2 + (n\pi/l_x)^2} \quad (m,\ n = 1, 2, \ldots), \qquad (2.2.7')$$

$$P_{mn}(x^0) = \int_{-l_x}^{l_x} \int_{-l_y}^{l_y} P \cdot r_{mn}\, dxdy \Bigg/ \int_{-l_x}^{l_x} \int_{-l_y}^{l_y} (r_{mn})^2\, dxdy$$

— коэффициенты Фурье функции $P(xyx^0)$.

Из первых двух уравнений (2.25) следует, что

$$F_{03} = 0, \quad F_{13} = \int_{-l_x}^{x} \int_{-l_y}^{y} Q^3_{(1)} \sin\delta\, dydx; \qquad (2.2.8)$$

третье и четвертое уравнения (2.2.5) имеют соответственно решения:

$$F_{23} = \int_{-l_x}^{l_x} \int_{-l_y}^{l_y} C_{23}(x'\,y') \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}\, dx'\, dy',$$

$$(2.2.9)$$

$$F_{33} = \int_{-l_x}^{l_x} \int_{-l_y}^{l_y} C_{33}(x'\,y') \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}\, dx'\, dy'.$$

Для координаты x^0 функции нагрузок имеют вид: при косом ударе с углом δ

$$Q^{00}_{(1)} = \rho_0 a^2_{cq},\ Q^{01}_{(1)} = Q^0_{(1)} \cos\delta \cos\alpha,\ Q^{02}_{(1)} = Q^0_{(1)} \cos\delta \sin\alpha,$$
$$Q^{03}_{(1)} = Q^0_{(1)} \sin\delta, \qquad (2.2.10)$$

где $Q^0_{(1)} = \rho_0 a_{cq} v_c$; при нормальном ударе

$$Q^0_{(1)} = \rho_0 a^2_{cq},\ Q^{01}_{(1)} = Q^{02}_{(1)} = 0,\ Q^{03}_{(1)} = Q^0_{(1)}. \qquad (2.2.11)$$

Им соответствуют функции кинетических напряжений

$$\Pi_{10}^{(0)} = \frac{1}{2}(1+\cos\bar{x}^0)\,F + \frac{1}{2}\int\limits_0^{x_0}(1+\cos\bar{x}^0)\,dx^0\,F_{10},$$

$$\Pi_{20}^{(0)} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{x^0}(1+\cos\bar{x}^0)\,dx^0\,F_{20},\quad \Pi_{30}^{(0)} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{x^0}(1+\cos\bar{x}^0)\,dx^0\,F_{30}, \tag{2.2.12}$$

содержащие неизвестные функции F, F_{i0}, которые подчинены уравнениям:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -Q_{(1)}^{00},\qquad \frac{\partial F_{10}}{\partial y} + \frac{\partial F_{20}}{\partial z} = 2Q_{(1)}^{01},$$

$$\frac{\partial F_{10}}{\partial x} + \frac{\partial F_{30}}{\partial z} = -2Q_{(1)}^{02},\quad \frac{\partial F_{20}}{\partial x} + \frac{\partial F_{30}}{\partial y} = 2Q_{(1)}^{03}. \tag{2.2.13}$$

Частным решением первого из уравнений (2.2.13) является функция

$$F = -\int\limits_{-l_x}^{x}\int\limits_{-l_y}^{y} Q_{(1)}^{00}\,dy\,dx. \tag{2.2.14}$$

Исключая F_{20} и F_{30} из остальных уравнений (2.2.13), получим для функции F_{10} уравнение

$$\frac{\partial^2 F_{10}}{\partial x \partial y} = -P,$$

где

$$P = -\left(\frac{\partial Q_{(1)}^{0}}{\partial x}\cos\alpha - \frac{\partial Q_{(1)}^{0}}{\partial y}\sin\alpha\right)\cos\delta + \frac{\partial Q_{(1)}^{0}}{\partial z}\sin\delta, \tag{2.2.15}$$

решение которого таково:

$$F_{10} = -\int\limits_{-l_x}^{x}\int\limits_{-l_y}^{y} P\,dy\,dx. \tag{2.2.16}$$

Подставляя (2.2.16) во второе и третье уравнения (2.2.13) и интегрируя их, находим:

$$F_{20} = \int\limits_0^z\left(2Q_{(1)}^{0}\cos\delta\cos\alpha + \int\limits_{-l_x}^{x} P\,dx\right)dz,$$

$$F_{30} = \int\limits_0^z\left(-2Q_{(1)}^{0}\cos\delta\sin\alpha + \int\limits_{-l_y}^{y} P\,dy\right)dz. \tag{2.2.17}$$

Полные функции кинетических напряжений основного тензора имеют вид:

$$\Pi_1^{(0)} = \frac{1}{2}(1+\cos\bar z) F_{13} + \frac{1}{2}(1+\cos\bar x^0) F + \frac{1}{2}\int_0^{x^0}(1+\cos\bar x^0)\,dx^0 F_{10},$$

$$\Pi_2^{(0)} = \frac{1}{2}(1+\cos\bar z) F_{23} + \frac{1}{2}\int_0^{x^0}(1+\cos\bar x^0)\,dx^0 F_{20}, \qquad (2.2.18)$$

$$\Pi_3^{(0)} = \frac{1}{2}(1+\cos\bar z) F_{33} + \frac{1}{2}\int_0^{x^0}(1+\cos\bar x^0)\,dx^0 F_{30}.$$

Подставляя эти функции в (1.4.47) и (1.4.46), определим компоненты основного тензора от самоуравновешенных частей функций нагрузок ($T_0^{(1)}$). Несамоуравновешенные части функций нагрузок характеризуются тензором ($T_0^{(2)}$). Сумма тензоров ($T_0^{(1)}$) и ($T_0^{(2)}$) согласно (1.4.64) определяет основной тензор (T_0) области возмущений II в декартовой системе координат.

Если самоуравновешенные части функций нагрузок принять равными нулю, что допустимо в простейшем случае, то компоненты основного тензора таковы:

$$T^{33}_{(0)} = (1/2)(1+\cos\bar z)\,Q^3_{(1)}\sin\delta,\quad T^{00}_{(0)} = (1/2)(1+\cos\bar x^0)\,Q^{00}_{(1)},$$

$$T^{13}_{(0)} = (1/2)(1+\cos\bar z)\,Q^3_{(1)}\cos\delta\cos\alpha,\quad T^{23}_{(0)} = (1/2)(1+\cos\bar z)\times$$

$$\times Q^3_{(1)}\cos\delta\sin\alpha, \qquad (2.2.19)$$

$$T^{10}_{(0)} = (1/2)(1+\cos\bar x^0)\,Q^0_{(1)}\cos\delta\cos\alpha,$$

$$T^{20}_{(0)} = (1/2)(1+\cos\bar x^0)\,Q^0_{(1)}\cos\delta\sin\alpha,$$

$$T^{30}_{(0)} = (1/2)(1+\cos\bar z)\,Q^{30}_{(1)} + (1/2)(1+\cos\bar x^0)\,Q^0_{(1)}\sin\delta.$$

Корректирующий тензор ($T_к$) имеет компоненты

$$T^{\alpha\beta}_{(к)} = \sum_{mnpl}(A_{mnpl}f^{\alpha\beta}_{(1)} + B_{mnpl}f^{\alpha\beta}_{(2)} + C_{mnpl}f^{\alpha\beta}_{(3)} + D_{mnpl}f^{\alpha\beta}_{(0)}), \quad (2.2.20)$$

где $f^{\alpha\beta}_\gamma\,(mnpl)$ ($\gamma = 1, 2, 3, 0$) — известные функции [19], причем

$$\bar x = (\pi/2)(1+x/l_x),\quad \bar y = (\pi/2)(1+y/l_y),\quad \bar z = \pi z/z_2,\quad \bar x^0 = \pi x^0/x^0_2. \qquad (2.2.21)$$

Параметры $A_{mnpl}, \ldots, D_{mnpl}$ подчинены уравнениям

$$\sum_{mnpl}(A_{mnpl}F_{1\beta} + B_{mnpl}F_{2\beta} + C_{mnpl}F_{3\beta} + D_{mnpl}F_{0\beta}) + L_\beta = 0 \quad (2.2.22)$$

и определяются в результате их решения с помощью процедуры последовательных приближений, изложенной в § 3 гл. 1. Коэффициенты $F_{\gamma\beta}\,(mnpijkq)$ уравнений (2.2.22) таковы: для упругой и упругопластической сред

$$F_{\gamma\beta} = (1/(2G))\,(\alpha_1 F^{(1)}_{\gamma\beta} + \alpha_2 F^{(2)}_{\gamma\beta}),$$

для вязкоупругой среды

$$F_{\gamma\beta} = (1/2G))\ (\alpha_1^{(e)} F_{\gamma\beta}^{(1)} + \alpha_2^{(e)} F_{\gamma\beta}^{(2)}) + (1/a_{cq})\ (F_{\gamma\beta}^{(3)} + (1/3)\ F_{\gamma\beta}^{(4)}), \quad (2.2.23)$$

для вязкой и вязкопластической сред

$$F_{\gamma\beta} = \alpha_1^{(b)} F_{\gamma\beta}^{(1)} + \alpha_2^{(b)} F_{\gamma\beta}^{(2)}.$$

Интегралы $F_{\gamma\beta}^{(k)}\ (mnplijkq)$ $(k = 1, 2, 3, 4)$, входящие в приведенные формулы, имеют вид:

$$F_{\gamma\beta}^{(1)} = 2\frac{4l_x\, l_y\, (x_2^0)^2}{\pi^5} \iiiint_0^\pi \frac{a}{a_{cq}}\, \bar{x}^0\, A_{\gamma\beta}^{(1)}\, d\bar{x}d\bar{y}d\bar{z}d\bar{x}^0,$$

$$F_{\gamma\beta}^{(2)} = \frac{4l_x\, l_y\, (x_2^0)^2}{\pi^5} \iiiint_0^\pi \frac{a}{a_{cq}}\, \bar{x}^0\, A_{\gamma\beta}^{(2)}\, d\bar{x}d\bar{y}d\bar{z}d\bar{x}^0,$$

$$(2.2.24)$$

$$F_{\gamma\beta}^{(3)} = 2\frac{4l_x\, l_y\, (x_2^0)^3}{\pi^6} \iiiint_0^\pi \frac{a}{a_{cq}}\, \bar{x}^0 \int_0^{\bar{x}^0} \widetilde{R}\, (\bar{x}^0\, \bar{x}^0)\ A_{\gamma\beta}^{(1)}\, (\bar{x}^0\, \bar{y}^0)\, d\bar{y}^0 d\bar{x}d\bar{y}d\bar{z}d\bar{x}^0,$$

$$F_{\gamma\beta}^{(4)} = \frac{4l_x\, l_y\, (x_2^0)^3}{\pi^6} \iiiint_0^\pi \frac{a}{a_{cq}}\, \bar{x}^0 \int_0^{\bar{x}^0} (\widetilde{R}_0\, (\bar{x}^0\, \bar{y}^0) -$$

$$- \widetilde{R}(\bar{x}^0 \bar{y}^0))\ A_{\gamma\beta}^{(2)}\, (\bar{x}^0\, \bar{y}^0)\, d\bar{y}^0\, d\bar{x}d\bar{y}d\bar{z}d\bar{x}^0;$$

их подынтегральные выражения:

$$A_{\gamma\beta}^{(1)} = g_{ii}g_{ii}f_{(\gamma)}^{ii}f_{(\beta)}^{ii} + f_{(\gamma)}^{00}f_{(\beta)}^{00} + 2\ (g_{ii}g_{jj}f_{(\gamma)}^{ij}f_{(\beta)}^{ij} - g_{ii}f_{(\gamma)}^{i0}f_{(\beta)}^{i0}),$$

$$A_{\gamma\beta}^{(2)} = g_{ii}g_{ii}f_{(\gamma)}^{ii}f_{(\beta)}^{ii} + f_{(\gamma)}^{00}f_{(\beta)}^{00} + \quad (2.2.24')$$

$$+ g_{ii}g_{jj}\ (f_{(\gamma)}^{ii}f_{(\beta)}^{jj} + f_{(\gamma)}^{jj}f_{(\beta)}^{ii}) - g_{ii}\ (f_{(\gamma)}^{ii}f_{(\beta)}^{00} + f_{(\gamma)}^{00}f_{(\beta)}^{ii}).$$

Свободные члены $L_\beta\ (ijkq)$ уравнений (2.2.22) соответственно равны: для упругой и упругопластической сред

$$L_\beta = (1/(2G))\ (\alpha_1 L_\beta^{(1)} + \alpha_2 L_\beta^{(2)}),$$

для вязкоупругой среды

$$L_\beta = (1/(2G))(\alpha_1^{(e)} L_\beta^{(1)} + \alpha_2^{(e)} L_\beta^{(2)}) + (1/a_{cq})\ (L_\beta^{(4)} + (1/3)\ L_\beta^{(5)}), \quad (2.2.25)$$

для вязкой и вязкопластической сред

$$L_\beta = \alpha_1^{(b)}\, L_\beta^{(1)} + \alpha_2^{(b)} L_\beta^{(2)} + (p_0/\lambda)\ L_\beta^{(6)} - L_\beta^{(8)}.$$

Интегралы $L_\beta^{(l)}(ijkq))l = 1, 2, \ldots, 8)$, входящие в приведенные формулы, имеют вид:

$$L_\beta^{(1)} = 2\,\frac{4l_x\, l_y\, (x_2^0)^2}{\pi^5} \iiiint\limits_0^\pi \frac{a}{a_{cq}}\, \bar{x}^0\, B_\beta^{(1)}\, d\bar{x}d\bar{y}d\bar{z}d\bar{x}^0,$$

$$L_\beta^{(2)} = \frac{4l_x\, l_y\, (x_2^0)^2}{\pi^5} \iiiint\limits_0^\pi \frac{a}{a_{cq}}\, \bar{x}^0\, B_\beta^{(2)}\, d\bar{x}d\bar{y}d\bar{z}d\bar{x}^0,$$

$$L_\beta^{(4)} = 2\,\frac{4l_x\, l_y\, (x_2^0)^3}{\pi^6} \iiiint\limits_0^\pi \frac{a}{a_{cq}}\, \bar{x}^0 \int\limits_0^{\bar{x}^0} \widetilde{R}\,(\bar{x}^0\,\bar{y}^0)\, B_\beta^{(1)}\,(\bar{x}^0\,\bar{y}^0)\, d\bar{y}^0\, d\bar{x}d\bar{y}d\bar{z}d\bar{x}^0,$$

$$L_\beta^{(5)} = \frac{4l_x\, l_y\, (x_2^0)^3}{\pi^6} \iiiint\limits_0^\pi \frac{a}{a_{cq}}\, \bar{x}^0 \int\limits_0^{\bar{x}^0} \big(\widetilde{R}_1\,(\bar{x}^0\,\bar{y}^0) - \qquad (2.2.26)$$

$$- \widetilde{R}\,(\bar{x}^0\,\bar{y}^0)\big)\, B_\beta^{(2)}\,(\bar{x}^0\,\bar{y}^0)\, d\bar{y}^0\, d\bar{x}d\bar{y}d\bar{z}d\bar{x}^0,$$

$$L_\beta^{(6)} = \frac{4l_x\, l_y\, (x_2^0)^2}{\pi^5} \iiiint\limits_0^\pi \frac{a}{a_{cq}}\, \bar{x}^0\, B_\beta^{(6)}\, d\bar{x}d\bar{y}d\bar{z}d\bar{x}^0,$$

$$L_\beta^{(8)} = \frac{4l_x\, l_y}{\pi^2} \iint\limits_0^\pi B_\beta^{(8)}\, d\bar{x}d\bar{y};$$

их подынтегральные выражения таковы:

$$B_\beta^{(1)}\, g_{ii}g_{ii}T_{(0)}^{ii}f_{(\beta)}^{ii} + T_{(0)}^{00}f_{(\beta)}^{00} + 2(g_{ii}\,g_{jj}\,T_{(0)}^{ij}f_{(\beta)}^{ij} - g_{ii}T_{(0)}^{i0}f_{(\beta)}^{i0}),$$

$$B_\beta^{(2)} = g_{ii}g_{ii}T_{(0)}^{ii}f_{(\beta)}^{ii} + T_{(0)}^{00}f_{(\beta)}^{00} + g_{ii}g_{jj}(T_{(0)}^{ii}f_{(\beta)}^{jj} + T_{(\beta)}^{jj}f_{(\beta)}^{ii}) -$$

$$- g_{ii}\,(T_{(0)}^{ii}f_{(\beta)}^{00} + T_{(0)}^{00}f_{(\beta)}^{ii}), \qquad (2.2.26')$$

$$B_\beta^{(6)} = g_{ii}f_{(\beta)}^{ii} - f_{(\beta)}^{00},$$

$$B_\beta^{(8)} = v_c\, [\cos\delta\,(\cos\alpha f_{(\beta)}^{11} + \sin\alpha f_{(\beta)}^{22}) + f_{(\beta)}^{33}\sin\delta] + a_{cg}f_{(\beta)}^{00}.$$

Упругому, вязкоупругому и вязкому решениям в первом приближении (m, n, p, $l = 0$; 1) соответствуют компоненты корректирующего тензора

$$T_{(\kappa)}^{\alpha\beta} = (1/\Delta)\,(\Delta_1 f_{(1)}^{\alpha\beta} + \Delta_2 f_{(2)}^{\alpha\beta} + \Delta_3 f_{(3)}^{\alpha\beta} + \Delta_0 f_{(0)}^{\alpha\beta}), \qquad (2.2.27)$$

где Δ и Δ_γ ($\gamma = 1, 2, 3, 0$) — определители вида

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{10} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{20} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{30} \\ F_{01} & F_{02} & F_{03} & F_{00} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} L_1 & F_{12} & F_{13} & F_{10} \\ L_2 & F_{22} & F_{23} & F_{20} \\ L_3 & F_{32} & F_{33} & F_{30} \\ L_0 & F_{02} & F_{03} & F_{00} \end{vmatrix}, \ \ldots \qquad (2.2.28)$$

Упругопластическому и вязкопластическому решению в первом приближении соответствуют компоненты корректирующего тензора (2.2.27), однако, прежде чем вычислять определители Δ и Δ_γ, а также их элементы $F_{\gamma\beta}$ и L_β, требуется найти функции состояния α_1, α_2 для упругопластической среды или $\alpha_1^{(b)}$, $\alpha_2^{(b)}$ для вязкопластической среды. При определении функций состояния используется динамическая диаграмма $\sigma_i - e_i$ или $\tau_i - \gamma_i$ материала среды, а также построенный тензор $(T)^{(e)}$ (упругое решение) или тензор $(T)^{(b)}$ (вязкое решение) рассматриваемой задачи. Находим T и T_i, затем по формуле (1.3.83) вычисляем σ_i и перестраиваем диаграмму $\sigma_i - e_i$ в диаграмму $T_i - \tilde{e}_i$, по которой строим зависимости $\varphi(T_i)$ и $d\varphi/dT_i$. По формулам (1.3.71) или (1.3.76) определяются функции состояния α_1, α_2 или $\alpha_1^{(b)}$, $\alpha_2^{(b)}$, необходимые при вычислении $F_{\gamma\beta}$ — по формулам (2.2.23) и L_β — по формулам (2.2.25). В результате определяем компоненты корректирующего тензора, следовательно, и тензор кинетических напряжений $(T)_{\text{нагр}}$ для области возмущений II в декартовых координатах.

Полярные координаты соответствуют загруженной области, имеющей форму круга радиуса r_0 (рис. 42, *б*), и изменяются в следующих пределах: $0 \leqslant r \leqslant r_0$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant at$, $0 \leqslant x_2^0 \leqslant a_{cg} t_2$.

Для координаты z функции нагрузок имеют вид: при косом ударе

$$Q_{(1)}^{33} = Q_{(1)}^{3} \sin\delta,\ Q_{(1)}^{31} = Q_{(1)}^{3} \cos\delta,\ Q_{(1)}^{32} = 0,\ Q_{(1)}^{30} = \rho_s a_{cg} v_c \sin\delta, \tag{2.2.29}$$

где $Q_{(1)}^3 = \rho_s v_c^2 \sin\delta - p$; при нормальном ударе

$$Q_{(1)}^{33} = Q_{(1)}^{3},\quad Q_{(1)}^{31} = Q_{(1)}^{32} = 0,\ Q_{(1)}^{30} = \rho_s a_{cg} v_c, \tag{2.2.30}$$

где $Q_{(1)}^3 = \rho_s v_c^2 - p$.

Функциям нагрузок соответствуют функции кинетических напряжений (1.4.49), содержащие неизвестные функции $F_{\alpha 3}$, которые подчинены уравнениям:

$$r^2 \frac{\partial^2 F_{03}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 F_{03}}{\partial \theta^2} + r\frac{\partial F_{03}}{\partial r} - 2F_{03} = 0, \quad \frac{\partial^2 F_{13}}{\partial r \partial\theta} = r^2 Q_{(1)}^3 \sin\delta, \tag{2.2.31}$$

$$r^2 \frac{\partial^2 F_{23}}{\partial r^2} + 3r\frac{\partial F_{23}}{\partial r} + F_{23} + \frac{\partial^2 F_{23}}{\partial\theta^2} = C_{23}, \quad \frac{\partial F_{33}}{\partial r} = \xi + \frac{\partial F_{23}}{\partial\theta},$$

где

$$C_{23} = -2r\left(r\int_0^{x^0} \frac{\partial Q_{(1)}^{30}}{\partial r}\, dx^0 + 2\int_0^{x^0} Q_{(1)}^{30}\, dx^0\right) - \frac{\partial\xi}{\partial\theta},$$

и граничным условиям (1.4.51).

Функция $\xi(r, \theta, x^0)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial\theta^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\xi}{\partial r} - \frac{\partial^2\xi}{\partial x^{0 2}} = 2P, \tag{2.2.32}$$

где $P = -(d/d\theta)(Q_{(1)}^3 \cos\delta)$, и следующим граничным условиям: $\xi = 0$, $d\xi/dx^0 = 0$ при $x^0 = 0$.

Решением этой краевой задачи является функция

$$\xi = -\frac{2r_0}{1} \sum_{m,n} \beta_m \left[\int_0^{x^0} (P_{mn}^{(1)} (y^0) \cos n\theta + \right.$$

$$\left. + P_{mn}^{(2)} (y^0) \sin n\theta) \sin \beta_m \frac{x^0 - y^0}{r_0} \, dy^0 \right] r J_{\sqrt{1+n^2}} \left(\beta_m \frac{r}{r_0} \right), \tag{2.2.33}$$

где $\beta_m (n)$ — корни характеристического уравнения

$$J_{\sqrt{1+n^2}} (\beta) = 0; \tag{2.2.34}$$

$$P_{mn}^{(l)} = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} P V_{mn}^{(l)} \, dr d\theta \Bigg/ \int_0^{2\pi} \int_0^{r^0} (V_{mn}^{(l)})^2 \, dr d\theta \tag{2.2.35}$$

— коэффициенты Фурье функции $P (r, \theta, x^0)$, причем

$$V_{mn}^{(1)} = r J_{\sqrt{1+n^2}} (\beta_m r/r_0) \cos n\theta,$$

$$V_{mn}^{(2)} = r J_{\sqrt{1+n^2}} (\beta_m r/r_0) \sin n\theta. \tag{2.2.36}$$

Функцию F_{03}, удовлетворяющую первому из уравнений (2.2.31), можно принять равной нулю; второе из уравнений (2.2.31) имеет решение

$$F_{13} = \int_0^{\theta} \int_0^{r} r^2 Q_{(1)}^3 \sin \delta dr d\theta; \tag{2.2.37}$$

частным решением третьего из уравнений (2.2.31) является функция

$$F_{23} = \sum_n \frac{1}{r^{n+1}} \int_0^r (C_{23}^{(1)}{}'_{(n)} (r' x^0) \cos n\theta +$$

$$+ C_{23}^{(2)}{}'_{(n)} (r' x^0) \sin n\theta) \, e^{\int \frac{3}{r'} dr'} \, \frac{r'^{2n} - r^{2n}}{r'^{n+1}} \, dr', \tag{2.2.38}$$

где

$$C_{23}^{(1)}{}'_{(n)} = \int_0^{2\pi} C_{23} \cos n\theta d\theta \Bigg/ \int_0^{2\pi} \cos^2 n\theta d\theta,$$

$$C_{23}^{(2)}{}'_{(n)} = \int_0^{2\pi} C_{23} \sin n\theta \, d\theta \Bigg/ \int_0^{2\pi} \sin^2 n\theta d\theta;$$

четвертое из уравнений (2.2.31) определяет функцию

$$F_{33} = \int_0^r C_{33}' dr, \tag{2.2.39}$$

где

$$C_{33} = \xi + \sum_n \frac{n}{r^{n+1}} \int_0^r (C_{23(n)}^{(2)} \cos n\theta - C_{23(n)}^{(1)} \sin n\theta) \times$$

$$\times e^{\int (3/r')\,dr'} (r'^{2n} - r^{2n})/r'^{n+1}\,dr'.$$

Для координаты x^0 имеем функции нагрузок:

$$Q_{(1)}^{00} = \rho_0 a_{cq}^2,\ Q_{(1)}^{01} = Q_{(1)}^0 \cos\delta,\ Q_{(1)}^{02} = 0,\ Q_{(1)}^{03} = Q_{(1)}^0 \sin\delta, \quad (2.2.40)$$

где $Q_{(1)}^0 = \rho_0 a_{cq} v_c$.

Функциям нагрузок (2.2.40) соответствуют функции кинетических напряжений (1.4.59), содержащие неизвестные функции $F_{\alpha 0}$, которые подчинены уравнениям

$$F_{00} = r^2 Q_{(1)}^{00}, \quad (2.2.41)$$

$$\frac{\partial^2 F_{10}}{\partial r \partial\theta} = -P, \quad r^2 \frac{\partial F_{20}}{\partial z} = 2r^2 Q_{(1)}^0 \cos\delta - \frac{\partial F_{10}}{\partial\theta},$$

$$\frac{\partial F_{30}}{\partial z} = -\left(\frac{\partial F_{10}}{\partial r} + \frac{1}{r} F_{10}\right), \quad (2.2.42)$$

где

$$P = r\left[r \frac{\partial Q_{(1)}^0}{\partial z} \sin\delta - \left(r \frac{\partial Q_{(1)}^0}{\partial r} + Q_{(1)}^0\right)\cos\delta\right].$$

Первому из уравнений (2.2.42) соответствует функция

$$F_{10} = -\int_0^\theta \int_0^r P\,dr\,d\theta, \quad (2.2.43)$$

второе и третье из уравнений (2.2.42) можно проинтегрировать:

$$F_{20} = \int_0^z \left[2Q_{(1)}^0 \cos\delta + \frac{1}{r^2} \int_0^r P\,dr\right] dz,$$

$$(2.2.44)$$

$$F_{30} = \int_0^\theta \int_0^z \left[P + \frac{1}{r} \int_0^r P\,dr\right] dz\,d\theta.$$

Полные функции кинетических напряжений основного тензора имеют вид

$$\Pi_i^{(0)} = (1/2)(1 + \cos \bar{z}) F_{i3} + (1/2) \int_0^{x^0} (1 + \cos \bar{x}^0)\,dx^0\, F_{i0},$$

$$(2.2.45)$$

$$\Pi_0^{(0)} = (1/2)(1 + \cos \bar{x}^0) F_{00}$$

и соответствуют самоуравновешенным частям функций нагрузок. Подставляя эти функции в (1.4.47) и (1.4.46), получим компоненты тензора $(T_0^{(1)})$, суммируя который с тензором (1.4.64), найдем основной тензор (T_0) области возмущений II.

Если самоуравновешенные части функций нагрузок $\tilde{Q}^{3\beta}_{(1)}$, $\tilde{Q}^{0\beta}_{(1)}$ равны нулю, то

$$T^{33}_{(0)} = (1/2)\,(1 + \cos\bar{z})\,Q^{3}_{(1)}\sin\delta,\quad T^{00}_{(0)} = (1/2)\,(1 + \cos\bar{x}^0)\,Q^{00}_{(1)},$$

$$T^{13}_{(0)} = (1/2)\,(1 + \cos\bar{z})\,Q^{3}_{(1)}\cos\delta,\quad T^{10}_{(0)} = (1/2)\,(1 + \cos\bar{x}^0)\,Q^{0}_{(1)}\cos\delta, \tag{2.2.46}$$

$$T^{30}_{(0)} = (1/2)\,(1 + \cos\bar{z})\,Q^{30}_{(1)} + (1/2)\,(1 + \cos\bar{x}^0)\,Q^{0}_{(1)}\sin\delta.$$

Компоненты корректирующего тензора определяются по формулам (2.2.20), однако функции $f^{\alpha\beta}_{(\gamma)}\,(mnpl)$ будут другими [19], так как приняты следующие фундаментальные функции:

$$\xi_m(r) = (1/m!)\,J_m(\bar{r})\sin m\bar{r},\quad \eta_n(\theta) = (1/n!)\sin n\bar{\theta},$$

$$\zeta_p(z) = (1/p!)\sin p\bar{z}, \tag{2.2.47}$$

причем $\bar{r} = \pi r/r_0$, $\bar{\theta} = \theta/2$, $\bar{z} = \pi z/z_2$, $\bar{x}^0 = \pi x^0/x^0_2$.

Параметры $A_{mnpl}, \ldots, D_{mnpl}$ находим в результате решения уравнений (2.2.22), коэффициенты $F_{\gamma\beta}$ и свободные члены L_β которых вычисляются соответственно по формулам (2.2.23) и (2.2.25). Интегралы $F^{(k)}_{\gamma\beta}\,(mnplikq)$ имеют вид:

$$F^{(1)}_{\gamma\beta} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{r_0 x^0_2}{\pi^2}\right)^2 \iiint\limits_0^{\pi}\!\!\int \frac{a}{a_{cq}}\,A^{(1)}_{\gamma\beta}\,\bar{x}^0\,\bar{r}\,d\bar{r}\,d\bar{\theta}\,d\bar{z}\,d\bar{x}^0,$$

$$F^{(2)}_{\gamma\beta} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{r_0 x^0_2}{\pi^2}\right)^2 \iiint\limits_0^{\pi}\!\!\int \frac{a}{a_{cq}}\,A^{(2)}_{\gamma\beta}\,\bar{x}^0\,\bar{r}\,d\bar{r}\,d\bar{\theta}\,d\bar{z}\,d\bar{x}^0,$$

$$F^{(3)}_{\gamma\beta} = \frac{2x^0_2}{\pi^2}\left(\frac{r_0 x^0_2}{\pi^2}\right)^2 \iiint\limits_0^{\pi}\!\!\int \frac{a}{a_{cq}} \int\limits_0^{\bar{x}^0} \tilde{R}\,(\bar{x}^0\,\bar{y}^0)\,\times \tag{2.2.48}$$

$$\times A^{(1)}_{\gamma\beta}\,(\bar{x}^0\,\bar{y}^0)\,d\bar{y}^0\,\bar{x}^0\,\bar{r}\,d\bar{r}\,d\bar{\theta}\,d\bar{z}\,d\bar{x}^0,$$

$$F^{(4)}_{\gamma\beta} = \frac{2x^0_2}{\pi^2}\left(\frac{r_0 x^0_2}{\pi^2}\right)^2 \iiint\limits_0^{\pi}\!\!\int \frac{a}{a_{cq}} \int\limits_0^{\bar{x}^0} \left(\tilde{R}_1\,(\bar{x}^0\,\bar{y}^0) - \tilde{R}\,(\bar{x}^0\,\bar{y}^0)\right)\times$$

$$\times A^{(2)}_{\gamma\beta}\,(\bar{x}^0\,\bar{y}^0)\,d\bar{y}^0\,\bar{x}^0\,\bar{r}\,d\bar{r}\,d\bar{\theta}\,d\bar{z}\,d\bar{x}^0$$

Подынтегральные выражения получим по формулам (2.2.24), заменяя $f_{\gamma}^{\alpha\beta}$ $(mnpl)$ их выражениями; интегралы $L_{\beta}^{(l)}$ $(ijkq)$ имеют вид:

$$L_{\beta}^{(1)}=\frac{2}{\pi}\left(\frac{r_0 x_2^0}{\pi^2}\right)^2 \iiiint_0^{\pi} \frac{a}{a_{cq}} B_{\beta}^{(1)} \bar{x}^0 \bar{r} d\bar{r} d\bar{\theta} d\bar{z} d\bar{x}^0,$$

$$L_{\beta}^{(2)}=\frac{2}{\pi}\left(\frac{r_0 x_2^0}{\pi^2}\right)^2 \iiiint_0^{\pi} \frac{a}{a_{cq}} B_{\beta}^{(2)} \bar{x}^0 \bar{r} d\bar{r} d\bar{\theta} d\bar{z} d\bar{x}^0,$$

$$L_{\beta}^{(4)}=\frac{2x_2^0}{\pi^2}\left(\frac{r_0 x_2^0}{\pi^2}\right)^2 \iiiint_0^{\pi} \frac{a}{a_{cq}} \int_0^{\bar{x}^0} \widetilde{R}(\bar{x}^0 \bar{y}^0)\times$$

$$\times B_{\beta}^{(1)}(\bar{x}^0 \bar{y}^0)\, d\bar{y}^0 \bar{x}^0 \bar{r} d\bar{r} d\bar{r} d\bar{\theta} d\bar{z} d\bar{x}^0, \qquad (2.2.49)$$

$$L_{\beta}^{(5)}=\frac{2x_2^0}{\pi^2}\left(\frac{r_0 x_2^0}{\pi^2}\right)^2 \iiiint_0^{\pi} \frac{a}{a_{cq}} \int_0^{\bar{x}^0} (\widetilde{R}_1(\bar{x}^0 \bar{y}^0)-$$

$$-\widetilde{R}(\bar{x}^0 \bar{y}^0))\, B_{\beta}^{(2)}(\bar{x}^0 \bar{y}^0)\, d\bar{y}^0 \bar{x}^0 \bar{r} d\bar{r} d\bar{\theta} dz d\bar{x}^0,$$

$$L_{\beta}^{(6)}=\frac{2}{\pi}\left(\frac{r_0 x_2^0}{\pi^2}\right)^2 \iiiint_0^{\pi} \frac{a}{a_{cq}} B_{\beta}^{(6)} \bar{x}^0 \bar{r} d\bar{r} d\bar{\theta} d\bar{z} d\bar{x}^0,$$

$$L_{\beta}^{(8)}=2\left(\frac{r_0}{\pi}\right)^2 \iint_0^{\pi} B_{\beta}^{(8)} \bar{r} d\bar{r} d\bar{\theta};$$

подынтегральные выражения получим по формулам (2.2.26′), заменяя $f_{(\gamma)}^{\alpha\beta}(mnpl)$ и $T_{(0)}^{\alpha\beta}$ их выражениями. Дальнейшее построение тензора $(T_{\text{к}})$ проводится аналогично предыдущему случаю.

Итак, основной $(T_{\text{о}})$ и корректирующий $(T_{\text{к}})$ тензоры известны, тензор кинетических напряжений $(T)_{\text{нагр}}$ области возмущений II равен их сумме, следовательно, и его можно считать известным.

Построение тензора $(T)_{\text{нагр}}$ области возмущений II в других координатах выполняется аналогично изложенному.

Тензор кинетических напряжений $(T)_{\text{нагр}}$ области возмущений I строится в сферической системе координат $(\theta,\ \varphi,\ r,\ x^0)$ по схеме, рассмотренной в § 4 гл. 1, с учетом формы области возмущений II. Для загруженной области, имеющей форму прямоугольника, координаты изменяются в следующих пределах: $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$, $-\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant r \leqslant at$, $0 \leqslant x^0 \leqslant a_{cq} t_2$. Граничные условия (1.4.18) принимают вид: при $\theta = -\pi/2$

$$x = \pm l_x,\ T^{1\beta} = T_{\text{II}}^{1\beta},\ y = \pm l_y,\ T^{2\beta} = T_{\text{II}}^{2\beta}; \qquad (2.2.50)$$

$$T^{1\beta} = (\rho v^1 v^\beta)_S \text{ при } \theta = \theta_2;$$

$$T^{00} = \rho_0 a_{cq}^2,\ T^{i0} = (\rho a_{cq} v^i)_0 \text{ при } x^0 = 0;$$

$$w_\alpha(S) = 0 \text{ при } r = at.$$

В частности, если принять основной тензор в виде (2.2.19), то граничные условия (2.2.50) для координаты θ при $\theta = -\pi/2$ преобразуются следующим образом: при $x = \pm l_x$

$$T^{11} = 0, \quad T^{12} = 0, \quad T^{13} = (1/2)\,(1 + \cos\bar{z})\,Q^3_{(1)}\cos\delta\cos\ \alpha,$$

$$T^{10} = (1/2)\,(1 + \cos\bar{x}_0)\,Q^0_{(1)}\cos\delta\cos\alpha;$$

при $y = \pm l_y$

$$T^{11} = 0,\ T^{12} = 0,\ T^{13} = (1/2)\,(1 + \cos\bar{z})\,Q^3_{(1)}\cos\delta\sin\alpha,$$

$$T^{10} = (1/2)\,(1 + \cos\bar{x}^0)\,Q^3_{(1)}\cos\delta\sin\alpha; \qquad (2.2.50')$$

при $\theta = \theta_2$ имеем: $T^{1\beta} = (\rho v^1 v^\beta)_S$.

Для загруженной области, имеющей форму круга, координаты изменяются в пределах: $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant r \leqslant at$, $0 \leqslant x^0 \leqslant a_{cq}t_2$; граничные условия (1.4.18) принимают вид:

$$\begin{gathered} T^{1\beta} = T^{1\beta}_{\text{II}} \text{ при } \theta = -\pi/2,\ r = r_0, \\ T^{1\beta} = (\rho v^1 v^\beta)_S \text{ при } \theta = \theta_2, \\ T^{00} = \rho_0 a^2_{cq},\ T^{0i} = (\rho a_{cq} v^i)_0 \text{ при } x^0 = 0, \\ w_\alpha(S) = 0 \text{ при } r = at. \end{gathered} \qquad (2.2.51)$$

В частности, если принять основной тензор в виде (2.2.46), то граничные условия (2.2.51) для координаты θ преобразуются следующим образом: при $\theta = -\pi/2$ и $r = r_0$

$$T^{11} = 0,\ T^{13} = (1/2)\,(1 + \cos\bar{z})\,Q^3_{(1)}\cos\delta,\ \ T^{12} = 0,$$

$$T^{10} = (1/2)\,(1 + \cos\bar{x}^0)\,Q^0_{(1)}\cos\delta; \qquad (2.2.51')$$

при $\theta = \theta_2$ имеем: $T^{1\beta} = (\rho v^1 v^\beta)_S$.

Координате θ соответствуют функции нагрузок

$$Q^{1\beta}_{(1)} = T^{1\beta}_{\text{II}},\ \ Q^{1\beta}_{(2)} = (\rho v^1 v^\beta)S. \qquad (2.2.52)$$

и функции кинетических напряжений (1.4.25), которые содержат неизвестные функции $F_{\alpha 1}$ и $\Phi_{\alpha 1}$, подчиненные уравнениям (1.4.26) и граничным условиям (1.4.47). Решение указанных уравнений определяет функции

$$F_{01} = 0, \quad F_{11} = \sum_n \frac{1}{\omega_n}\int_0^{x^0} C^{(n)}_{11}(\xi)\sin\omega_n(\xi - x^0)\,d\xi\, r^{3/2} J_{1/2}(\omega_n r),$$

$$(2.2.53)$$

$$F_{21} = \int_0^{x^0} y\,dx^0, \qquad F_{31} = \int_0^r \int_{-\pi/2}^{\varphi} B_{11}\,d\varphi\,dr.$$

Здесь

$$B_{11} = r^1 Q^{11}_{(1)},$$

$$C^{(n)}_{11} = \int_0^{r_2} C_{11}\,r^{3/2} J_{1/2}(\omega_n r)\,dr \Big/ \int_0^{r_2} (r^{3/2} J_{1/2}(\omega_n r))^2\,dr$$

— коэффициенты Фурье функции

$$C_{11} = 2r^4 Q_{(1)}^{12} + \int_0^{x_0} \frac{\partial^2 y}{\partial r \partial \varphi} dx^0,$$

где ω_n — корни характеристического уравнения $J_{1/2}(\omega r_2) = 0$; функция

$$y = \sum_{m,n} \frac{1}{\omega_{mn}} \int_0^{x_0} A_{11}^{(mn)}(\xi) \sin \omega_{mn} (\xi - x^0)\, d\xi r^{-3/2} J_\nu (\omega_{mn} r) \sin m\varphi,$$

где

$$A_{11}^{(mn)} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{r_2} 2r^{-7/2} A_{11} J_\nu (\omega_{mn} r) \sin m\varphi d\varphi dr \Bigg/ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{r_2} (r^{-3/2} \times$$
$$\times J_\nu (\omega_{mn} r) \sin m\varphi)^2 d\varphi dr$$

— коэффициенты Фурье функции

$$A_{11} = r^4 \frac{\partial Q_{(1)}^{13}}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial r} (r^4 Q_{(1)}^{12}),$$

ω_{mn} — корни характеристического уравнения

$$J_\nu (\omega r_2) = 0 \quad (\nu = \sqrt{9 + 4m^2}/2).$$

Координате x^0 соответствуют функции нагрузок

$$Q_{(1)}^{00} = \rho_0 a_{cq}^2, \quad Q_{(1)}^{0i} = (\rho a_{cq} v^i)_0 \tag{2.2.54}$$

и функции кинетических напряжений (1.4.37), содержащие функции:

$$F_{00} = r^2 \sin^2\theta\, Q_{(1)}^{00}, \quad F_{30} = 2r^2 \sin^2\theta \int_{\varphi_1}^{\varphi} Q_{(1)}^{03} d\varphi,$$

$$F_{20} = 0, \quad F_{10} = 2r^4 \operatorname{tg}\theta \left[\sin^2\theta Q_{(1)}^{02} - \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin^2\theta \int_{\varphi_1}^{\varphi} Q_{(1)}^{01} d\varphi \right) \right]. \tag{2.2.55}$$

Полные функции кинетических напряжений основного тензора таковы:

$$\Pi_1^{(0)} = \frac{1}{2}(1 + \cos\bar\theta) F_{11} + \frac{1}{2}(1 - \cos\bar\theta) \Phi_{11} + \frac{1}{2} \int_0^{x_0} (1 + \cos \bar{x}^0)\, dx^0 F_{10},$$

$$\Pi_2^{(0)} = (1/2)(1 + \cos\bar\theta) F_{21} + (1/2)(1 - \cos\bar\theta) \Phi_{21},$$

$$\Pi_3^{(0)} = \frac{1}{2}(1 + \cos\bar\theta) F_{31} + \frac{1}{2}(1 - \cos\bar\theta) \Phi_{31} + \frac{1}{2} \int_0^{x_0} (1 + \cos \bar{x}^0)\, dx^0 F_{30}, \tag{2.2.56}$$

$$\Pi_0^{(0)} = (1/2)(1 + \cos \bar{x}^0) F_{00}.$$

Подставляя эти функции в (1.4.22) и (1.4.23), а полученный результат — в (1.4.21), получим компоненты тензора $(T_0^{(1)})$ для самоуравновешенных частей функций нагрузок. Несамоуравновешенным частям функций нагрузок соответствует тензор $(T_0^{(2)})$ с компонентами (1.4.40). Основной тензор (T_0) является суммой тензоров $(T_0^{(1)})$ и $(T_0^{(2)})$, построенных для области возмущений I. Если считать самоуравновешенные части функций нагрузок равными нулю, то компоненты основного тензора соответственно равны:

$$T_0^{11} = (1/2)(1+\cos\bar\theta)\,Q_{(1)}^{11} + (1/2)(1-\cos\bar\theta)\,Q_{(2)}^{11},$$

$$T_{(0)}^{13} = (1/2)(1+\cos\bar\theta)\,Q_{(1)}^{13} + (1/2)(1-\cos\bar\theta)\,Q_{(2)}^{13},$$

$$T_{(0)}^{12} = (1/2)(1+\cos\bar\theta)\,Q_{(1)}^{12} + (1/2)(1-\cos\bar\theta)\,Q_{(2)}^{12}. \qquad (2.2.57)$$

$$T_{(0)}^{10} = (1/2)(1+\cos\bar\theta)\,Q_{(1)}^{10} + (1/2)(1-\cos\bar\theta)\,Q_{(2)}^{10} + (1/2)(1+\cos\bar{x}^0)\,Q_{(1)}^{01},$$

$$T_{(0)}^{02} = (1/2)(1+\cos\bar{x}^0)\,Q_{(1)}^{02},\quad T_{(0)}^{03} = (1/2)(1+\cos\bar{x}^0)\,Q_{(1)}^{03},$$

$$T_{(0)}^{00} = (1/2)(1+\cos\bar{x}^0)\,Q_{(1)}^{00}.$$

Компоненты корректирующего тензора $(T_к)$ имеют вид

$$T_{(к)}^{\alpha\beta} = \sum_{mnpl}\left(A_{mnpl}f_{(1)}^{\alpha\beta} + B_{mnpl}f_{(2)}^{\alpha\beta} + C_{mnpl}f_{(3)}^{\alpha\beta} + D_{mnpl}f_{(0)}^{\alpha\beta}\right), \qquad (2.2.58)$$

но в отличие от предыдущих случаев $f_{(\gamma)}^{\alpha\beta}\,(mnpl)$ $(\gamma = 1,\ 2,\ 3,\ 0)$ — известные функции сферических координат [19], причем

$$\bar\theta = \frac{\pi(\theta+\pi/2)}{\theta_2+\pi/2},\quad \bar\varphi = \frac{\pi(\varphi-\varphi_1)}{\varphi_2-\varphi_1},\quad \bar r = \pi\frac{a_{cq}}{a}\frac{r}{x_0},\quad \bar{x}^0 = \frac{\pi x^0}{x_2^0}. \qquad (2.2.58')$$

Параметры $A_{mnpl}, \ldots, D_{mnpl}$ подчинены уравнениям (2.2.22) и определяются в результате их решения. Коэффициенты $F_{\gamma\beta}\,(mnplijkq)$ уравнений вычисляются по формулам (2.2.23), однако интегралы $F_{\gamma\beta}^{(k)}\,(mnplijkq)$ $(k = 1, \ldots, 4)$ следующие:

$$F_{\gamma\beta}^{(1)} = -\frac{(\theta_2+\pi/2)(\varphi_2-\varphi_1)}{\pi^9}(x_2^0)^4\int\!\!\int\!\!\int_0^{\pi}\!\!\int\left(\frac{a}{a_{cq}}\right)^3 A_{\gamma\beta}^{(1)}\,\bar r^2\,(\bar{x}^0)^3 \times$$
$$\times\cos\frac{\theta_2+\pi/2}{\pi}\,\bar\theta\, d\bar\theta\, d\bar\varphi\, d\bar r\, d\bar{x}^0,$$

$$F_{\gamma\beta}^{(2)} = -\frac{(\theta_2+\pi/2)(\varphi_2-\varphi_1)}{\pi^9}(x_2^0)^4\int\!\!\int\!\!\int_0^{\pi}\!\!\int\left(\frac{a}{a_{cq}}\right)^3 A_{\gamma\beta}^{(2)}\,\bar r^2\,(\bar{x}^0)^3 \times$$
$$\times\cos\frac{\theta_2+\pi/2}{\pi}\,\bar\theta\, d\bar\theta\, d\bar\varphi\, d\bar r\, d\bar{x}^0, \qquad (2.2.59)$$

$$F^{(3)}_{\gamma\beta}=-\frac{(\theta_2+\pi/2)(\varphi_2-\varphi_1)}{\pi^{10}}(x_2^0)^5\int\int\int_0^{\pi}\int\left(\frac{a}{a_{cq}}\right)^3\int_0^{x^0}\widetilde{R}(\bar{x}^0\bar{y}^0)\times$$

$$\times A^{(1)}_{\gamma\beta}(\bar{x}^0\bar{y}^0)\,d\bar{y}^0\,\bar{r}^2(\bar{x}^0)^3\cos\frac{\theta_2+\pi/2}{\pi}\bar{\theta}d\bar{\theta}d\bar{\varphi}d\bar{r}d\bar{x}^0,$$

$$F^{(4)}_{\gamma\beta}=-\frac{(\theta_2+\pi/2)(\varphi_2-\varphi_1)}{\pi^{10}}(x_2^0)^5\int\int\int_0^{\pi}\int\left(\frac{a}{a_{cq}}\right)^3\int_0^{\bar{x}^0}(\widetilde{R}_1(\bar{x}^0\bar{y}^0)-$$

$$-\widetilde{R}(\bar{x}^0\bar{y}^0))\,A^{(2)}_{\gamma\beta}(\bar{x}^0\bar{y}^0)\,d\bar{y}^0\bar{r}^2(\bar{x}^0)^3\cos\frac{\theta_2+\pi/2}{\pi}\bar{\theta}d\bar{\theta}d\bar{\varphi}d\bar{r}d\bar{x}^0.$$

Их подынтегральные выражения определяются по формулам (2.2.24′), причем функции $f^{\alpha\beta}_{(\gamma)}$ должны быть записаны в сферических координатах.

Свободные члены $L_\beta(ijkq)$ уравнений вычисляются по формулам (2.2.25), однако интегралы $L^{(l)}_\beta(ijkd)$, входящие в эти формулы, в этом случае имеют вид:

$$L^{(1)}_\beta=-(x_2^0)^4\frac{(\theta_2+\pi/2)(\varphi_2-\varphi_1)}{\pi^9}\int\int\int_0^{\pi}\int\left(\frac{a}{a_{cq}}\right)^3 B^{(1)}_\beta\bar{r}^2(\bar{x}^0)^3\times$$

$$\times\cos\frac{\theta_2+\pi/2}{\pi}\bar{\theta}d\bar{\theta}d\bar{\varphi}d\bar{r}d\bar{x}^0,$$

$$L^{(2)}_\beta=-(x_2^0)^4\frac{(\theta_2+\pi/2)(\varphi_2-\varphi_1)}{\pi^9}\int\int\int_0^{\pi}\int\left(\frac{a}{a_{cq}}\right)^3 B^{(2)}_\beta\bar{r}^2(\bar{x}^0)^3\times$$

$$\times\cos\frac{\theta_2+\pi/2}{\pi}\bar{\theta}d\bar{\theta}d\bar{\varphi}d\bar{r}d\bar{x}^0,$$

$$L^{(4)}_\beta=-(x_2^0)^5\frac{(\theta_2+\pi/2)(\varphi_2-\varphi_1)}{\pi^{10}}\int\int\int_0^{\pi}\int\left(\frac{a}{a_{cq}}\right)^3\int_0^{\bar{x}^0}\widetilde{R}(\bar{x}^0\bar{y}^0)\,B^{(1)}_\beta(\bar{x}^0\bar{y}^0)\,d\bar{y}^0\times$$

$$\times\bar{r}^2(\bar{x}^0)^3\cos\frac{\theta_2+\pi/2}{\pi}\bar{\theta}d\bar{\theta}d\bar{\varphi}d\bar{r}d\bar{x}^0, \qquad (2.2.60)$$

$$L^{(5)}_\beta=-(x_2^0)^5\frac{(\theta_2+\pi/2)(\varphi_2-\varphi_1)}{\pi^{10}}\int\int\int_0^{\pi}\int\left(\frac{a}{a_{cq}}\right)^3\int_0^{\bar{x}^0}(\widetilde{R}_1(\bar{x}^0\bar{y}^0)-\widetilde{R}(\bar{x}^0\bar{y}^0))\times$$

$$\times B^{(2)}_\beta(\bar{x}^0\bar{y}^0)\,d\bar{y}^0\,\bar{r}^2(\bar{x}^0)\cos\frac{\theta_2+\pi/2}{\pi}\bar{\theta}d\bar{\theta}d\bar{\varphi}d\bar{r}d\bar{x}^0,$$

$$L_\beta^{(6)} = -(x_2^0)^4 \frac{(\theta_2+\pi/2)(\varphi_2-\varphi_1)}{\pi^9} \iiint\!\!\int_0^{\pi}\!\!\int \left(\frac{a}{a_{cq}}\right)^3 B_\beta^{(6)} \bar{r}^2 (\bar{x}^0)^3 \times$$

$$\times \cos\frac{\theta_2+\pi/2}{\pi} \bar{\theta} d\bar{\theta} d\bar{\varphi} d\bar{r} d\bar{x}^0,$$

$$L_\beta^{(8)} = -(x_2^0)^2 \frac{(\varphi_2-\varphi_1)}{\pi^5} \int_0^{\pi}\!\!\int \left(\frac{a}{a_{cq}}\right)^2 B_\beta^{(8)} \bar{r} (\bar{x}^0)^2 \cos(\theta_2+\pi/2)\, d\bar{r} d\bar{\varphi}.$$

Их подынтегральные выражения определяются по формулам (2.2.26′), в которых вместо $T_{(0)}^{\alpha\beta}$ следует подставить компоненты тензора (T_0) области возмущений I, функции $f_{(\gamma)}^{\alpha\beta}$ должны быть записаны в сферических координатах.

Решение уравнений (2.2.22) находится с помощью процедуры последовательных приближений. В результате будут найдены параметры $A_{mnpl}, \ldots, D_{mnpl}$, следовательно, компоненты тензора $(T_к)$ в первом приближении таковы:

$$T_{(к)}^{\alpha\beta} = (1/\Delta)(\Delta_1 f_{(1)}^{\alpha\beta} + \Delta_2 f_{(2)}^{\alpha\beta} + \Delta_3 f_{(3)}^{\alpha\beta} + \Delta_0 f_{(0)}^{\alpha\beta}). \qquad (2.2.61)$$

Складывая тензоры (T_0) и $(T_к)$, получим тензор кинетических напряжений области возмущений I.

Таким образом, тензор кинетических напряжений $(T)_{нагр}$ построен во всей области возмущений нагрузки.

Вторичной является область возмущений разгрузки (рис. 43), ограниченная свободной поверхностью, включая загруженную часть, и поверхностью фронта волны разгрузки, распространяющейся со скоростью $b = \sqrt{a_V^2 + (4/3)\, v_{(r)}^{02}}$, которой соответствует тензор кинетических напряжений $(T)_{разгр}$. Тензор $(T)_{разгр}$ определяется по формуле (1.4.72), причем тензор $(T)_{нагр}$ известен, а построение тензора $\Delta(T)$ проводится как и для области возмущений нагрузки.

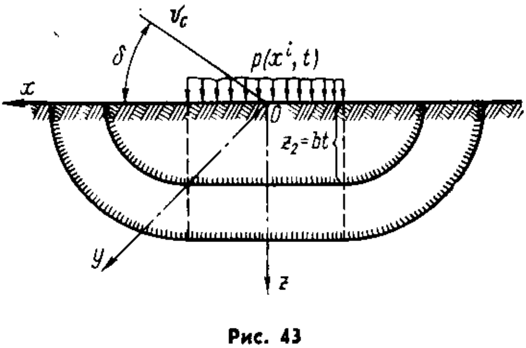

Рис. 43

Как уже отмечалось ранее, при разгрузке наблюдается уменьшение давления, скорости и плотности соответственно на величины Δp, Δv_c и $\Delta\rho$, что приводит к изменению функций нагрузок области возмущений II. Если загруженная область имеет форму прямоугольника, то для координаты z при косом ударе

$$\Delta Q_{(1)}^{33} = \Delta Q_{(1)}^{3} \sin\delta,\ \Delta Q_{(1)}^{31} = \Delta Q_{(1)}^{3} \cos\delta\cos\alpha, \qquad (2.2.62)$$

$$\Delta Q_{(1)}^{32} = \Delta Q_{(1)}^{3} \cos\delta\sin\alpha,\ \Delta Q_{(1)}^{30} = \Delta\rho_s \Delta v_c v_0^{(r)} \sin\delta,$$

где $\Delta Q_{(1)}^{3} = \Delta\rho_s (\Delta v_c)^2 \sin\delta - \Delta p$;

при нормальном ударе

$$\Delta Q^{33}_{(1)} = \Delta Q^{3}_{(1)},\ \Delta Q^{31}_{(1)} = \Delta Q^{32}_{(1)} = 0, \qquad (2.2.63)$$
$$\Delta Q^{30}_{(1)} = \Delta\rho_s \Delta v_c v_0^{(r)},$$

где $\Delta Q^{3}_{(1)} = \Delta\rho_s (\Delta v_c)^2 - \Delta p$; для координаты x^0 имеем: $\Delta Q^{00}_{(1)} = 0$, $\Delta Q^{0i}_{(1)} = 0$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$.

Изменениям функций нагрузок соответствуют функции кинетических напряжений основного тензора

$$\Delta \Pi_i^{(0)} = (1/2)\,(1 + \cos\overline{z})\,\Delta F_{i3} \quad (i = 1,\ 2,\ 3). \qquad (2.2.64)$$

Функции ΔF_{i3} таковы:

$$\Delta F_{13} = \int\limits_{-l_x}^{x}\int\limits_{-l_y}^{y} \Delta Q^{3}_{(1)} \sin\delta\, dy\, dx,$$

$$\Delta F_{23} = \int\limits_{-l_x}^{l_x}\int\limits_{-l_y}^{l_y} \Delta C_{23}(x'\ y') \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}\, dx'\, dy',$$

$$(2.2.65)$$

$$\Delta F_{33} = \int\limits_{-l_x}^{l_x}\int\limits_{-l_y}^{l_y} \Delta C_{33}(x'\ y') \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}\, dx'\, dy',$$

где

$$\Delta C_{23} = 2\sin\delta\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\int\limits_{0}^{x^0} \Delta\rho_s\,\Delta v_c\, v_0^{(r)}\, dx^0\right) - \frac{\partial \Delta\xi}{\partial y},$$

$$\Delta C_{33} = 2\sin\delta\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\int\limits_{0}^{x^0} \Delta\rho_s\,\Delta v_c\, v_0^{(r)}\, dx^0\right) + \frac{\partial \Delta\xi}{\partial x}.$$

Функция $\Delta\xi$ имеет вид

$$\Delta\xi = \sum_{m,n} \frac{2}{\lambda_{mn}} \int\limits_{0}^{x^0} \Delta P_{mn}(y^0) \sin\lambda_{mn}(y^0 - x^0)\, dy^0\, r_{mn}(xy), \qquad (2.2.66)$$

где

$$\Delta P_{mn}(x^0) = \int\limits_{-l_x}^{l_x}\int\limits_{-l_y}^{l_y} \Delta P r_{mn}\, dx\, dy \Bigg/ \int\limits_{-l_x}^{l_x}\int\limits_{-l_y}^{l_y} r^2_{mn}\, dx\, dy$$

— коэффициенты Фурье функции

$$\Delta P = \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta Q^{3}_{(1)} \cos\alpha - \frac{\partial}{\partial y} \Delta Q^{3}_{(1)} \sin\alpha\right) \cos\delta.$$

В результате подстановки (2.2.64) в (1.4.47) и (1.4.46) определяем компоненты тензора $\Delta(T_0^{(1)})$ от самоуравновешенных частей функций нагрузок $\Delta\widetilde{Q}_{(1)}^{3\beta}$, несамоуравновешенные части функций нагрузок $\Delta\overline{Q}_{(1)}^{3\beta}$ характеризуются тензором $\Delta(T_0^{(2)})$ с компонентами (1.4.64), в которых $\overline{Q}_{(1)}^{3\beta}$, $\overline{Q}_{(1)}^{0\beta}$ необходимо заменить соответственно на $\Delta\overline{Q}_{(1)}^{3\beta}$ и $\Delta\overline{Q}_{(1)}^{0\beta} = 0$. Сумма $\Delta(T_0^{(1)}) + \Delta(T_0^{(2)})$ есть основной тензор $\Delta(T_0)$ области возмущений II в декартовых координатах.

Если $\Delta\widetilde{Q}_{(1)}^{3\beta} = 0$, то компоненты основного тензора таковы:

$$\begin{aligned}
\Delta T_{(1)}^{33} &= (1/2)(1+\cos\bar{z})\,\Delta Q_{(1)}^{3}\sin\delta,\\
\Delta T_{(0)}^{13} &= (1/2)(1+\cos\bar{z})\,\Delta Q_{(1)}^{3}\cos\delta\cos\alpha,\\
\Delta T_{(0)}^{23} &= (1/2)(1+\cos\bar{z})\,\Delta Q_{(1)}^{3}\cos\delta\sin\alpha,\\
\Delta T_{(0)}^{30} &= (1/2)(1+\cos\bar{z})\,\Delta Q_{(1)}^{30},
\end{aligned} \tag{2.2.67}$$

остальные компоненты равны нулю.

Корректирующий тензор $\Delta(T_\text{к})$ имеет компоненты

$$\Delta T_{(\text{к})}^{\alpha\beta} = \sum_{mnpl}(\Delta A_{mnpl} f_{(1)}^{\alpha\beta} + \Delta B_{mnpl} f_{(2)}^{\alpha\beta} + \Delta C_{mnpl} f_{(3)}^{\alpha\beta} + \Delta D_{mnpl} f_{(0)}^{\alpha\beta}), \tag{2.2.68}$$

где $f_{(\gamma)}^{\alpha\beta}(mnpl)$ $(\gamma = 1,\ 2,\ 3,\ 0)$ — известные функции координат [19]; безразмерные координаты $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, $\bar{x}^0$ определяются формулами (2.2.21); параметры $\Delta A_{mnpl}, \ldots, \Delta D_{mnpl}$ подчинены уравнениям

$$\sum_{mnpl}(\Delta A_{mnpl}F_{1\beta} + \Delta B_{mnpl}F_{2\beta} + \Delta C_{mnpl}F_{3\beta} + \Delta D_{mnpl}F_{0\beta}) + \Delta L_\beta = 0 \tag{2.2.69}$$

и находятся в результате их решения с помощью процедуры последовательных приближений. Коэффициенты $F_{\gamma\beta}\,(mnplijkq)$ уравнений (2.2.69) вычисляются по формулам (2.2.23), однако функции состояния α_1, α_2 или $\alpha_1^{(b)}$, $\alpha_2^{(b)}$ должны соответствовать упругому или вязкому состоянию среды, скорость a_{cg} следует заменить на $v_0^{(r)}$. Свободные члены $\Delta L_\beta\,(ijkq)$ уравнений (2.2.69) вычисляются по формулам (2.2.25), в которых следует произвести указанную замену функций состояния и скорости a_{cg}, в подынтегральных выражениях (2.2.26′) необходимо заменить $T_{(0)}^{\alpha\beta}$ на $\Delta T_{(0)}^{\alpha\beta}$, v_c на Δv_c, a_{cg} на $v_0^{(r)}$. Дальнейшие вычисления выполняются совершенно аналогично случаю нагрузки. В результате находим компоненты корректирующего тензора $\Delta(T_\text{к})$ области возмущений II в декартовых координатах.

В случае загруженной области, имеющей форму круга, для координаты z имеем:

$$\begin{aligned}
\Delta Q_{(1)}^{33} &= \Delta Q_{(1)}^{3}\sin\delta, \quad \Delta Q_{(1)}^{31} = \Delta Q_{(1)}^{3}\cos\delta,\\
\Delta Q_{(1)}^{30} &= \Delta\rho_s\Delta v_c v_0^{(r)}\sin\delta,
\end{aligned} \tag{2.2.70}$$

где $\Delta Q_{(1)}^{3} = \Delta\rho_s(\Delta v_c)^2\sin\delta - \Delta p$;

при нормальном ударе

$$\Delta Q^{33}_{(1)} = \Delta Q^{3}_{(1)}, \quad \Delta Q^{30}_{(1)} = \Delta\rho_S \Delta v_c v_0^{(r)}, \tag{2.2.71}$$

где $\Delta Q^{3}_{(1)} = \Delta\rho_S (\Delta v_c)^2 - \Delta p$; для координаты x^0

$$\Delta Q^{00}_{(1)} = 0, \quad \Delta Q^{0l}_{(1)} = 0. \tag{2.2.72}$$

Изменениям функций нагрузок соответствуют функции кинетических напряжений основного тензора

$$\Delta\Pi_i^{(0)} = (1/2)\,(1 + \cos\overline{z})\,\Delta F_{i3}. \tag{2.2.73}$$

Функции ΔF_{i3}, входящие в (2.2.73), таковы:

$$\Delta F_{13} = \int\limits_0^\theta\int\limits_0^r r^2\,\Delta Q^{3}_{(1)} \sin\delta\, dr\, d\theta, \qquad \Delta F_{33} = \int\limits_0^r \Delta C_{33}\, dr,$$

$$\Delta F_{23} = \sum_n \frac{1}{r^{n+1}} \int\limits_0^r (\Delta C^{(1)}_{23\,(n)}(r' x_0) \cos n\theta +$$

$$+ \Delta C^{(2)}_{23\,(n)}(r' x^0) \sin n\theta)\, e^{\int 3/r' dr'} \frac{r'^{2n} - r^{2n}}{r'^{n+1}}\, dr'. \tag{2.2.74}$$

Здесь

$$\Delta C^{(1)}_{23(n)} = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \Delta C_{23} \cos n\theta\, d\theta,$$

$$\Delta C^{(2)}_{23(n)} = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \Delta C_{23} \sin n\theta\, d\theta$$

— коэффициенты Фурье функции

$$\Delta C_{23} = 2r \left(r \int\limits_0^{x^0} \frac{\partial}{\partial r}\, \Delta Q^{30}_{(1)}\, dx^0 + 2 \int\limits_0^{x^0} \Delta Q^{30}_{(1)}\, dx^0 \right) - \frac{\partial}{\partial\theta}\,\Delta\xi;$$

функция ΔC_{33} имеет вид

$$\Delta C_{33} = \Delta\xi + \sum_n \frac{n}{r^{n+1}} \int\limits_0^r (\Delta C^{(1)}_{23\,(n)} \cos n\theta -$$

$$- \Delta C^{(2)}_{23(n)} \sin n\theta)\, e^{\int 3/r' dr'} \frac{r'^{2n} - r^{2n}}{r'^{n+1}}\, dr'.$$

Функция $\Delta\xi$ имеет вид

$$\Delta\xi = -2r_0 \sum_{m,n} \beta_m \left[\int_0^{x^0} (\Delta P_{mn}^{(1)}(y^0) \cos n\theta + \right.$$

$$\left. + \Delta P_{mn}^{(2)}(y^0) \sin n\theta) \sin \beta_m \frac{x^0 - y^0}{r_0} dy^0 \, r J_{\sqrt{1+n^2}}\left(\beta_m \frac{r}{r_0}\right) \right], \quad (2.2.75)$$

где

$$\Delta P_{mn}^{(l)} = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \Delta P V_{mn}^{(l)} \, dr d\theta \Bigg/ \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} (V_{mn}^{(l)})^2 \, dr d\theta$$

— коэффициенты Фурье функции $\Delta P = -\frac{\partial}{\partial\theta} (\Delta Q_{(1)}^3 \cos\delta)$.

Подставляя (2.2.73) в (1.4.47) и (1.4.46), получим выражения компонент тензора $\Delta(T_0^{(1)})$ от самоуравновешенных частей функций нагрузок $\Delta \mathring{Q}_{(1)}^{3\beta}$, несамоуравновешенные части функций нагрузок $\Delta\overline{Q}_{(1)}^{3\beta}$ характеризуются тензором $\Delta(T_0^{(2)})$ с компонентами (1.4.64), в которых $\overline{Q}_{(1)}^{3\beta}$, $\overline{Q}_{(1)}^{0\beta}$ следует заменить на $\Delta\overline{Q}_{(1)}^{3\beta}$ и $\Delta\overline{Q}_{(1)}^{0\beta} = 0$. Сумма тензоров $\Delta(T_0^{(1)}) + \Delta(T_0^{(2)})$ есть основной тензор $\Delta(T_0)$ области возмущений II в полярных координатах (r, θ, z, x^0).

Если $\Delta\vec{Q}_{(1)}^{3\beta} = 0$, то компоненты основного тензора соответственно равны:

$$\Delta T_{(0)}^{33} = (1/2)(1 + \cos\bar{z})\, \Delta Q_{(1)}^3 \sin\delta,$$

$$\Delta T_{(0)}^{13} = (1/2)(1 + \cos\bar{z})\, \Delta Q_{(1)}^3 \cos\delta, \quad (2.2.76)$$

$$\Delta T_{(0)}^{30} = (1/2)(1 + \cos\bar{z})\, \Delta Q_{(1)}^3,$$

остальные компоненты равны нулю.

Компоненты корректирующего тензора $\Delta(T_\text{к})$ находятся по формулам (2.2.68), однако функции $f_{(\gamma)}^{\alpha\beta}(mnpl)$ имеют другой вид [19], так как фундаментальные функции имеют вид (2.2.47). Параметры $\Delta A_{mnpl}, \ldots, \Delta D_{mnpl}$ подчинены уравнениям (2.2.69) и определяются в результате их решения. Коэффициенты $F_{\gamma\beta}(mnplijkq)$ уравнений вычисляются по формулам (2.2.23), причем функции состояния должны соответствовать упругому или вязкому состоянию среды, скорости a и a_{cq} следует соответственно заменить на b и $v_0^{(r)}$. Свободные члены $\Delta L_\beta(ijkq)$ уравнений вычисляются по формулам (2.2.25) [при этом производится указанная замена функций состояния и скоростей], в подынтегральных выражениях (2.2.26′) необходимо заменить $T_{(0)}^{\alpha\beta}$ на $\Delta T_{(0)}^{\alpha\beta}$, v_c — на Δv_c, a_{cq} и a — соответственно на $v_0^{(r)}$ и b. Дальнейшие вычисления выполняются в полярных координатах аналогично случаю нагрузки. В результате находим компоненты корректирующего тензора $\Delta(T_\text{к})$ области возмущений II в полярных координатах.

Построение тензора $\Delta(T)$ в любой другой системе координат выполняется аналогично изложенному.

В области возмущений I тензор $\Delta(T)$ строится (так же как при нагрузке) в сферических координатах $(\theta, \varphi, r, x^0)$, при этом учитывается форма области возмущений II. Однако скорости a и a_{cq} следует заменить скоростями b и $v_0^{(r)}$; функции нагрузок $Q_{(1)}^{1\beta}$ и $Q_{(1)}^{\beta}$ заменяются на следующие: для координаты θ

$$\Delta Q_{(1)}^{1\beta} = \Delta T_{II}^{1\beta}, \quad \Delta Q_{(2)}^{1\beta} = (\Delta\rho \Delta v^1 \Delta v^\beta)_s,$$

для координаты x^0

$$\Delta Q_{(1)}^{00} = 0, \quad \Delta Q_{(1)}^{0l} = 0. \tag{2.2.77}$$

Дальнейшее построение тензора $\Delta(T)$ аналогично построению тензора $(T)_{\text{нагр}}$, поэтому тензор $\Delta(T)$ можно считать известным в области возмущений I.

Таким образом, определен тензор кинетических напряжений разгрузки

$$(T)_{\text{разгр}} = (T)_{\text{нагр}} - \Delta(T). \tag{2.2.78}$$

Давление p и скорость частиц v, возникающие при ударе на свободной поверхности среды, нарастают и падают в очень короткий промежуток времени. Для определения закона изменения давления и скорости, вида распределения их на свободной поверхности полупространства, определения продолжительности нагрузки и разгрузки необходимо исследовать процесс соударения и сопровождающих контактных явлений.

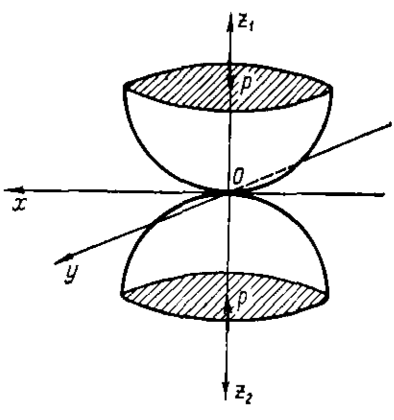

Рис. 44

Прежде всего остановимся на контактной задаче Г. Герца [23, 28] определения статического сжатия двух упругих изотропных тел в предположении, что их поверхности идеально гладкие и заданы уравнениями $z_i = f_i(xy)$ $(i = 1, 2)$ в системе координат $Oxyz_i$ (рис. 44).

Пусть два ненагруженных тела соприкасаются в некоторой точке, причем поверхности в окрестности точки касания имеют определенные нормали и кривизну. Допустим, что на каждое тело действует система активных сил, равнодействующая которых P направлена по внешней нормали к поверхности тела в точке касания со вторым телом.

При статическом равновесии такой системы

$$\iint\limits_{(\omega)} p(xy)\, d\omega = P, \tag{2.2.79}$$

где $p(xy)$ — давление, распределенное по области сжатия (ω), форма и расположение контура которой неизвестны. После сжатия уравнения поверхностей тел имеют вид: $z_1^* = f_1(xy) + w_1 - \delta_1 w_{10} -$

$-\delta_2 w_{20}, z_2^* = f_2(xy) + w_2 - (1-\delta_1) w_{10} - (1-\delta_2) w_{20}$. Здесь w_{i0} — перемещения w первого и второго тел вдоль оси Oz в начальной точке касания; δ_i — некоторые коэффициенты, характеризующие перемещения тел при местном смятии поверхностей тел в окрестности начальной точки касания. Условие контакта тел $z_1^* = z_2^*$ можно записать в виде

$$w_1 + w_2 = \alpha - f(xy), \tag{2.2.80}$$

где $f(xy) = f_1(xy) + f_0(xy)$, $\alpha = w_{10} + w_{20}$ — характеристика местного сжатия. Рассматривая локальное распределение напряжений и считая область контакта (ω) малой по сравнению с поверхностями тел, можно считать, что это распределение незначительно отличается от распределения напряжений в упругом полупространстве с плоской свободной поверхностью, которое находится под действием сил, приложенных в области (ω) свободной поверхности. Это соображение позволяет использовать известное решение Буссинеска [28] и преобразовать соотношение (2.2.80) к виду

$$(\vartheta_1 + \vartheta_2) \iint\limits_{(\omega)} \frac{p(x'\, y')}{r}\, dx'\, dy' = \alpha - f(x,\ y), \tag{2.2.80$'$}$$

где $\vartheta_i = [(1-\nu)/(2\pi G)]_i$ $(i = 1,\ 2)$, $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$; за пределами площади контакта

$$w_1 + w_2 > \alpha - f(xy). \tag{2.2.80$''$}$$

Итак, соотношения (2.2.79) и (2.2.80′) образуют систему уравнений контактной задачи Герца. Решение этой задачи общеизвестно, оно основано на представлении

$$f(xy) = Ax^2 + By^2$$

и имеет вид

$$P = K\alpha^{3/2},\quad K = \frac{4}{3}\, \frac{(\varphi_1 + \varphi_2)}{(\vartheta_1 + \vartheta_2)\sqrt{A+B}} \left(\varphi_3(\overline{K})\right)^{-3/2} \tag{2.2.81}$$

или

$$\alpha = K_1 P^{2/3},\quad K_1 = \left[\frac{3}{4}(\vartheta_1 + \vartheta_2)\right]^{2/3} A^{1/3}\, \frac{\varphi_3(\overline{K})}{\sqrt[3]{\varphi_1(\overline{K})}}, \tag{2.2.82}$$

причем

$$\varphi_1(\overline{K}) = \int\limits_0^\infty \frac{d\bar{\xi}}{\sqrt{(1+\bar{\xi})^3 (\overline{K}^2 + \bar{\xi})(\bar{\xi})}},\quad \varphi_2(\overline{K}) = \int\limits_0^\infty \frac{d\bar{\xi}}{\sqrt{(1+\bar{\xi})(\overline{K}^2 + \bar{\xi})^3\, \bar{\xi}}}, \tag{2.2.83}$$

$$\varphi_3(\overline{K}) = \int\limits_0^\infty \frac{d\bar{\xi}}{\sqrt{(1+\bar{\xi})(\overline{K}^2 + \bar{\xi})\, \bar{\xi}}}.$$

Здесь $\overline{K} = a/b$, $\hat{\xi} = \xi/a^2$; полуоси эллипса контакта

$$a = (\varphi_1 + \varphi_2)^{1/3} \sqrt[3]{\frac{3P(\vartheta_1+\vartheta_2)}{4(A+B)}}, \quad b = (\varphi_1 + \varphi_2)^{1/3} \frac{1}{\overline{K}} \sqrt{\frac{3P(\vartheta_1+\vartheta_2)}{4(A+B)}}.$$

Приведенное решение статической контактной задачи Герц счел возможным применить при изучении удара упругих тел в тех случаях, когда продолжительность удара значительно превосходила время прохождения прямой и обратной упругих волн по соударяющимся телам, т. е. когда можно пренебречь колебаниями, вызванными соударением. В этом случае сила удара $P = \ddot{\alpha}/K_2$, где $K_2 = (m_1 + m_2)/(m_1 m_2)$, m_i $(i = 1, 2)$ — массы тел.

Интегрируя уравнения движения соударяющихся тел

$$\ddot{\alpha} + K_2 K \alpha^{3/2} = 0$$

с учетом начальных условий $\dot{\alpha} = v_c$, $\alpha = 0$ при $t = 0$, находим

$$\dot{\alpha}^2 - v_c^2 = -(4/5) K_2 K \alpha^{5/2}. \tag{2.2.84}$$

Откуда следует, что наибольшее смятие

$$\alpha_{\max} = ((5/4) K_2 K v_c^2)) \tag{2.2.84'}$$

и максимальное значение силы соударения

$$P_{\max} = K ((5/4) K_2 K v_c^2)^{3/5}. \tag{2.2.84''}$$

Интегрируя (2.2.84), находим

$$t = \int_0^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{v_c^2 - 4/5 (K_2 K \alpha^{5/2})}}. \tag{2.2.85}$$

При $\alpha = \alpha_{\max}$ зависимость (2.2.85) определяет продолжительность контакта при соударении:

$$\tau = 2 \int_0^{\alpha_{\max}} \frac{d\alpha}{\sqrt{v_c^2 - (4/5) K_2 K \alpha^{5/2}}}. \tag{2.2.85'}$$

При ударе шара радиуса R о свободную плоскость полупространства упругой среды имеем:

$$A = B = \frac{1}{2R}, \quad K_2 = \frac{1}{m} = \frac{3}{4\pi\rho R^3}, \quad K = \frac{4}{3\pi} \sqrt{R} \frac{1}{\vartheta_1 + \vartheta_2},$$

$$\alpha_{\max} = \left[\frac{15\pi v_c^2 (\vartheta_1 + \vartheta_2) m}{16\sqrt{R}}\right]^{2/5}, \quad \tau = 4{,}53 \left[\frac{(\vartheta_1 + \vartheta_2) m}{\sqrt{R} v_c}\right]^{2/5},$$

$$P_{\max} = 0{,}2515 \left[\frac{v_c^2}{(\vartheta_1 + \vartheta_2)^4} \frac{m}{R^3}\right]^{1/5}.$$

Для проверки законности применения статической зависимости (2.2.81) к решению задачи о соударении упругих тел сравним продолжительность контакта τ с периодом медленных собственных колебаний соударяемых тел $T_{\max}$, используя для этого шары радиуса R, наибольший период колебаний которых приближенно равен $T_{max} \approx \approx 2{,}5\, R/a_0$, где a_0 — скорость распространения волн сжатия. Отношение $\frac{\tau}{T_{max}} = \left(\frac{2{,}9432}{v_c^{1/5}}\right)\left(\frac{5}{4K_2K}\right)^{2/5}\left(\frac{a_0}{2{,}5\,R}\right)$ имеет порядок $(a/v_c)^{1/5}$, но $a_0 = 5000$ м/с, следовательно, всегда можно указать интервал изменения скорости v_c, где $a_0/v_c \gg 1$, и решение Герца применимо.

Обобщение теории удара Герца, предложенное Н. А. Кильчевским [23], основано на применении интегрального преобразования Лапласа—Карсона к динамическим уравнениям упругости

$$G\left[\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu}\,\mathrm{grad\,div}\,\mathbf{u}\right] + \rho \mathbf{F} = \rho\,\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2},$$

начальным и граничным условиям задачи. В этом случае динамическая задача по определению перемещений, напряжений и деформаций сводится к статической задаче относительно изображений этих же величин. Учитывая аналогию между задачей Герца в пространстве изображений и статической задачей, находим

$$\alpha^* = K_1 P^{*2/3}. \tag{2.2.86}$$

Принятие этой зависимости аналогично принятию основной гипотезы Герца в теории удара, однако, как отмечает Н. А. Кильчевский, относительная погрешность, связанная с использованием равенства (2.2.86) для изображений, меньше, чем погрешность, которая возникает при введении соотношения (2.2.83) в пространстве оригиналов (равенства (2.2.86) и (2.2.82) не эквивалентны). Кильчевский оценил погрешность такого квазистатического решения, сравнивая его с точным решением задачи, основанным на использовании метода Сомильяна интегрирования динамических уравнений упругости. В результате установлено, что погрешность не превышает 20%, следовательно, при вычислении давления и скорости можно ограничиться квазистатическим решением.

Предложенные Н. А. Кильчевским уточнения квазистатической теории Герца соударения трехмерных упругих тел, основанные на учете динамических эффектов, не внесли существенных поправок и подтверждают ее справедливость; при этом следует отметить, что теория соударения Герца экспериментально подтверждена многими исследователями. Следует отметить также, что вывод Б. М. Малышева [2, 3, 31, 29] о том, что уточненная теория соударения Н. А. Кильчевского лучше согласуется с опытом, чем теория Герца, неверен. Ошибочность такого утверждения объясняется тем, что при расчете продолжительности удара τ по теории Герца вместо скорости распространения пространственных волн сжатия была взята скорость распространения волн в стержне.

Влияние волн напряжений на процесс соударения трехмерных упругих тел рассматривалось Б. М. Малышевым [29], который экспериментально изучал продолжительность удара τ стальной линзы по массивному телу с плоскостью. Линза имела сферическую поверхность с центром в точке контакта, возникающие при ударе сферические волны сжатия после отражения от свободной поверхности фокусировались в точке контакта. Полученные данные о продолжительности удара согласуются с теорией Герца даже в случае наиболее неблагоприятных условий для подтверждения этой теории, когда учитывается влияние волн напряжений. Показано также, что при расчете по формуле Н. А. Кильчевского для контактной силы $P(t)$ получаем больший импульс за время удара, чем по теории Герца, что не согласуется с опытным фактом (одинаковые упругие тела после удара почти точно обмениваются скоростями, и кинетическая энергия тел не возрастает). Объяснение этому противоречию дано в статье [25], там же указан способ его устранения.

При плотном начальном касании поверхностей контактирующих тел вращения формула (2.2.86) принимает вид

$$\alpha = K_1 P^{(2n)/(2n+1)}, \tag{2.2.86'}$$

где

$$K_1 = \left[\frac{2\cdot 4\ldots 2n}{1\cdot 3\ldots (2n-1)} A\right]\left[\frac{2n+1}{2n}\,\frac{1\cdot 3\ldots (2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\,\frac{\pi(\vartheta_1+\vartheta_2)}{2A}\right]^{(2n)/(2n+1)}.$$

Итак, можно считать обоснованной квазистатическую теорию соударения упругих тел.

Рассмотренное упругое соударение тел соответствует малым скоростям, поэтому возникает необходимость заменить решение Герца таким решением, которое учитывало бы пластические деформации при контакте, что можно сделать только полуэмпирическим путем (в силу сложности процесса пластического деформирования).

Предположим, что в процессе нагрузки после превышения предела упругости местная деформация состоит из упругой и пластической и что при разгрузке пластическая деформация сохраняется. В соответствии с эмпирическим законом Герстнера считаем, что упругие деформации при нагрузке развиваются независимо от пластической. Зависимость между сжимающей силой P и упругой частью местного сжатия $\alpha^{(e)}$ соответствует решению Герца

$$\alpha^{(e)} = K_1 P^{2/3}; \tag{2.2.87}$$

зависимость между пластической частью местного сжатия $\alpha^{(p)}$ и сжимающей силой устанавливается полуэмпирически: при нагрузке $\alpha^{(p)} = \varkappa P$, при разгрузке

$$\alpha^{(p)} = \varkappa P_{\max} = \text{const}, \tag{2.2.87'}$$

где $\varkappa$ — коэффициент пропорциональности, определяемый экспериментально.

Таким образом, при нагрузке имеем:

$$\alpha = \alpha^{(e)} \text{ при } \sigma_i < \sigma_\text{т},\quad \alpha = \alpha^{(e)} + \alpha^{(p)} \text{ при } \sigma_i > \sigma_\text{т}; \tag{2.2.88}$$

при разгрузке $\alpha = \alpha^{(e)} + \alpha^{(p)}_{\max}$.

Учитывая (2.2.87), окончательно получим: при нагрузке

$$\alpha = K_1 P^{2/3} + \varkappa P,$$

при разгрузке

$$\alpha = K_1 P^{2/3} + \alpha^{(p)}_{\max}. \tag{2.2.89}$$

В случае чисто пластического процесса деформирования соударяющихся тел упругая составляющая $\alpha^{(e)}$ отсутствует, тогда при нагрузке $\alpha = \varkappa P^q$, при разгрузке

$$\alpha = \varkappa P^q_{\max}, \tag{2.2.90}$$

где q — характеристика свойств материала, определяемая экспериментально. Зависимости (2.2.89) и (2.2.90) являются частными случаями общего соотношения

$$\alpha = K_1 P^{2/3} + \varkappa P^q. \tag{2.2.91}$$

При ударе жесткой сферы, радиус которой R и масса m, со скоростью v_c в пластическую среду с плоской свободной поверхностью ($\varkappa = (2\pi R\sigma_т)^{-1}$, $q = 1$) уравнение движения имеет вид

$$\ddot{\alpha} + 2\pi R\sigma_т \alpha/m = 0,$$

его решение

$$\alpha = v_c \sqrt{m/2\pi R\sigma_т} \sin \sqrt{(2\pi R\sigma_т/m)}\, t. \tag{2.2.92}$$

Максимальное смятие

$$\alpha_{\max} = v_c \sqrt{m/2\pi R\sigma_т} \tag{2.2.92$'$}$$

наблюдается в момент времени

$$\tau = \pi/2 \sqrt{m/2\pi R\sigma_т}, \tag{2.2.92$''$}$$

которым определяется продолжительность контакта.

Решение Герца можно распространить на вязкоупругие тела и среды, в частности на среду Больцмана, для которой средняя деформация не зависит от скорости деформирования, а деформация формоизменения характеризуется функцией релаксации $\Gamma_к(t)$. Этой функции соответствует соотношение

$$\sigma_{ij} = 2G \left(e_{ij} - \int_0^t \Gamma_к (t - \tau)\, de_{ij}(\tau) \right),$$

причем $\Gamma_к(0) = 0$, $\Gamma_к(\infty) = 1$, и ее можно представить в виде ряда

$$G\Gamma_к(t) = \sum_i G_i (1 - \exp(-t/\tau_i)).$$

При соударении закругленного металлического тела массы m_2 с вязкоупругим телом, масса которого m_1, величина ϑ_2 мала по сравнению с ϑ_1. *Предположим*, что площади контакта тел неизменны во времени и что давление распределено по эллипсоиду. Применяя преобразование Лапласа

$$L(f(t)) \equiv \int_0^t f(t) \exp(-st)\, dt, \tag{2.2.93}$$

получим изображение решения Герца для вязкоупругого тела:

$$L(\alpha^{3/2}) = \frac{3}{4}\frac{\sqrt{A+B}}{q}\left[\frac{K_1}{4\pi G_1(1-L(\dot{\Gamma}_к))[K_1+(G_1/3)(1-L(\dot{\Gamma}_к))]} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{3\pi[K_1+(G_1/3)(1-L(\dot{\Gamma}_к))]}\right] L(P), \quad (2.2.94)$$

где $q = (\varphi_1 + \varphi_2)^{1/2}\varphi_3^{-3/2}$.

Для большинства вязкоупругих тел вторым слагаемым в (2.2.94) можно пренебречь, а также считать $G(1 - L(\dot{\Gamma}_к)) \ll 3K$. Тогда оригинал, соответствующий изображению (2.2.94),

$$P(t) = \frac{16\pi}{3}\frac{q}{\sqrt{A+B}} G_1\left(\alpha^{3/2} - \int_0^t \dot{\Gamma}_к(t-\tau)\,\alpha^{3/2}(\tau)\,d\tau\right) \quad (2.2.95)$$

выражает приближенный закон деформации вязкоупругого тела.

Местное смятие α тел при соударении удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$m\ddot{\alpha} = -\frac{16\pi}{3}\frac{q}{\sqrt{A+B}} G_1\left[\alpha^{3/2} - \int_0^t \dot{\Gamma}_к(t-\tau)\,\alpha^{3/2}(\tau)\,d\tau\right], \quad (2.2.96)$$

которое следует решать совместно с начальными условиями:

$$\alpha = 0,\ \dot{\alpha} = v_c \ \text{при}\ t = 0. \quad (2.2.97)$$

Таким образом, все вышеизложенное позволяет определить давление p и скорость v, входящие в приведенное ранее решение. Приближенно считаем, что давление p и скорость частиц v изменяются во времени по законам: в случае нагрузки при $0 \leqslant t \leqslant t_p$

$$p(t) = p_0 + p_1 t^m,\quad v(t) = v_c + v_1 t^n, \quad (2.2.98)$$

где p_1, m — характеристики давления; v_1, n — характеристики скорости частиц, определяемые из вышеприведенных соображений;

в случае разгрузки при $t_p \leqslant t \leqslant \tau$

$$\begin{aligned} p(t) &= p_{max}\exp[-\alpha(t - t_p)],\\ v(t) &= v_{max}\exp[-\beta(t - t_p)], \end{aligned} \quad (2.2.98')$$

где α, p_{max} — характеристики давления, причем

$$p_{max} = p_0 + p_1 t_p^m; \quad (2.2.99)$$

β, v_{max} — характеристики скорости, причем

$$v_{max} = v_c + v_1 t_p^n; \quad (2.2.99')$$

α и β определяются на основе вышеизложенных соображений о процессе соударения тел. Изменения давления и скорости частиц при разгрузке таковы:

$$\begin{aligned} \Delta p &= p_{\max} [1 - \exp(-\alpha (t - t_p))], \\ \Delta v &= v_{\max} [1 - \exp(-\beta (t - t_p))]. \end{aligned} \tag{2.2.100}$$

Итак, задача об ударе тела в полупространство, занятое средой, имеет законченный вид.

§ 3. Удар в преграду конечной толщины

Рассмотрим состояние преграды конечной толщины при ударе. *Преградой конечной толщины* называется область, заполненная средой с известными физико-механическими свойствами и ограниченная двумя поверхностями бесконечной протяженности, которые расположены друг от друга на расстоянии h, принятом за ее толщину.

В зависимости от формы ограничивающих поверхностей преграды могут быть плоскими и кривыми (для плоской преграды ограничивающими поверхностями являются плоскости).

Пусть тело массы m ударяется в преграду со скоростью v_c. В результате в теле и преграде образуются области возмущений, вызванные распространением волн напряжений различной природы. Напряженно-деформированное состояние области возмущений характеризуется тензором напряжений (σ) и тензором деформаций (e), движение частиц в этой области описывается вектором скорости $\mathbf{v}$ и плотностью ρ. Указанным характеристикам напряженно-деформированного состояния преграды и движения частиц в области возмущений ставится в соответствие тензор кинетических напряжений (T), принимаемый за основную искомую величину.

Зная тензор (T), по формулам (1.3.49) определяем компоненты тензора напряжений (σ), вектора скорости частиц $\mathbf{v}$ и плотность ρ преграды в рассматриваемой области возмущений.

Первичной является область возмущений нагрузки, ограниченная частью свободной поверхности преграды, включая ее загруженную область, и поверхностью переднего фронта волны нагрузки, который распространяется с конечной скоростью a_0. Область возмущений нагрузки произвольна, форма ее зависит от вида загруженной части свободной поверхности преграды и может быть прямоугольной, круглой или другой со сферическим окаймлением (при ударе плоским торцом тела), сферической (при ударе шара и тела другой формы с малой площадкой контакта).

Построение тензора кинетических напряжений (T) для области возмущений нагрузки полупространства подробно изложено в предыдущем параграфе, полученными результатами можно воспользоваться в данном случае. Для области возмущений II тензор кинетических напряжений $(T)_{\text{нагр}}$ зависит от формы загруженной части свободной поверхности преграды. Если она имеет форму прямоугольника, то компоненты основного тензора (T_0) определяются по формулам (2.2.19), компоненты корректирующего тензора ($T_к$) — по формулам (2.2.27), если форму круга, то компоненты основного тензора определяются по формулам (2.2.46), компоненты корректирующего тензора — по формулам (2.2.27), однако определители Δ и Δ_γ $(\gamma = 1, 2, 3, 0)$ содержат интегралы (2.2.48) и (2.2.49), в которые входят функции $f_\gamma^{\alpha\beta}$ $(mnpl)$ координат r, θ. Для области возмущений I компоненты основного тензора определяются по формулам (2.2.57), компоненты корректирующего тензора — по формулам (2.2.61), однако определители Δ и Δ_γ содержат интегралы (2.2.59) и (2.2.60), в которые входят функции $f_{(\gamma)}^{\alpha\beta}$ сферических координат.

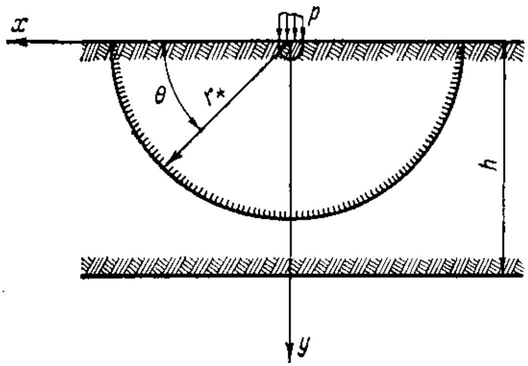

Рис. 45

Итак, тензор кинетических напряжений $(T)_{\text{нагр}}$ для области возмущений нагрузки найден.

При ударе шара или тела с малой площадкой контакта область возмущений нагрузки является сферической радиуса $r_* = (a/a_{cq})\, x^0$, в которой построение тензора (T) отличается от вышеизложенного и выполняется для всей области возмущений нагрузки. Текущие координаты θ, φ, r, x^0 изменяются в следующих пределах (рис. 45):

$$0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad r_1 \leqslant r \leqslant r_*, \quad 0 \leqslant x^0 \leqslant x_2^0, \tag{2.3.1}$$

где r_1 — характерный размер площадки контакта.

Удар имитируется приложением давления p на малой площадке контакта и сообщением скорости v_c частицам этой площадки. Величины давления и скорости определяются в результате решения задачи о соударении тела с преградой. Для задачи о напряженном состоянии преграды в области возмущений нагрузки имеем следующие граничные условия:

$$T^{3\beta} = Q_{(1)}^{3\beta} \text{ при } r = r_1, \; w_i = 0 \text{ при } r = r_*, \; T^{0\beta} = Q_{(1)}^{0\beta} \text{ при } x^0 = 0. \tag{2.3.2}$$

Здесь функции нагрузок $Q_{(1)}^{(\alpha\beta)}$ имеют следующий вид: при ударе под углом δ

$$\begin{gathered} Q_{(1)}^{(33)} = Q_{(1)}^{3} \sin\delta, \quad Q_{(1)}^{(31)} = Q_{(1)}^{3} \cos\delta\cos\alpha, \\ Q_{(1)}^{(32)} = Q_{(1)}^{3} \cos\delta\sin\alpha, \quad Q_{(1)}^{(30)} = \rho_s a_{cq} v_c \sin\delta, \\ Q_{(1)}^{(00)} = \rho_0 a_{cq}^2, \quad Q_{(1)}^{(01)} = Q_{1}^{0} \cos\delta\cos\alpha, \\ Q_{(1)}^{(02)} = Q_{(1)}^{0} \cos\delta\sin\alpha, \quad Q_{(1)}^{(03)} = Q_{(1)}^{0} \sin\delta, \end{gathered} \tag{2.3.3}$$

где $Q_{(1)}^{33} = \rho_s v_c^2 \sin\delta - p$, $Q_{(1)}^{0} = \rho_0 a_{cq} v_c$;

при ударе по нормали (под углом $\delta = \pi/2$):

$$Q_1^{33} = Q^3_{(1)}, \quad Q^{(31)}_{(1)} = Q^{(32)}_{(1)} = 0, \tag{2.3.4}$$

$$Q^{(30)}_{(1)} = \rho_s a_{cq} v_c, \quad Q^{(03)}_{(1)} = Q^0_{(1)}, \quad Q^{(00)}_{(1)} = \rho_0 a^2_{cq}, \quad Q^{(01)}_{(1)} = Q^{(02)}_{(1)} = 0,$$

где $Q^3_{(1)} = \rho_s v_c^2 - p, \quad Q^0_{(1)} = \rho_0 a_{cq} v_c$.

Тензор кинетических напряжений $(T)_{\text{нагр}}$ можно представить в виде суммы основного (T_0) и корректирующего ($T_\text{к}$) тензоров, построение которых в общем случае рассмотрено [19].

Для координаты r функции кинетических напряжений принимаются в виде

$$\Pi^0_{\alpha 3} = (1/2)\,(1 + \cos \bar{r})\, F_{\alpha 3} \quad (\alpha = 1,\ 2,\ 3,\ 0). \tag{2.3.5}$$

Здесь $\bar{r} = \pi\,(r - r_1)/[(a_0/a_{cq})\, x^0 - r_1]$ — безразмерная координата.

Функции $F_{\alpha 3}$, входящие в (2.3.5), удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\sin^2\theta \frac{\partial^2 F_{03}}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 F_{03}}{\partial\varphi^2} + \sin\theta\cos\theta \frac{\partial F_{03}}{\partial\theta} + 2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) F_{03} = 0,$$

$$\frac{\partial^3 F_{23}}{\partial\theta\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(\sin^2\theta \frac{\partial F_{23}}{\partial\theta} + \sin\theta\cos\theta F_{23}\right) - 2\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin^2\theta F_{23}) +$$

$$+ r_1^2 \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin^2\theta \frac{\partial^2 F_{23}}{\partial x^{0^2}}\right) - 2\left(\sin^2\theta \frac{\partial F_{23}}{\partial\theta} + \sin\theta\cos\theta F_{23}\right) = -2r_1^2 A_{31}, \tag{2.2.6}$$

$$\frac{\partial^2 F_{13}}{\partial\theta\partial\varphi} = B_{31},$$

$$\frac{\partial^2 F_{33}}{\partial\theta^2} - \operatorname{ctg}\theta \frac{\partial F_{33}}{\partial\theta} + 2F_{33} - r_1^2 \frac{\partial^2 F_{33}}{\partial x^{0^2}} = C_{31},$$

где

$$A_{31} = r_1\left[\sin^2\theta Q^{(33)}_{(1)} + \frac{\partial}{\partial\theta}(\sin^2\theta Q^{(33)}_{(1)})\right] - \int_0^{x_0} \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(\sin^2\theta Q^{(30)}_{(1)})\, dx^0,$$

$$B_{31} = r_1 \sin\theta\left[r_1^3 \sin\theta Q^{(33)}_{(1)} - \left(\sin\theta \frac{\partial F_{23}}{\partial\theta} + \cos\theta F_{23}\right)\right],$$

$$C_{31} = 2r_1^3 \sin\theta Q^{(32)}_{(1)} + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial F_{23}}{\partial\theta} - \operatorname{ctg}\theta F_{23}\right) -$$

$$- \frac{2}{r_1}\int_0^{\varphi}\left(B_{31} + \operatorname{ctg}\theta \int_0^{\theta} B_{31}\, d\theta\right) d\varphi,$$

и граничным условиям:

$$F_{\alpha 3} = 0, \quad \frac{\partial F_{23}}{\partial\theta} = 0 \text{ при } \theta = 0 \text{ и } \theta = \pi \quad (\alpha = 1, 2, 3, 0),$$

по координате φ функции периодические (период 2π);

$$F_{23}=0,\ \frac{\partial F_{23}}{\partial x^0}=0,\ F_{33}=0,\ \frac{\partial F_{33}}{\partial x^0}=0 \text{ при } x^0=0. \tag{2.3.7}$$

Первое из уравнений (2.3.6) и нулевые граничные условия (2.3.7) выполняются в случае, если

$$F_{03}=0. \tag{2.3.8}$$

Для второго из уравнений (2.3.6) собственные функции $V_{mn}(\theta, \varphi)$ определяются уравнением

$$\frac{\partial^3 V}{\partial\theta\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(\sin^2\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}+\sin\theta\cos\theta V\right)-$$
$$-(4+\lambda^2 r_1^2)\left(\sin^2\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}+\cos\theta\sin\theta V\right)-(2+\lambda^2 r_1^2)\sin\theta\cos\theta V=0, \tag{2.3.9}$$

условием периодичности с периодом 2π по координате φ и нулевым граничным условием по координате θ:

$$V=0,\quad \frac{\partial V}{\partial\theta}=0 \text{ при } \theta=0,\ \theta=\pi. \tag{2.3.9$'$}$$

Уравнение (2.3.9) и граничные условия (2.3.9′) показывают, что в рассматриваемом случае имеют место две системы собственных функций:

$$V_{mn}^{(1)}=\Theta_m^{(1)}(\theta)\cos n\varphi,\quad V_{mn}^{(2)}=\Theta_m^{(2)}(\theta)\sin n\varphi$$
$$(m=1,\ 2,\ \ldots;\ n=0,\ 1,\ \ldots), \tag{2.3.10}$$

причем функции $\Theta_m^{(j)}(\theta)$ $(j=1,\ 2)$ подчинены уравнению

$$\sin^2\theta\Theta'''+5\sin\theta\cos\theta\Theta''+$$
$$+[4\cos 2\theta-n^2-(4+\lambda^2r_1^2)\sin^2\theta]\,\Theta'-(5+\lambda^2r_1^2)\sin 2\theta\Theta=0 \tag{2.3.11}$$

и граничным условиям: $\Theta=0,\ \Theta'=0$ при $\theta=0,\ \theta=\pi$.

Уравнение (2.3.11) можно преобразовать к виду

$$\frac{d}{d\theta}L(\Theta)+A(\theta)L(\Theta)=0, \tag{2.3.12}$$

которому, очевидно, удовлетворяют решения уравнения

$$L(\Theta)=f(\theta)\Theta''+g(\theta)\Theta'+h(\theta)\Theta=0, \tag{2.3.13}$$

причем функции $f(\theta)$, $g(\theta)$, $h(\theta)$ и $A(\theta)$ выбираются так, чтобы уравнения (2.3.11) и (2.3.12) были тождественны. Это приводит к следующим соотношениям:

$$f=\sin^2\theta,\ f'+g+Af=5\sin\theta\cos\theta,$$
$$g'+h+Ag=4\cos 2\theta-n^2-(4+\lambda^2r_1^2)\sin^2\theta,$$
$$h'+Ah=-(10+2\lambda^2r_1^2)\sin\theta\cos\theta,$$

откуда следует, что

$$f = \sin^2\theta,\; g = 3\sin\theta\cos\theta - A\sin^2\theta, \tag{2.3.13'}$$

$$h = \cos 2\theta - n^2 - (4 + \lambda^2 r_1^2)\sin^2\theta - A\sin\theta\cos\theta + (A' + A^2)\sin^2\theta;$$

при этом функция $A(\theta)$ удовлетворяет уравнению

$$A'' - 2A^3 - (\lambda^2 r_1^2 - 2 + n^2/\sin^2\theta)A = 0. \tag{2.3.14}$$

Учитывая (2.3.13'), запишем уравнение (2.3.13) в развернутом виде:

$$\sin^2\theta\Theta'' + 3\sin\theta\cos\theta\Theta' + (\cos 2\theta - n^2 - (4 + \lambda^2 r_1^2)\sin^2\theta)\Theta - [A\sin^2\theta\Theta' + (A\sin\theta\cos\theta - (A' + A^2)\sin^2\theta)\Theta] = 0. \tag{2.3.15}$$

Уравнение (2.3.12) выполняется, в частности, при $A(\theta) = 0$, следовательно, вместо уравнения (2.3.15) можно рассматривать более простое уравнение

$$\sin^2\theta\Theta'' + 3\sin\theta\cos\theta\Theta' + (\cos 2\theta - n^2 - (4 + \lambda^2 r_1^2)\sin^2\theta)\Theta = 0. \tag{2.3.15'}$$

С помощью подстановок

$$x = (1/2)(1 + \cos\theta),\; \Theta(\theta) = (\cos^2\theta - 1)^{0,5(n-1)}y(x) \tag{2.3.16}$$

уравнение (2.3.15') приводится к гипергеометрическому уравнению

$$x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2} + (n+1)(2x-1)\frac{dy}{dx} + (n^2 + n + 4 + \lambda^2 r_1^2)y = 0, \tag{2.3.16'}$$

решение которого выражается через гипергеометрические функции или функции Лежандра:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_{\alpha+k+1}^{k}\,C_{\beta+k-1}^{k}}{C_{\gamma+k-1}}x^k, \tag{2.3.17}$$

при этом γ не должно равняться никакому целому числу, меньшему или равному нулю. Ряд (2.3.17) сходится при $|x| < 1$ и имеет вид

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \tag{2.3.18}$$

где

$$y_1(x) = F(\alpha, \beta, 1, x),$$

$$y_2(x) = \lim_{\gamma\to 1}\frac{1}{\gamma-1}[F(\alpha, \beta, \gamma, x) - x^{1-\gamma}F(\alpha - \gamma + 1,\; \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma + x)],$$

причем $\alpha + \beta = 1$, $\alpha\beta = 4 + \lambda^2 r_1^2$, $\gamma = 1$.

Таким образом, имеем функцию

$$\Theta(\theta) = (\cos^2\theta - 1)^{0,5(n-1)}\left[C_1 y_1\left(\frac{1}{2}(1 + \cos\theta)\right) + C_2 y_2\left(\frac{1}{2}(1 + \cos\theta)\right)\right].$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются граничными условиями (2.3.11) и соответственно равны: $C_1 = -C_2\,y_2(1)/y_1(1)$, $C_2 = 1$.

Окончательно имеем

$$\Theta(\theta)=(\cos^2\theta-1)^{0,5(n-1)}\left[y_2\left(\frac{1}{2}(1+\cos\theta)\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{y_2(1)}{y_1(1)}\,y_1\left(\frac{1}{2}(1+\cos\theta)\right)\right]. \qquad (2.3.19)$$

Неизвестная λ^2 — корень характеристического уравнения

$$y_1(1)\,y_2(0)-y_1(0)\,y_2(1)=0, \qquad (2.3.20)$$

которое является трансцендентным и имеет счетное множество корней λ_m ($m=1, 2, \ldots$), таким образом, функций $\Theta(\theta)$ также счетное множество. В результате имеем

$$V_{mn}^{(1)}=\Theta_m(\theta)\cos n\varphi,\quad V_{mn}^{(2)}=\Theta_m(\theta)\sin n\varphi. \qquad (2.3.20')$$

Решение второго из уравнений (2.3.6) представим в виде ряда по собственным функциям (2.3.10'):

$$F_{23}=\sum_{m,\,n}\left(X_{mn}^{(1)}(x^0)\,V_{mn}^{(1)}+X_{mn}^{(2)}(x^0)V_{mn}^{(2)}\right), \qquad (2.3.21)$$

полагая, что функцию A_{31} можно представить в виде ряда

$$A_{31}=\sum_{m,\,n}\left[A_{mn}^{(1)}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin^2\theta V_{mn}^{(1)})+A_{mn}^{(2)}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin^2\theta V_{mn}^{(2)})\right], \qquad (2.3.22)$$

где

$$A_{31\,(mn)}^{(l)}(x^0)=\frac{\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}A_{31}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin^2\theta\,V_{mn}^{(l)}\right)d\theta d\varphi}{\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin^2\theta V_{mn}^{(l)}\right)\right)^2 d\theta d\varphi}$$

— коэффициенты Фурье функции A_{31}.

Подставляя (2.3.21) и (2.3.22) во второе из уравнений (2.3.6), для функций $X_{mn}^{(l)}(x^0)$ приходим к уравнению

$$\ddot{X}_{mn}^{(l)}+\lambda_{mn}^2X_{mn}^{(l)}=-2A_{31\,(mn)}^{(l)},$$

решение которого

$$X_{mn}^{(l)}(x^0)=\frac{2}{\lambda_{mn}}\int\limits_0^{x^0}A_{31\,(mn)}^{(l)}(\xi)\sin\lambda_{mn}(\xi-x^0)\,d\xi. \qquad (2.3.23)$$

В результате подстановки (2.3.23) в (2.3.21) находим функцию

$$F_{23}=\sum_{m,\,n}\frac{2}{\lambda_{mn}}\int\limits_0^{x^0}\left(A_{31\,(mn)}^{(1)}(\xi)\cos n\varphi+\right.$$

$$\left.+A_{31\,mn}^{(2)}(\xi)\sin n\varphi\right)\sin\lambda_{mn}(\xi-x^0)\,d\xi\,\Theta_m(\theta). \qquad (2.3.24)$$

Интегрируя третье из уравнений (2.3.6), получим

$$F_{13}=\int_0^\theta\int_0^\varphi B_{31}\,d\theta d\varphi, \tag{2.3.25}$$

причем функция B_{31} имеет вид

$$B_{31}=r_1\sin\theta\left[r_1^3\sin\theta Q_{(1)}^{(33)}-\sum_{m,n}\frac{2}{\lambda_{mn}}\int_0^{x^0}(A_{31(mn)}^{(1)}(\xi)\cos n\varphi+\right.$$

$$\left.+A_{31(mn)}^{(2)}(\xi)\sin n\varphi)\sin\lambda_{mn}(\xi-x^0)\,d\xi(\sin\theta\Theta_m'+\cos\theta\Theta_m)\right].$$

Четвертому из уравнений (2.3.6) соответствуют собственные функции

$$\Theta_n(\theta)=-\frac{\Theta_{2n}(0)}{\Theta_{1n}(0)}\Theta_{1n}(\theta)+\Theta_{2n}(0)\quad(n=1,\ 2,\ldots) \tag{2.3.26}$$

и их собственные значения λ_n^2, которые являются корнями характеристического уравнения

$$\Theta_{1n}(0)\,\Theta_{2n}(\pi)-\Theta_{1n}(\pi)\,\Theta_{2n}(0)=0, \tag{2.3.26'}$$

где $\Theta_{jn}(\theta)$ $(j=1,\ 2)$ — частные решения уравнения

$$\sin\theta\Theta''-\cos\theta\Theta'+(2+\lambda^2r_1^2)\sin\theta\Theta=0. \tag{2.3.27}$$

Искомую функцию F_{33} представим в виде ряда $F_{33}=\sum\limits_n X_n(\varphi,\ x^0)\times$ $\times\,\Theta_n(\theta)$, полагая, что функцию

$$C_{31}=2r_1^3\sin\theta Q_{(1)}^{(32)}-\frac{2}{r_1}\int_0^\varphi\left(B_{31}+\operatorname{ctg}\theta\int_0^\theta B_{31}\,d\theta\right)d\varphi+$$

$$+\sum_{m,n}\left[\frac{2n}{\lambda_{mn}}\int_0^{x^0}(A_{mn}^{(2)}(\xi)\cos n\varphi-\right.$$

$$\left.-A_{mn}^{(1)}(\xi)\sin n\varphi)\sin\lambda_{mn}(\xi-x^0)\,d\xi\,(\Theta_m'-\operatorname{ctg}\theta\Theta_m)\right] \tag{2.3.28}$$

можно представить в виде ряде Фурье по собственным функциям $\Theta_n(\theta)$:

$$C_{31}=\sum_n C_{31}^{(n)}(\varphi,\ x^0)\,\Theta_n(\theta),$$

где $C_{31}^{(n)}=\int_0^\pi C_{31}\Theta_n(\theta)\,d\theta\Big/\int_0^\pi\Theta_n^2(\theta)\,d\theta$ — коэффициенты Фурье.

Подставляя выражения для функций F_{33} и C_{31} в четвертое из уравнений (2.3.6), приходим к уравнению для функций $X_n(x^0)$

$$\ddot{X}_n+\lambda_n^2X_n=C_{31}^{(n)}.$$

решением которого с учетом граничных условий (2.3.7) является

$$X_n = \frac{1}{\lambda_n} \int_0^{x^0} C_{31}^{(n)} (\varphi, \xi) \sin \lambda_n (x_0 - \xi) \, d\xi.$$

Следовательно, имеем

$$F_{83} = \sum_n \frac{1}{\lambda_n} \int_0^{x^0} C_{31}^{(n)} (\varphi, \xi) \sin \lambda_n (x^0 - \xi) \, d\xi \Theta_n (\theta). \qquad (2.3.29)$$

Координате x^0 соответствуют функции кинетических напряжений основного тензора

$$\Pi_{00}^{(0)} = (1/2)(1 + \cos \bar{x}^0) F_{00},$$

$$\Pi_{i0}^{(0)} = (1/2) \int_0^{x^0} (1 + \cos \bar{x}^0) \, dx^0 F_{i0} \quad (i = 1, 2, 3), \qquad (2.3.30)$$

которые содержат функции

$$F_{10} = 2r^3 \operatorname{tg} \theta \left[\sin \theta Q_{(1)}^{(02)} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin^2 \theta \int_0^{\varphi} Q_{(1)}^{(01)} \, d\varphi \right) \right],$$

$$F_{30} = 2r^2 \sin^2 \theta \int_0^{\varphi} Q_{(1)}^{(03)} d\varphi, \;\; F_{20} = 0, \;\; F_{00} = r^2 \sin^2 \theta Q_{(1)}^{(00)}. \qquad (2.3.31)$$

Следует отметить, что функции нагрузок $Q_{(1)}^{(3\beta)}$, $Q_{(1)}^{(0\beta)}$ должны быть самоуравновешенными.

Полные функции кинетических напряжений основного тензора соответственно равны:

$$\Pi_0^{(0)} = (1/2)(1 + \cos \bar{r}) F_{03} + (1/2)(1 + \cos \bar{x}^0) F_{00},$$
$$(2.3.32)$$
$$\Pi_i^{(0)} = (1/2)(1 + \cos \bar{r}) F_{i3} + (1/2) \int_0^{x^0} (1 + \cos \bar{x}^0) \, dx^0 F_{i0}.$$

Подставляя (2.3.32) в выражения (1.4.22) и (1.4.23), а затем в (1.4.21), определим компоненты тензора $(T_0^{(1)})$, который соответствует самоуравновешенным частям функций нагрузок; несамоуравновешенным частям функций нагрузок соответствует тензор $(T_0^{(2)})$ с компонентами:

$$T_{(0)}^{11} = 0, \;\; T_{(0)}^{22} = 0, \;\; T_{(0)}^{12} = 0,$$

$$T_{(0)}^{33} = (1/2)(1 + \cos \bar{r}) \bar{Q}_{(1)}^{(33)}, \;\; T_{(0)}^{00} = (1/2)(1 + \cos \bar{x}^0) \bar{Q}_{(1)}^{00},$$

$$T_{(0)}^{13} = (1/2)(1 + \cos \bar{r})(1/r) \bar{Q}_{(1)}^{31}, \;\; T_{(0)}^{10} = (1/2)(1 + \cos \bar{x}^0) \bar{Q}_{(1)}^{(01)}, \qquad (2.3.33)$$

$$T_{(0)}^{23} = (1/2)(1 + \cos \bar{r}) \frac{1}{r \sin \theta} \bar{Q}_{(1)}^{(32)}, \;\; T_{(0)}^{20} = (1/2)(1 + \cos \bar{x}^0) \bar{Q}_{(1)}^{(02)},$$

$$T_{(0)}^{30} = (1/2)(1 + \cos \bar{r}) \bar{Q}_{(1)}^{(30)} + (1/2)(1 + \cos \bar{x}^0) \bar{Q}_{(1)}^{(03)},$$

где $\bar{x}^0 = \pi x^0 / x_8^0$ — безразмерная координата.

Сумма тензоров $(T_{0}^{(1)})+(T_{(0)}^{(2)})$ есть основной тензор (T_0) области возмущений нагрузки. Корректирующий тензор $(T_{\text{к}})$ имеет компоненты

$$T_{(\text{к})}^{\alpha\beta}=\sum_{mnpl}(A_{mnpl}f_{(1)}^{\alpha\beta}+B_{mnpl}f_{(2)}^{\alpha\beta}+C_{mnpl}f_{(3)}^{\alpha\beta}+D_{mnpl}f_{(0)}^{\alpha\beta}); \qquad (2.3.34)$$

функции $f_{(\gamma)}^{\alpha\beta}$ $(mnpl)$ $(\gamma=1,2,3,0)$ определены во второй части книги, причем $\overline{\theta}=\theta$, $\overline{\varphi}=\varphi/2$, $\overline{r}=[\pi(r-r_1)]/[(a/a_{cq})\ \ x^0-r_1]$, $\overline{x}^0=\pi x^0/x_2^0$, параметры $A_{mnpl}, \ldots, D_{mnpl}$ удовлетворяют уравнениям (2.2.22) и находятся в результате их решения.

Коэффициенты $F_{\gamma\beta}(mnplijkq)$ уравнений вычисляют по формулам (2.2.23), причем интегралы $F_{\gamma\beta}^{(k)}$ таковы:

$$F_{\gamma\beta}^{(1)}=\frac{4x_2^0}{\pi^2}\int\int_0^{\pi}\int\int A_{\gamma\beta}^{(1)}\left(\frac{a}{a_{cq}}\frac{x_2^0}{\pi}\overline{x}^0-r_1\right)\times$$

$$\times\left[\left(\frac{a}{a_{cq}}\frac{x_2^0}{\pi}\overline{x}^0-r_1\right)\frac{\overline{r}}{\pi}+r_1\right]^2\sin\overline{\theta}d\overline{\theta}d\overline{\varphi}d\overline{r}d\overline{x}^0,$$

$$F_{\gamma\beta}^{(2)}=\frac{2x_2^0}{\pi^2}\int\int_0^{\pi}\int\int A_{\gamma\beta}^{(2)}\left(\frac{a}{a_{cq}}\frac{x_2^0}{\pi}\overline{x}^0-r_1\right)\times$$

$$\times\left[\left(\frac{a}{a_{cq}}\frac{x_2^0}{\pi}\overline{x}^0-r_1\right)\frac{\overline{r}}{\pi}+r_1\right]^2\sin\overline{\theta}d\overline{\theta}d\overline{\varphi}d\overline{r}d\overline{x}^0, \qquad (2.3.35)$$

$$F_{\gamma\beta}^{(3)}=\frac{4x_2^{0\,2}}{\pi^3}\int\int_0^{\pi}\int\int\int_0^{\overline{x}^0}\widetilde{R}(\overline{x}^0\overline{y}^0)A_{\gamma\beta}^{(1)}(\overline{x}^0\overline{y}^0)d\overline{y}^0\left(\frac{a}{a_{cq}}\frac{x_2^0}{\pi}\overline{x}^0-r_1\right)\times$$

$$\times\left[\left(\frac{a}{a_{cq}}\frac{x_2^0}{\pi}\overline{x}^0-r_1\right)\frac{\overline{r}}{\pi}+r_1\right]^2\sin\overline{\theta}d\overline{\theta}d\overline{\varphi}d\overline{r}d\overline{x}^0,$$

$$F_{\gamma\beta}^{(4)}=\frac{2x_2^{0\,2}}{\pi^3}\int\int\int_0^{\pi}\int\int_0^{\overline{x}^0}(\widetilde{R}_1(\overline{x}^0\overline{y}^0)-\widetilde{R}(\overline{x}^0\overline{y}^0))A_{\gamma\beta}^{(2)}(\overline{x}^0\overline{y}^0)\times$$

$$\times\left(\frac{a}{a_{cq}}\frac{x_2^0}{\pi}\overline{x}^0-r_1\right)\left[\left(\frac{a}{a_{cq}}\frac{x_2^0}{\pi}\overline{x}^0-r_1\right)\frac{\overline{r}}{\pi}+r_1\right]^2\sin\overline{\theta}d\overline{\theta}d\overline{\varphi}d\overline{r}d\overline{x}^0.$$

Свободные члены $L_\beta(ijkq)$ уравнений вычисляются по формулам (2.2.25), причем интегралы $L_b^{(l)}$ соответственно равны:

$$L_{\beta}^{(1)}=\frac{4x_2^0}{\pi^2}\int\int\int_0^{\pi}\int B_{\beta}^{(1)}\left(\frac{a}{a_{cq}}\frac{x_2^0}{\pi}\overline{x}^0-r_1\right)\times$$

$$\times\left[\left(\frac{a}{a_{cq}}\frac{x_2^0}{\pi}\overline{x}^0-r_1\right)\frac{\overline{r}}{\pi}+r_1\right]^2\sin\overline{\theta}d\overline{\theta}d\overline{\varphi}d\overline{r}d\overline{x}^0,$$

$$L_\beta^{(2)} = \frac{2x_2^0}{\pi^2} \int\int_0^\pi\int\int B_\beta^{(2)} \left(\frac{a}{a_{cq}} - \frac{x_2^0}{\pi} \bar{x}^0 - r_1 \right) \times$$

$$\times \left[\left(\frac{a}{a_{cq}} - \frac{x_2^0}{\pi} \bar{x}^0 - r_1 \right) \frac{\bar{r}}{\pi} + r_1 \right]^2 \sin\bar{\theta}\, d\bar{\theta} d\bar{\varphi} d\bar{r} d\bar{x}^0,$$

$$L_\beta^{(4)} = \frac{4x_2^{0\,2}}{\pi^3} \int\int_0^\pi\int\int\int_0^{\bar{x}^0} \tilde{R}(\bar{x}^0\bar{y}^0)\, B_\beta^{(1)}(\bar{x}^0\bar{y}^0)\, d\bar{y}^0 \left(\frac{a}{a_{cq}} - \frac{x_2^0}{\pi} \bar{x}^0 - r_1 \right) \times$$

$$\times \left[\left(\frac{a}{a_{cq}} - \frac{x_2^0}{\pi} \bar{x}^0 - r_1 \right) \frac{\bar{r}}{\pi} + r_1 \right]^2 \sin\bar{\theta} d\bar{\theta} d\bar{\varphi} d\bar{r} d\bar{x}^0, \qquad (2.3.36)$$

$$L_\beta^{(6)} = \frac{2x_2^{0\,2}}{\pi^3} \int\int_0^\pi\int\int\int_0^{\bar{x}^0} (\tilde{R}_1(\bar{x}^0\bar{y}^0) - \tilde{R}(\bar{x}^0\bar{y}^0))\, B_\beta^{(2)}(\bar{x}^0\bar{y}^0)\, d\bar{y}^0 \times$$

$$\times \left(\frac{a}{a_{cq}} - \frac{x_2^0}{\pi} \bar{x}_0 - r_1 \right) \left[\left(\frac{a}{a_{cq}} - \frac{x_2^0}{\pi} \bar{x}^0 - r_1 \right) \frac{\bar{r}}{\pi} + r_1 \right]^2 \sin\bar{\theta} d\bar{\theta} d\bar{\varphi} d\bar{r} d\bar{x}^0,$$

$$L_\beta^{(8)} = \frac{2x_2^0}{\pi^2} \int\int_0^\pi\int\int B_\beta^{(6)} \left(\frac{a}{a_{cq}} - \frac{x_2^0}{\pi} \bar{x}^0 - r_1 \right) \times$$

$$\times \left[\left(\frac{a}{a_{cq}} - \frac{x_2^0}{\pi} \bar{x}^0 - r_1 \right) \frac{\bar{r}}{\pi} + r_1 \right]^2 \sin\bar{\theta} d\bar{\theta} d\bar{\varphi} d\bar{r} d\bar{x}^0,$$

$$L_\beta^{(8)} = \frac{2}{\pi} \int\int_0^\pi B_\beta^{(8)} \left[\left(\frac{a}{a_{cq}} - \frac{x_2^0}{\pi} \bar{x}^0 - r_1 \right) \frac{\bar{r}}{\pi} + r_1 \right] \times$$

$$\times \left(\frac{a}{a_{cq}} - \frac{x_2^0}{\pi} \bar{x}^0 - r_1 \right) \sin\bar{\theta} d\bar{r} d\bar{\varphi}.$$

Подынтегральные выражения в (2.3.35) и (2.3.36) определяются соответственно по формулам (2.2.24) и (2.2.26′), в которых функции $f_{(\gamma)}^{\alpha\beta}$ записаны в сферических координатах, компоненты $T_{(0)}^{\alpha\beta}$ основного тензора определены в виде $T_{(0)}^{\alpha\beta} = T_{(0)(1)}^{\alpha\beta} + T_{(0)(2)}^{\alpha\beta}$. Решение уравнений (2.2.22) строится с помощью процедуры последовательных приближений аналогично предыдущим случаям; в результате находятся параметры $A_{mnpl}, \ldots, D_{mnpl}$. В первом приближении компоненты корректирующего тензора

$$T_{(\kappa)}^{\alpha\beta} = (1/\Delta)\,(\Delta_1 f_{(1)}^{\alpha\beta} + \Delta_2 f_{(2)}^{\alpha\beta} + \Delta_3 f_{(3)}^{\alpha\beta} + \Delta_0 f_{(0)}^{\alpha\beta}), \qquad (2.3.37)$$

где Δ и Δ_γ — известные определители, составленные из коэффициентов $F_{\gamma\beta}$ и свободных членов L_β.

Суммируя тензоры $(T_о)$ и $(T_к)$, находим тензор кинетических напряжений $(T)_{нагр}$ области возмущений нагрузки.

Область возмущений разгрузки является вторичной и расположена внутри области возмущений нагрузки, она ограничена свободной поверхностью преграды, включая загруженную часть, и поверхностью фронта волны разгрузки, распространяющейся со скоростью $b = \sqrt{a_0^2 + (4/3)\,(v_0^{(r)})^2}$. Этой области соответствует тензор кинетических напряжений

$$(T)_{\text{разгр}} = (T)_{\text{нагр}} - \Delta\,(T), \tag{2.3.38}$$

причем тензор $(T)_{\text{нагр}}$ известен, построение тензора $\Delta\,(T)$ аналогично рассмотренному в § 2 настоящей главы для составляющих областей I и II возмущений разгрузки полупространства при ударе. Поэтому можно считать, что тензор кинетических напряжений области возмущений разгрузки $(T)_{\text{разгр}}$ при ударе тела с большой площадкой контакта в форме *прямоугольника или* круга определен.

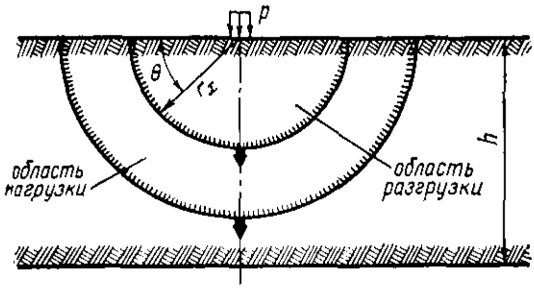

Рис. 46

При ударе тела с малой площадкой контакта область возмущений разгрузки сферическая, ее радиус $r_* = bx^0/v_0^{(r)}$ (рис. 46). Построение тензора $\Delta\,(T)$ выполняется для всей области возмущений разгрузки в сферических координатах $(\theta,\ \varphi,\ r,\ x^0)$ и отличается от вышеизложенного. Текущие координаты θ, φ, r, x^0 изменяются в следующих пределах: $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $r_1 \leqslant r \leqslant r_*$, $0 \leqslant x^0 \leqslant x_2^0$, где x_2^0 — координата, соответствующая продолжительности разгрузки; при ударе $x_2^0 = v_0^{(r)} t_p$.

Разгрузка сопровождается уменьшением давления и скорости частиц загруженной части свободной поверхности на величины Δp и Δv, определяемые в результате рассмотрения процесса соударения тел, которым соответствуют следующие изменения функций нагрузок: *при косом ударе*

$$\Delta Q_{(1)}^{33} = \Delta Q_{(1)}^{3} \sin\delta, \quad \Delta Q_{(1)}^{31} = \frac{1}{r_1}\,\Delta Q_{(1)}^{3} \cos\delta,$$
$$\Delta Q_{(1)}^{30} = \Delta\rho_s \Delta v_c v_0^{(r)} \sin\delta, \quad \Delta Q_{(1)}^{00} = 0, \quad \Delta Q_{(1)}^{0i} = 0, \tag{2.3.39}$$

где $\Delta Q_{(1)}^{3} = \Delta\rho_s\,(\Delta v_c)^2 \sin\delta - \Delta p$;

при нормальном ударе

$$\Delta Q_{(1)}^{33} = \Delta Q_{(1)}^{3},\ \Delta Q_{(1)}^{30} = \Delta\rho_s \Delta v_c v_0^{(r)},\ \Delta Q_{(1)}^{00} = 0,\ \Delta Q_{(1)}^{0i} = 0, \tag{2.3.40}$$

где $\Delta Q_{(1)}^{3} = \Delta\rho_s\,(\Delta v_c)^2 - \Delta p$.

Граничные условия имеют вид:

$$\Delta T^{3\beta} = \Delta Q_{(1)}^{3\beta} \text{ при } r = r_1\ (\beta = 1,\ 2,\ 3,\ 0),$$
$$\Delta w_i = 0 \text{ при } r = r_*\ (i = 1,\ 2,\ 3), \tag{2.3.41}$$
$$\Delta T^{0\beta} = 0 \text{ при } x^0 = 0.$$

Следует отметить, что координата $x^0 = 0$ соответствует моменту начала разгрузки.

Дополнительный тензор кинетических напряжений $\Delta(T)$ будем строить в виде суммы основного $\Delta(T_0)$ и корректирующего $(\Delta(T_к)$ тензоров, опираясь при этом на результаты, полученные в § 2 данной главы.

Для координаты r функции кинетических напряжений принимаем в виде

$$\Delta\Pi_{\alpha 3}^{(0)} = (1/2)(1 + \cos\bar{r})\,\Delta F_{\alpha 3} (\alpha = 1,\ 2,\ 3,\ 0), \tag{2.3.42}$$

где $\bar{r} = [\pi(r - r_1)]/[(b/v_0^{(r)})\,x^0 - r_1]$ — безразмерная координата.

Функции $\Delta F_{\alpha 3}$ определяются как и в случае нагрузки и таковы:

$$\Delta F_{03} = 0, \quad \Delta F_{13} = \int_0^\theta \int_0^\varphi \Delta B_{31}\,d\theta d\varphi,$$

$$\Delta F_{23} = \sum_{m,\,n} \frac{2}{\lambda_{mn}} \int_0^{x^0} [(\Delta A_{31\,mn}^{(1)}(\xi) \cos n\varphi +$$

$$+ \Delta A_{31\,mn}^{(2)}(\xi) \sin n\varphi] \sin \lambda_{mn}(\xi - x^0)\,d\xi\,\Theta_m(\theta), \tag{2.3.43}$$

$$\Delta F_{33} = \sum_n \frac{1}{\lambda_n} \int_0^{x^0} \Delta C_{31}^{(n)}(\varphi, \xi) \sin \lambda_n (x^0 - \xi)\,d\xi\,\Theta_n(\theta).$$

Здесь:

$$\Delta A_{31} = r_1 \left[\sin^2\theta\,\Delta Q_{(1)}^{33} + r_1 \frac{\partial}{\partial\theta}(\sin^2\theta\,\Delta Q_{(1)}^{31})\right] - \int_0^{x^0} \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(\sin^2\theta\,\Delta Q_{(1)}^{30})\,dx^0,$$

$$\Delta B_{31} = r_1 \left[r_1^3 \sin\theta\,\Delta Q_{(1)}^{33} - \sum_{m,\,n} \frac{2}{\lambda_{mn}} \int_0^{x^0} (\Delta A_{31\,mn}^{(1)}(\xi) \cos n\varphi + \right.$$

$$\left. + \Delta A_{31\,mn}^{(2)}(\xi) \sin n\varphi) \sin \lambda_{mn}(\xi - x^0)\,d\xi\,(\sin\theta\,\Theta_m' + \cos\theta\,\Theta_m) \right] \sin\theta, \tag{2.3.44}$$

$$\Delta C_{31} = -\frac{2}{r_1} \int_0^\varphi \left(\Delta B_{31} + \operatorname{ctg}\theta \int_0^\theta \Delta B_{31}\,d\theta \right) d\varphi +$$

$$+ \sum_{m,\,n} \left[\frac{2n}{\lambda_{mn}} (\Delta A_{31(mn)}^{(2)}(\xi) \cos n\varphi - \right.$$

$$\left. - \Delta A_{31(mn)}^{(1)}(\xi) \sin n\varphi) \sin \lambda_{mn}(\xi - x^0)\,d\xi\,(\Theta_m' - \operatorname{ctg}\theta\,\Theta_m) \right];$$

коэффициенты Фурье

$$\Delta A_{31(mn)}^{(l)}(x^0)=\frac{\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Delta A_{31}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin^2\theta V_{mn}^{(l)}\right)d\theta d\varphi}{\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin^2\theta V_{mn}^{(l)}\right)^2 d\theta d\varphi\right.},$$

$$\Delta C_{31}^{(n)}=\int\limits_0^{\pi}\Delta C_{31}\Theta_n(\theta)\,d\theta\Bigg/\int\limits_0^{\pi}(\Theta_n(\theta))^2\,d\theta.$$

Для координаты x^0 функции нагрузок $\Delta Q_{(1)}^{0\beta}=0$, поэтому и функции кинетических напряжений $\Delta\Pi_{(0)}^{(0)}=0, \Delta\Pi_{00}^{(0)}=0$. В результате для основного тензора имеем следующие функции кинетических напряжений:

$$\Delta\Pi_\alpha^{(0)}=(1/2)\,(1+\cos\bar r)\,\Delta F_{\alpha 3}, \tag{2.3.45}$$

которые соответствуют самоуравновешенным частям функций нагрузок $\Delta\tilde{Q}_{(1)}^{3\beta}$. Подставляя (2.3.45) в (1.4.22) и (1.4.23), а полученный результат — в (1.4.21), определим компоненты тензора $\Delta\,(T_0^{(1)})$, который соответствует самоуравновешенным частям функций нагрузок. Несамоуравновешенным частям функций нагрузок $\Delta\overline{Q}_{(1)}^{3\beta}$ соответствует тензор $\Delta\,(T_0^{(2)})$ с компонентами (2.3.33), в которых вместо $\overline{Q}_{(1)}^{3\beta}$ следует подставить $\Delta\overline{Q}_{(1)}^{3\beta}$, а $\overline{Q}_{(1)}^{0\beta}$ заменить на $\Delta\overline{Q}_{(1)}^{0\beta}=0$. Тогда в области возмущений разгрузки основной тензор

$$\Delta\,(T_0)=\Delta\,(T_0^{(1)})+\Delta\,(T_0^{(2)}). \tag{2.3.46}$$

Корректирующий тензор $\Delta\,(T_\text{к})$ имеет компоненты

$$\Delta T_{(\text{к})}^{\alpha\beta}=\sum_{mnpl}(\Delta A_{mnpl}f_{(1)}^{\alpha\beta}+\Delta B_{mnpl}f_{(2)}^{\alpha\beta}+\Delta C_{mnpl}f_{(3)}^{\alpha\beta}+\Delta D_{mnpl}f_{(0)}^{\alpha\beta}), \tag{2.3.47}$$

где функции $f_{(\gamma)}^{\alpha\beta}(mnpl)$ определены во второй части книги, причем $\bar\theta=\theta$, $\bar\varphi=\varphi/2$, $\bar r=[\pi(r-r_1)]/[(b/v_0^{(r)})\,x^0-r_1]$, $\bar x^0=\pi x^0/x_2^0$, параметры ΔA_{mnpl}, ..., ΔD_{mnpl} удовлетворяют уравнениям (2.2.69) и определяются в результате их решения.

Коэффициенты $F_{\gamma\beta}(mnplijkq)$ уравнений вычисляются по формулам (2.2.23), при этом интегралы имеют вид (2.3.35) с той лишь разницей, что a заменено на b и a_{cq} на $v_0^{(r)}$; функции состояния α_1, α_2 или $\alpha_1^{(b)}$, $\alpha_2^{(b)}$ должны соответствовать упругому или вязкому состоянию среды. Свободные члены $\Delta L_\beta(ijkq)$ уравнений вычисляются по формулам (2.2.25), причем производится указанная замена функций состояния и скоростей, в подынтегральных выражениях (2.2.26′) необходимо заменить компоненты $T_{(0)}^{\alpha\beta}$ на $\Delta T_{(0)}^{\alpha\beta}$. Решение уравнений (2.2.69) строится с помощью процедуры последовательных приближений аналогично рассмотренным случаям. В результате параметры ΔA_{mnpl}, ..., ΔD_{mnpl} определены, следовательно, определены и компоненты корректирующего тензора $\Delta(T_к)$ для области возмущений разгрузки.

В итоге получим дополнительный тензор кинетических напряжений

$$\Delta(T) = \Delta(T_о) + \Delta(T_к), \tag{2.3.48}$$

подставляя который в (2.3.38), найдем тензор кинетических напряжений области возмущений разгрузки.

При выходе волны нагрузки на тыльную поверхность преграды происходит явление отражения, в результате которого зарождается отраженная волна нагрузки, распространяющаяся в обратном на-

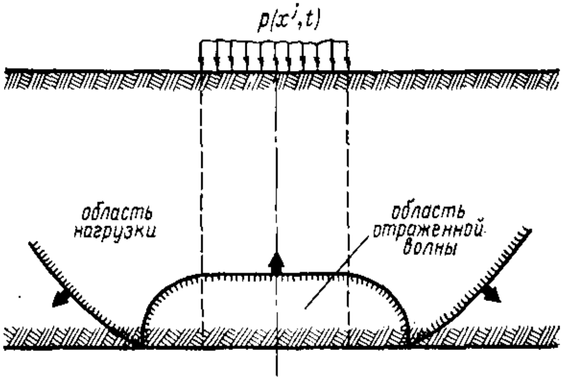

Рис. 47

правлении со скоростью a по предварительно напряженной области. Образуется вторичная область возмущений отраженной волны нагрузки, ограниченная тыльной поверхностью преграды, где наблюдается отражение волны, и передним фронтом отраженной волны (рис. 47). С течением времени, по мере распространения отраженной волны, область возмущений отраженной волны нагрузки расширяется. Движение частиц среды в этой области характеризуется вектором скорости $\mathbf{v}_{отр}$ и плотностью $\rho_{отр}$, ее напряженное состояние — тензором напряжений $(\sigma)_{отр}$. Им соответствует тензор кинетических напряжений $(T)_{отр}$, принимаемый за основную искомую величину. Тензор кинетических напряжений $(T)_{отр}$ можно представить в виде

$$(T)_{отр} = (T)_{нагр} - \Delta_1(T), \tag{2.3.49}$$

где тензор $(T)_{нагр}$ известен, тензор $\Delta_1(T)$ подчинен условиям, приведенным в § 5 гл. 1, и строится как сумма основного $\Delta_1(T_0)$ и корректирующего $\Delta_1(T_к)$ тензоров:

$$\Delta_1(T_о) + \Delta_1(T_к) = \Delta_1(T). \tag{2.3.50}$$

Для каждой составляющей области возмущений тензоры строятся отдельно, при этом учитываются условия сопряжения на границах их раздела.

В зависимости от формы области возмущений II выбираем систему координат (α, β, z, x^0) с началом в центре области отражения волны нагрузки от тыльной поверхности преграды. Граничные условия следующие: при $z = 0$ (что соответствует тыльной поверхности):

$$\begin{gathered}\Delta_1 T^{3\beta} = \Delta_1 Q^{3\beta}_{(1)},\\ \Delta_1 w_\alpha = 0 \ \text{при} \ z = z_2 = ax^0/a_{cq},\\ \Delta_1 T^{0\beta} = 0 \ \text{при} \ x^0 = 0,\end{gathered} \qquad (2.3.51)$$

где $\Delta_1 Q^{3\beta}_{(1)} = T^{3\beta}_{нагр}(S, \ h)$.

Если область отражения имеет форму прямоугольника, размеры которого l_x, l_y, то координаты изменяются в следующих пределах: $-l_x \leqslant x \leqslant l_x$, $-l_y \leqslant y \leqslant l_y$, $0 \leqslant z \leqslant ax^0/a_{cq}$, $0 \leqslant x^0 \leqslant a_{cq}h/a$. Функции кинетических напряжений основного тензора

$$\Delta_1 \Pi_i^{(0)} = (1/2)(1 + \cos \bar{z})\, \Delta_1 F_{i3} \ (i = 1, \ 2, \ 3); \qquad (2.3.52)$$

функции $\Delta_1 F_{i3}$ таковы:

$$\Delta_1 F_{13} = \int_{-l_x}^{l_x} \int_{-l_y}^{l_y} \Delta_1 Q^{33}_{(1)}\, dy dx,$$

$$\Delta_1 F_{к3} = \int_{-l_x}^{l_x} \int_{-l_y}^{l_y} \Delta_1 C_{к3}(x' \ y') \ln \frac{1}{\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}}\, dx'\, dy', \qquad (2.3.53)$$

где

$$\Delta_1 C_{23} = 2 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{x^0} \Delta_1 Q^{30}_{(1)}\, dx^0 - \frac{\partial \xi}{\partial y},$$

$$\Delta_1 C_{33} = 2 \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{x^0} \Delta_1 Q^{30}_{(1)}\, dx^0 + \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Функция ξ определяется формулой (2.2.7), в которой следует принять

$$P = \frac{\partial}{\partial x} \Delta_1 Q^{31}_{(1)} - \frac{\partial}{\partial y} \Delta_1 Q^{32}_{(1)}. \qquad (2.3.53')$$

В простейшем случае компоненты основного тензора имеют вид

$$\Delta_1 T^{3\beta}_{(0)} = (1/2)(1 + \cos \bar{z})\, T^{3\beta}_{нагр}(S, \ h), \qquad (2.3.54)$$

остальные компоненты равны нулю.

Корректирующий тензор $\Delta_1 (T_к)$ имеет компоненты

$$\begin{gathered}\Delta_1 T^{\alpha\beta}_{(к)} = \sum_{mnpl} (\Delta_1 A_{mnpl} f^{\alpha\beta}_{(1)} + \Delta_1 B_{mnpl} f^{\alpha\beta}_{(2)} + \\ + \Delta_1 C_{mnpl} f^{\alpha\beta}_{(3)} + \Delta_1 D_{mnpl} f^{\alpha\beta}_{(0)}),\end{gathered} \qquad (2.3.55)$$

где $f^{\alpha\beta}_{(\gamma)}$ — известные функции. Параметры $\Delta_1 A_{mnpl}$, ..., $\Delta_1 D_{mnpl}$ подчинены уравнениям

$$\sum_{mnpl} (\Delta_1 A_{mnpl} F_{1\beta} + \Delta_1 B_{mnpl} F_{2\beta} + \Delta_1 C_{mnpl} F_{3\beta} +$$

$$+ \Delta_1 D_{mnpl} F_{0\beta}) + \Delta_1 L_\beta = 0, \tag{2.3.56}$$

коэффициенты $F_{\gamma\beta}$ $(mnplijkq)$ и свободные члены $\Delta_1 L_\beta$ $(ijkq)$ которых вычисляются соответственно по формулам (2.2.23) и (2.3.25), причем в подынтегральные выражения (2.2.26′) вместо $T^{\alpha\beta}_{(0)}$ следует подставить $\Delta_1 T^{\alpha\beta}_{(0)}$. Остальные вычисления проводятся аналогично рассмотренным в § 2 данной главы. В результате найдем компоненты корректирующего тензора, следовательно, и компоненты тензора Δ_1 (T).

Если область отражения — круг радиуса r_0, то координаты изменяются в следующих пределах: $0 \leqslant r \leqslant r_0$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant \leqslant ax^0/a_{cq}$, $0 \leqslant x^0 \leqslant a_{cq}h/a$. Функции кинетических напряжений основного тензора

$$\Delta_1 \Pi_i^{(0)} = (1/2)\,(1 + \cos \bar{z})\, \Delta_1 F_{i3} \quad (i = 1, 2, 3). \tag{2.3.57}$$

Функции $\Delta_1 F_{i3}$ имеют вид:

$$\Delta_1 F_{13} = \int_0^r \int_0^\theta r^2 \Delta_1 Q^{33}_{(1)}\, dr d\theta,$$

$$\Delta_1 F_{23} = \sum_n \frac{1}{r^{n+1}} \int_0^r (\Delta_1 C^{(1)}_{23}{}_{(n)} (r' x^0) \cos n\theta + \Delta_1 C^{(2)}_{23}{}_{(n)} (r' x^0) \sin n\theta) \times$$

$$\times e^{\int 3/r'\, dr'}\, \frac{r'^{2n} - r^{2n}}{r'^{n+1}}\, dr', \tag{2.3.58}$$

$$\Delta_1 F_{33} = \int_0^r \Delta_1 C_{33}\, dr,$$

где

$$\Delta_1 C_{23} = 2r \left(r \int_0^{x^0} \frac{\partial}{\partial r} \Delta_1 Q^{30}_{(1)}\, dx^0 + 2 \int_0^{x^0} \Delta_1 Q^{30}_{(1)}\, dx^0 \right) - \frac{\partial \xi}{\partial \theta},$$

$$\Delta_1 C_{33} = \xi + \sum_n \frac{n}{r^{n+1}} \int_0^r (\Delta_1 C^{(2)}_{23}{}_{(n)} \cos n\theta - \Delta_1 C^{(1)}_{23}{}_{(n)} \sin n\theta) \times$$

$$\times e^{\int 3/r'\, dr'}\, \frac{r'^{2n} - r^{2n}}{r'^{n+1}}\, dr',$$

причем

$$\Delta_1 C^{(j)}_{23}{}_{(n)} = \int_0^{2\pi} \Delta_1 C_{23} \left\{ \begin{matrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{matrix} \right. d\theta \Big/ \pi \quad (j = 1, 2).$$

Функция ξ определяется по формуле (2.2.33), однако $P=(-\partial/\partial\theta)(\Delta_1 Q^{31}_{(1)})$. В простейшем случае компоненты основного тензора таковы:

$$\begin{aligned} \Delta_1 T^{33}_{(0)} &= (1/2)\,(1+\cos\bar{z})\; T^{33}_{\text{нагр}}\,(S,\,h),\\ \Delta_1 T^{13}_{(0)} &= (1/2)\,(1+\cos\bar{z})\; T^{13}_{\text{нагр}}\,(S,\,h),\\ \Delta_1 T^{30}_{(0)} &= (1/2)\,(1+\cos\bar{z})\; T^{30}_{\text{нагр}}\,(S,\,h), \end{aligned} \tag{2.3.59}$$

остальные компоненты равны нулю.

Корректирующий тензор $\Delta_1\,(T_{\text{к}})$ имеет компоненты (2.3.55), однако функции $f^{\alpha\beta}_{\gamma}\,(mnpl)$ имеют другой вид, так как фундаментальные функции определяются формулами (2.2.47); параметры $\Delta_1 A_{mnpl}$, ..., $\Delta_1 D_{mnpl}$ находятся в результате решения уравнений (2.3.56), коэффициенты $F_{\gamma\beta}\,(mnplijkq)$ и свободные члены $\Delta_1 L_\beta\,(ijkq)$ которых вычисляются соответственно по формулам (2.2.23) и (2.2.25). Интегралы $F^k_{\gamma\beta}$ имеют вид (2.2.48), интегралы $\Delta_1 L^{(l)}_\beta$ — вид (2.2.49), в их подынтегральные выражения вместо $T^{\alpha\beta}_{(0)}$ следует подставить $\Delta_1 T^{\alpha\beta}_{(0)}$. Дальнейшие вычисления проводятся аналогично приведенным ранее. В результате будут найдены компоненты корректирующего тензора $\Delta_1\,(T_{\text{к}})$, а также компоненты тензора $\Delta_1\,(T)$.

В области возмущений *I дополнительный тензор кинетических* напряжений $\Delta_1\,(T)$ строится в сферической системе координат (θ, φ, η, x^0), при этом учитывается форма области возмущений *II*. Для области отражения, имеющей форму прямоугольника, координаты изменяются в следующих пределах: $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$, $-\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant r \leqslant (a/a_{cg})\,x^0$, $0 \leqslant x^0 \leqslant (a_{cg}/a)\,h$; при этом граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} &\Delta_1 T^{1\beta} = \Delta_1 T^{1\beta}_{\text{II}} \ \text{при}\ \theta = -\pi/2\ \text{и}\ x = \pm\, l_x,\\ &\Delta_1 T^{1\beta} = \Delta_1 T^{2\beta}_{\text{II}} \ \text{при}\ \theta = -\pi/2\ \text{и}\ y \pm l_y,\\ &\Delta_1 T^{1\beta} = T^{1\beta}_{\text{нагр}}\,(S,\,h)\ \text{при}\ \theta = \theta_2,\\ &\Delta_1 w_\alpha = 0\ \text{при}\ r = a x^0/a_{cg},\\ &\Delta_1 T^{00} = 0,\ \ \Delta_1 T^{0l} = 0\ \text{при}\ x^0 = 0. \end{aligned} \tag{2.3.60}$$

Для загруженной области, имеющей форму круга, координаты изменяются в пределах $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$; $0 \leqslant r \leqslant (a/a_{cg})\,x^0$, $0 \leqslant x^0 \leqslant (a_{cg}/a)\,h$; при этом имеют место следующие условия:

$$\begin{aligned} &\Delta_1 T^{1\beta} = \Delta_1 T^{1\beta}_{\text{II}} && \text{при}\ \ \theta = -\pi/2\ \text{и}\ r = r_0,\\ &\Delta_1 T^{1\beta} = T^{1\beta}_{\text{нагр}}\,(S,\,h) && \text{при}\ \ \theta = \theta_2,\\ &\Delta_1 w_\alpha = 0 && \text{при}\ \ r = a x^0/a_{cg},\\ &\Delta_1 T^{00} = 0,\ \ \Delta_1 T^{0l} = 0 && \text{при}\ \ x^0 = 0. \end{aligned} \tag{2.3.61}$$

Функции кинетических напряжений основного тензора

$$\Delta_1 \Pi^{(0)}_i = (1/2)\,(1+\cos\bar{\theta})\,\Delta_1 F_{i1} + (1/2)\,(1-\cos\bar{\theta})\,\Delta_1 \Phi_{i1} \quad (i = 1,\ 2,\ 3) \tag{2.3.62}$$

содержат функции

$$\Delta_1 F_{11} = \sum_n \frac{1}{\omega_n} \int_0^{x^0} \Delta_1 C_{11}^{(n)}(\xi) \sin \omega_n (\xi - x^0)\, d\xi r^{3/2} J_{1/2}(\omega_n r), \quad (2.3.63)$$

$$\Delta_1 F_{21} = \sum_{m,\, n} \frac{1}{\omega_{mn}} \int_0^{x^0}\int_0^{x^0} \Delta_1 A_{11}^{(mn)}(\xi) \times$$

$$\times \sin \omega_{mn} (\xi - x^0)\, d\xi\, dx^0 \cdot r^{-3/2} J_\nu(\omega_{mn} r) \sin m\varphi,$$

$$\Delta_1 F_{31} = \int_0^r \int_0^\varphi r^4 \Delta_1 Q_{(1)}^{11}\, dr d\varphi,$$

где

$$\Delta_1 A_{11}^{(mn)} = \frac{\int\limits_0^{r_2} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} 2r^{-7/2} \Delta_1 A_{11} J_\nu(\omega_{mn} r) \sin m\varphi d\varphi dr}{\int\limits_0^{r_2} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (r^{-3/2} J_\nu(\omega_{mn} r) \sin m\varphi)^2\, d\varphi dr},$$

$$\Delta_1 C_{11}^{(n)} = \int_0^{r_2} \Delta_1 C_{11} (r^{3/2} J_{1/2}(\omega_n r))\, dr \Big/ \int_0^{r_2} (r^{3/2} J_{1/2}(\omega_n r))^2\, dr$$

— коэффициенты Фурье функций

$$\Delta_1 A_{11} = r^4 \frac{\partial}{\partial x^0} \Delta_1 Q_{(1)}^{13} + \frac{\partial}{\partial r} (r^4 \Delta_1 Q_{(1)}^{12}),$$

$$\Delta_1 C_{11} = 2r^4 \Delta_1 Q_{(1)}^{12} + \sum_{m,\, n} \frac{m}{\omega_{mn}} \times$$

$$\times \int_0^{x^0}\int \Delta_1 A_{11}^{(mn)}(\xi) \sin \omega_{mn} (\xi - x^0)\, d\xi dx^0 \frac{\partial}{\partial r} (r^{-3/2} J_\nu(\omega_{mn} r)) \cos m\varphi.$$

Функции $\Delta_1 \Phi_{i1}$ определяются по формулам (2.3.63) из граничных условий (2.3.60) или (2.3.61), причем индекс 1 у функций нагрузок $\Delta_1 Q_{(\gamma)}^{1\beta}$ заменяется на индекс 2, при этом функции нагрузок предполагаются самоуравновешенными. В простейшем случае компоненты основного тензора имеют вид

$$\Delta_1 T_{(0)}^{1\beta} = (1/2)(1 + \cos \overline{\theta})\, \Delta_1 Q_{(1)}^{1\beta} + (1/2)(1 - \cos \overline{\theta})\, \Delta_1 Q_{(2)}^{1\beta}$$

$$(\beta = 1,\ 2,\ 3,\ 0), \quad (2.3.64)$$

остальные компоненты равны нулю.

Корректирующий тензор $\Delta_1 (T_\text{к})$ имеет компоненты

$$\Delta_1 T_{(\text{к})}^{\alpha\beta} = \sum_{mnpl} (\Delta_1 A_{mnpl} f_{(1)}^{\alpha\beta} + \Delta_1 B_{mnpl} f_{(2)}^{\alpha\beta} +$$

$$+ \Delta_1 C_{mnpl} f_{(3)}^{\alpha\beta} + \Delta_1 D_{mnpl} f_{(0)}^{\alpha\beta}), \quad (2.3.65)$$

где $f_\gamma^{\alpha\beta}(mnpl)$ $(\gamma = 1, 2, 3, 0)$ — известные функции сферических координат, причем безразмерные координаты $\overline{\theta}, \overline{\varphi}, \overline{r}, \overline{x}^0$ определяются формулами (2.2.58′). Параметры $\Delta_1 A_{mnpl}, \ldots, \Delta_1 D_{mnpl}$ находятся в результате решения уравнений (2.3.56), коэффициенты $F_{\gamma\beta}(mnpl\, ijkq)$ и свободные члены $\Delta_1 L_\beta(ijkq)$ которых вычисляются по формулам (2.2.23) и (2.3.25) соответственно, однако интегралы $F_{\gamma\beta}^{(k)}$ имеют вид (2.2.59), а интегралы $\Delta_1 L_\beta^{(l)}$ — вид (2.2.60), при этом в подынтегральных выражениях $T_{(0)}^{\alpha\beta}$ следует заменить на $\Delta_1 T_{(0)}^{\alpha\beta}$ для области возмущений I. В результате решения уравнений (2.3.56) находим па-

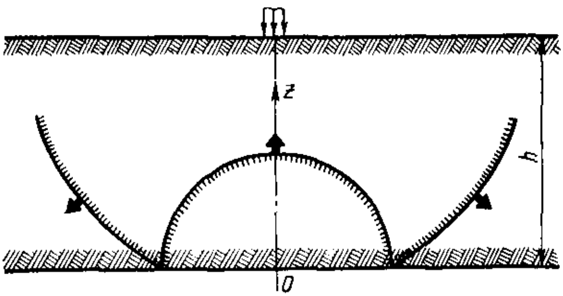

Рис. 48

раметры $\Delta_1 A_{mnpl}, \ldots, \Delta_1 D_{mnpl}$, следовательно, и компоненты корректирующего тензора $\Delta_I(T_к)$. Затем по формуле (2.3.50) определяем тензор $\Delta_1(T)$ области возмущений I.

Таким образом, для всей области возмущений отраженной волны нагрузки построен тензор кинетических напряжений $(T)_{отр}$.

При ударе тела с малой площадкой контакта область возмущений отраженной волны нагрузки сферическая радиуса $r_* = ax^0/a_{cq}$ (рис. 48). Построение тензора $\Delta_1(T)$ в этом случае выполняется для всей области возмущений отраженной волны нагрузки в сферических координатах $(\theta, \varphi, r, x^0)$, причем текущие координаты изменяются в пределах $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, r_1 \leqslant r \leqslant ax^0/a_{cq}, 0 \leqslant x^0 \leqslant \leqslant a_{oq}h/a$. Граничные условия в этом случае следующие:

$$\Delta_1 T^{1\beta} = T_{\text{нагр}}^{1\beta} \text{ при } \theta = \pm \pi/2,$$

$$\Delta_1 T^{0\beta} = 0 \text{ при } x^0 = 0, \; \Delta_1 w_\alpha = 0 \text{ при } r = r_*; \tag{2.3.66}$$

им соответствуют функции нагрузок

$$\Delta_1 Q_{(1)}^{1\beta} = T_{\text{нагр}\,|\,h}^{1\beta}, \; \Delta_1 Q_{(2)}^{1\beta} = T_{\text{нагр}\,|\,h}^{1\beta}. \tag{2.3.66′}$$

Для основного тензора $\Delta_1(T_0)$ функции кинетических напряжений таковы:

$$\Delta_1 \Pi_i^{(0)} = (1/2)(1 + \cos\overline{\theta})\,\Delta_1 F_{1i} + (1/2)(1 - \cos\overline{\theta})\,\Delta_1 \Phi_{i1}. \tag{2.3.67}$$

Функции $\Delta_1 F_{i1}$ и $\Delta_1 \Phi_{i1}$ имеют одинаковую структуру и соответственно равны:

$$\cdot\, \Delta_1 F_{31} = \int_0^r \int_0^\varphi r^4 \Delta_1 Q_{(1)}^{11} \, d\varphi dr,$$

$$\Delta_1 F_{21} = \sum_{m,\,n} \frac{1}{\omega_{mn}} \int \int_0^{x^0} \Delta_1 A_{11}^{(nm)}(\xi) \sin \omega_{mn} (\xi - x^0) \, d\xi \times$$

$$\times\, (r^{-3/2} J_\nu (\omega_n (r)) \sin m\varphi,$$

$$\Delta_1 F_{11} = \sum_n \frac{1}{\omega_n} \int_0^{x^0} \Delta_1 C_{11}^{(n)} (\xi) \sin \omega_n (\xi - x^0) \, d\xi \, (r^{3/2} J_{1/2} (\omega_n r)), \quad (2.3.68)$$

где

$$\Delta_1 A_{11}^{(mn)} = \frac{\int_0^{r_2} \int_0^{2\pi} 2r^{-7/2} \Delta_1 A_{11} J_\nu (\omega_{mn} r) \sin m\varphi d\varphi dr}{\int_0^{r_2} \int_0^{2\pi} (r^{-3/2} J_\nu (\omega_{mn} r) \sin m\varphi)^2 \, d\varphi dr},$$

$$\Delta_1 C_{11}^{(n)} = \int_0^{r_2} \Delta_1 C_{11} r^{3/2} J_{1/2} (\omega_n r) \, dr \bigg/ \int_0^{r_2} (r^{3/2} J_{1/2} (\omega_n r))^2 \, dr$$

— коэффициенты Фурье функций

$$\Delta_1 A_{11} = r^4 \frac{\partial}{\partial x^0} \Delta_1 Q_{(1)}^{13} + \frac{\partial}{\partial r} (r^4 \Delta_1 Q_{(1)}^{12}),$$

$$\Delta_1 C_{11} = 2r^4 \Delta_1 Q_{(1)}^{12} + \sum_{m,\,n} \frac{m}{\omega_{mn}} \int \int_0^{x^0} A_{11}^{(mn)} (\xi) \times$$

$$\times\, \sin \omega_{mn} (\xi - x^0) \, d\xi dx^0 \frac{\partial}{\partial r} (r^{-3/2} J_\nu (\omega_{mn} r)) \cos m\varphi.$$

Для $\Delta_1 \Phi_{i1}$ следует заменить индекс 1 у функций нагрузок $\Delta_1 Q_{(\gamma)}^{1\beta}$ на индекс 2.

Подставляя (2.3.67) в (1.4.22) и (1.4.23), а полученный результат — в (1.4.21), определяем компоненты тензора $\Delta_1 (T_0^{(1)})$ для самоуравновешенных частей функций нагрузок $\Delta_1 \widetilde{Q}_{(1)}^{1\beta}$. Несамоуравновешенные части $\Delta_1 \overline{Q}_{(\gamma)}^{1\beta}$ функций нагрузок характеризуются тензором $\Delta_1 (T_0^{(2)})$ с компонентами (1.4.40), в которых $\overline{Q}_{(\gamma)}^{\beta l}$ следует заменить на $\Delta_1 \overline{Q}_{(\gamma)}^{1\beta}$. Сумма тензоров $\Delta_1 (T_0^{(1)}) + \Delta_1 (T_0^{(2)})$ есть основной тензор $\Delta_1 (T_0)$. В простейшем случае компоненты основного тензора

$$\Delta_1 T_{(0)}^{\alpha 1} = (1/2) (1 + \cos \overline{\theta}) \Delta_1 Q_{(1)}^{\alpha 1} + (1/2) (1 - \cos \overline{\theta}) \Delta_1 Q_{(2)}^{1\alpha}. \quad (2.3.69)$$

Компоненты корректирующего тензора $\Delta_1 (T_к)$ таковы:

$$\Delta_1 T^{\alpha\beta}_{(к)} = \sum_{mnpl} (\Delta_1 A_{mnpl} f^{\alpha\beta}_{(1)} + \Delta_1 B_{mnpl} f^{\alpha\beta}_{(2)} + \Delta_1 C_{mnpl} f^{\alpha\beta}_{(3)} + \Delta_1 D_{mnpl} f^{\alpha\beta}_{(0)}). \tag{2.3.70}$$

Они содержат известные функции сферических координат $f^{\alpha\beta}_{\gamma}$ $(mnpl)$, где $\bar\theta = (\theta + \pi/2)$, $\bar\varphi = \varphi/2$, $\bar r = \pi\ (r - r_1)/[(a/a_{cq})\ x^0 - r_1]$, $\bar x^0 = \pi x^0/(a_{c_q}/a)\,h$. Параметры $\Delta_1 A_{mnpl}$, ..., $\Delta_1 D_{mnpl}$ компонент корректирующего тензора подчинены уравнениям (2.3.56) и определяются в результате их решения. Коэффициенты $F_{\gamma\beta}$ вычисляются по формулам (2.2.23), интегралы $F^{(k)}_{\gamma\beta}$ $(mnplijkq)$ имеют вид (2.2.59), причем $\theta_2 = \pi/2$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 2\pi$. Свободные члены $\Delta_1 L_\beta$ $(ijkq)$ вычисляются по формулам (2.2.25), интегралы $\Delta_1 L^{(l)}_\beta$ имеют вид (2.2.60), в их подынтегральных выражениях $T^{\alpha\beta}_{(0)}$ следует заменить на $\Delta_1 T^{\alpha\beta}_{(0)}$. В результате будут найдены параметры $\Delta_1 A_{mnpl}$, ..., ΔD_{mnpl}, следовательно, компоненты корректирующего тензора. Сумма основного $\Delta_1 (T_0)$ и корректирующего $\Delta_1 (T_к)$ тензоров есть дополнительный тензор кинетических напряжений $\Delta_1 (T)$ области возмущений отраженной волны нагрузки. В соответствии с (2.3.49) имеем тензор кинетических напряжений $(T)_{отр}$ рассматриваемой области возмущений.

Построение тензора кинетических напряжений $(T)_{отр}$ области возмущений отраженной волны разгрузки проводится как и в случае нагрузки, поэтому можно считать искомый тензор для разгрузки известным.

Прямой волне нагрузки соответствует интенсивность кинетических напряжений $T_i^{нагр}$, отраженной волне нагрузки — интенсивность кинетических напряжений $T_i^{отр}$, определяемые по известным тензорам $(T)_{нагр}$ и $(T)_{отр}$. При интерференции волн суммарная интенсивность кинетических напряжений

$$T_i^{пол} = T_i^{нагр} + T_i^{отр}. \tag{2.3.71}$$

Если условие

$$T_i^{пол} < T_B \tag{2.3.72}$$

выполняется, то сплошность среды не нарушается и преграда будет прочной; если же имеет место условие

$$T_i^{пол} > T_B, \tag{2.3.72'}$$

то происходит явление откола на тыльной поверхности преграды. Характер откола определяется величиной T_B, вычисляемой по формулам (1.5.32) или (1.5.35). При выполнении условий

$$T_B < T_i < 2T_B \tag{2.3.73}$$

имеем простой откол; при выполнении условий

$$T_i^{пол} > 2T_B \tag{2.3.73'}$$

— множественный откол, характеризующийся числом отколов

$$n \leqslant T_i^{\text{пол}}/T_B. \qquad (2.3.74)$$

§ 4. Внедрение тела в деформируемую среду

Удар тела по деформируемой среде сопровождается, как правило, внедрением его в среду, особенно при достаточно высокой скорости соударения.

Назовем тело, которое внедряется, *внедряющимся* (оно должно иметь криволинейную выпуклую или заостренную поверхность); среду, в которую внедряется тело, условимся называть *преградой*.

При внедрении (как и при соударении) возникают силы, которые нарастают и уменьшаются в короткий промежуток времени, при этом как во внедряющемся теле, так и в преграде зарождаются волны напряжений различной природы.

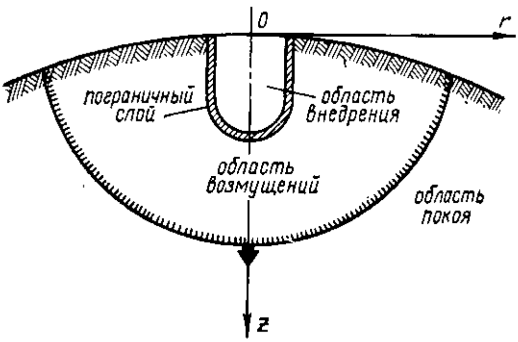

Рис. 49

При внедрении в преграде можно выделить три области: область внедрения, область возмущенного состояния и область покоя (рис. 49), размеры и конфигурация которых зависят от скорости внедрения, массы и геометрической формы внедряющегося тела, свойств преграды и других факторов. Бóльшая часть кинетической энергии внедряющегося тела переходит в тепловую, при этом в области внедрения развиваются высокие температура и давление, материал преграды сильно разогревается и при наличии большого давления находится в жидком или газообразном состоянии в условиях ударного сжатия. Ударное сжатие характеризуется ударной адиабатой $p = p(\rho)$, которая предполагается известной. Покажем, каким образом по известной ударной адиабате материала среды можно определить $p_у(V)$, T и Γ, знание которых важно при изучении процесса внедрения тела в преграду. При ударном сжатии состоянию среды соответствуют давление p и объем V, его начальному состоянию — давление p_0 и объем V_0 причем для сильных ударных волн (что имеет место при внедрении) давлением $p_0 \ll p$ можно пренебречь. Единице массы среды сообщается работа $p(V_0 - V)$, половина которой превращается в кинетическую энергию: $(1/2)\,p(V_0 - V) = v^2/2$, где v — скорость частиц на фронте ударной волны. Остальная работа идет на повышение удельной внутренней энергии: $(1/2)\,p(V_0 - V) = E - E_0$. Приращение внутренней энергии $E - E_0$ складывается из тепловой составляющей U_1, характеризующей энергию колебания частиц около их положения равновесия, и упругой составляющей U_0, которая характеризует упругое взаимодействие частиц при $T^0 = 0$ К, следовательно,

$$E - E_0 = U_0 + U_1 = \int_0^{V_E} p_у(V)\,dV + C_V(T - T_0),$$

отсюда $U_1 = E_0 + c_V(T - T_0)$.

Давление p на ударной адиабате равно сумме упругого $p_у$ и теплового $p_т$ давлений: $p = p_у(V) + p_т(V, T)$. Из термодинамического равенства $Tds = dE + pdV$ при $T = 0°$ К находим $p_у = dU_0/dV$; тепловое давление можно представить в виде $p_т = \Gamma(V)(U_1/V)$. В результате получим

$$p = \frac{\partial U_0}{\partial V} + \Gamma(V)\frac{U_1}{V}.$$

Объединяя полученные соотношения, имеем

$$\begin{gathered} p = p_у + \Gamma(c_V/V)(E_0/c_V + T - T_0), \\ (1/2)\,p(V_0 - V) = c_V(T - T_0) + \int_0^{V_E} p_у(V)\,dV. \end{gathered} \tag{2.4.1}$$

При давлениях порядка 10^6 кГ/см и выше, важную роль играет электронная составляющая давления, следовательно, имеем

$$\begin{gathered} p = p_у + \Gamma(c_V/V)(E_0/c_V + T - T_0) + \Gamma_э(\beta_0/(2V))(V/V_E)^{\Gamma_э}T^2, \\ (1/2)\,p(V_0 - V) = c_V(T - T_0) + \int_0^{V_E} p_у\,dV + \frac{\beta_0}{2}(V/V_E)^{\Gamma_э}T^2, \end{gathered} \tag{2.4.2}$$

где β_0 — коэффициент электронной теплоемкости, $\Gamma_э$ — коэффициент Грюнайзена для электрона*.

Итак, используя уравнения (2.4.1) и (2.4.2), по известной ударной адиабате материала преграды можно найти $p_у(V)$, T и Γ.

Давление, возникающее при внедрении, вынуждает материал среды растекаться, в результате образуется кратер, в который входит внедряющееся тело. Кратер окаймлен пограничным слоем, где среда находится в пластическом состоянии или является вязкой жидкостью с коэффициентами вязкости λ и μ. Область внедрения включает кратер и пограничный слой, граница ее определяется формой внедряющегося тела, степенью деформации и его агрегатным состоянием, а также условиями встречи тела с преградой, т. е. скоростью v_c и углом встречи ψ.

---

* *Огибалов П. М., Кийко И. А.* Очерки по механике высоких параметров. М., 1966.

Пусть тело массы m имеет скорость v_c и внедряется в преграду под углом ψ (рис. 50). Введем в рассмотрение тело единичной массы $m_e = 1$ так, чтобы кинетическая энергия при ударе не изменялась. В этом случае скорость $v = \sqrt{m/m_e} v_c$ можно разложить на составляющие:

$$v_г = \sqrt{m/m_e}\, v_c \sin\psi, \quad v_в = \sqrt{m/m_e}\, v_c \cos\psi. \tag{2.4.3}$$

Вертикальная составляющая скорости $v_в$ определяет наличие внедрения и его глубину. Внедрение имеет место в случае, если

$$v_в > 2 \sqrt{\int\limits_0^{\varepsilon_в} \sigma_i\, de_i + 3K\varepsilon_в^2}\,, \tag{2.4.4}$$

где $\varepsilon_в$ — значение интенсивности деформаций предела прочности материала преграды при динамическом сжатии. Горизонтальная составляющая скорости $v_г$ определяет размеры области внедрения на поверхности преграды.

В зависимости от скорости $v_в$, свойств материала взаимодействующих тел, формы и массы внедряющегося тела и других факторов процесс внедрения может быть различным. Классифицируются процессы внедрения по скорости $v_в$ и параметру

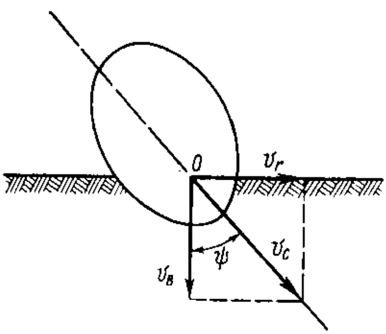

Рис. 50

$$\pi = \rho_т\sigma_в^{(т)}/\rho_{пр}\sigma_в^{(пр)}, \tag{2.4.5}$$

где $\rho_т$ и $\rho_{пр}$ — соответственно плотность внедряющегося тела и преграды, $\sigma_в^{(т)}$, $\sigma_в^{(пр)}$ — пределы прочности материала тела и преграды, которые учитывают инерционные и прочностные свойства соударяющихся тел. Экспериментально показано, что при классификации процессов внедрения пределы прочности $\sigma_в^{(т)}$, $\sigma_в^{(пр)}$ можно заменить на $\sigma_т^{(т)}$, $\sigma_т^{(пр)}$; кроме того, установлено, что предел прочности материала внедряющегося тела оказывает слабое влияние на характер процесса внедрения, поэтому можно принять

$$\pi = (\rho_т/\rho_{пр})\,(\sigma_0/\sigma_т^{(пр)}), \tag{2.4.5'}$$

где $\sigma_0 = 50$ кгс/мм² — константа. Параметр π изменяется в интервале $0{,}05 \leqslant \pi \leqslant 50$ для широкого диапазона условий.

В зависимости от значений параметра π и скорости $v_в$ процесс внедрения может протекать различно (рис. 51). Область I характеризуется большими значениями параметра π, которым соответствует процесс внедрения жесткого тела в мягкую преграду. Назовем его *аэродинамическим*, а область I — *областью аэродинамического внедрения*, для которого характерна большая глубина внедрения. При небольших скоростях внедрения диаметр кратера равен диаметру внедряющегося тела, при больших скоростях внедрения диаметр кратера больше диаметра внедряющегося тела, что объясняется радиальным инерционным движением частиц среды преграды в области внедрения. Внедряющееся тело считают или недеформируемым, или испытывающим малые деформации. Схема аэродинамического внедрения реализуется при внедрении прочного тяжелого тела компактной формы в легкую непрочную преграду. Запишем условие, при котором происходит аэродинамическое внедрение:

$$v_в \leqslant v_{кр}, \qquad (2.4.6)$$

или

$$v_{кр} \approx \sqrt{2\sigma^{(пр)}_{т.д}/(\eta\rho_{пр})} \qquad (2.4.7)$$

— критическая скорость, при которой в теле возникают пластические деформации или наступает хрупкое разрушение; η — коэффициент вида напряженного состояния внедряющегося тела.

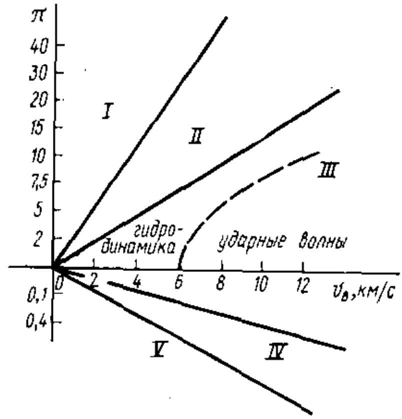

Рис. 51

Область II является переходной от аэродинамического внедрения к кратерному. Тело в процессе внедрения деформируется, но остается компактным. Глубина внедрения меньше, чем при аэродинамическом внедрении. При небольших скоростях внедрения диаметр кратера равен диаметру деформированного внедряющегося тела, при больших скоростях внедрения наблюдается увеличение размеров кратера вследствие инерционного движения частиц преграды. Такое внедрение происхоит при следующем условии:

$$v_в > v_{кр}. \qquad (2.4.8)$$

В области III внедряющееся тело сильно деформируется. Материал тела и преграды, находясь в пластическом или жидком состоянии, растекается по стенке кратера. Скорость, при которой начинается течение, зависит от формы внедряющегося тела и его физико-механических свойств, однако существует такая скорость v, выше которой тело любой формы при внедрении ведет себя как пластическое. При этом кратер имеет сферическую форму, размеры его превосходят начальные размеры внедряющегося тела.

В областях IV и V внедрение тела в преграду отсутствует, этот случай был рассмотрен в предыдущем параграфе.

Таким образом, все вышеизложенное позволяет сделать следующие выводы:

1) область внедрения представляет собой кратер, окаймленный пограничным слоем;

2) материал преграды в пограничном слое (в зависимости от величины скорости $v_в$ и степени разогрева) находится в пластическом или жидком состоянии;

3) в областях переходного и аэродинамического внедрения внедряющееся тело сохраняет компактную форму, поэтому его можно считать жестким, имеющим известную геометрическую форму;

4) в области кратерного внедрения внедряющееся тело имеет полусферическую форму, размеры которой известны.

Такое представление о процессе внедрения соответствует опытным данным и положено в основу при его математическом описании.

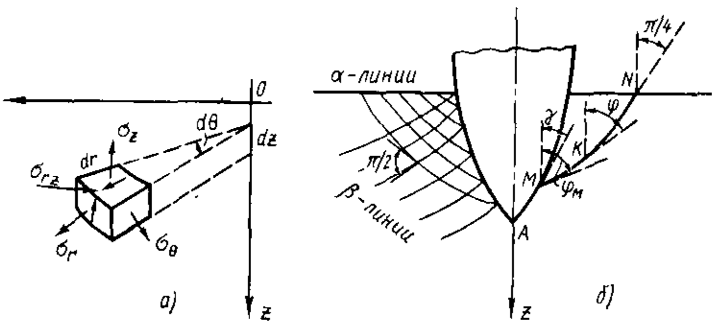

Рис. 52

Изучение состояния преграды в области внедрения сводится к определению давления среды на поверхность внедряющегося тела и характеристик напряженно-деформированного состояния среды в пограничном слое. Исследование проводится в цилиндрических координатах r, θ, z при следующих предположениях: а) материал преграды идеально пластический с характеристикой $\sigma_{т.д}$; б) внедряющееся тело абсолютно жесткое, причем геометрическая форма при аэродинамическом и переходном внедрении известна, при кратерном внедрении форма тела сферическая; в) сопротивление преграды внедрению можно представить в виде совокупности двух составляющих: собственного сопротивления $\sigma_{соб}$ и динамического сопротивления $\sigma_{дин}$.

При определении $\sigma_{соб}$ считаем, что напряженное состояние преграды в области внедрения характеризуется тензором напряжений (σ) с компонентами σ_r, σ_θ, σ_z, σ_{rz}. Учитывая симметрию по координате θ и тот факт, что координатная линия θ совпадает с главным направлением, имеем главное напряжение $\sigma_2 = \sigma_\theta$; два других главных направления совпадают с направлением нормали к поверхности тела, которому соответствует главное напряжение σ_1, и с направлением касательной к образующей поверхности тела, которому соответствует главное напряжение σ_3. Главные напряжения σ_1, σ_3 связаны с напряжениями σ_r, σ_z, σ_{rz}, причем $\sigma_2 = \sigma_1$, $\sigma_3 = \sigma_z$ при $r = 0$ на оси Oz (рис. 52, $а$).

Траектории максимальных касательных напряжений $\tau_{max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$ в меридиональных направлениях называются *α-линиями скольз-*

жения; угол касательной к линии скольжения в точке K оси Oz обозначим через φ; β-линии скольжения имеют угол $\varphi' = \varphi + \pi/2$ (рис. 52, *б*). В области внедрения среда идеально пластическая и несжимаемая, поэтому из условия пластичности Мизеса

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_{\text{т.д}}^2$$

следует, что на оси Oz имеем $\sigma_2 = \sigma_1$, поэтому

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_{\max} = \sigma_{\text{т.д}}. \tag{2.4.9}$$

Угол наклона главного направления I с осью Oz равен $\varphi - \pi/4$ и напряжения σ_r, σ_z, σ_{zr} можно выразить через главные напряжения σ_1, σ_3:

$$\begin{gathered}\sigma_r = (1/2)(\sigma_1 + \sigma_3) - (1/2)(\sigma_1 - \sigma_3)\sin 2\varphi,\\ \sigma_z = (1/2)(\sigma_1 + \sigma_3) + (1/2)(\sigma_1 - \sigma_3)\sin 2\varphi,\\ \sigma_{rz} = (1/2)(\sigma_1 - \sigma_3)\cos 2\varphi.\end{gathered} \tag{2.4.10}$$

Пусть

$$\sigma = (1/2)(\sigma_1 + \sigma_3) = \sigma_1 - (1/2)\sigma_{\text{т.д}}, \tag{2.4.11}$$

тогда (2.4.10) можно записать в виде

$$\begin{gathered}\sigma_r = \sigma - (1/2)\sigma_{\text{т.д}}\sin 2\varphi,\\ \sigma_z = \sigma + (1/2)\sigma_{\text{т.д}}\sin 2\varphi,\ \sigma_{rz} = (1/2)\sigma_{\text{т.д}}\cos 2\varphi.\end{gathered} \tag{2.4.10$'$}$$

При нахождении неизвестных σ и φ воспользуемся уравнениями равновесия среды в области внедрения

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0,$$

$$\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0.$$

Подставляя в эти уравнения выражения (2.4.10)$'$ и выполняя необходимые преобразования, получим:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\xi}{\partial S_2} = (1/r)(\sin\varphi - \cos\varphi),\\ \frac{\partial\eta}{\partial S_1} = (1/r)(\sin\varphi - \cos\varphi),\end{gathered} \tag{2.4.12}$$

где

$$(1/2)\sigma_{\text{т.д}}\xi = \sigma_{\text{т.д}}\varphi + \sigma,\ (1/2)\sigma_{\text{т.д}}\eta = \sigma - \sigma_{\text{т.д}}\varphi, \tag{2.4.13}$$

причем $dS_1 = A d\alpha$, $dS_2 = B d\beta$ — элементы длины α- и β-линий скольжения. Если α- и β-линии скольжения известны, то, интегрируя (2.4.12), находим

$$\begin{gathered}\xi = \int \frac{1}{r}(\sin\varphi - \cos\varphi)\, dS_2 + f_1(\alpha),\\ \eta = \int \frac{1}{r}(\sin\varphi - \cos\varphi)\, dS_1 + f_2(\beta).\end{gathered} \tag{2.4.14}$$

Пусть одна из α-линий скольжения построена, тогда разность значений η в точках M и N α-линии устанавливает связь между σ и φ:

$$(1/2)\,\sigma_{\text{т.д}}(\eta_M-\eta_N)=\sigma_M-\sigma_N-\sigma_{\text{т.д}}(\varphi_M-\varphi_N).$$

Учитывая, что

$$\varphi_M-\varphi_N=\gamma+\pi/4-\pi/4=\gamma,$$

$$\eta_M-\eta_N=f_2-f_2-\int\limits_M^N\frac{1}{r}(\sin\varphi-\cos\varphi)\,dS_1=-\int\limits_M^N\frac{1}{r}(\sin\varphi-\cos\varphi)\,nS_1,$$

получим

$$\sigma_M-\sigma_N-\sigma_{\text{т. д}}\gamma=-\frac{1}{2}\sigma_{\text{т. д}}\int\limits_M^N\frac{1}{r}(\sin\varphi-\cos\varphi)\,dS_1. \qquad (2.4.15)$$

В точке M главное напряжение $\sigma_1(M)=-p$, следовательно, $\sigma_M=-p-\sigma_{\text{т.д}}/2$; в точке N главное напряжение $\sigma_1(N)=\sigma_{\text{т.д}}$, поэтому $\sigma_N=\sigma_{\text{т.д}}-\sigma_{\text{т.д}}/2=\sigma_{\text{т.д}}/2$. Подставляя найденные значения σ_M и σ_N в (2.4.15), находим

$$-p=\sigma_{\text{т. в}}\left[1+\gamma+\frac{1}{2}\int\limits_M^N\frac{1}{r}(\cos\varphi-\sin\varphi)\,dS_1\right]. \qquad (2.4.16)$$

Если уравнение α-линии скольжения задано в виде $r=r(z)$, то $dr=dS_1\sin\varphi$, $dz=dS_1\cos\varphi$ и интеграл можно преобразовать к виду

$$\int\limits_M^N\frac{1}{r}(\cos\varphi-\sin\varphi)\,dS_1=\int\limits_M^N\frac{dz-dr}{r(z)},$$

а выражение (2.4.16) — к следующему виду:

$$-p=\sigma_{\text{т. д}}\left[1+\gamma+\frac{1}{2}\int\limits_M^N(dz-dr)/r(z)\right]. \qquad (2.4.16')$$

Главное напряжение на поверхности тела $\sigma_1(M)=-p$, поэтому из (2.4.16′) имеем

$$\sigma_1(M)=\sigma_{\text{т. д}}\left[1+\gamma+\frac{1}{2}\int\limits_M^N\frac{dz-dr}{r(z)}\right] \qquad (2.4.17)$$

или

$$\sigma_1(M)=\sigma_{\text{т. д}}\bar{\sigma}_1,$$
$$\bar{\sigma}=1+\gamma+\frac{1}{2}\int\limits_M^N(dz-dr)/r(z). \qquad (2.4.17')$$

Чтобы вычислить интеграл $\int\limits_M^N(dz-dr)/r(z)$, необходимо знать уравнение α-линии скольжения, поэтому, следуя А. А. Ильюшину и

В. М. Пучкову [13], [33], функцию $\tilde{\sigma}_1$ представим в виде

$$\tilde{\sigma}_1 = 1 + \gamma_A + \left(\frac{\pi}{2} - \gamma_A\right)\frac{z}{h} + \frac{z}{2h}\int\limits_C^B (dz - dr)/r, \qquad (2.4.18)$$

где γ_A — угол наклона касательной в точке A (рис. 53), h — глубина внедрения тела, CB — α-линия скольжения, которую необходимо построить. Кривая CB строится следующим образом. На участке контакта AC проводим семейство прямых AA', MM', CC' под углом $\pi/4$ к кривой AC с наклоном прямых в сторону движения и проводим прямую AA'', наклоненную к прямой AB под углом $\pi/4$.

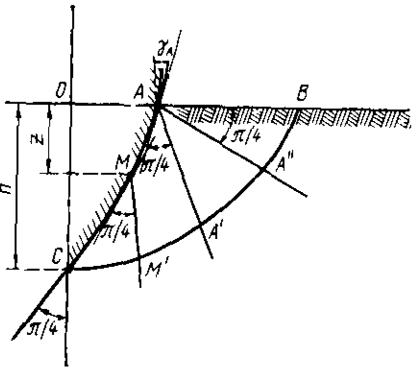

Рис. 53

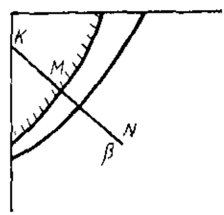

Рис. 54

Начиная с точки C, строим графически кривую, пересекающую лучи CC', ..., MM', ..., AA' под прямым углом; продолжением ее между линиями AA' и AA'' является дуга окружности с центром в точке A, от луча AA'' в точку B идет прямая. Полученная кривая CB и есть искомая линия скольжения, вдоль которой необходимо интегрировать при вычислении интеграла (2.4.18).

В пограничном слое области внедрения, который предполагается узким, материал преграды находится в пластическом состоянии с характеристикой $\sigma_{\text{т.д}}$. Геометрия пограничного слоя определяется формой внедряющегося тела, поверхность которого описывается уравнением образующей $r = r(z)$. Для пограничного слоя принята криволинейная система координат α, β, координатными линиями которой являются: образующая тела AB линия α, нормаль MN к образующей линия β (рис. 54). Параметры Ляме координатных линий [45] $H_1 = H = 1 + \beta/r$, $H_2 = 1$.

Напряженно-деформированное состояние среды в пограничном слое характеризуется тензором напряжений (σ) с компонентами σ_α, σ_β, $\sigma_{\alpha\beta}$, тензором скоростей деформаций (e) с компонентами

$$\dot{e}_\alpha = \frac{1}{H}\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{v_\beta}{r}\right), \quad \dot{e}_\beta = \frac{\partial v_\beta}{\partial \beta}, \qquad (2.4.19)$$

$$2\dot{e}_{\alpha\beta} = \frac{1}{H}\left(\frac{\partial v_\beta}{\partial \alpha} - \frac{v_\alpha}{r}\right) + \frac{\partial v_\alpha}{\partial \beta},$$

где v_α, v_β — компоненты вектора скорости частиц среды. Учитывая выражения напряжений

$$\sigma_\alpha = \sigma + \tau\cos 2\varphi,\ \sigma_\beta = \sigma - \tau\cos 2\varphi,\ \sigma_{\alpha\beta} = \tau\sin 2\varphi, \qquad (2.4.20)$$

где $\sigma = (\sigma_\alpha + \sigma_\beta)/2$, $\tau = \sigma_{\text{т.д}}/\sqrt{3}$; для условия пластичности Генки—Мизеса и $\tau = 0{,}5\tau_{\text{т.д}}$ для условия пластичности Треска—Сен-Венана, уравнения установившегося течения

$$\frac{\partial\sigma_\alpha}{\partial\alpha} + H\frac{\partial\sigma_{\alpha\beta}}{\partial\beta} + \frac{2}{r}\sigma_{\alpha\beta} = 0,$$

$$\frac{\partial\sigma_{\alpha\beta}}{\partial\alpha} + H\frac{\partial\alpha_\beta}{\partial\beta} + \frac{\sigma_\beta - \sigma_\alpha}{r} = 0$$

можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\alpha} - 2\tau\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} - \frac{1}{r}\right)\sin 2\varphi - H\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\cos 2\varphi\right] = 0,$$

$$H\frac{\partial\sigma}{\partial\beta} + 2\tau\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} - \frac{1}{r}\right)\cos 2\varphi + H\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\sin 2\varphi\right] = 0.$$

Последние уравнения эквивалентны уравнениям

$$\left[\frac{\partial\sigma}{\partial\alpha} - 2\tau\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} - \frac{1}{r}\right)\right] + H\left[\frac{\partial\sigma}{\partial\beta} - 2\tau\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right]\operatorname{tg}\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = 0, \qquad (2.4.21)$$

$$\left[\frac{\partial\sigma}{\partial\alpha} + 2\tau\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} - \frac{1}{r}\right)\right] + H\left[\frac{\partial\sigma}{\partial\beta} + 2\tau\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right]\operatorname{tg}\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) = 0,$$

которым соответствуют следующие условия на поверхности тела: при $\beta = 0$ вдоль кривой AB

$$\varphi = \pi/4,\quad \sigma = \sigma_0(\alpha). \qquad (2.4.22)$$

Оценивая порядок различных членов уравнений (2.4.21), полагая при этом $\sigma - \sigma_0$ и $\varphi - \pi/4$ малыми величинами и отбрасывая те из них, которые малы по сравнению с остальными, получим приближенные уравнения:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\beta} + 2\tau\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} = 0, \qquad (2.4.23)$$

$$\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\beta} - 2\tau\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = -\left(\sigma_0 + \frac{2\tau}{r}\right).$$

Интегрируя первое из уравнений (2.4.23) с учетом граничных условий (2.4.22), находим

$$\sigma - \sigma_0 = -2\tau(\varphi - \pi/4); \qquad (2.4.24)$$

второе из уравнений (2.4.23) преобразуется к виду

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{1}{2\tau}\frac{\partial\sigma_0}{\partial\alpha} + \frac{1}{r}.$$

Интегрируя последнее выражение, учитывая при этом граничные условия (2.4.22), получим

$$\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)^2=\left[\frac{1}{2\tau}\frac{\partial\sigma_0}{\partial\alpha}+\frac{1}{r}\right]\beta, \qquad (2.4.25)$$

причем $\partial\sigma_0/\partial\alpha \geqslant -2\tau/r$, так как $\beta \geqslant 0$.

Принимая во внимание выражения компонент тензора скоростей деформаций

$$\dot e_\alpha=\dot e+g\cos 2\varphi,\quad \dot e_\beta=\dot e-g\cos 2\varphi,\quad \dot e_{\alpha\beta}=g\sin 2\varphi, \qquad (2.4.26)$$

где $\dot e=(1/2)(\dot e_\alpha+\dot e_\beta)$, $g^2=(1/4)(\dot e_\alpha-\dot e_\beta)^2+\dot e_{\alpha\beta}^2$, и считая материал среды несжимаемым ($\dot e=0$), из кинематических соотношений (2.4.19) находим уравнения

$$2\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial\alpha}+\frac{v_\beta}{r}\right)\sin 2\varphi-\left(\frac{\partial v_\beta}{\partial\alpha}-\frac{v_\alpha}{r}+H\frac{\partial v_\alpha}{\partial\beta}\right)\cos 2\varphi=0,$$

$$2H\left(\frac{\partial v_\beta}{\partial\beta}\right)\sin 2\varphi+\left(\frac{\partial v_\beta}{\partial\alpha}-\frac{v_\alpha}{r}+H\frac{\partial v_\alpha}{\partial\beta}\right)\cos 2\varphi=0,$$

эквивалентные уравнениям

$$\left[\frac{\partial v_\alpha}{\partial\alpha}+\frac{v_\beta}{r}+\frac{\partial v_\beta}{\partial\alpha}\operatorname{tg}\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\right]+$$
$$+\left[H\frac{\partial v_\alpha}{\partial\beta}-\frac{v_\alpha}{r}+H\frac{\partial v_\beta}{\partial\beta}\operatorname{tg}\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\right]\operatorname{tg}\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)=0, \qquad (2.4.27)$$
$$\left[\frac{\partial v_\alpha}{\partial\alpha}+\frac{v_\beta}{r}+\frac{\partial v_\beta}{\partial\alpha}\operatorname{tg}\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right]+$$
$$+\left[H\frac{\partial v_\alpha}{\partial\beta}-\frac{v_\alpha}{r}+H\frac{\partial v_\beta}{\partial\beta}\operatorname{tg}\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right]\operatorname{tg}\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

Последним соответствуют следующие граничные условия: при $\beta=0$ на поверхности тела вдоль кривой AB

$$v_\alpha=v_\alpha^0(\alpha),\quad v_\beta=v_\beta^0(\alpha), \qquad (2.4.28)$$

в этом случае

$$\dot e_\alpha^0(\alpha)=\frac{\partial v_\alpha^0}{\partial\alpha}+\frac{1}{r}v_\beta^0.$$

Аналогично изложенному, оценивая порядок членов в уравнениях (2.4.27), полагая $v_\alpha-v_\alpha^0$ и $v_\beta-v_\beta^0$ малыми величинами и опуская те из них, которые малы по сравнению с остальными, получим приближенные уравнения

$$\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial\beta}-\frac{v_\alpha^0}{r}\right)\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)=-\dot e_\alpha^0,\ \frac{\partial v_\beta}{\partial\beta}=-\dot e_\alpha^0. \qquad (2.4.29)$$

Эти уравнения можно проинтегрировать, учитывая граничные условия (2.4.28). В результате имеем

$$v_\alpha - v_\alpha^0 = \left(\frac{v_\alpha^0}{r} - \frac{2\dot{e}_\alpha^0}{\varphi - \pi/4}\right)\beta, \quad v_\beta - v_\beta^0 = -\dot{e}_\alpha^0 \beta. \qquad (2.4.30)$$

Следует отметить, что величины $\sigma - \sigma_0$, $\varphi - \pi/4$ и $v_\alpha - v_\alpha^0$ имеют порядок $\sqrt{\beta}$, тогда как величина $v_\beta - v_\beta^0$ имеет порядок β.

Уравнения линий скольжения в пограничном слое получим, если в соотношения $\varphi + \theta \mp \sigma/(2\tau) = \mathrm{const}$ подставить выражения (2.4.24) и (2.4.25). Одна из линий скольжения, проходящая через точку $(\alpha_0, 0)$ на граничной кривой, есть прямая $\alpha = \alpha_0$ или $\theta = \theta_0$; другой линией скольжения является кривая

$$\beta = \frac{[\sigma_0(\alpha) - \sigma_0(\alpha_0) - 2\tau(\theta - \theta_0)]^2}{8\tau(\partial\sigma_0/\partial\alpha + 2\tau_0/r)},$$

которая приближенно определяется уравнением

$$\beta = \frac{1}{8\tau}\left(\left.\frac{\partial\sigma_0}{\partial\alpha}\right|_{\alpha_0} + \frac{2}{r(\alpha_0)}\tau\right)(\alpha - \alpha_0)^2. \qquad (2.4.31)$$

На основании изложенного получим выражения компонент тензора напряжений в пограничном слое:

$$\sigma_\alpha = \sigma_0 + 2\sqrt{\left(\frac{\partial\sigma_0}{\partial\alpha} + \frac{2}{r}\tau\right)2\tau\beta}\ \operatorname{sign}(\sigma_\alpha - \sigma_\beta),$$

$$\sigma_\beta = \sigma_0(\alpha), \qquad (2.4.32)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \tau - \left(\frac{\partial\sigma_0}{\partial\alpha} + \frac{2\tau}{r}\right)\beta;$$

компоненты вектора скорости имеют вид

$$v_\alpha = v_\alpha^0\left(1 + \frac{\beta}{r}\right) + 2\dot{e}_\alpha^0 \frac{\sqrt{2\tau\beta}}{\sqrt{\partial\sigma_0/\partial\alpha + 2\tau/r}} \operatorname{sign}(\sigma_\alpha - \sigma_\beta),$$

$$v_\beta = v_\beta^0 - \dot{e}_\alpha^0 \beta. \qquad (2.4.33)$$

Выражение $\sigma_0(\alpha) = \sigma_1 - \sigma_{\text{т.д}}/2$, учитывая (2.4.17′), можно привести к виду

$$\sigma_0(\alpha) = \sigma_{\text{т.д}}(\bar{\sigma}_1 - 1/2). \qquad (2.4.34)$$

Подставляя (2.4.34) в (2.4.32), получим выражения компонент тензора напряжений в пограничном слое для условия пластичности Генки—Мизеса:

$$\sigma_\alpha = \sigma_{\text{т.д}}\left[\bar{\sigma}_1 - \frac{1}{2} + 2\sqrt{\frac{2\beta}{\sqrt{3}}\left(\frac{\partial\bar{\sigma}_1}{\partial\alpha} + \frac{2}{\sqrt{3}r}\right)}\ \operatorname{sign}(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)\right],$$

$$\sigma_\beta = \sigma_{\text{т.д}}(\bar{\sigma}_1 - 1/2), \qquad (2.4.35)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\text{т.д}}\left[\frac{1}{\sqrt{3}} - \left(\frac{\partial\bar{\sigma}_1}{\partial\alpha} + \frac{2}{\sqrt{3}r}\right)\beta\right].$$

На поверхности внедряющегося тела действуют нормальное (p_n) и касательное (p_τ) давления:

$$p_n = -\sigma_\beta|_{\beta=0} = -\sigma_{\text{т.д}}(\bar{\sigma}_1 - 1/2),$$
$$p_\tau = -\sigma_\alpha|_{\beta=0} = -\sigma_{\text{т.д}}(\bar{\sigma}_1 - 1/2), \qquad (2.4.36)$$

которым соответствует сила собственного сопротивления:

$$\mathcal{F} = -2\pi\sigma_{\text{т.д}}F(h), \qquad (2.4.37)$$
$$F(h) = \int_0^h (\bar{\sigma}_1 - 1/2)\, r(1 + r')\, dz,$$

направленная против движения тела.

Экспериментальные исследования процесса внедрения показывают, что при внедрении впереди тела образуется присоединенная масса материала среды большой плотности, величина которой зависит от степени заостренности внедряющегося тела. Чем больше заостренность тела, тем меньше присоединенная масса. Следовательно, внедряющееся тело является заостренным телом вращения массы $m_e + m_z$, где m_z — присоединенная масса среды.

Движение тела в преграде описывается уравнением

$$d\,[(m_e + m_z)\, v_z] = \mathcal{F}dt,$$

где v_z — скорость тела при внедрении. Умножая правую и левую части уравнения движения на $(m_e + m_z)\, v_z$ и интегрируя, получим

$$(m_e + m_z)^2 v_z^2 - m_e^2 v_b^2 = 2\int_0^h (m_e + m_z)\, \mathcal{F}dz.$$

Отсюда находим скорость внедрения:

$$v_z = \left(1 + \frac{m_z}{m_e}\right)^{-1}\left[v_b^2 + \frac{2}{m_e}\int_0^h \left(1 + \frac{m_z}{m_e}\right)\mathcal{F}dz\right]^{1/2}, \qquad (2.4.38)$$

или, учитывая (2.4.37),

$$v_z = \left(1 + \frac{m_z}{m_e}\right)^{-1}\left[v_b^2 - \frac{4\pi\sigma_{\text{т.д}}}{m_e}\int_0^h \left(1 + \frac{m_z}{m_e}\right)F dz\right]^{1/2}. \qquad (2.4.38')$$

Граничные значения компонент вектора скорости частиц среды определяются по формулам

$$v_\alpha^0 = v_z\cos\gamma = v_z\frac{1}{\sqrt{1 + r'^2}},\quad v_\beta^0 = v_z\sin\gamma = v_z\frac{r'}{\sqrt{1 + r'^2}}. \qquad (2.4.39)$$

Дифференцируя (2.4.38) по времени, найдем ускорение тела при внедрении:

$$\frac{dv_z}{dt} = -\frac{2\pi\sigma_{\text{т.д}}}{m_e}\left(1 + \frac{m_z}{m_e}\right)^{-1}\left[F + \frac{1}{2\pi\sigma_{\text{т.д}}}\frac{dm_z}{dz}v_z^2\right], \qquad (2.4.40)$$

которому соответствует коэффициент перегрузки

$$n = \frac{1}{g}\frac{dv_z}{dt} = -\frac{2\pi\sigma_{\text{т.д}}}{m_e g}\left(1+\frac{m_z}{m_e}\right)^{-1}\left[F+\frac{1}{2\pi\sigma_{\text{т.д}}}\frac{dm_z}{dz}v_z^2\right]. \quad (2.4.41)$$

Сила сопротивления преграды при внедрении тела

$$\mathcal{F} = (m_e + m_z)\frac{dv_z}{dt} = -2\pi\sigma_{\text{т.д}}\left[F+\frac{1}{2\pi\sigma_{\text{т.д}}}\frac{dm_z}{dz}v_z^2\right] \quad (2.4.42)$$

(знак «—» указывает на то, что эта сила направлена противоположно движению тела).

При изучении процесса внедрения тела в некоторые деформируемые среды важно учитывать влияние внутреннего трения, характери-

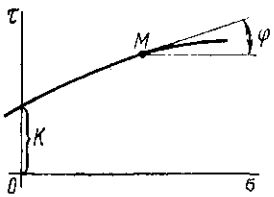

Рис. 55

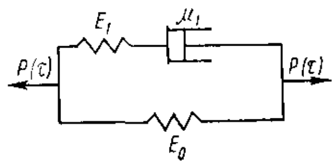

Рис. 56

зуемого углом $\varphi = \operatorname{arctg}(d\tau/d\sigma)$ при наличии диаграммы $\tau(\sigma)$ (рис. 55), которой является огибающая предельных кругов Мора.

Для бетона, например, огибающая — прямая, уравнение которой

$$\tau = K + \sigma \operatorname{tg}\varphi,$$

где $K = 0{,}7\sqrt{\sigma_{\text{пр}}\,\sigma_{\text{в}}^{p}}$;

$$\sigma_{\text{пр}} = \begin{cases} \dfrac{1300+\sigma_{\text{в}}^{\text{с}}}{1450+\sigma_{\text{в}}^{\text{с}}}\,\sigma_{\text{в}}^{\text{с}}, & \sigma_{\text{в}}^{\text{с}} < 300, \\ 0{,}7\sigma_{\text{в}}^{\text{с}}, & \sigma_{\text{в}}^{\text{с}} > 300, \end{cases}$$

$$\sigma_{\text{в}}^{p} = 0{,}5\left(\sigma_{\text{в}}^{\text{с}}\right)^{2/3},$$

где $\sigma_{\text{в}}^{\text{с}}$, кгс/см^2 — *марка бетона (кубиковая прочность), определяемая* экспериментально по результатам испытаний на сжатие кубиков с размерами 20 см в возрасте 28 дней.

В зависимости от времени действия нагрузок деформации бетона могут быть упругими, пластическими и др. При кратковременном действии нагрузок и малых напряжениях бетон является упругой средой с модулем упругости $E = 10^6/(1{,}7 + 360/\sigma_{\text{в}}^{\text{с}})$ кгс/см^2; упругопластические свойства характеризуются модулем пластичности $E' = E\varepsilon_{\text{в}}/\varepsilon$.

Моделью бетона служит тело А. Ю. Ишлинского [20, 21] (рис. 56), которому соответствует уравнение

$$\sigma = E_0\varepsilon_0 + (E - E_0)\,\varepsilon_0 \exp(-\tau E_1/\mu_1),$$

где $E = E_0 + E_1$ — модуль мгновенной упругости; τ — время действия нагрузки. Однако при динамическом нагружении большой интенсивности и малом времени действия тело Ишлинского переходит в абсолютно упругое тело с модулем упругости E.

При внедрении тела в среду образуется область возмущения с тензором напряжений (σ). Для элементарной площадки dS произвольно выбранной в области возмущений, условием предельного равновесия является равенство

$$\tau_n = K + \sigma_n \operatorname{tg} \varphi. \tag{2.4.43}$$

Площадки, взятые в окрестности точки M среды, для которых процесс нарастания напряжений соответствует выполнению условия (2.4.43) раньше, чем по другим площадкам, называются площадками скольжения.

Поверхности скольжения в состоянии предельного равновесия образуются так, что площадки скольжения для них — касательные плоскости. При определении положения площадок скольжения и установления условия предельного равновесия среды используется зависимость

$$\max F(n) = K, \tag{2.4.44}$$

где $F(n) = |\tau_n| - \sigma_n \operatorname{tg} \varphi$.

В пространстве главных напряжений (σ_1, σ_2, σ_3) составляющие напряжений σ_n и τ_n, действующие на элементарную площадку поверхности скольжения, соответственно равны:

$$\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2,$$

$$\tau_n = \sqrt{(\sigma_1 n_1)^2 + (\sigma_2 n_2)^2 + (\sigma_3 n_3)^2 - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2}.$$

Подставляя значения σ_n и τ_n в (2.4.44), находим

$$F_n = \sqrt{(\sigma_1 n_1)^2 + (\sigma_2 n_2)^2 + (\sigma_3 n_3)^2 - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2} - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2) \operatorname{tg} \varphi, \tag{2.4.45}$$

где n_i — компоненты вектора нормали $\mathbf{n}$ к элементарной площадке, связанные между собой соотношением $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$.

Для определения экстремального значения $F(n)$ продифференцируем (2.4.44) по n_i и приравняем нулю частные производные $\partial F(n)/\partial n_i$. Решая полученные уравнения относительно n_j, установим комбинации значений n_i, когда $F(n)$ достигает максимума:

n_1	n_2	n_3
$\pm\sqrt{(1-\sin\varphi)/2}$	$\pm\sqrt{(1+\sin\varphi)/2}$	0
$\pm\sqrt{(1-\sin\varphi)/2}$	0	$\pm\sqrt{(1+\sin\varphi)/2}$
0	$\pm\sqrt{(1-\sin\varphi)/2}$	$\pm\sqrt{(1+\sin\varphi)/2}$

Подставляя найденные значения в (2.4.45), получим выражения для функции F_n:

$$F_1(n) = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \frac{1}{\cos\varphi} - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \operatorname{tg}\varphi,$$

$$F_2(n) = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \frac{1}{\cos\varphi} - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \operatorname{tg}\varphi,$$

$$F_3(n) = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \frac{1}{\cos\varphi} - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \operatorname{tg}\varphi.$$

Так как $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$, то наибольшими оказываются $F_2(n)$ и, следовательно, одно из условий предельного равновесия имеет вид

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \frac{1}{\cos\varphi} - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \operatorname{tg}\varphi = K. \tag{2.4.46}$$

Аналогично изложенному для других значений компонент n_i получим условия предельного равновесия:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \frac{1}{\cos\varphi} - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \operatorname{tg}\varphi = K, \\ \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \frac{1}{\cos\varphi} - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \operatorname{tg}\varphi = K. \end{aligned} \tag{2.4.47}$$

Существование одного из условий (2.4.47) приводит к равенству главного напряжения σ_2 одному из других главных напряжений, т. е. $\sigma_2 = \sigma_3$ или $\sigma_1 = \sigma_2$: выполнение всех трех условий приводит к равенству $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, что соответствует всестороннему сжатию.

Таким образом, (2.4.46) — условие неполного предельного равновесия для пространственного напряженного состояния, тогда как одновременное выполнение условий (2.4.46) и (2.4.47) соответствует состоянию полного предельного равновесия.

Нарушение равновесия среды в пространственном случае в виде сдвига по поверхности скольжения возможно только при переходе среды через состояние полного предельного равновесия. Далее рассматривается только состояние полного предельного равновесия.

При деформации, симметричной относительно оси вращения тела, вблизи этой оси равенство $\sigma_2 = \sigma_3$ имеет место при внедрении тела вращения в преграду (среду). Итак, условия полного предельного равновесия среды при внедрении тела вращения являются

$$\begin{aligned} \sigma_2 = \sigma_3, \\ \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \frac{1}{\cos\varphi} - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \operatorname{tg}\varphi = K. \end{aligned} \tag{2.4.48}$$

Условия (2.4.48) получены для площадок, положение которых определяется значениями компонент $n_1 = \pm\sqrt{(1/2)(1 - \sin\varphi)}$, $n_2 = 0$, $n_3 = \pm\sqrt{(1/2)(1 + \sin\varphi)}$, поэтому можно утверждать, что в каждой точке среды имеют место поверхности скольжения, касательные плоскости к которым проходят через направления главного напряжения σ_2 и составляют с направлением главного напряжения σ_1 угол

$\pm (\pi/4 - \varphi/2)$. Условимся называть первым семейство поверхностей скольжения, для которых указанный угол положителен, вторым — семейство, для поверхностей которого этот угол отрицателен.

Рассмотрим теперь с изложенных позиций сопротивление бетона при внедрении заостренного тела вращения. Решение задачи о расчете сопротивления среды строится на основе следующих предположений: 1) бетон считается квазиизотропной сплошной средой связанной структуры с известными физико-механическими свойствами; 2) внедрение тела проходит по нормали к свободной поверхности; 3) внедряющееся тело абсолютно жесткое заданной геометрической формы; 4) трение на поверхности тела не учитывается.

Решение строится в цилиндрической системе координат (r, θ, z), при этом учитывается симметричность по координате θ. Уравнения движения элемента среды имеют вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2},\end{gathered} \tag{2.4.49}$$

к ним необходимо добавить соотношения

$$\begin{gathered}\sigma_r = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\gamma, \\ \sigma_z = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\gamma, \\ \tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\gamma,\end{gathered} \tag{2.4.50}$$

выражающие напряжения σ_r, σ_z, τ через главные напряжения σ_1 и σ_3.

Следы поверхностей скольжения на меридиональной плоскости rOz будем называть линиями скольжения. Обозначим через γ угол, образованный направлением главного напряжения σ_1 с осью Or; через δ — угол, образованный осью Or и касательной к линии скольжения первого семейства. Из второго условия (2.4.48) находим

$$(\sigma_1 + \sigma_3)/2 = \sigma' - K \operatorname{ctg} \varphi, \tag{2.4.51}$$

где $\sigma' = (\sigma_1 - \sigma_3)/(2 \sin \varphi)$; подставляя (2.4.51) в (2.4.50), получим:

$$\begin{gathered}\sigma_r = \sigma' (1 + \sin \varphi \cos 2\gamma) - K \operatorname{ctg} \varphi, \\ \sigma_z = \sigma' (1 - \sin \varphi \cos 2\gamma) - K \operatorname{ctg} \varphi, \\ \tau = \sigma' \sin \varphi \sin 2\gamma,\end{gathered}$$

но $\gamma = \delta - (\pi/4 - \varphi/2)$, поэтому

$$\begin{gathered}\sigma_r = \sigma' [1 + \sin \varphi \sin (2\delta + \varphi)] - K \operatorname{ctg} \varphi, \\ \sigma_z = \sigma' [1 - \sin \varphi \sin (2\delta + \varphi)] - K \operatorname{ctg} \varphi, \\ \tau = -\sigma' \sin \varphi \cos (2\delta + \varphi).\end{gathered} \tag{2.4.52}$$

Для главных напряжений σ_1 и σ_3 имеем выражения

$$\sigma_1 = \sigma' (1 + \sin\varphi) - K \operatorname{ctg}\varphi,$$
$$\sigma_3 = \sigma' (1 - \sin\varphi) - K \operatorname{ctg}\varphi. \quad (2.4.53)$$

Из первого условия (2.4.48) получим $\sigma_0 = \sigma_3$, следовательно,

$$\sigma_\theta = \sigma' (1 - \sin\varphi) - K \operatorname{ctg}\varphi. \quad (2.4.54)$$

Подставляя (2.4.52), (2.4.53) и (2.4.54) в уравнения (2.4.49), считая инерционные члены равными нулю, приходим к уравнениям

$$\left[\frac{\partial\sigma'}{\partial r}\cos\delta + \frac{\partial\sigma'}{\partial z}\sin\delta\right] + 2\sigma' \operatorname{tg}\varphi\left[\frac{\partial\delta}{\partial r}\cos\delta + \frac{\partial\delta}{\partial z}\sin\delta\right] + \frac{\sigma'}{r}\left[\sin(\delta+\varphi) + \cos\delta\right]\operatorname{tg}\varphi\,\frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi} = 0,$$

$$\left[\frac{\partial\sigma'}{\partial r}\sin(\delta+\varphi) - \frac{\partial\sigma'}{\partial z}\cos(\delta+\varphi)\right] - 2\sigma' \operatorname{tg}\varphi\left[\frac{\partial\delta}{\partial r}\sin(\delta+\varphi) - \frac{\partial\delta}{\partial z}\cos(\delta+\varphi)\right] + \frac{\sigma'}{r}\left[\sin(\delta+\varphi) + \cos\delta\right]\operatorname{tg}\varphi\,\frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi} = 0.$$

Выражения в квадратных скобках первого уравнения — это производные от σ' и δ по элементам дуг первого семейства, выражения в квадратных скобках второго уравнения — это производные от σ' и δ по элементам дуг второго семейства линий скольжения. Обозначим через S_i длину пути линии скольжения i-го семейства ($i = 1, 2$) и запишем уравнения равновесия в виде

$$\frac{d\sigma'}{dS_1} + 2\sigma' \operatorname{tg}\varphi\,\frac{d\delta}{dS_1} + \frac{\sigma'}{r}\left[\sin(\delta+\varphi) + \cos\delta\right]\operatorname{tg}\varphi\,\frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi} = 0,$$

$$\frac{d\sigma'}{dS_2} - 2\sigma' \operatorname{tg}\varphi\,\frac{d\delta}{dS_2} + \frac{\sigma'}{4}\left[\sin(\delta+\varphi) + \cos\delta\right]\operatorname{tg}\varphi\,\frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi} = 0.$$

Введем новые неизвестные:

$$\xi = (1/2)\operatorname{ctg}\varphi \ln(\sigma'/\lambda) + \delta, \quad \eta = (1/2)\operatorname{ctg}\varphi \ln(\sigma'/\lambda) - \delta,$$

где λ — произвольная постоянная с размерностью напряжения, которую принимаем равной 1 кгс/см², тогда уравнения равновесия преобразуются к виду

$$\frac{d\xi}{dS_1} = -\frac{1}{2r}\left[\sin(\delta+\varphi) + \cos\delta\right]\frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi},$$
$$\frac{d\eta}{dS_2} = -\frac{1}{2r}\left[\sin(\delta+\varphi) + \cos\delta\right]\frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi}. \quad (2.4.55)$$

Если линии скольжения известны, то, интегрируя (2.4.55) вдоль этих линий, находим:

$$\xi = f_1 - \frac{1-\sin\varphi}{2\cos\varphi}\int\left[\sin(\delta+\varphi) + \cos\delta\right]\frac{dS_1}{r},$$
$$\eta = f_2 - \frac{1-\sin\varphi}{2\cos\varphi}\int\left[\sin(\delta+\varphi) + \cos\delta\right]\frac{dS_2}{r}, \quad (2.4.56)$$

где f_i ($i = 1, 2$) — произвольные функции.

Пусть одна из линий скольжения второго семейства, на которой $\xi = \text{const}$, известна, тогда для решения задачи достаточно рассмотреть только второе из выражений (2.4.56). Разность значений в точках A и D (рис. 57) устанавливает связь между σ' и δ в этих точках. Для точки D

$$\eta_D = f_2, \quad \eta_D = (1/2) \operatorname{ctg} \varphi \ln (\sigma'_D/\lambda) - \delta_D;$$

для точки A

$$\eta_A = f_2 - \frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi} \int_D^A [\sin(\delta+\varphi) + \cos\delta] \frac{dS_2}{r},$$

$$\eta_A = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \varphi \ln \frac{\sigma'_A}{\lambda} - \delta_A.$$

Разность $\eta_D - \eta_A$ преобразуется к виду

$$\ln \frac{\sigma'_D}{\sigma'_A} - 2 \operatorname{tg} \varphi (\delta_D - \delta_A) = \frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi} \operatorname{tg} \varphi \int_D^A [\sin(\delta+\varphi) + \cos\delta] \frac{dS_2}{r}. \tag{2.4.57}$$

Линии скольжения строят на основании следующих соображений. Первое семейство линий скольжений представляет собой три семейства прямых: 1) прямые, наклоненные под углом $(\pi/4 + \varphi/2)$ к контактной поверхности; 2) пучок прямых, исходящих из точки пересечения образующей поверхности внедряющегося тела и свободной поверхности среды; 3) прямые, наклоненные под углом $(\pi/4 - \varphi/2)$ к свободной поверхности среды (оси Or). Линии скольжения второго семейства — кривые, пересекающие линии скольжения первого семейства под углом $(\pi/2 - \varphi)$. Для тела с произвольной криволинейной образующей линии скольжения второго семейства состоят из трех участков: 1) на участке AB — отрезок прямой, наклоненный под углом $((3\pi)/4 + \varphi/2)$ к оси Or; 2) на участке BC — отрезок логарифмической спирали с полюсом в точке E, $L = aF \exp(-\delta \operatorname{tg} \varphi)$, где L — радиус к рассматриваемой точке линии скольжения, F — постоянная, характеризующая линию скольжения, a — радиус сечения в точке E; 3) на участке CD линию скольжения строят графически; она представляет собой отрезок кривой, пересекающий линии скольжения первого семейства под углом $(\pi/2 - \varphi)$.

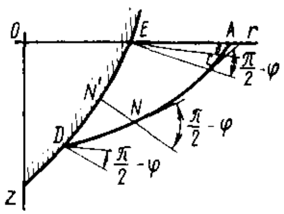

Рис. 57

Если уравнение построенной линии скольжения AD задать в виде $r(z)$, то имеем $dr = dS_2 \sin(\delta+\varphi)$, $dz = dS_2 \cos(\delta+\varphi)$ и соотношение (2.4.57) перепишем в виде

$$\ln \frac{\sigma'_D}{\sigma'_A} - 2 \operatorname{tg} \varphi (\delta_D - \delta_A) = \frac{1-\sin\varphi}{2\cos\varphi} \operatorname{tg} \varphi \left[\ln \frac{r_A}{r_D} + \int_D^A \frac{\cos\delta}{r} dS_2 \right], \tag{2.4.58}$$

углы δ_D и δ_A соответственно равны; $\delta_A = \pi/4 - \varphi/2$, $\delta_D = \operatorname{arctg}(dz/dr)_D - (\pi/4 + \varphi/2)$, где $z(r)$ — уравнение образующей внедряющегося тела, разность углов

$$\delta_D - \delta_A = \operatorname{arctg}\left(\frac{dz}{dr}\right)_D - \frac{\pi}{2} = \operatorname{arctg}\left|\frac{dz}{dr}\right|_D. \qquad (2.4.59)$$

Учитывая структуру линии скольжения AD, интеграл, входящий в (2.4.58), можно разбить на три интеграла:

$$\int\limits_D^A \frac{\cos\delta}{r}\,dS_2 = \int\limits_D^C \frac{\cos\delta}{r}\,dS_2 + \int\limits_C^B \frac{\cos\delta}{r}\,dS_2 + \int\limits_B^A \frac{\cos\delta}{r}\,dS_2;$$

на участке AB линии скольжения (отрезок прямой)

$$\int\limits_B^A \frac{\cos\delta}{r}\,dS_2 = \ln\frac{r_A}{r_D};$$

на участке BC (отрезок логарифмической спирали), уравнение которой

$$r = a\,[1 + F\cos\delta\exp(-\delta\operatorname{tg}\varphi)],$$

имеем

$$\int\limits_C^B \frac{\cos\delta}{r}\,dS_2 = \frac{1}{\cos\varphi}\int\limits_{\delta_B}^{\delta_C} \frac{d\delta}{[F\cos\delta]^{-1}\exp(\delta\operatorname{tg}\varphi) + 1};$$

вычисление производится численным интегрированием; на участке CD линию скольжения с достаточной точностью можно аппроксимировать отрезком параболы, уравнение которой $z = \bar{a}r^2 + \bar{b}r + \bar{c}$, тогда

$$\int\limits_D^C \frac{\cos\delta}{r}\,dS_2 = \begin{cases} J_1 \text{ при } r_C > r_p > r_D, \\ J_2 \text{ при } r_p > r_C > r_D, \\ J_3 \text{ при } r_p < r_D, \end{cases}$$

где r_p — расстояние вершины параболы от оси Oz, равное $r_p = \bar{b}/(2\bar{a})$,

$$J_1 = \sin\varphi\ln\frac{r_C}{r_D} + 2\bar{a}\cos\varphi\,(r_D + r_C - 2r_p) - \bar{b}\cos\varphi\ln[r_p^2/(r_C r_D)],$$

$$J_2 = [\sin\varphi - \bar{b}\cos\varphi]\ln(r_C/r_D) - 2\bar{a}\cos\varphi\,(r_C - r_D),$$

$$J_3' = [\sin\varphi + \bar{b}\cos\varphi]\ln(r_C/r_D) + 2\bar{a}\cos\varphi\,(r_C - r_D).$$

Подставляя (2.4.59) и вычисленные интегралы в (2.4.58), получим

$$\sigma_D' = \sigma_A'\exp\left(2\operatorname{tg}\varphi\operatorname{arctg}\left|\frac{dz}{dr}\right|_D\right)\exp\left[\frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi}\operatorname{tg}\varphi\left(\ln\frac{r_A^2}{r_B r_D} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{\cos\varphi}\int\limits_{\delta_D}^{\delta_C} \frac{F\cos\delta\,d\delta}{F\cos\delta + \exp(\delta\operatorname{tg}\varphi)} + J_i\right)\right], \qquad (2.4.60)$$

причем σ_A' определяется из граничных условий и оказывается равным

$$\sigma_A' = K \operatorname{ctg} \varphi/(1 - \sin \varphi). \tag{2.4.61}$$

Подстановка (2.4.60) и (2.4.61) в первое семейство (2.4.53) приводит к выражению для главного напряжения σ_1, численно равному давлению на внедряющееся тело в рассматриваемой точке поверхности контакта, следовательно, имеем

$$\sigma_{\text{соб}} = K \operatorname{ctg} \varphi \left\{ \frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi} \exp\left(2 \operatorname{tg}\varphi \operatorname{arctg}\left|\frac{dz}{dr}\right|_D\right) \times \right.$$
$$\times \exp\left[\frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi} \operatorname{tg}\varphi\left[\ln\frac{r_A^2}{r_B r_D} + \right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \frac{1}{\cos\varphi}\int\limits_{\delta_D}^{\delta_C} \frac{F\cos\delta d\delta}{F\cos\delta + \exp(\delta \operatorname{tg}\varphi)} + J_i\right]\right] - 1\right\}. \tag{2.4.62}$$

При наличии трения между внедряющимся телом и средой линия скольжения первого семейства составляет с образующей поверхности внедряющегося тела угол $(\pi/4 + \varphi/2 - \mu)$, где μ — угол трения, что приводит к изменению угла $\delta_D = \operatorname{arctg}(dz/dr)_D - (\pi/4 + \varphi/2 - \mu)$ и разности углов $\delta_D - \delta_A = \operatorname{arctg}(dz/dr)_D + \mu$. Линия скольжения второго семейства несколько сместится за счет увеличения расстояний точек A, B, C от оси Oz, построение линии скольжения AD и вычисление интеграла $\int\limits_D^A \frac{\cos\delta}{r} dS_2$ выполняются так же, как в предыдущем случае. Следовательно, σ_D' определяется по формуле

$$\sigma_D' = \frac{K \operatorname{ctg}\varphi}{1-\sin\varphi} \exp\left[2 \operatorname{tg}\varphi\left(\operatorname{arctg}\left|\frac{dz}{dr}\right|_D + \mu\right)\right] \exp\left\{\frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi} \times \right.$$
$$\left. \times \left[\ln\frac{r_A^2}{r_B r_D} + \frac{1}{\cos\varphi}\int\limits_{\delta_D}^{\delta_C} \frac{F\cos\delta d\delta}{F\cos\delta + \exp(\delta \operatorname{tg}\varphi)} + J_i\right]\right\}. \tag{2.4.63}$$

Анализ этой формулы показывает, что изменение σ_D' по оси Oz при данной глубине внедрения можно считать линейным. Минимальная ошибка в определении величины силы сопротивления имеет место тогда, когда прямая, характеризующая изменение σ' по оси Oz, проходит через значение σ' в точке с координатами $z = (0{,}75 - 0{,}8)\, h$ (рис. 58). Уравнение прямой имеет вид

$$\sigma_D' = \sigma_E' + (\sigma_h' - \sigma_E')\, z/h. \tag{2.4.64}$$

Величина σ'_E характеризует напряжение, действующее на тело в точке E, и равно

$$\sigma'_E = \frac{K \operatorname{ctg} \varphi}{1 - \sin \varphi} \exp \left[2 \operatorname{tg} \varphi \left(\operatorname{arctg} \left| \frac{dz}{dr} \right|_E + \mu \right) \right];$$

оно не зависит от глубины внедрения h для заданной формы тела.

Величина σ'_h характеризует напряжение, действующее на тело в его вершине, и не зависит от глубины внедрения h для заданной формы тела. Для определения σ'_h необходимо построить линию скольжения второго семейства, начинающуюся в точке с координатой $z = (0{,}75 - 0{,}8)\,h$.

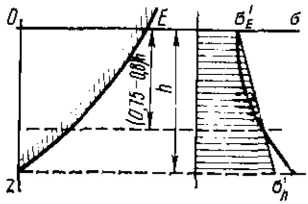

Рис. 58

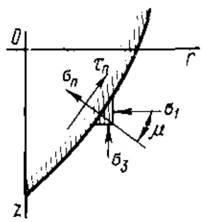

Рис. 59

Таким образом, зная напряжение σ', по формуле (2.4.53) определяют главные напряжения σ_1 и σ_3, действующие в области внедрения.

При учете трения первое главное напряжение σ_1 составляет с нормалью к образующей поверхности внедряющегося тела угол μ (рис. 59).

На поверхности внедряющегося тела наряду с нормальным напряжением σ_n действует касательное напряжение τ_n. При определении напряжений σ_n и τ_n воспользуемся зависимостями $\sigma_n = \sigma_1 \cos^2 \mu + \sigma_3 \sin^2 \mu$, $\tau_n = (\sigma_1 - \sigma_3) \sin \mu \cos \mu$. Подставляя сюда (2.4.53) и (2.4.64), находим:

$$\sigma_n = [\sigma'_E + (\sigma'_h - \sigma'_E)(z/h)]\,(1 + \sin \varphi \cos 2\mu) - K \operatorname{ctg} \varphi,$$

$$\tau_n = [\sigma'_E + (\sigma'_h - \sigma'_E)(z/h)] \sin \varphi \sin 2\mu. \qquad (2.4.65)$$

Сила собственного сопротивления бетона равна

$$P_{\text{соб}} = \int_S (\sigma_n \sin \alpha + \tau_n \cos \alpha)\, dS, \qquad (2.4.66)$$

где α — угол между нормалью n и осью r, S — площадь контактной поверхности.

При ударе тела в среду имеет место динамическая составляющая давления $p_{\text{дин}}$, что приводит к увеличению силы сопротивления. Вычисляя давление $p_{\text{дин}}$ по формуле Ньютона $p_{\text{дин}} = \rho v^2 \sin^2 \alpha$ и интегрируя по r, определим динамическую составляющую силы сопротивления:

$$P_{\text{дин}} = 2\pi\rho v^2 \int_0^a \sin^2 \alpha r dr, \tag{2.4.67}$$

где ρ — плотность бетона, v — скорость внедрения.

Полная сила сопротивления будет равна сумме составляющих:

$$P = P_{\text{соб}} + P_{\text{дин}}. \tag{2.4.68}$$

Изложенное решение задачи о расчете силы сопротивления бетона при внедрении заостренного тела вращения предложено В. П. Бабичем.

Приведенное решение задачи о внедрении тела в среду построено на основании результатов, полученных А. А. Ильюшиным, А. Ю. Ишлинским, В. В. Соколовским и др. [13, 20, 45]. Оно пригодно для скоростей встречи $v_0 < 1000$—1500 м/с, однако возможны и более высокие скорости v_c, для которых решение непригодно. Возникла необходимость в построении решения задачи о внедрении тела в случае большой скорости встречи, основанном на том экспериментальном факте, что в процессе внедрения тела (при нагрузке) плотность среды изменяется от ρ_0 до ρ, после же внедрения (при разгрузке) изменение плотности незначительно, им можно пренебречь и считать плотность постоянной, равной ρ. Х. А. Рахматулин и А. Я. Сагомонян [40], использовав идею А. А. Ильюшина, ввели в рассмотрение пластический газ, представляющий собой сплошную пластическую среду, плотность ρ_0 которой при нагрузке изменяется по некоторому закону, а затем остается постоянной, равной ρ. Моделью пластического газа описываются грунт, бетон, кирпич и металлы в случае, если напряжения в них значительно превосходят динамический предел текучести $\sigma_{\text{т.д}}$. Экспериментально установлено сильное влияние сил трения на процесс внедрения тела в перечисленные среды, поэтому при решении рассматриваемой задачи их следует учитывать.

Пусть тело массы m, имея скорость встречи v_c, внедряется в преграду со свободной поверхностью, занимая полупространство. При ударе тела в среде распространяется ударная волна, которая образует область возмущений, ограниченную фронтом ударной волны, поверхностью внедряющегося тела и свободной поверхностью преграды. В области возмущений давление p, плотность ρ; в области покоя давление p_0, плотность ρ_0. Движение частиц среды описывается уравнением неразрывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0,$$

уравнением движения

$$\operatorname{div}(\sigma) + \rho \mathbf{F} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt},$$

начальными и граничными условиями. Так как $d\mathbf{v}/dt = d\mathbf{v}/dt + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ и, кроме того, $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = (1/2)\,\mathbf{grad}\, v^2 - \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}$, то

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\mathbf{grad}\, v^2 - \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v},$$

и уравнение движения можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\mathbf{grad}\, v^2 - \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{F} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\sigma).$$

Задачу о внедрении тела в среду решаем при следующих предположениях: а) вектор объемных сил $\mathbf{F} = 0$; б) движение частиц среды в области возмущений потенциальное: $\mathbf{v} = \mathbf{grad}\, \varphi$, где φ — потенциал скоростей; в) девиатор напряжений (D_σ) среды мал по сравнению со средним напряжением $(D_\sigma) \ll \sigma = -p$; г) среда является пластическим газом: $\rho = \text{const}$.

В этом случае уравнение неразрывности упрощается и принимает вид

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \tag{2.4.69}$$

уравнение движения таково:

$$\mathbf{grad}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right) = 0.$$

Отсюда следует интеграл Лагранжа

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = f(t), \tag{2.4.70}$$

где $f(t)$ — произвольная функция времени, которая определяется из условия, имеющего место на поверхности внедряющегося тела. Необходимо отметить, что интеграл Лагранжа является энергетической трактовкой уравнения движения частиц среды в области возмущений.

Все изложенное показывает, что задача о внедрении тела в преграду состоит в том, чтобы по заданной форме тела, его массе m и скорости встречи v_c найти закон движения тела при внедрении, т. е. определить давление p на поверхности внедряющегося тела, скорость $\mathbf{v}$ и ускорение $d\mathbf{v}/dt$ тела при внедрении. Давление p и вектор скорости $\mathbf{v}$ подчинены уравнениям

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} = \mathbf{grad}\, \varphi, \tag{2.4.71}$$
$$\partial\varphi/\partial t + v^2/2 + p/\rho = f(t),$$

начальным условиям $v = v_c$ при $t = 0$ и условиям, имеющим место на поверхности внедряющегося тела.

Прежде чем перейти к непосредственному построению решения сформулированной задачи, обратим внимание на следующий экспериментальный факт. Установлено, что при внедрении в среду тел вращения с различной степенью заостренности заметного изменения формы свободной поверхности преграды не наблюдается.

Так, при внедрении конуса с углом конусности $\delta = 15°$ отношение высоты наибольшей выпуклости на узкой полосе свободной поверхности, примыкающей к отверстию, к диаметру кратера составляет не более 8%. Это означает, что движение частиц среды при внедрении заостренного тела происходит в плоскости, перпендикулярной направлению движения. Отмеченное свойство тем более верно в сечениях, расположенных на некоторой глубине от свободной поверхности. Поэтому при решении задачи о внедрении в среду заостренного тела вращения целесообразно воспользоваться гипотезой плоских сечений, согласно которой движение частиц среды при внедрении тела проходит в плоскостях, перпендикулярных направлению движения тела.

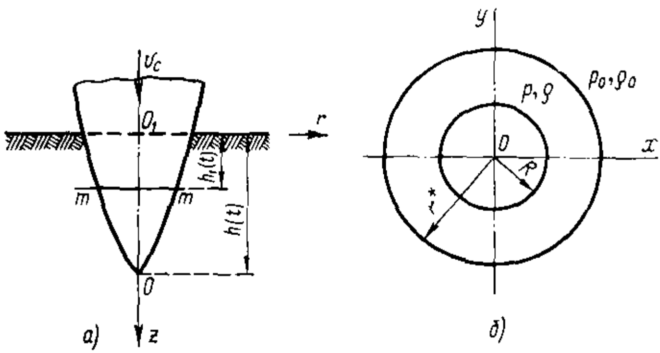

Рис. 60

Решение задачи строится в цилиндрической системе координат (r, θ, z). Обозначим через $h(t)$ глубину внедрения в некоторый момент времени t, скорость тела в этот момент равна $v = \dot{h}(t)$, вершина внедряющегося тела находится в точке O на глубине h (рис. 60, *а*).

Рассмотрим движение среды в произвольном сечении $m \div m$, находящемся на глубине $h_1(t)$, причем $h_1(t) \leqslant h(t)$. С момента прихода вершины тела в это сечение возмущения в среде распространяются в виде ударной волны. Область возмущений ограничена фронтом ударной волны, представляющей собой окружность радиуса r^*, и окружностью радиуса R, которая является линией пересечения тела с плоскостью $m \div m$ (рис. 60, *б*). Учитывая симметричность задачи, первое из уравнений (2.4.71) можно записать в виде $\partial v/dr + v/r = 0$, которому удовлетворяет функция

$$v = (1/r) f(t), \tag{2.4.72}$$

причем функция $f(t)$ определяется из следующего условия на поверхности внедряющегося тела:

$$\dot{R} = (1/R) f(t). \tag{2.4.73}$$

Потенциал скоростей φ, соответствующий выражениям (2.4.72) и (2.4.73), равен

$$\varphi = R\dot{R} \ln r. \tag{2.4.74}$$

Установим с помощью интеграла Лагранжа связь между давлением p^* на фронте ударной волны

$$p^* = p_0 + (\rho_0/(1-b))(v^*)^2,$$

где $b = \rho_0/\rho \leqslant 1$, и давлением p на поверхности внедряющегося тела. Имеет место соотношение

$$(R\dot{R})'_t \ln R + \dot{R}^2/2 + p/\rho = (R\dot{R})'_t \ln r^* + (R\dot{R})^2/(2r^*) + p^*/\rho. \tag{2.4.75}$$

Из закона сохранения массы для области возмущений следует, что $r^{*2} = R^2/(1-b)$. Давление на фронте ударной волны p^* с учетом выражения скорости $v^* = R\dot{R}/r^*$ равно $p^* = p_0 + \rho_0\dot{R}^2$. Подставляя найденные выражения в соотношение (2.4.75), получим

$$p = p_0 + \rho\left[(R\dot{R})'_t \ln\frac{1}{\sqrt{1-b}} + \frac{b}{2R^2}(R\dot{R})^2\right].$$

Однако $(R\dot{R})'_t = \dot{R}^2 + R\ddot{R}$, поэтому давление на поверхности тела

$$p = p_0 + \rho\left[R\ddot{R}\ln\frac{1}{\sqrt{1-b}} + \dot{R}^2\left(\ln\frac{1}{\sqrt{1-b}} + \frac{b}{2}\right)\right]. \tag{2.4.76}$$

Предположим, что уравнение образующей внедряющегося тела имеет вид $R = R(z)$, начало координат взято в вершине тела, ось Oz направлена вдоль его оси, радиус сечения тела на свободной поверхности в момент времени t равен $R = R[h(t)]$. Если через t_1 обозначить время прихода вершины тела в сечение $m - m$ на глубине $h(t_1)$, то радиус сечения тела $R_1 = R[h(t) - h(t_1)]$. В этом случае скорость расширения радиуса в этом сечении $\dot{R}_1 = R'_h[h(t) - h(t_1)]v$, ускорение

$$\ddot{R}_1 = R''_h[h(t) - h(t_1)]v^2 + R'_h[h(t) - h(t_1)]\dot{v}.$$

Подставляя эти выражения в (2.4.76), получим выражение для давления:

$$p = p_0 + a_1(h)v^2 + a_2(h)\dot{v}, \tag{2.4.76'}$$

где

$$a_1(h) = \rho\left[RR''_h \ln\left(1/\sqrt{1-b}\right) + R'^2_h\left(\frac{b}{2} + \ln\left(1/\sqrt{1-b}\right)\right)\right],$$

$$a_2(h) = \rho RR'_h \ln\left(1/\sqrt{1-b}\right)$$

— коэффициенты давления.

Скорость v и ускорение $\dot{v}$, входящие в формулу (2.4.76'), определим в результате интегрирования уравнения движения внедряющегося тела. Для этого вычислим составляющие силы сопротивления и силы трения среды в направлении движения тела. В момент времени t элементарная площадка

$$dS = 2\pi R(z)\sqrt{1 + R'^2_h(z)}\,dz;$$

вертикальная составляющая силы сопротивления, действующая на площадку dS поверхности,

$$d\mathcal{F} = pdS \frac{R'}{\sqrt{1+R'^2}} = 2\pi pRR'dz;$$

элементарная сила трения $d\widetilde{Q}$, которая действует на площадку dS поверхности тела; $d\widetilde{Q} = \mu pdS$, где μ — коэффициент трения скольжения, направлена по касательной к образующей поверхности в рассматриваемом сечении, ее вертикальная составляющая

$$dQ = p\mu \frac{dS}{\sqrt{1+R'^2}} = 2\pi\mu pRdz.$$

В результате интегрирования полученных выражений по z находим

$$\mathcal{F} = 2\pi \int_0^h pRR'\,dh_1,\ Q = 2\pi\mu \int_0^h pRdh_1.$$

Подставляя в последние выражения (2.4.76′), получим

$$\mathcal{F} = A_0(h) + A_1(h)v^2 + A_2(h)\dot{v}, \qquad (2.4.77)$$

где

$$A_0 = 2\pi \int_0^h p_0 RR'dh_1,\ A_1 = 2\pi \int_0^h a_1 RR'dh_1,\ A_2 = 2\pi \int_0^h a_2 RR'dh_1; \qquad (2.4.77')$$

$$Q = B_0(h) + B_1(h)v^2 + B_2(h)\dot{v}, \qquad (2.4.78)$$

причем

$$B_0 = 2\pi\mu \int_0^h p_0 Rdh_1,\ B_1 = 2\pi\mu \int_0^h a_1 Rdh_1,\ B_2 = 2\pi\mu \int_0^h a_2 Rdh_1. \qquad (2.4.78')$$

Уравнение движения тела имеет вид $m\dot{v} = \mathcal{F} + Q + mg$. Подставляя в это уравнение (2.4.77) и (2.4.78), имеем

$$C_2(h)\dot{v} + C_1(h)v^2 + C_0(h) = 0, \qquad (2.4.79)$$

где

$$C_2 = m + A_2 + B_2,\ C_1 = A_1 + B_1,\ C_0 = mg + A_0 + B_0. \qquad (2.4.79')$$

С помощью подстановки $\dot{v}^2 = y$ уравнение (2.4.79) можно привести к виду

$$y' + (2C_1/C_2)\,y + (2C_0/C_2) = 0. \qquad (2.4.80)$$

Решение уравнения (2.4.80) находится в квадратурах с учетом начальных условий $v = v_c$ при $t = 0$.

Используя полученные зависимости, рассмотрим задачу о внедрении конуса в преграду (рис. 61). Зададим уравнение образующей конуса в виде $R = z \operatorname{tg} \delta$, где δ — угол конусности. Тогда в сечении

m—m имеем: $z = h - h_1$, $R = (h - h_1)\operatorname{tg}\delta$, $R' = \operatorname{tg}\delta$, $R'' = 0$. Коэффициенты давления таковы:

$$a_1 = \rho\left(b/2 + \ln\left(1/\sqrt{1-b}\right)\right)\operatorname{tg}^2\delta, \qquad (2.4.81)$$
$$a_2 = \rho\ln\left(1/\sqrt{1-b}\right)(h - h_1)\operatorname{tg}^2\delta.$$

Подставляя эти значения в (2.4.77′), находим:

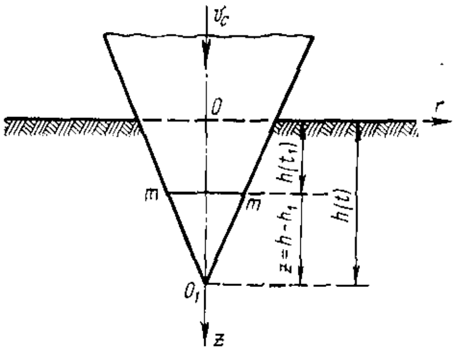

Рис. 61

$$A_0 = \pi p_0 h^2 \operatorname{tg}^2\delta,\ A_1 = \pi\rho\left(b/2 + \right.$$
$$\left. + \ln\left(1/\sqrt{1-b}\right)\right) h^2 \operatorname{tg}^4\delta,$$
$$A_2 = (2\pi/3)\rho\ln\left(1/\sqrt{1-b}\right)h^3\operatorname{tg}^4\delta.$$

В результате подстановки найденных значений в (2.4.78′) имеем

$$B_0 = \pi\mu p_0 h^2 \operatorname{tg}^2\delta,$$
$$B_1 = \pi\mu\rho\left(b/2 + \ln\left(1/\sqrt{1-b}\right)\right) \times$$
$$\times\ h^2\operatorname{tg}^3\delta,$$
$$B_2 = \frac{2\pi}{3}\rho\mu\ln\left(1/\sqrt{1-b}\right)h^3\operatorname{tg}^3\delta.$$

Коэффициенты C_i имеют следующий вид:

$$C_0 = mg + \pi p_0 h^2 \operatorname{tg}^2\delta\,(1 + \mu\operatorname{ctg}\delta),$$
$$C_1 = \pi\rho\left(b/2 + \ln\left(1/\sqrt{1-b}\right)\right)h^2\operatorname{tg}^4\delta\,(1 + \mu\operatorname{ctg}\delta),$$
$$C_2 = m + (2\pi/3)\,\rho\ln\left(1/\sqrt{1-b}\right)h^3\operatorname{tg}^4\delta\,(1 + \mu\operatorname{ctg}\delta).$$

Уравнение (2.4.80) можно преобразовать к виду

$$y' + \frac{\varkappa h^2}{-m + \omega h^3}\,y + \frac{-2mg + \nu}{-m + \omega h^3} = 0, \qquad (2.4.82)$$

где

$$\varkappa = 2\pi\rho\left(b/2 + \ln\left(1/\sqrt{1-b}\right)\right)\operatorname{tg}^4\delta\,(1 + \mu\operatorname{ctg}\delta),$$
$$\omega = (2\pi/3)\,\rho\ln\left(1/\sqrt{1-b}\right)\operatorname{tg}^4\delta\,(1 + \mu\operatorname{ctg}\delta), \qquad (2.4.82')$$
$$\nu = 2\pi p_0\operatorname{tg}^2\delta\,(1 + \mu\operatorname{ctg}\delta).$$

Пренебрегая давлением p_0 и весом тела mg как малыми величинами по сравнению с силой сопротивления и интегрируя уравнение (2.4.82) совместно с начальными условиями, находим скорость и ускорение при глубине внедрения $h \leqslant h_{\text{кон}}$:

$$v = \frac{v_c}{((\omega/m)\,h^3 - 1)^{\varkappa/6\omega}},$$
$$\dot v = -\frac{(\varkappa/m)\,h^2 v_c^2}{2\,((\omega/m)\,h^3 - 1)^{\varkappa/3\omega + 1}}. \qquad (2.4.83)$$

При глубине внедрения $h > h_{\text{кон}}$ коэффициенты A_i и B_i $(i = 0, 1, 2)$ вычисляются по тем же формулам, однако нижний предел интегрирования заменяется на $h - h_{\text{кон}}$. В результате получим формулы для скорости и ускорения:

$$v = v_{\text{к}} \exp\left[-(P/2)(h - h_{\text{к}})\right], \quad \dot{v} = -(P/2)\, v_{\text{к}}^2 \exp\left[-P(h - h_{\text{к}})\right], \tag{2.4.84}$$

где

$$P = \frac{\pi\rho\left(\dfrac{b}{2} + \ln\left(1/\sqrt{1-b}\right)\right)\operatorname{tg}^4\delta h_{\text{к}}^2 (1 + \mu \operatorname{ctg}\delta)}{(\pi\rho/3)\ln\left(1/\sqrt{1-b}\right)\operatorname{tg}^4\delta h_{\text{к}}^3 (1 + \mu\operatorname{ctg}\delta) + m}.$$

Скорость $v_{\text{к}}$ при $h = h_{\text{к}}$ вычисляется по формуле (2.4.83):

$$v_{\text{к}} = v_{\text{с}}/(\omega h_{\text{к}}^3/m - 1)^{\varkappa/6\omega}.$$

Приведенное решение задачи о внедрении тела в преграду приближенное, так как оно основано на гипотезе плоских сечений, которая справедлива только для тонких тел. Расширим решение, воспользовавшись гипотезой нормальных сечений, которая предложена Б. И. Носковым [40]. Согласно этой гипотезе, частицы среды в области внедрения движутся в поверхностях, перпендикулярных образующей поверхности внедряющегося тела. Учитывая слабое влияние формы тела вращения на процесс внедрения, условимся считать, что внедряющееся тело имеет коническую форму (рис. 62), уравнение образующей которой $R = (x_{\text{к}} - z)\operatorname{tg}\delta$. Решение задачи строится в системе координат (x, y, φ), координатные линии которой определяются уравнениями $r = (x - z)\operatorname{tg}\delta$, $r = (z - y)\operatorname{ctg}\delta$; параметры Ляме таковы: $H_1 = \sin\delta$, $H_2 = \cos\delta$, $H_3 = ((x - y)/2)\sin 2\delta$.

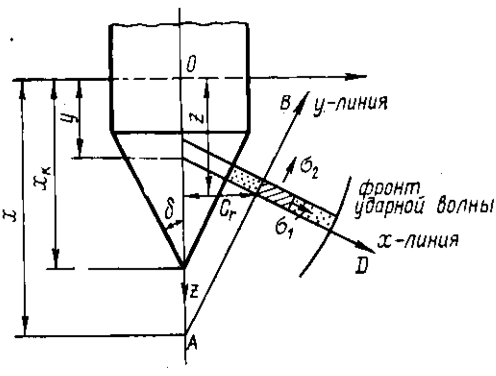

Рис. 62

В соответствии с принятой гипотезой вектор скорости частиц направлен вдоль x-линии, т. е. имеет компоненты $v_x = v$, $v_y = 0$, $v_\varphi = 0$; плотность среды в области внедрения постоянна: $\rho = \text{const}$. Уравнение неразрывности принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x}(H_3 v_x) = 0,$$

его решением является функция $v_x = D/H_3$, где D — постоянная интегрирования, определяемая из условия, имеющего место на поверхности конуса: $v_x = v_{\text{с}}\sin\delta$ при $x = x_{\text{к}}$. Отсюда находим

$$D = (1/2)(x_{\text{к}} - y)\, v \sin\delta \sin 2\delta.$$

В результате имеем

$$v_x = v_к \frac{x_к - y}{x - y} \sin\delta,$$

где $v_к$ — скорость внедрения конуса.

Если считать среду в области внедрения идеальной сжимаемой жидкостью, движение частиц — потенциальным:

$$v_x = \frac{1}{H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

причем $\varphi = v_к \sin^2\delta\,(x_к - y)\ln(x - y)$, то справедлив интеграл Лагранжа

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v_x^2}{2} + \frac{p}{\rho} = f(t).$$

Записывая этот интеграл для поверхности конуса $x = x_к$ и фронта волны $x = x_ф$, получим соотношение

$$\frac{\partial \varphi_к}{\partial t} + \frac{1}{2} v_{xк}^2 + \frac{p_к}{\rho} = \frac{\partial \varphi_ф}{\partial t} + \frac{1}{2} v_{xф}^2 + \frac{p_ф}{\rho}. \qquad (2.4.85)$$

Координаты фронта волны $x_ф$ найдем из закона сохранения массы:

$$x_ф - y = (x_к - y)/\sqrt{1 - b}.$$

Давление на фронте волны

$$p_ф = p_0 + \rho_0 v_ф^2/(1 - b),$$

однако

$$v_ф = v_c \frac{x_к - y}{x_ф - y} \sin\delta = v_c \sqrt{1 - b}\,\sin\delta, \qquad (2.4.86)$$

поэтому окончательно имеем

$$p_ф = p_0 + \rho_0 v_к^2 \sin^2\delta, \qquad (2.4.87)$$

Подставляя (2.4.86) и (2.4.87) в (2.4.85), получим

$$p_к = p_0 + a_1 v_к^2 + a_2 \dot{v}_к, \qquad (2.4.88)$$

где

$$a_1 = \frac{\rho_0}{2b}\left(b + \ln\frac{1}{\sqrt{1 - b}}\right)\sin^2\delta,$$

$$a_2 = \frac{\rho_0}{2b} \ln\frac{1}{\sqrt{1 - b}}(x_к - y)\sin^2\delta.$$

Считая среду в области внедрения пластической, запишем уравнения движения через главные напряжения σ_1, σ_2, σ_3:

$$H_2 H_3 \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + H_2 \frac{\partial H_3}{\partial x}(\sigma_1 - \sigma_3) = \rho \frac{dv_x}{dt} H_1 H_2 H_3, \qquad (2.4.89)$$

$$H_1 H_3 \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} + H_1 \frac{\partial H_3}{\partial y}(\sigma_2 - \sigma_3) = 0,$$

причем

$$\frac{dv_x}{dt}=\frac{\partial v_x}{\partial t}+\frac{v_x}{H_1}\frac{\partial v_x}{\partial x}.$$

Так как

$$\dot{\varepsilon}_2=\frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_2}{\partial x}v_x=0,$$

то из физических соотношений $\sigma_1-\sigma=\lambda\dot{e}_1$, $\sigma_2-\sigma=\lambda\dot{e}_2$, $\sigma_3-\sigma=\lambda\dot{e}_3$ следует, что $\sigma_2=(\sigma_1+\sigma_3)/2$.

Из условия пластичности Сен-Венана имеем

$$\sigma_1-\sigma_3=\nu\sigma_1-\tau_0/(1+\mu),\quad (2.4.90)$$

где $\nu=2\mu/(1+\mu)$, $\mu=\sin\gamma$ [γ — угол внутреннего трения (рис. 63)];

$$\dot{v}_x=(1/H_3)\dot{D}-(H_2/H_3^3)D^2,\quad (2.4.91)$$

где $D=H_1^2H_2x_{\text{к}}v_{\text{к}}$, $\dot{D}=H_1^2H_2(v_{\text{к}}^2+x_{\text{к}}\dot{v}_{\text{к}})$.

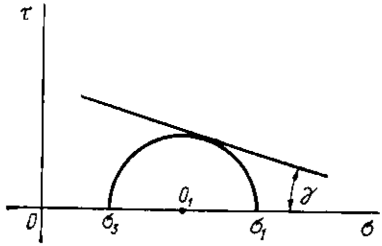

Рис. 63

Для многих сред при внедрении $x_{\text{к}}\dot{v}_{\text{к}}\ll v_{\text{к}}^2$, поэтому можно считать $\dot{D}=H_1^2H_2v_{\text{к}}^2$. Подставляя (2.4.90) и (2.4.91) в первое из уравнений (2.4.89), запишем его в виде

$$\frac{\partial\sigma_1}{\partial x}+\frac{\nu}{x-y}\sigma_1=\frac{1}{x-y}\frac{\tau_0}{1+\mu}+\rho\frac{H_1}{H_3}\left(\dot{D}-\frac{H_2}{H_3^2}D^2\right).$$

Вводя новую переменную $x-y=\eta$ и обозначая

$$P=\frac{\nu}{\eta},\ Q=\frac{1}{\eta}\frac{\tau_0}{1+\mu}+\rho\frac{H_1}{H_3}\left(\dot{D}-\frac{H_2}{H_3^2}D^2\right),$$

перепишем уравнение в виде

$$\partial\sigma_1/\partial\eta+P\sigma_1=Q.$$

Последнему уравнению соответствуют следующие граничные условия: $\sigma_1=\sigma_{1a}=-p_a$ при $\eta=\eta_{\text{к}}=x_{\text{к}}$, $\sigma_1=\sigma_{1\text{ф}}=-p_{\text{ф}}$ при $\eta=\eta_{\text{ф}}=x_{\text{ф}}$.

В результате интегрирования получим

$$-p_{\text{ф}}=-p_a\left(\frac{\eta_{\text{ф}}}{\eta_{\text{к}}}\right)^{-\nu}+\left(\frac{\eta_{\text{ф}}}{\eta_{\text{к}}}\right)^{-\nu}\left[\frac{\tau_0}{1+\mu}J_1+\rho_0\frac{H_1}{b}J_2\dot{D}-\right.$$

$$\left.-\rho_0\frac{H_1H_2}{b}J_3D^2\right],\qquad (2.4.92)$$

где

$$J_1=\frac{1}{\nu}\left[\left(\frac{\eta_{\text{ф}}}{\eta_{\text{к}}}\right)^{\nu}-1\right],\quad J_2=\frac{2}{\nu\sin 2\delta}\left[\left(\frac{\eta_{\text{ф}}}{\eta_{\text{к}}}\right)^{\nu}-1\right],$$

$$J_3=\left(\frac{2}{\sin 2\delta}\right)^3\frac{1}{\nu-2}\frac{1}{x_{\text{к}}^2}\left[\left(\frac{\eta_{\text{ф}}}{\eta_{\text{к}}}\right)^{\nu-2}-1\right].$$

Из соотношения (2.4.92) находим

$$p_a = p_\text{ф}\left(\frac{\eta_\text{ф}}{\eta_\text{к}}\right)^\nu + \frac{\tau_0}{1+\mu} J_1 + \frac{\rho_0}{b} H_1 (J_2\dot{D} - H_2 J_3 D^2).$$

Заменяя в этом равенстве $p_\text{ф}$, $\dot{D}$ и D их выражениями, после очевидных преобразований получим

$$p_a = a_0 + a_1 v_\text{к}^2 + a_2\dot{v}_\text{к}, \tag{2.4.93}$$

где

$$a = p_0 (\eta_\text{ф}/\eta_\text{к})^\nu + \tau_0 J_1/(1+\mu),$$

$$a_1 = \rho_0 \sin^2\delta\, [(\eta_\text{ф}/\eta_\text{к})^\nu + (1/b)\sin\delta\cos\delta\, (J_2 - \sin^2\delta\cos^2\delta x_\text{к}^2 J_3)],$$

$$a_2 = (\rho_0/b)\sin^3\delta\cos\delta x_\text{к} J_2,$$

причем $\eta_\text{ф}/\eta_\text{к} = \sqrt{1-b}$; τ_0 — характеристика пластичности среды.

В частности, для металлов $\nu = 0$; в этом случае имеем

$$p_a = p_\text{ф} + \tau_0 J_1/(1+\mu) + (\rho_0/b)\sin\delta\, (J_2\dot{D} + \cos\delta J_3 D^2),$$

где

$$J_1 = \ln\frac{\eta_\text{ф}}{\eta_\text{к}},\ J_2 = \frac{2}{\sin 2\delta}\ln\frac{\eta_\text{ф}}{\eta_\text{к}},\ J_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sin 2\delta}\right)^3\left(\frac{\eta_\text{ф}}{\eta_\text{к}}\right)^{-2}.$$

Коэффициенты, входящие в выражение (2.4.93), соответственно равны

$$a_0 = p_0 + \tau_0 J_1/(1+\mu),$$

$$a_1 = \rho_0\sin^2\delta\,[1 + (1/b)(J_2 + J_3 x_\text{к}^2\sin^2\delta\cos^2\delta)\sin\delta\cos\delta],$$

$$a_2 = (\rho_0/b)\sin^3\delta\cos\delta\, J_2 x_\text{к}.$$

Объединяя рассмотренные случаи и учитывая вязкость жидкого состояния среды, получим

$$p_a = a_0 + a_1 v_\text{к}^2 + a_2\dot{v}_\text{к} + a_3 v_\text{к}, \tag{2.4.94}$$

где a_0, a_1, a_2, a_3 — характеристики свойств среды и геометрии внедряющегося тела.

Скорость внедряющегося тела v определяется в результате решения уравнения движения $m\dot{v} = \mathcal{F} + Q - mg$. Силу сопротивления $\mathcal{F} = 2\pi\int_0^h pRR'dh_1$ и силу трения $Q = 2\pi\mu\int_0^h pR\,dh_1$, входящие в это уравнение, учитывая выражение (2.4.94), можно преобразовать соответственно к виду

$$\mathcal{F} = A_0 + A_1 v^2 + A_2\dot{v} + A_3 v,$$

где

$$A_0 = 2\pi\int_0^h a_0 RR_h'\,dh_1,\ A_1 = 2\pi\int_0^h a_1 RR_h'\,dh_1,$$

$$A_2 = 2\pi\int_0^h a_2 RR_h'\,dh_1,\ A_3 = 2\pi\int_0^h a_3 RR_h'\,dh_1,$$

и к виду

$$Q = B_0 + B_1 v^2 + B_2 \dot{v} + B_3 v,$$

где

$$B_0 = 2\pi\mu \int_0^h a_0 R dh_1, \; B_1 = 2\pi\mu \int_0^h a_1 R dh_1,$$

$$B_2 = 2\pi\mu \int_0^h a_2 R dh_1, \; B_3 = 2\pi\mu \int_0^h a_3 R dh_1.$$

Подставляя найденные выражения сил в уравнение движения получим

$$C_2 \dot{v} + C_1 v^2 + C_3 v + C_0 = 0, \tag{2.4.95}$$

где $C_0 = A_0 + B_0 - mg$, $C_1 = A_1 + B_1$, $C_2 = A_2 + B_2 - m$, $C_3 = A_3 + B_3$.

Интегрируя уравнение (2.4.95) совместно с начальными условиями $v = v_c$ при $t = 0$ ($h = 0$), определим скорость внедрения v, а затем, дифференцируя по времени, и ускорение $\dot{v}$.

Уравнение (2.4.95) — нелинейное дифференциальное, в квадратурах не интегрируется. При $C_3 = 0$ (вязкость среды не учитывается) имеет место уравнение (2.4.79), однако считать $C_0 = 0$, как это делалось ранее, нельзя, так как в его выражение входят характеристики физико-механических свойств среды.

При кратерном внедрении тело сильно деформируется, находится в пластическом или жидком состоянии и начинает течь, при этом скорость встречи $v_c > v_{кр}$. Скорость $v_{кр}^{(1)}$, при которой начинается пластическое течение, зависит от формы тела и его физико-механических свойств, однако существует такое значение скорости, выше которого при внедрении в среду тело любой формы ведет себя как пластическое (для металлов порядка 2 км/с); если скорость встречи $v_c > v_{кр}^{(2)}$ (для металлов порядка 3,5 км/с), материал тела и среды находится в жидком состоянии.

При скоростях встречи $v_c > v_{кр}$ время процесса деформирования и соответствующая глубина внедрения зависят от формы тела. В результате процесса деформирования тело принимает форму «гриба со шляпкой» в виде сферообразной оболочки. По мере внедрения происходит укорачивание «ножки гриба» за счет растекания материала тела; после полного расхода «ножки гриба» его «шляпка» продолжает замедленное внедрение до полной остановки.

Процесс внедрения сопровождается распространением в среде и теле ударных волн, характеризуемых высоким давлением и сильным разогревом, при котором возможно плавление и испарение.

Граничная поверхность AB, разделяющая материалы тела и среды, является контактной (рис. 64), на которой давление и нормальная составляющая скорости непрерывны; закон движения этой поверхности определяет внедрение тела в среду. Обозначим радиус сферической контактной поверхности через r_0, скорость ее поступательного движения — через v.

Образовавшаяся в среде ударная волна является сферической, радиус ее переднего фронта r^*. Материал среды в области внедрения и материал тела за возникшей в нем ударной волне, следуя А. Я. Сагомоняну [41], [42], предполагаем жидким и считаем $v > c_{\text{ср}}$, $v_0 - v > c_{\text{т}}$, где $c_{\text{ср}}$, $c_{\text{т}}$ — скорости звука в среде и теле соответственно. В этом случае ударные волны в теле (n, n) и среде (m, m) относительно контактной поверхности находятся на конечных расстояниях.

Установим силовое действие среды на контактную поверхность, исходя из следующих условий: на контактной поверхности $v_n = v\cos\theta$ при $r = r_0$ на фронте ударной волны при $r = r^*$

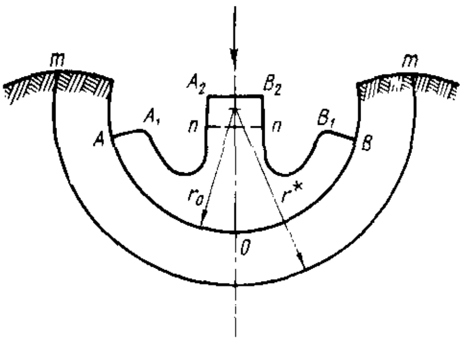

Рис. 64

$$v_n = \lambda v\cos\theta,$$

$$p_1 - p_0 = \rho\lambda v^2\cos^2\theta, \qquad (2.4.96)$$

где r, θ — полярные координаты, p_1, p_0 — соответственно давление на ударной волне и атмосферное; величина λ связана с плотностями ρ и ρ_0 за и перед фронтом ударной волны в среде соотношением $\lambda = 1 - b$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$.

Итак, задача сводится к определению вида движения несжимаемой жидкости между двумя сферами при граничных условиях (2.4.96).

Пользуясь интегралом Лагранжа, распределение давления на контактной поверхности представим в виде

$$\frac{p - p_0}{\rho} = \frac{b}{2}\cos\theta\dot{v} + \left(\frac{1+\lambda}{2} - \frac{(3-\lambda)^2\sin^2\theta}{8(1-\lambda)}\right)v^2. \qquad (2.4.97)$$

Сила, действующая на контактную поверхность,

$$F = \int_0^{\theta_0}(p - p_0)\,2\pi r_0^2\sin\theta\cos\theta d\theta.$$

Подставляя в последнее выражение (2.4.97) и вычисляя интеграл, получим

$$F = \frac{\pi r_0^2}{3}\rho_0\left[(1 - \cos^3\theta_0)\dot{v} + 3\,\frac{(1+\lambda)(1-\lambda^2)}{(3-\lambda)^2}v^2\right]. \qquad (2.4.98)$$

Анализируя это выражение, можно сделать вывод, что слагаемое, содержащее $\dot{v}$, является малым по сравнению со вторым слагаемым в выражении для силы F. Время процесса внедрения мало, поэтому ускорение заметного влияния на величину скорости v не оказывает и скорость v предполагается постоянной. В этом случае давление на контактной поверхности p, угол отрыва θ_0 и силу сопротивления F представим соответственно формулами:

$$(p - p_0)/\rho = (v^2/2)(1 - \lambda^2 - f^2 \sin^2\theta),$$
$$\sin\theta_0 = (1/f)\sqrt{1-\lambda^2}, \qquad (2.4.99)$$
$$F = [(\pi r_0^2 \rho_0)/4]v^2[(1+\lambda)(1-\lambda^2)/f^2],$$

где для потенциального движения $f = (1/2)(3-\lambda)$, $r^*/r_0 = \sqrt{(3-\lambda)/2}$; для вихревого движения

$$f = \frac{1}{15(1-\lambda)}[\lambda(5-6\lambda)(r^*/r_0)^3 + 6\lambda^2(r^*/r_0)^2 + 5(3-4\lambda)],$$

причем отношение r^*/r_0 удовлетворяет уравнению

$$3\lambda^2(r_0/r_*)^4 + 5(3-4\lambda)(r_0/r_*)^2 - \lambda(5-6\lambda)(r_0/r_*)^{-1} = 0.$$

Если считать внедряющееся тело симметричным, то из условия непрерывности давления на контактной поверхности в точке $\theta = 0$ следует, что

$$\rho_{01}(v_c - v)^2 \frac{1+\lambda_1}{2} = \rho_0 v^2 \frac{1+\lambda}{2},$$
$$\lambda_1 = 1 - b_1,\ b_1 = \rho_{01}/\rho_1,\ 0 \leqslant \lambda_1 \leqslant 1,$$

где ρ_{01}, ρ_1 — плотность материала тела перед и за фронтом ударной волны. Отсюда следует, что скорость контактной поверхности

$$v = v_c\left[\frac{\rho_0}{\rho_{01}}\,\frac{1+\lambda}{1+\lambda_1}\right]^{-1/2}. \qquad (2.4.100)$$

Пусть ударные адиабаты среды и материала тела заданы в виде

$$p_1 - p_0 = \psi(\rho_0, \lambda),\ p_1 - p_0 = \psi_1(\rho_{01}, \lambda_1),$$

тогда на ударных фронтах имеем

$$\rho_0\lambda v^2 = \psi(\rho_0, \lambda),\ \rho_{01}\lambda_1(v_c - v)^2 = \psi_1(\rho_{01}, \lambda_1). \qquad (2.4.101)$$

Уравнения (2.4.100) и (2.4.101) при заданной скорости v_c определяют величины v, λ, λ_1. Сила F_1, действующая на контактную поверхность со стороны внедряющегося тела в направлении скорости v, по закону сохранения импульса равна

$$F_1 = \rho_{01}(v_c - v)^2(1 + \sin\theta_0)S,$$

где S — площадь поперечного сечения тела до начала внедрения. При взаимодействии $F = F_1$, следовательно,

$$S\,\frac{f+\sqrt{1-\lambda^2}}{1+\lambda_1} = \frac{\pi}{4}r_0^2\,\frac{1-\lambda^2}{f},$$

так как $S = \pi d^2/4$ (d — диаметр сечения тела), имеем

$$\frac{r_0}{d} = \sqrt{\frac{f+\sqrt{1-\lambda^2}}{(1+\lambda_1)(1-\lambda^2)f}}. \qquad (2.4.102)$$

Если l — длина тела, то расстояние L между контактной поверхностью и свободной границей в точке $\theta = 0$ в момент окончания внедрения равно

$$L = l\frac{v}{v_c - v} = l\sqrt{\frac{\rho_{01}}{\rho_0}\,\frac{1+\lambda_1}{1+\lambda}}. \qquad (2.4.103)$$

Расстояние $h = r^* - r_0$ между ударной волной и контактной поверхностью определяется соотношением $h/d = r_0/d\,(r^*/r_0 - 1)$; расстояние H между ударной волной в среде и свободной поверхностью в момент окончания внедрения $H = L + r_0/d(r^*/r_0 - 1)d$.

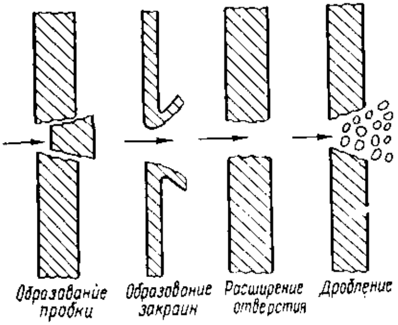

Рис. 65

Таким образом, зная λ и λ_1, а также диаметр d тела, по приведенным формулам можно рассчитать каверну при кратерном внедрении тела в среду.

При внедрении тела наблюдается инерционное движение частиц среды в радиальном направлении, что приводит к увеличению диаметра каверны по сравнению с диаметром тела (диаметром $2r_0$). Чтобы учесть этот фактор, как показано А. Я. Сагомоняном, необходимо проинтегрировать уравнение

$$r\,(1 - r/r^*)y' + [4(1 - r/r^*) - (1 - (r/r^*)^4] +$$
$$+ [2b/(1 - b)](r/r^*)^4]y + (4\tau_0 b/\rho_0)\ln(r/r^*) = (2b/\rho_0)p_0(r_0/r)^{3n}, \quad (2.4.104)$$

где $y = (dr/dt)^2$, $y' = dy/dr$. Здесь $r^* = r_0[(1/b)((r/r_0)^3 - b)]^{1/3}$ — радиус фронта ударной волны в среде, τ_0 — постоянная материала среды, входящая в условие пластичности Сен-Венана. При интегрировании следует учитывать граничные условия

$$y = y_0 = p_0\,(1 - b)/\rho_0 \quad \text{при} \quad r = r_0. \qquad (2.4.105)$$

В случае больших скоростей соударения внедрение тела в преграду конечной толщины переходит в ее пробитие, сопровождающееся образованием трещин, дроблением, распространением волн напряжений, трением и нагревом.

Пробивание осуществляется путем комбинации различных механизмов, представленных на рис. 65, при преобладании одного из них. Эти механизмы характеризуются выдавливанием пробки, образованием закраин, расширением начального отверстия и образованием осколков. Выдавливание пробки характерно для жестких преград средней толщины, тогда как образование закраин наблюдается в тонких преградах. Вязкое разрушение, сопровождаемое дроблением, имеет место при пробивании толстых вязкоупругопластических преград.

Процесс пробивания толстой преграды заключается во внедрении тела, интерференции волн напряжений и откольных явлений на тыльной поверхности. Внедрение тела в преграду рассматривалось ранее и было установлено, что при определенных скорости удара и толщине преграды оно заканчивается ее пробитием, т. е. образованием отверстия диаметра $d = 2r_0$. Интерференция прямой и отраженной волн напряжений, а также откольные явления на тыльной поверхности преграды рассматриваются в следующем параграфе, так как требуют исследования *напряженного состояния преграды в областях возмущений*.

Для изучения процесса образования отверстия в преграде при ее пробитии с учетом инерционного движения частиц среды в зависимости от толщины преграды и физико-механических свойств среды необходимо решить задачу о расширении отверстия при внедрении тела в преграду, рассмотренную А. Я. Сагомоняном и В.С. Кутляровым [43].

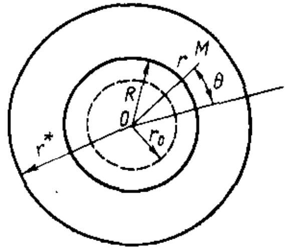

Рис. 66

Пусть в преграду толщины h по нормали к свободной поверхности ударяется тело длины l и среднего диаметра $d = 2r_0$ со скоростью v_c. В результате удара образуется отверстие. Экспериментально установлено, что при ударе тела длины $l > 2r_0$ в преграду толщины $h > 2r_0$ отверстие имеет цилиндрическую форму [12], [27], поэтому можно пренебречь краевым эффектом и считать, что диаметр отверстия определяется только радиальным расширением. В этом случае расчет радиуса отверстия сводится к решению следующей задачи. В момент времени $t = 0$ в срединной поверхности преграды образуется отверстие $d = 2r_0$, в котором действует давление p_0, равное давлению за фронтом ударной волны в момент начала соударения и распространяющееся по срединной поверхности с образованием ударной волны. Требуется найти закон расширения отверстия и его диаметр по окончании процесса соударения, предполагая материал преграды за ударной волной жидким или идеально-пластическим. Плотность среды за ударной волной считается постоянной и определяется из условий, имеющих место на ударной волне в момент взаимодействия. Предполагается, что за время движения среда перед ударной волной находится в покое. Задача обладает цилиндрической симметрией и рассматривается в полярных координатах. Уравнения движения и неразрывности принимают вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r}\right), \qquad (2.4.106)$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0.$$

На границе отверстия (рис. 66) имеем

$$v = \dot{R} \text{ при } r = R, \qquad (2.4.106')$$

где $R(t)$ — радиус отверстия.

Второму из уравнений (2.4.106) и условию (2.4.106′) соответствует интеграл

$$v = R\dot{R}/r. \tag{2.4.107}$$

Воспользовавшись условием пластичности Сен-Венана $\sigma_\theta - \sigma_r = \tau > 0$ и формулой (2.4.107), преобразуем первое из уравнений (2.4.106) к виду

$$\frac{\dot{R}^2 + R\ddot{R}}{r} - \frac{(R\dot{R})^2}{r^3} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} - \frac{\tau}{r}\right).$$

Выполняя интегрирование по координате r, получим

$$\sigma_r - \sigma_0 = (\dot{R}^2 + R\ddot{R}) \ln \frac{r}{R}\rho + \frac{\rho}{2}(R\dot{R})^2\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2}\right) + \tau \ln \frac{r}{R}, \tag{2.4.108}$$

где $\sigma_0(R, t)$ — известное давление в отверстии. Для фронта ударной волны из (2.4.108) имеем

$$\sigma_r^* - \sigma_0 = \rho(\dot{R}^2 + R\ddot{R}) \ln \frac{r_*}{R} + \frac{\rho}{2}(R\dot{R})^2\left(\frac{1}{r_*^2} - \frac{1}{R^2}\right) + \tau \ln \frac{r^*}{R}, \tag{2.4.108′}$$

где σ_r^* и r_* — напряжение и радиус фронта ударной волны. Исключая σ_0, находим

$$\sigma_r^* - \sigma_r = \rho(\dot{R}^2 + R\ddot{R}) \ln \frac{r_*}{r} + \frac{\rho}{2}(R\dot{R})^2\left(\frac{1}{r_*^2} - \frac{1}{r^2}\right) + \tau \ln \frac{r_*}{r}.$$

На фронте ударной волны $\rho_0 D = \rho(D - v)$, $\rho D v = -\sigma_r^*$, где $D = dr^*/dt$ — скорость ударной волны. Имеем $-\sigma_r^* = \rho_0 v^2/(1 - b)$, $D = v/(1 - b)$, $b = \rho_0/\rho$; подставляя эти выражения в (2.4.108′), получим

$$-\sigma_0 = \frac{\rho_0}{2b}(\dot{R}^2 + R\ddot{R}) \ln \frac{R^2 - br_0^2}{(1-b)R^2} + \rho_0 \frac{(R\dot{R})^2}{2b}\left(\frac{1+b}{R^2 - br_0^2} - \frac{1}{R^2}\right) + \\ + \frac{\tau}{2} \ln \frac{R^2 - br_0^2}{(1-b)R^2}. \tag{2.4.109}$$

Введем переменную y с помощью формулы $y = \dot{R}^2$, $y' = dy/dR = 2\ddot{R}$ и преобразуем (2.4.109) в уравнение первого порядка:

$$R \ln \frac{R^2 - br_0^2}{(1-b)R^2} y' + 2\left[\ln \frac{R^2 - br_0^2}{(1-b)R^2} + \frac{(1+b)R^2}{R^2 - br_0^2} - 1\right] y = \\ = \frac{4b}{\rho_0}\left[(p_0 + \pi)\left(\frac{r_0}{R}\right)^{2n} - \frac{\tau}{2} \ln \frac{R^2 - br_0^2}{(1-b)R^2}\right], \tag{2.4.110}$$

где π и n — постоянные политропы материала, уравнение которой имеет вид $-\sigma_0 + \pi = (p_0 + \pi)(r_0/R)^{2n}$; при $\tau = 0$ имеем уравнение движения жидкости.

Уравнение (2.4.110) приводится к виду

$$y' + F(R)y = Q(R)$$

и имеет решение

$$y = \exp\left(-\int_{r_0}^{R} F(R)\,dR\right)\left[y_0 + \int_{r_0}^{R} Q \exp\left(\int_{r_0}^{R} F(R)\,dR\right) dR\right],$$

причем $y_0 = p_0(1-b)/\rho_0$ для начального момента ($t = 0$, $R = r_0$). Численное интегрирование уравнения (2.4.110) требует знания производной y_0' в начальный момент расширения отверстия, вычисление которой сводится к дифференцированию уравнения (2.4.110) и подстановке начальных значений параметров. Окончательно имеем

$$y_0' = \frac{4y_0}{3r_0}\,\frac{b}{1-b} + \frac{2}{3\rho_0}(1-b)(-\sigma_0)'_{r_0} - \frac{2b\tau}{3r_0\rho_0};$$

при этом значение $(-\sigma_0)'_{r_0}$ находим из уравнения политропы материала преграды:

$$(-\sigma_0)'_{r_0} = -(p_0 + \pi)(2n/r_0).$$

Если давление постоянно, то $\sigma_0' = 0$ и

$$y_0' = \frac{4y_0}{3r_0}\,\frac{b}{1-b} - \frac{2b\tau}{3r_0\rho_0}.$$

Давление в отверстии существует конечное время, затем мгновенно исчезает, и дальнейшее расширение отверстия происходит за счет инерционного движения. В этом случае уравнение (2.4.110) принимает вид

$$\ln\frac{R^2-br_0^2}{(1-b)R^2}\,y' + 2\left[\ln\frac{R^2-br_0^2}{(1-b)R^2} + \frac{(1+b)R^2}{R^2-br_0^2} - 1\right]y = \frac{2b\tau}{\rho_0}\ln\frac{R^2-br_0^2}{(1-b)R^2}. \qquad (2.4.110')$$

Радиус отверстия зависит от длины тела в том случае, когда время прохождения его через срединную поверхность преграды меньше времени *радиального расширения отверстия, определяемого внутренним* давлением σ_0. В момент полного прохождения тела через срединную поверхность давление в отверстии исчезает и справедливо уравнение (2.4.110'), для которого начальным значением является скорость расширения отверстия в этот момент.

Расчет расширения отверстия при пробитии преграды, выполненный по предложенной схеме, указывает на значительное увеличение окончательного размера отверстия по сравнению с первоначальным.

Пробитие тонкой преграды толщиной h_0 характеризуется образованием закраин [6], которые при расчете можно рассматривать как цилиндрические оболочки переменной толщины h с внутренним диаметром $d = 2r$, равным диаметру тела, при этом считается $h_0/d \ll 1$ и учитывается только напряжение $\sigma_0 = \sigma_т$, поэтому $e_r = e_z = e$.

Элемент преграды с начальными размерами h_0 и dl после деформации характеризуется величинами $h = h_0(1-e)$ и $dz = dl(1-e)$, следовательно, $dl/dz = h_0/h$. Материал преграды предполагается несжимаемым, поэтому имеет место соотношение $h_0 l dl = hrdz$, откуда $h = h_0\sqrt{l/r} = h_0\sqrt{z/H}$, где $H = 3r_0/4$ — высота оболочки, определенная из условия равенства объема плиты радиуса r и объема деформированной части преграды.

Энергия пластических деформаций, отнесенная к единице объема,

$$\sigma_т \int_l^r de_\theta = \sigma_т \int_l^r \frac{dl}{l} = \sigma_т \ln \frac{r}{l};$$

для области $0 \leqslant l \leqslant r$ имеем

$$W_p = \int_0^r \sigma_т \ln \frac{r}{l} dl = \frac{1}{2} \sigma_т \pi r^2 h_0.$$

Сила инерции F и соответствующая ей работа W_d соответственно равны:

$$F = \pi\rho h_0 r \left[r \frac{d^2 r}{dt^2} + 2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \right],$$

$$W_d = \pi\rho h_0 \int_0^{r_m} r \left[r \frac{d^2 r}{dt^2} + 2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \right] dr,$$

где r_m — максимальный радиус отверстия.

Механическая энергия пробития $W = W_p + W_d$. Здесь не учитываются составляющие, которые определяют тепловую энергию, вызванную трением, и учитывают энергию, связанную с распространением волн напряжений и образованием трещин, поскольку в случае небольших скоростей удара они малы.

Таким образом, механическая энергия пробития W должна компенсироваться кинетической энергией удара $E = (1/2)mv_c^2$, где m — масса тела, v_c — скорость удара, т. е. имеет место соотношение

$$mv_c^2 = \pi r^2 h_0 \sigma_т + 2\pi\rho h_0 \int_0^{r_m} r \left[r \frac{d^2 r}{dt^2} + 2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \right] dr, \qquad (2.4.111)$$

которое является уравнением относительно r_m. Вычисление интеграла в уравнении (2.4.111) выполняется при известной геометрии тела $r = r(t)$. Так, для конуса $r = (R/l_к)v_c t$ и уравнение имеет вид

$$mv_c^2 = 2\pi h_0 R^2 \left[\rho (v_c R/l_к)^2 + \frac{1}{2} \sigma_т \right];$$

для оживала $r = R \sin (\pi/2)(v_c t/l_{ож})$ и уравнение принимает вид

$$mv_c^2 = 2\pi h_0 R^2 [1{,}86\rho(v_c R/l_{ож})^2 + \sigma_т/2],$$

где R — радиус миделева сечения тела, v_c — скорость движения.

При больших скоростях удара расчет пробития тонкой преграды целесообразно вести, исходя из закона сохранения количества движения системы тело — преграда, полагая, что зона прибития внутри области пластических деформаций имеет радиус r_p. В этом случае

$$mv_c = mv + N_z.$$

Здесь

$$N_z = 2\pi\rho h_0 \int_0^{r_p} v r_0 \frac{\partial \xi}{\partial z} dr_0$$

— количество движения частиц среды в области деформации, причем r_0 — координата частицы преграды в области деформации; $\xi(r_0, z)$ — перемещение частицы преграды в направлении движения тела. Уравнение движения преобразуется к виду

$$v_c - v = \frac{2\pi\rho h_0}{m} \int_0^{r_p} v r_0 \frac{\partial \xi}{\partial z} dr_0. \quad (2.4.112)$$

С помощью уравнения (2.4.112) можно получить точное решение, если функция $\xi(r_0, z)$ известна; в противном случае функцию $\xi(r_0, z)$ выбирают приближенно, исходя из предположений о характере пробития, установленном экспериментально. Если принять $\xi(r_0, z) = [z(\operatorname{tg}\alpha) - r_0]\cos\alpha$, где α — угол конусности тела, то имеет место приближенное соотношение

$$\Delta v = v_c - v \approx \frac{2\pi\rho h_0 R^2}{2m} v_c \sin\alpha.$$

Экспериментальные исследования процессов внедрения тела и пробития преграды конечной толщины позволяют сделать вывод, что сила сопротивления F для тела массы m при скорости v определяется [56] выражением $F = B_1 v^2 + B_2 v + B_3$, где B_i ($i = 1, 2, 3$) — постоянные, определяемые экспериментально. При этом уравнение движения тела имеет вид

$$m\frac{dv}{dt} = B_1 v^2 + B_2 v + B_3.$$

Следует отметить, что выражение для силы сопротивления преграды совпадает с тем же выражением, полученным теоретически.

В частных случаях при малых скоростях удара $B_1 = B_2 = 0$ и глубина внедрения

$$H = mv_c^2/(2B_3);$$

при больших скоростях удара $B_2 = 0$ и глубина внедрения

$$H = \frac{m}{2B_1} \ln\left(\frac{B_1}{B_3} v_c^2 + 1\right).$$

В основу экспериментальных исследований процесса пробития преграды в квазистатических условиях положена зависимость

$$\frac{dF}{dS} = (p_S + \rho v^2 \sin^2\alpha)\sin\alpha,$$

где p_S — среднее давление контакта, необходимое для пробития преграды в квазистатических условиях, $p_S = 1{,}35 \cdot 10^5 h_0$ (Н/см²). Здесь h_0 измеряется в сантиметрах; α — угол, образованный плоскостью контакта тела с направлением его движения.

Подставляя приведенное выражение в уравнение движения тела и интегрируя его, находим

$$v_к^2 = \varkappa \left[v_c^2 - \frac{p_S}{\rho \sin^2 \alpha} (\varkappa - 1) \right], \quad \varkappa = \exp \left(\frac{2\pi\rho R^2 h_0 \sin^2 \alpha}{m} \right).$$

Эту формулу можно аппроксимировать функцией $v_к = v_c \exp(-7{,}38 h_0)$. Итак, приведены все данные, необходимые для исследования напряженного состояния преграды при внедрении тела с учетом физико-механических свойств среды и специфических особенностей рассматриваемого процесса.

§ 5. Напряжения в деформируемой среде при внедрении

При внедрении тела в преграду, как отмечено в предыдущем параграфе, образуются область внедрения с пограничным слоем и область возмущенного состояния среды (рис. 67). Пограничный слой имеет ширину $l(z)$ и окаймляет кратер, форма которого определяет форму этого слоя. Пограничный слой характеризуется уравнениями образующих внутренней $r_0(z)$ и внешней $r_1(z)$ ограничивающих поверхностей. Среда в пограничном слое вязко-пластическая, имеет температуру $T_п^0$ и характеризуется тензором напряжений (σ), вектором скорости частиц $\mathbf{v}$ и плотностью ρ, которым соответствует тензор кинетических напряжений (T).

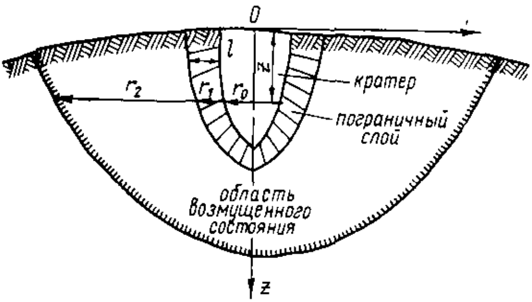

Рис. 67

Область возмущенного состояния среды образуется в результате распространения волны напряжений, ограничена внешней поверхностью пограничного слоя, свободной поверхностью преграды и поверхностью переднего фронта волны напряжений, которая может быть как волной нагрузки, так и волной разгрузки. Среда в области возмущенного состояния находится при температуре $T_в^0$ в упругом, вязком, пластическом или другом состоянии в зависимости от ее физико-механических свойств и условий внедрения, которое характеризуется тензором напряжений (σ), вектором скорости частиц $\mathbf{v}$ и плотностью ρ; им соответствует тензор кинетических напряжений (T).

Таким образом, чтобы исследовать напряженное состояние среды при внедрении тела, необходимо построить тензор кинетических напряжений (T) для указанных областей. Построение выполняется в цилиндрической системе координат (r, θ, z, x^0), имеющей начало в точке O

пересечения оси вращения кратера со свободной поверхностью преграды.

Тензор кинетических напряжений строится в виде суммы основного и корректирующего тензоров.

$$(T) = (T_{\text{о}}) + (T_{\text{к}}) \tag{2.5.1}$$

в цилиндрических координатах в форме общего решения уравнений равновесия фиктивного тела:

$$T^{11} = \frac{1}{2r^2}\left(-\widetilde{R}_{3223} + \widetilde{R}_{0220} + r^2\widetilde{R}_{0330}\right),\ T^{22} = \frac{1}{2r^2}\left(-\widetilde{R}_{3113} + \right.$$
$$\left. + \widetilde{R}_{0110} + \widetilde{R}_{0330}\right),$$
$$T^{33} = \frac{1}{2r^2}\left(-\widetilde{R}_{2112} + r^2\widetilde{R}_{0110} + \widetilde{R}_{0220}\right),\ T^{00} =$$
$$= \frac{1}{2r^2}\left(\widetilde{R}_{2112} + r^2\widetilde{R}_{3113} + \widetilde{R}_{3223}\right),$$
$$T^{12} = -\frac{1}{2r^2}\left(\widetilde{R}_{1323} + \widetilde{R}_{0210}\right),\ T^{10} = \frac{1}{2r^2}\left(\widetilde{R}_{0212} + r^2\widetilde{R}_{0313}\right), \tag{2.5.2}$$
$$T^{13} = -\frac{1}{2r^2}\left(\widetilde{R}_{2321} + r^2\widetilde{R}_{0310}\right),\ T^{20} = -\frac{1}{2r^2}\left(\widetilde{R}_{0112} - \widetilde{R}_{0323}\right),$$
$$T^{23} = -\frac{1}{2r^2}\left(\widetilde{R}_{2131} + \widetilde{R}_{0320}\right),\ T^{30} = -\frac{1}{2r^2}\left(r^2\widetilde{R}_{0113} + \widetilde{R}_{0223}\right),$$

где

$$\widetilde{R}_{1221} = -2\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial r\partial\theta},\ \widetilde{R}_{3113} = -2\frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial r\partial z},\ \frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial r^2} = \widetilde{R}_{0110},$$
$$\widetilde{R}_{3223} = -2\left(\frac{\partial^2 \Pi_3}{\partial\theta\partial z} + r\frac{\partial \Pi_2}{\partial z}\right),\ \widetilde{R}_{0220} = \frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial\theta^2} + r\frac{\partial \Pi_0}{\partial r},\ \widetilde{R}_{0330} = \frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial z^2},$$
$$\widetilde{R}_{0113} = -\frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial r\partial x^0},\ \widetilde{R}_{0112} = -\left(\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial r\partial x^0} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Pi_1}{\partial x^0}\right),\ \widetilde{R}_{0313} = \frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial z\partial x^0},$$
$$\widetilde{R}_{0212} = \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial\theta\partial x^0},\ \widetilde{R}_{0223} = -\left(\frac{\partial^2 \Pi_3}{\partial\theta\partial x^0} + r\frac{\partial \Pi_2}{\partial x^0}\right),\ \widetilde{R}_{0323} = \frac{\partial^2 \Pi_3}{\partial z\partial x^0},$$
$$\widetilde{R}_{0320} = \frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial\theta\partial z} + \frac{\partial^2 \Pi_3}{\partial x^{02}},\ \widetilde{R}_{0210} = \frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial r\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial \Pi_0}{\partial\theta} + \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial x^{02}}, \tag{2.5.2'}$$
$$\widetilde{R}_{0310} = \frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial r\partial z} + \frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial x^{02}},$$
$$\widetilde{R}_{3112} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial \Pi_3}{\partial r} - \frac{\partial \Pi_2}{\partial\theta} - \frac{\partial \Pi_1}{\partial z}\right) - \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \Pi_3}{\partial r} + \frac{\partial \Pi_2}{\partial\theta} + \frac{\partial \Pi_1}{\partial z}\right),$$
$$\widetilde{R}_{3212} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial \Pi_3}{\partial r} - \frac{\partial \Pi_2}{\partial\theta} + \frac{\partial \Pi_1}{\partial z}\right),$$
$$\widetilde{R}_{3213} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \Pi_3}{\partial r} + \frac{\partial \Pi_2}{\partial\theta} - \frac{\partial \Pi_1}{\partial z}\right) + \frac{2}{r}\frac{\partial \Pi_3}{\partial z}.$$

Построение основного тензора (T_0) подробно рассмотрено во второй части книги и основано на требовании выполнения граничных условий в напряжениях. Для пограничного слоя эти условия таковы:

$$T^{1\beta} = Q^{1\beta}_{(1)} \text{ при } r = r_0(z);\ T^{0\beta} = Q^{0\beta}_{(1)} \text{ при } x^0 = 0, \qquad (2.5.3)$$

где

$$Q^{11}_{(1)} = (\rho v^1 v^1)_{r_0} - p^{11},\ Q^{12}_{(1)} = 0,\ Q^{13}_{(1)} = (\rho v^1 v^3)_{r_0} - p^{13},\ Q^{10}_{(1)} =$$
$$= (\rho v^1 v^0)_{r_0},\ Q^{01}_{(1)} = (\rho v^1 v^0)_0,\ Q^{02}_{(1)} = 0,\ Q^{00}_{(1)} = \rho_0 v^{02},\ Q^{03}_{(1)} = (\rho v^3 v^0)_0;$$

для области нагрузки они имеют следующий вид:

$$T^{1\beta} = T^{1\beta}_{\text{п.с}} \text{ при } r = r_1(z);\ w_\alpha = 0 \text{ при } r = r_2(z);$$
$$T^{0\beta} = Q^{0\beta}_{(1)} \text{ при } x^0 = 0. \qquad (2.5.4)$$

Следовательно, функции кинетических напряжений основного тензора не зависят от координаты θ и имеют вид

$$\Pi^{(0)}_\alpha = \Pi^{(0)}_{\alpha 1} + \Pi^{(0)}_{\alpha 0}\ (\alpha = 1,\ 2,\ 3,\ 0). \qquad (2.5.5)$$

Координате r соответствуют функции кинетических напряжений

$$\Pi^{(0)}_{\alpha 1} = (1/2)(1 + \cos \bar{r}) F_{\alpha 1}, \qquad (2.5.6)$$

где $\bar{r} = [\pi (r - r_1)]/(r_2 - r_1)$ — безразмерная координата. Для пограничного слоя $r_1 = r_0$, $r_2 = r_0 + l$; для области нагрузки $r_1 = r_0 + l$, $r_2 = r_0 + l + (a/a_{cq})x^0$. Функции $F_{\alpha 1}$ подчинены уравнениям:

$$\frac{\partial F_{21}}{\partial z} + \frac{r_1}{2}\frac{\partial^2 F_{01}}{\partial z^2} = r_1 Q^{11}_{(1)},$$
$$\frac{2}{r_1}\frac{\partial F_{31}}{\partial z} + \left(\frac{\partial^2 F_{11}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F_{11}}{\partial x^{02}}\right) = 0, \qquad (2.5.7)$$
$$\frac{\partial^2 F_{21}}{\partial x^{02}} = -2Q^{13}_{(1)},\ \frac{\partial}{\partial x^0}\left(r_1^2 \frac{\partial F_{21}}{\partial z}\right) = 2r_1^2 Q^{10}_{(1)}$$

и граничным условиям:

$$F_{\alpha 1} = 0\ (\alpha = 1,\ 2,\ 3,\ 0) \text{ при } z = z_\gamma, \qquad (2.5.8)$$
$$F_{11} = 0,\ \frac{\partial F_{11}}{\partial x_0} = 0,\ F_{21} = 0,\ \frac{\partial F_{21}}{\partial x^0} = 0 \text{ при } x^0 = 0.$$

Интегрируя четвертое из уравнений (2.5.7) с учетом граничных условий (2.5.8), находим

$$\frac{\partial F_{21}}{\partial z} = 2\int_0^{x^0} Q^{10}_{(1)}\, dx^0.$$

В результате подстановки последнего выражения в первое из уравнений (2.5.7) имеем

$$\frac{\partial^2 F_{01}}{\partial z^2} = 2Q_{(1)}, \qquad (2.5.9)$$

где

$$Q_{(1)}=Q_{(1)}^{11}-\frac{2}{r_1}\int\limits_0^{x^0} Q_{(1)}^{10}\,dx^0.$$

Интегрируя уравнение (2.5.9) совместно с граничными условиями (2.5.8), получим функцию

$$F_{01}=2\left[\int\limits_0^{z}\!\!\int Q_{(1)}\,dzdz-\frac{z}{z_2}\int\limits_0^{z_2}\!\!\int Q_{(1)}\,dzdz\right]. \tag{2.5.10}$$

Здесь z_2 — глубина кратера.

Интегрируя третье из уравнений (2.5.7) с учетом граничных условий (2.5.8), определим функцию

$$F_{21}=-2\int\limits_0^{x^0}\!\!\int Q_{(1)}^{13}\,dx^0\,dx^0. \tag{2.5.11}$$

Второе из уравнений (2.5.7) и граничные условия (2.5.8) выполняются при

$$F_{11}=0,\ F_{31}=0. \tag{2.5.12}$$

Координате x^0 соответствуют функции кинетических напряжений:

$$\Pi_{10}^{(0)}=0,\ \Pi_{00}^{(0)}=0,$$

$$\Pi_{20}^{(0)}=\frac{1}{2}\left(1+\cos\overrightarrow{x^0}\right)F_{20}+\frac{1}{2}\int\limits_0^{x^0}\left(1+\cos\overrightarrow{x^0}\right)dx^0\,\Psi_{20}, \tag{2.5.13}$$

$$\Pi_{30}^{(0)}=\frac{1}{2}\int\limits_0^{x_0}\left(1+\cos\overrightarrow{x^0}\right)dx^0\,\Psi_{30}.$$

Функции F_{20}, Ψ_{20}, Ψ_{30} подчинены уравнениям:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 F_{20}}{\partial r\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial F_{20}}{\partial z}=-Q_{(1)}^{00},\quad \frac{\partial\Psi_{20}}{\partial z}=2r^2Q_{(1)}^{01},\\ \frac{\partial\Psi_{30}}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial\Psi_{30}}{\partial r}+r\Psi_{30}=2r^2Q_{(1)}^{03}\end{gathered} \tag{2.5.14}$$

и граничным условиям:

$$\begin{gathered}F_{20}=0,\ \Psi_{30}=0 \text{ при } r=r_\gamma,\\ F_{20}=0,\ \Psi_{20}=0,\ \Psi_{30}=0 \text{ при } z=z_\gamma.\end{gathered} \tag{2.5.15}$$

Первое из уравнений (2.5.14) преобразуется к виду

$$\frac{\partial\xi}{\partial r}+\frac{1}{r}\xi=-Q_{(1)}^{00},\ \xi=\frac{\partial F_{20}}{\partial z}.$$

Решением является функция

$$\xi=\frac{1}{r}\int\limits_{r_1}^{r} rQ_{(1)}^{00}\,dr,$$

интегрируя которую по z с учетом граничных условий (2.5.15), находим

$$F_{20} = \frac{1}{r} \int_0^z \int_{r_1}^r r Q^{00}_{(1)} \, dr dz. \tag{2.5.16}$$

Интегрируя второе из уравнений (2.5.14) с учетом граничных условий (2.5.15), получим

$$\Psi_{20} = 2r^2 \int_0^z Q^{01}_{(1)} \, dz. \tag{2.5.17}$$

Последние два уравнения (2.5.14) определяют функцию

$$\Psi_{30} = 2e^{-(r^2 - r_1^2)/2} \int_{r_1}^{r_2} r^2 Q^{03}_{(1)} e^{(r^2 - r_1^2)/2} \, dr. \tag{2.5.18}$$

Следует заметить, что функции нагрузок должны удовлетворять условиям самоуравновешенности.

Полные функции кинетических напряжений основного тензора имеют вид:

$$\Pi_2^{(0)} = \frac{1}{2}(1 + \cos r) F_{21} + \frac{1}{2}\left(1 + \cos \overline{x^0}\right) F_{20} +$$
$$+ \frac{1}{2} \int_0^{x_0} \left(1 + \cos \overline{x^0}\right) dx^0 \Psi_{20},$$

$$\Pi_3^{(0)} = \frac{1}{2} \int_0^{x_0} \left(1 + \cos \overline{x^0}\right) dx^0 \, \Psi_{30}, \quad \Pi_0^{(0)} = \frac{1}{2}\left(1 + \cos \overline{x^0}\right) F_{01}, \quad \Pi_1^{(0)} = 0. \tag{2.5.19}$$

Для самоуравновешенных частей функций нагрузок компоненты основного тензора ($T_0^{(1)}$) находятся в результате подстановки функций кинетических напряжений (2.5.19) в выражения:

$$T^{11}_{(0)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r}\left(2\frac{\partial \Pi_2^{(0)}}{\partial z} + \frac{\partial \Pi_0^{(0)}}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 \Pi_0^{(0)}}{\partial z^2}\right],$$

$$T^{33}_{(0)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \Pi_0^{(0)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Pi_0^{(0)}}{\partial r}\right),$$

$$T^{22}_{(0)} = \frac{1}{2r^2}\left[2\frac{\partial^2 \Pi_2^{(0)}}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 \Pi_0^{(0)}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Pi_0^{(0)}}{\partial z^2}\right],$$

$$T^{00}_{(0)} = -\left(\frac{\partial^2 \Pi_2^{(0)}}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Pi_2^{(0)}}{\partial z}\right),$$

$$T^{12}_{(0)} = -\frac{1}{2r^2}\left(\frac{\partial^2 \Pi_3^{(0)}}{\partial r \partial z} - \frac{2}{r}\,\frac{\partial \Pi_3^{(0)}}{\partial z}\right),$$

$$T^{13}_{(0)} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \Pi_0^{(0)}}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 \Pi_2^{(0)}}{\partial x^{02}}\right), \tag{2.5.20}$$

$$T^{23}_{(0)} = -\frac{1}{2r^2}\left(-\frac{\partial^2 \Pi_3^{(0)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial \Pi_3^{(0)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Pi_3^{(0)}}{\partial x^{02}}\right),$$

$$T^{10}_{(0)} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 \Pi_2^{(0)}}{\partial z \partial x^0},$$

$$T^{20}_{(0)} = \frac{1}{2r^2}\,\frac{\partial^2 \Pi_3^{(0)}}{\partial z \partial x^0},\ T^{30}_{(0)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \Pi_2^{(0)}}{\partial r \partial x^0} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial \Pi_2^{(0)}}{\partial x^0}\right);$$

несамоуравновешенным частям функций нагрузок соответствует основной тензор $(T_0^{(2)})$ с компонентами

$$T^{11}_{(0)} = (1/2)\left(1 + \cos \bar{r}\right)\overline{Q}^{11}_{(1)},\ T^{00}_{(0)} = (1/2)\left(1 + \cos \overline{x^0}\right)\overline{Q}^{00}_{(1)},$$

$$T^{10}_{(0)} = (1/2)\left(1 + \cos \bar{r}\right)\overline{Q}^{10}_{(1)} + (1/2)\left(1 + \cos \overline{x}_0\right)\overline{Q}^{01}_{(1)}, \tag{2.5.21}$$

$$T^{13}_{(0)} = (1/2)\left(1 + \cos \bar{r}\right)\overline{Q}^{13}_{(1)},\ T^{30}_{(0)} = (1/2)\left(1 + \cos \overline{x^0}\right)\overline{Q}^{03}_{(1)}.$$

Полный основной тензор

$$(T_0) = (T_0^{(1)}) + (T_0^{(2)}) \tag{2.5.22}$$

характеризует как пограничный слой, так и область возмущений нагрузки. *Корректирующий тензор* $(T_к)$ *строится в цилиндрических координатах* отдельно для пограничного слоя и для области возмущений нагрузки, при этом функции кинетических напряжений $\Pi_\alpha^{(к)}$ ($\alpha = 1, 2, 3, 0$) принимаются в следующем виде:

$$\Pi_1^{(к)} = 0,$$

$$\Pi_2^{(к)} = \sum_{mpl} B_{mpl}\,\frac{1}{m!\,p!}\left(J_m\left(\bar{r}\right)\sin m\bar{r}\right)\sin p\bar{z} P_l\left(\overline{x^0}\right),$$

$$\Pi_3^{(к)} = \sum_{mpl} C_{mpl}\,\frac{1}{p!}\,P_m\left(\bar{r}\right)\sin p\bar{r} P_l\left(\overline{x^0}\right),$$

$$\Pi_0^{(к)} = \sum_{mpl} D_{mpl}\,P_m\left(\bar{r}\right)P_p\left(\bar{z}\right)P_l\left(\overline{x^0}\right).$$

Подставляя функции кинетических напряжений в (2.5.20), получим

$$T^{\alpha\beta}_{(к)} = \sum_{mpl}\left(B_{mpl} f^{\alpha\beta}_{(2)} + C_{mpl} f^{\alpha\beta}_{(3)} + D_{mpl} f^{\alpha\beta}_{(0)}\right), \tag{2.5.23}$$

где $f^{\alpha\beta}_{(\gamma)}\,(mpl)$ — известные функции координат.

Параметры B_{mpl}, ..., D_{mpl} определяются в результате решения системы алгебраических уравнений

$$\sum_{mpl}\left(B_{mpl} F_{2\beta} + C_{mpl} F_{3\beta} + D_{mpl} F_{0\beta}\right) + L_\beta = 0. \tag{2.5.24}$$

Коэффициенты $F_{\gamma\beta}$ $(mplikq)$ и свободные члены L_β (ikq) уравнений вычисляются по формулам, приведенным в § 3 гл. 1 в зависимости от физико-механических свойств среды в рассматриваемой области. Для пограничного слоя, где среда вязкопластическая, имеем

$$F_{\gamma\beta} = \alpha_1^{(b)} F_{\gamma\beta}^{(1)} + \alpha_2^{(b)} F_{\gamma\beta}^{(2)},$$

$$L_\beta = \alpha_1^{(b)} L_\beta^{(1)} + \alpha_2^{(b)} L_\beta^{(2)} + \alpha L_\beta^{(3)} + (p_0/\lambda) L_\beta^{(6)}; \tag{2.5.25}$$

функции состояния $\alpha_1^{(b)}$, $\alpha_2^{(b)}$ таковы:

$$\alpha_1^{(b)} = \frac{1}{2\tilde{\eta}} + \frac{\tilde{\tau}_l}{4} \frac{d}{d\tilde{\tau}_l}\left(\frac{1}{\tilde{\eta}}\right),$$

$$\alpha_2^{(b)} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2\tilde{\eta}}\right) - \frac{\tilde{\tau}_l}{6} \frac{d}{d\tilde{\tau}_i}\left(\frac{1}{\tilde{\eta}}\right), \tag{2.5.26}$$

где $\tilde{\eta} = \mu + \tilde{\tau}_l / \tilde{\gamma}_l$.

Интегралы $F_{\gamma\beta}^{(1)}$, $F_{\gamma\beta}^{(2)}$ вычисляются по формулам:

$$F_{\gamma\beta}^{(1)} = \frac{2x_2^0}{\pi^2} \iiint_0^\pi A_{\gamma\beta}^{(1)} \left(r_1 + \frac{r_2 - r_1}{\pi}\bar{r}\right)(r_2 - r_1)\, z_2\, d\bar{r}\, d\bar{z}\, d\bar{x}^0 ,$$

$$F_{\gamma\beta}^{(2)} = \frac{2x_2^0}{\pi^2} \iiint_0^\pi A_{\gamma\beta}^{(2)} \left(r_1 + \frac{r_2 - r_1}{\pi}\bar{r}\right)(r_2 - r_1)\, z_2\, d\bar{r}\, d\bar{z}\, d\bar{x}^0; \tag{2.5.27}$$

их подынтегральные выражения $A_{\gamma\beta}^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ приведены во второй части книги; интегралы $L_\beta^{(1)}, \ldots, L_\beta^{(6)}$ вычисляются по формулам:

$$L_\beta^{(1)} = \frac{2x_2^0}{\pi^2} \iiint_0^\pi B_\beta^{(1)} \left(r_1 + \frac{r_2 - r_1}{\pi}\bar{r}\right)(r_2 - r_1)\, z_2\, d\bar{r}\, d\bar{z}\, d\bar{x}^0,$$

$$L_\beta^{(2)} = \frac{2x_2^0}{\pi^2} \iiint_0^\pi B_\beta^{(2)} \left(r_1 + \frac{r_2 - r_1}{\pi}\bar{r}\right)(r_2 - r_1)\, z_2\, d\bar{r}\, d\bar{z}\, d\bar{x}^0,$$

$$L_\beta^{(3)} = \frac{2x_2^0}{\pi^2} \iiint_0^\pi B_\beta^{(3)} \left(r_1 + \frac{r_2 - r_1}{\pi}\bar{r}\right)(r_2 - r_1)\, z_2\, d\bar{r}\, d\bar{z}\, d\bar{x}^0, \tag{2.5.28}$$

$$L_\beta^{(6)} = \frac{2x_2^0}{\pi^2} \iiint_0^\pi B_\beta^{(6)} \left(r_1 + \frac{r_2 - r_1}{\pi}\bar{r}\right)(r_2 - r_1)\, z_2\, d\bar{r}\, d\bar{z}\, d\bar{x}^0 ,$$

их подынтегральные выражения $B_\beta^{(k)}$ $(k = 1, 2, 3, 6)$ приведены во второй части книги. Функции $f_{(\gamma)}^{\alpha\beta}$ должны быть записаны в цилиндрических координатах, $T_{(0)}^{\alpha\beta}$ — компоненты тензора (2.5.22). Для области возмущений нагрузки упругопластической среды имеем:

$$F_{\gamma\beta} = (1/(2G))\,(\alpha_1 F_{\gamma\beta}^{(1)} + \alpha_2 F_{\gamma\beta}^{(2)}), \tag{2.5.29}$$

$$L_\beta = (1/2G))\,(\alpha_1 L_\beta^{(1)} + \alpha_2 L_\beta^{(2)}) + \alpha L_\beta^{(3)} - L_\beta^{(7)}.$$

Функции состояния соответственно равны:

$$\alpha_1 = 1 + \varphi + \frac{T_i}{2}\frac{d\varphi}{dT_i},$$
$$\alpha_2 = \frac{2}{3}\left[\left(\frac{2G}{3K} - 1\right) - \varphi - \frac{T_i}{2}\frac{d\varphi}{dT_i}\right]. \qquad (2.5.30)$$

Интегралы $F_{\gamma\beta}^{(i)}$ ($i = 1, 2$) вычисляются по формулам (2.5.27), интегралы $L_\beta^{(k)}$ ($k = 1, 2, 3, 7$) — по формулам (2.5.28), а также по формуле

$$L_\beta^{(7)} = 2z_2 \int_0^\pi B_\beta^{(7)} r_2(\bar{z})\, d\bar{z},$$

подынтегральное выражение $B_\beta^{(7)}$ приведено во второй части книги.

Для области возмущений нагрузки вязкоупругой среды имеем:

$$F_{\gamma\beta} = (1/(2G))(\alpha_1^{(e)}F_{\gamma\beta}^{(1)} + \alpha_2^{(e)}F_{\gamma\beta}^{(2)} + (1/a_{cq})(F_{\gamma\beta}^{(3)} + F_{\gamma\beta}^{(4)}/3), \quad (2.5.31)$$
$$L_\beta = (1/(2G))(\alpha_1^{(e)}L_\beta^{(1)} + \alpha_2^{(e)}L_\beta^{(2)}) + \alpha L_\beta^{(3)} + (1/a_{cq})(L_\beta^{(4)} + L_\beta^{(5)}/3) - L_\beta^{(7)};$$

функции состояния

$$\alpha_1^{(e)} = 1, \alpha_2^{(e)} = (2/3)(2G/(3K) - 1). \qquad (2.5.32)$$

Интегралы $F_{\gamma\beta}^{(3)}$ и $F_{\gamma\beta}^{(4)}$ вычисляются по формулам:

$$F_{\gamma\beta}^{(3)} = \frac{2x_2^{0^2}}{\pi^3}\iiint_0^\pi\int_0^{\bar{x}^0} \tilde{R}(\bar{x}^0\bar{y}^0)\, A_{\gamma\beta}^{(1)}(\bar{x}^0\bar{y}^0)\, d\bar{y}^0 \times$$
$$\times\left(r_1 + \frac{r_2 - r_1}{\pi}\bar{r}\right)(r_2 - r_1)\, z_2\, d\bar{r}\, d\bar{z}\, d\bar{x}^0,$$
$$(2.5.33)$$
$$F_{\gamma\beta}^{(4)} = \frac{2x_2^{0^2}}{\pi^3}\iiint_0^\pi\int_0^{\bar{x}^0} (\tilde{R}_1(\bar{x}^0\bar{y}^0) - \tilde{R}(\bar{x}^0\bar{y}^0))\, A_{\gamma\beta}^{(2)}(\bar{x}^0\bar{y}^0)\, d\bar{y}^0 \times$$
$$\times\left(r_1 + \frac{r_2 - r_1}{\pi}\bar{r}\right)(r_2 - r_1)\, z_2\, d\bar{r}\, d\bar{z}\, d\bar{x}^0,$$

интегралы $L_\beta^{(4)}$ и $L_\beta^{(5)}$ — по формулам:

$$L_\beta^{(4)} = \frac{2x_2^{0^2}}{\pi^3}\iiint_0^\pi\int_0^{\bar{x}^0} \tilde{R}(\bar{x}^0\bar{y}^0)\, B_\beta^{(1)}(\bar{x}^0\bar{y}^0)\, d\bar{y}^0 \times$$
$$\times\left(r_1 + \frac{r_2 - r_1}{\pi}\bar{r}\right)(r_2 - r_1)\, \bar{z}_2\, d\bar{r}\, d\bar{z}\, d\bar{x}^0,$$

$$L_\beta^{(5)} = \frac{2x_2^{0^2}}{\pi^3}\iiint_0^\pi\int_0^{\bar{x}^0} (\tilde{R}_1(\bar{x}^0\bar{y}^0) - \tilde{R}(\bar{x}^0\bar{y}^0))\, B_\beta^{(2)}(\bar{x}^0\bar{y}^0)\, d\bar{y}^0 \times$$
$$\times\left(r_1 + \frac{r_2 - r_1}{\pi}\bar{r}\right)(r_2 - r_1)\, z_2\, d\bar{r}\, d\bar{z}\, d\bar{x}^0. \qquad (2.5.34)$$

Решение уравнений (2.5.24) строится с помощью процедуры последовательных приближений, описанной в § 3 гл. 1. В первом приближении, полагая $m = 1$, $p = 1$, $l = 1$, $i = 1$, $k = 1$, $q = 1$, имеем три уравнения с тремя неизвестными, решение которых определяется формулами Крамера: $B = \Delta_2/\Delta$, $C = \Delta_3/\Delta$, $D = \Delta_0/\Delta$, где

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_{22}, & F_{32}, & F_{02} \\ F_{23}, & F_{33}, & F_{03} \\ F_{20}, & F_{30}, & F_{00} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} L_2, & F_{32}, & F_{02} \\ L_3, & F_{33}, & F_{03} \\ L_0, & F_{30}, & F_{00} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} F_{22}, & L_2, & F_{02} \\ F_{23}, & L_3, & F_{03} \\ F_{20}, & L_0, & F_{00} \end{vmatrix}, \quad \Delta_0 = \begin{vmatrix} F_{22}, & F_{32}, & L_2 \\ F_{23}, & F_{33}, & L_3 \\ F_{20}, & F_{30}, & L_0 \end{vmatrix}. \tag{2.5.35}$$

Компоненты корректирующего тензора

$$T^{\alpha\beta}_{(\text{к})} = (1/\Delta)(\Delta_2 f^{\alpha\beta}_{(2)} + \Delta_3 f^{\alpha\beta}_{(3)} + \Delta_0 f^{\alpha\beta}_{(0)}). \tag{2.5.36}$$

Тензор кинетических напряжений (T) в первом приближении имеет компоненты

$$T^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta}_{(0)} + T^{\alpha\beta}_{(\text{к})}. \tag{2.5.37}$$

Последующие приближения строятся аналогично.

Таким образом, для пограничного слоя и области возмущений нагрузки тензор кинетических напряжений (T) построен. По известному тензору (T), используя формулы (1.3.49), находим плотность ρ, вектор скорости частиц $\mathbf{v}$ и тензор напряжений (σ) среды, т. е. все характеристики напряженного состояния и движения среды в рассматриваемых областях.

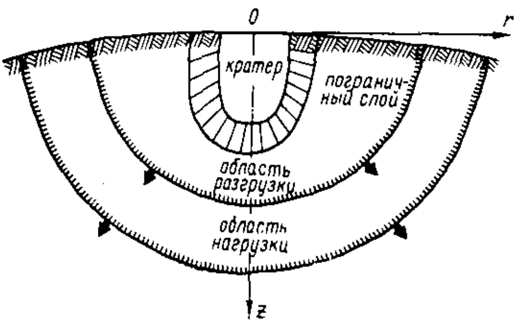

Рис. 68

В момент времени t_p начинается процесс разгрузки, порождающий волну разгрузки, которая распространяется с конечной скоростью b. Внутри области возмущений нагрузки образуется область возмущений разгрузки, ограниченная внешней поверхностью пограничного слоя, частью свободной поверхности преграды и поверхностью переднего фронта волны разгрузки (рис. 68). Напряженное состояние среды в этой области характеризуется тензором напряжений $(\sigma)_{\text{разгр}}$, движение — скоростью частиц $\mathbf{v}_{\text{разгр}}$ и плотностью $\rho_{\text{разгр}}$. Им соответствует тензор кинетических напряжений $(T)_{\text{разгр}}$, который можно представить в виде

$$(T)_{\text{разгр}} = (T)_{\text{нагр}} - \Delta\,(T), \tag{2.5.38}$$

причем тензор $(T)_{\text{нагр}}$ известен, тензор $\Delta(T)$ необходимо построить в соответствии с изложенным в § 4 гл. 1.

Представим искомый тензор $\Delta(T)$ в виде суммы основного $\Delta(T_0)$ и корректирующего $\Delta(T_к)$ тензоров:

$$\Delta(T) = \Delta(T_0) + \Delta(T_к). \qquad (2.5.39)$$

Компоненты основного тензора $\Delta(T_0)$ возьмем в форме общего решения (2.5.20), чем обеспечим выполнение уравнений равновесия и сведем задачу к определению функций кинетических напряжений $\Delta\Pi_\alpha^{(0)}$ из следующих граничных условий: для пограничного слоя

$$\Delta T^{1\beta} = \Delta Q_{(1)}^{1\beta} \text{ при } r = r_0(z);\ \Delta T^{0\beta} = 0 \text{ при } x^0 = 0, \qquad (2.5.40)$$

где

$$\Delta Q_{(1)}^{11} = (\Delta\rho\Delta v^1 v^1)_{r_0} - \Delta p^{11},\ \Delta Q_{(1)}^{12} = 0,$$
$$\Delta Q_{(1)}^{13} = (\Delta\rho\Delta v^1\Delta v^3)_{r_0} - \Delta p^{13},$$
$$\Delta Q_{(1)}^{10} = (\Delta\rho\Delta v^1 v_0^{(r)})_{r_0};$$

для области разгрузки

$$\Delta T^{1\beta} = \Delta T_{\text{п.с}}^{1\beta} \text{ при } r = r_1(z);\ \Delta w_\alpha = 0 \text{ при } r = r_2(z), \qquad (2.5.41)$$
$$\Delta T^{0\beta} = 0 \text{ при } x^0 = 0.$$

Функции кинетических напряжений основного тензора

$$\Delta\Pi_\alpha^{(0)} = (1/2)(1 + \cos\bar{r})\Delta F_{\alpha 1}, \qquad (2.5.42)$$

где $\bar{r} = \pi(r - r_1)/(r_2 - r_1)$ — безразмерная координата. Для пограничного слоя $r_1 = r_0$, $r_2 = r_0 + l$; для области разгрузки

$$r_1 = r_0 + l,\ r_2 = r_0 + l + (b/v_0^{(r)})x^0.$$

Функции $\Delta F_{\alpha 1}$ подчинены уравнениям (2.5.7), граничным условиям (2.5.8) и имеют вид

$$\Delta F_{01} = 2\left[\iint\limits_0^z \Delta Q_{(1)}\,dzdz - \frac{z}{z_2}\iint\limits_0^{z_2} \Delta Q_{(1)}\,dzdz\right],$$

$$\Delta F_{21} = -2\iint\limits_0^{x^0} \Delta Q_{(1)}^{13}\,dx^0 dx^0,\ \Delta F_{11} = 0,\ \Delta F_{31} = 0, \qquad (2.5.43)$$

где

$$\Delta Q_{(1)} = \Delta Q_{(1)}^{11} - \frac{2}{r_1}\int\limits_0^{x^0} \Delta Q_{(1)}^{10}\,dx^0.$$

Подставляя функции (2.5.42) в (2.5.20), приходим к выражениям для компонент тензора $\Delta\ (T_0^{(1)})$ самоуравновешенных частей функций нагрузок; несамоуравновешенным частям функций нагрузок соответствует тензор $\Delta\ (T_0^{(2)})$ с компонентами

$$\Delta T^{11}_{(0)} = (1/2)\left(1+\cos\bar{r}\right)\Delta\overline{Q}^{11}_{(1)},\ \Delta T^{13}_{(0)} = (1/2)\left(1+\cos\bar{r}\right)\Delta\overline{Q}^{13}_{(1)}, \qquad \Delta T^{\,10}_{(0)} = (1/2)\left(1+\cos\bar{r}\right)\Delta\overline{Q}^{10}_{(1)}; \tag{2.5.44}$$

остальные компоненты равны нулю. Полный основной тензор

$$\Delta\ (T_0) = \Delta\ (T_0^{(1)}) + \Delta\ (T_0^{(2)}) \tag{2.5.45}$$

соответствует как пограничному слою, так и области возмущений разгрузки.

Компоненты корректирующего тензора $\Delta\ (T_\text{к})$ представим в виде

$$\Delta T^{\alpha\beta}_{(\text{к})} = \sum_{mpl}\left(\Delta B_{mpl} f^{\alpha\beta}_{(2)} + \Delta C_{mpl} f^{\alpha\beta}_{(3)} \Delta D_{mpl} f^{\alpha\beta}_{(0)}\right). \tag{2.5.46}$$

Здесь $f^{\alpha\beta}_{(\gamma)}\ (mpl)$ $(\gamma = 2,\ 3,\ 0)$ — известные функции цилиндрических координат, параметры ΔB_{mpl}, ..., ΔD_{mpl} подчинены уравнениям

$$\sum_{mpl}\left(\Delta B_{mpl} F_{2\beta} + \Delta C_{mpl} F_{3\beta} + \Delta D_{mpl} F_{0\beta}\right) + \Delta L_\beta = 0. \tag{2.5.47}$$

Коэффициенты $F_{\gamma\beta}\ (mplikq)$ уравнений определяются по следующим формулам: для пограничного слоя

$$F_{\gamma\beta} = (1/(2\eta_p))(F^{(1)}_{\gamma\beta} + \alpha^{(p)} F^{(2)}_{\gamma\beta})$$

для области возмущений разгрузки

$$F_{\gamma\beta} = (1/(2G))(\alpha_1^{(e)} F^{(1)}_{\gamma\beta} + \alpha_2^{(e)} F^{(2)}_{\gamma\beta}); \tag{2.5.48}$$

свободные члены $\Delta L_\beta\ (ikq)$ уравнений определяются по следующим формулам: для пограничного слоя

$$\Delta L_\beta = (1/(2\eta_p))(\Delta L_\beta^{(1)} + \alpha^{(p)}\Delta L_\beta^{(2)} + (2\eta_p/\lambda)\Delta p_0 \Delta L_\beta^{(6)}) - \Delta L_\beta^{(8)},$$

для области возмущений разгрузки

$$\Delta L_\beta = (1/(2G))(\alpha_1^{(e)}\Delta L_\beta^{(1)} + \alpha_2^{(e)}\Delta L_\beta^{(2)}) + \alpha\Delta L_\beta^{(3)} - \Delta L_\beta^{(7)}. \tag{2.5.49}$$

Интегралы $F^{(i)}_{\gamma\beta}$ $(i = 1,\ 2)$ и $\Delta L_\beta^{(k)}$ $(k = 1, ..., 8)$ вычисляются как и в предыдущих случаях, однако компоненты $T^{\alpha\beta}_{(0)}$ необходимо заменить на $\Delta T^{\alpha\beta}_{(0)}$.

Решение системы уравнений (2.5.47) выполняется с помощью процедуры последовательных приближений, изложенной в § 3 гл. 1, аналогично предыдущим случаям. В итоге находим параметры ΔB_{mpl}, ..., ..., ΔD_{mpl}, следовательно, и компоненты корректирующего тензора. Суммируя тензоры $\Delta\ (T_0)$ и $\Delta\ (T_\text{к})$, согласно (2.5.39) получим тензор $\Delta\ (T)$ области возмущений разгрузки.

Таким образом, тензор кинетических рапряжений $(T)_\text{разгр}$ построен. По известному тензору $(T)_\text{разгр}$ и формулам (1.3.49) находим тензор напряжений $(\sigma)_\text{разгр}$, вектор скорости частиц $\mathbf{v}_\text{разгр}$ и плотность среды $\rho_\text{разгр}$ в области возмущений разгрузки.

При внедрении тела в преграду под углом компоненты тензора кинетических напряжений зависят от координаты θ, поэтому при построении тензора (T) для пограничного слоя и области возмущений нагрузки, а также тензора $\Delta\ (T)$ для области возмущений разгрузки следует пользоваться общим решением (2.5.2) уравнений равновесия фиктивного тела.

Функции кинетических напряжений основного тензора $\Pi_{\alpha}^{(0)}$ для пограничного слоя и области возмущений нагрузки определяются граничными условиями в напряжениях. Для пограничного слоя — условиями (2.5.3), для области возмущений нагрузки — (2.5.4); функции нагрузок, входящие в эти условия, таковы:

$$Q_{(1)}^{1i} = (\rho v^1 v^i)_{r_0} - p^{1i},\ Q_{(1)}^{10} = (\rho v^1 v^0)_{r_0},$$
$$Q_{(1)}^{0i} = (\rho v^0 v^i)_0,\ Q_{(1)}^{00} = \rho_0 v^{02},\ (i = 1,\ 2,\ 3). \tag{2.5.50}$$

Координате r соответствуют функции кинетических напряжений (2.5.6), содержащие функции $F_{\alpha 1}$, которые определяются уравнениями

$$\frac{\partial^2 F_{21}}{\partial z^2} + \frac{1}{r_1^2}\frac{\partial^2 F_{21}}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 F_{21}}{\partial x^{0^2}} = A_{11},$$
$$\frac{1}{r_1^2}\frac{\partial^2 F_{01}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 F_{01}}{\partial z^2} = 0, \tag{2.5.51}$$
$$\frac{\partial^2 F_{31}}{\partial \theta \partial z} = B_{11},\ \frac{\partial^2 F_{11}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F_{11}}{\partial x^{0^2}} = C_{11}$$

и граничными условиями:

$$F_{\alpha 1} = 0\ (\alpha = 1,\ 2,\ 3,\ 0)\ \text{при}\ z = z_\gamma,$$
$$F_{11} = 0,\ \frac{\partial F_{11}}{\partial x^0} = 0,\ F_{21} = 0,\ \frac{\partial F_{21}}{\partial x^0} = 0\ \text{при}\ x^0 = 0, \tag{2.5.52}$$

по координате θ функции периодические (период 2π).

Первому из уравнений (2.5.51) и граничным условиям (2.5.52) удовлетворяет функция

$$F_{21} = \sum_{m,n}\frac{1}{\varkappa_{mn}}\int_0^{x^0}\left(A_{11(mn)}^{(1)}(\xi)\cos m\theta + A_{11(mn)}^{(2)}(\xi)\sin m\theta\right)\sin\varkappa_{mn}\times$$
$$\times(\xi - x^0)\,d\xi Z_n(z). \tag{2.5.53}$$

Здесь

$$A_{11(mn)}^{(1)}(x^0) = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{z_\gamma} A_{11}\cos m\theta Z_n(z)\,d\theta dz}{\int_0^{2\pi}\int_0^{z_\gamma}(\cos m\theta Z_n(z))^2\,d\theta dz},$$

$$A_{11(mn)}^{(2)}(x^0) = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{z_\gamma} A_{11}\sin m\theta Z_n(z)\,d\theta dz}{\int_0^{2\pi}\int_0^{z_\gamma}(\sin m\theta Z_n(z))^2\,d\theta dz}$$

— коэффициенты Фурье функции

$$A_{11}=2\left(Q^{13}_{(1)}+\int\limits_{0}^{x^0}\frac{\partial}{\partial z}Q^{10}_{(1)}\,dx^0\right);$$

собственные функции $Z_n\ (z)$ имеют вид

$$Z_n\ (z\varkappa) = -\frac{Z_n^{(2)}\ (z_2\varkappa)}{Z_n^{(1)}\ (z_2\varkappa)}\, Z_n^{(1)}\ (z\varkappa)+Z_n^{(2)}\ (z\varkappa), \qquad (2.5.54)$$

где $Z_n^{(j)}\ (z\varkappa)(j=1,\ 2)$ — частные решения уравнения

$$Z''+(\varkappa^2-m^2/r_1^2)\,Z=0.$$

Этим решениям соответствуют собственные значения $\varkappa_{mn}$, являющиеся корнями характеристического уравнения

$$Z_n^{(1)}\ (0\varkappa)Z_n^{(2)}\ (z_2\varkappa)-Z_n^{(1)}\ (z_2\varkappa)Z_n^{(2)}\ (0\varkappa)=0.$$

Второму из уравнений (2.5.51) и граничным условиям (2.5.52) соответствует функция

$$F_{01}=0. \qquad (2.5.55)$$

Интегрируя третье из уравнений (2.5.51) с учетом граничных условий (2.5.52), получим

$$F_{31}=\int\limits_{0}^{z}\int\limits_{0}^{\theta} r_1\left(r_1\,Q^{11}_{(1)}-2\frac{\partial F_{21}}{\partial z}\right)d\theta dz. \qquad (2.5.56)$$

Четвертому из уравнений (2.5.51) и граничным условиям (2.5.52) удовлетворяет функция

$$F_{11}=\sum_{n}\frac{z_2}{n\pi}\int\limits_{0}^{x^0}C_{11}^{(n)}(\xi)\,\mathrm{sh}\,\frac{n\pi\,(x^0+\xi)}{z_2}\,d\xi\cos n\bar{z}, \qquad (2.5.57)$$

где

$$C_{11}^{(n)}=\int\limits_{0}^{z_2}C_{11}\cos n\bar{z}dz\Bigg/\int\limits_{0}^{z_2}\cos^2 n\bar{z}dz$$

— коэффициенты Фурье функции

$$C_{11}=-r_1\left(2r_1\,Q^{12}_{(1)}+2\int\limits_{0}^{\theta}Q^{11}_{(1)}\,d\theta\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_{21}}{\partial\theta}+4\int\limits_{0}^{\theta}F_{21}\,d\theta\right).$$

Для координаты x^0 функции кинетических напряжений таковы:

$$\Pi_{10}^{(0)} = \frac{1}{2}(1+\cos\bar{x}^0)F_{10} + \frac{1}{2}\int_0^{x^0}(1+\cos\bar{x}^0)\,dx^0\,\Psi_{10},$$

$$\Pi_{20}^{(0)} = \frac{1}{2}\int_0^{x^0}(1+\cos\bar{x}^0)\,dx^0\,\Psi_{20}, \tag{2.5.58}$$

$$\Pi_{30}^{(0)} = \frac{1}{2}\int_0^{x^0}(1+\cos\bar{x}^0)\,dx^0\,\Psi_{30}, \quad \Pi_{00}^{(0)} = 0.$$

Функции F_{10}, Ψ_{i0} ($i = 1, 2, 3$) подчинены уравнениям:

$$\frac{\partial^2 F_{10}}{\partial r\partial\theta} = -r^2 Q_{(1)}^{00}, \quad \frac{\partial\Psi_{10}}{\partial\theta} + r^2\frac{\partial\Psi_{20}}{\partial z} = 2r^2 Q_{(1)}^{01},$$

$$\frac{\partial\Psi_{10}}{\partial r} + \frac{1}{r}\Psi_{10} + \frac{\partial\Psi_{30}}{\partial z} = 2r^2 Q_{(1)}^{02}, \quad r^2\frac{\partial\Psi_{20}}{\partial r} + r\Psi_{20} + \frac{\partial\Psi_{30}}{\partial\theta} = 2r^2 Q_{(1)}^{03}$$

и граничным условиям:

$$F_{10} = 0,\ \Psi_{20} = 0 \text{ при } r = r_\gamma;\ \Psi_{20} = 0,\ \Psi_{30} = 0 \text{ при } z = z_\gamma;$$

по координате θ функции периодические (период 2π). Указанным уравнениям и граничным условиям удовлетворяют функции:

$$F_{10} = -\int_0^\theta\int_{r_1}^r r^2 Q_{(1)}^{00}\,dr\,d\theta, \quad \Psi_{20} = \int_0^z \psi\,dz, \quad \Psi_{10} = \int_0^\theta B_{10}\,d\theta, \tag{2.5.59}$$

$$\Psi_{30} = \int_0^z\left[2r^2 Q_{(1)}^{02} - \int_0^\theta\left(\frac{\partial B_{10}}{\partial r} + \frac{1}{r}B_{10}\right)d\theta\right]dz,$$

где $B_{10} = r^2(2Q_{(1)}^{01} - \psi)$.

Функция ψ, входящая в формулы (2.5.59), равна

$$\psi = \left(\frac{r_1}{r}\right)^2\int_{r_1}^r\left[\frac{3}{r}Q_{(1)}^{01} + \left(\frac{\partial Q_{(1)}^{01}}{\partial r} - \frac{\partial Q_{(1)}^{02}}{\partial\theta} + \frac{\partial Q_{(1)}^{03}}{\partial z}\right)\right]\left(\frac{r}{r_1}\right)^2 dr. \tag{2.5.60}$$

Следует отметить, что все функции нагрузок должны быть самоуравновешенными.

Полные функции кинетических напряжений основного тензора имеют следующий вид:

$$\Pi_1^{(0)} = \frac{1}{2}(1+\cos\bar{r})F_{11} + \frac{1}{2}(1+\cos\bar{x}^0)F_{10} + \frac{1}{2}\int_0^{x^0}(1+\cos\bar{x}^0)\,dx^0\,\Psi_{10},$$

$$\Pi_2^{(0)} = \frac{1}{2}(1+\cos\bar{r})F_{21} + \frac{1}{2}\int_0^{x^0}(1+\cos\bar{x}^0)\,dx^0\,\Psi_{20}, \tag{2.5.61}$$

$$\Pi_3^{(0)} = \frac{1}{2}(1+\cos\bar{r})F_{31} + \frac{1}{2}\int_0^{x^0}(1+\cos\bar{x}^0)\,dx^0\,\Psi_{30}.$$

Подставляя их в (2.5.2), определяем компоненты тензора $(T_0^{(1)})$ для самоуравновешенных частей функций нагрузок, которые находим по следующим формулам: для координаты r

$$\widetilde{Q}^{\alpha 1}_{(\gamma)} = A^{\alpha 1}_{(\gamma)}(\theta) Z(z) X(x^0), \tag{2.5.62}$$

для координаты x^0

$$\widetilde{Q}^{\alpha 0}_{(\gamma)} = A^{\alpha 0}_{(\gamma)}(\theta) R(r) Z(z),$$

где

$$A^{\alpha 1}_{(\gamma)} = \frac{\int\limits_0^{z_2}\int\limits_0^{x_2^0} Q^{\alpha 1}_{(\gamma)}\, dz dx^0}{\int\limits_0^{x_2^0}\int\limits_0^{z_2} dz dx^0}, \quad A^{\alpha 0}_{(\gamma)} = \frac{\int\limits_0^{z_2}\int\limits_{r_1}^{r_2} Q^{\alpha 0}_{(\gamma)}\, dr dz}{\int\limits_0^{z_2}\int\limits_{r_1}^{r_2} dr dz},$$

причем функции $R(r)$, $Z(z)$, $X(x^0)$ должны удовлетворять условиям

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} r^2 R(r)\, dr = 0, \quad \int\limits_0^{z_0} Z(z)\, dz = 0, \quad \int\limits_0^{x_2^0} X(x^0)\, dx^0 = 0.$$

Несамоуравновешенным частям функций нагрузок $\overline{Q}^{\alpha\beta}_{(\gamma)} = Q^{\alpha\beta}_{(\gamma)} - \widetilde{Q}^{\alpha\beta}_{(\gamma)}$ соответствует тензор $(T_0^{(2)})$, компоненты которого:

$$\begin{gathered} T^{11}_{(0)} = (1/2)(1 + \cos\bar{r})\,\overline{Q}^{11}_{(1)}, \quad T^{00}_{(0)} = (1/2)(1 + \cos\bar{x}^0)\,\overline{Q}^{00}_{(1)}, \\ T^{12}_{(0)} = (1/2)(1 + \cos\bar{r})\,\overline{Q}^{12}_{(1)}, \quad T^{13}_{(0)} = (1/2)(1 + \cos\bar{r})\,\overline{Q}^{13}_{(1)}, \\ T^{10}_{(0)} = (1/2)(1 + \cos\bar{r})\,\overline{Q}^{10}_{(1)} + (1/2)(1 + \cos\bar{x}^0)\,\overline{Q}^{01}_{(1)}, \\ T^{20}_{(0)} = (1/2)(1 + \cos\bar{x}^0)\,\overline{Q}^{02}_{(1)}, \quad T^{30}_{(0)} = (1/2)(1 + \cos\bar{x}^0)\,\overline{Q}^{03}_{(1)}. \end{gathered} \tag{2.5.63}$$

Основной тензор равен сумме тензоров:

$$(T_0) = (T_0^{(1)}) + (T_0^{(2)}) \tag{2.5.64}$$

и относится как к пограничному слою, так и к области возмущений нагрузки.

Компоненты корректирующего тензора

$$T^{\alpha\beta}_{(\kappa)} = \sum_{mnpl}(A_{mnpl} f^{\alpha\beta}_{(1)} + B_{mnpl} f^{\alpha\beta}_{(2)} + B_{mnpl} f^{\alpha\beta}_{(3)} + D_{mnpl} f^{\alpha\beta}_{(0)}); \tag{2.5.65}$$

функции $f^{\alpha\beta}_{(\gamma)}(mnpl)$ известны и записаны в цилиндрических координатах параметры $A_{mnpl}, \ldots, D_{mnpl}$ определяются в результате решения системы алгебраических уравнений

$$\sum_{mnpl}(A_{mnpl} F_{1\beta} + B_{mnpl} F_{2\beta} + C_{mnpl} F_{3\beta} + D_{mnpl} F_{0\beta}) + L_\beta = 0. \tag{2.5.66}$$

Коэффициенты $F_{\gamma\beta}$ $(mnplijkq)$ уравнений вычисляются по следующим формулам: для пограничного слоя, где среда вязкопластическая,

$$F_{\gamma\beta} = \alpha_1^{(b)} F_{\gamma\beta}^{(1)} + \alpha_2^{(b)} F_{\gamma\beta}^{(2)}; \qquad (2.5.67')$$

для области возмущений нагрузки упругопластической среды

$$F_{\gamma\beta} = (1/(2G))\,(\alpha_1 F_{\gamma\beta}^{(1)} + \alpha_2 F_{\gamma\beta}^{(2)}); \qquad (2.5.67'')$$

для области возмущений нагрузки вязкоупругой среды

$$F_{\gamma\beta} = (1/2G))\,(\alpha_1^{(e)} F_{\gamma\beta}^{(1)} + \alpha_2^{(e)} F_{\gamma\beta}^{(2)}) + (1/a_{cq})\left(F_{\gamma\beta}^{(3)} + \frac{1}{3} F_{\gamma\beta}^{(4)}\right). \qquad (2.5.67''')$$

Интегралы $F_{\gamma\beta}^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ имеют вид:

$$F_{\gamma\beta}^{(1)} = \frac{2x_2^0}{\pi^3} \int\int_0^{\pi}\int\int A_{\gamma\beta}^{(1)}\left(r_1 + \frac{r_2 - r_1}{\pi}\bar{r}\right)(r_2 - r_1)\, z_2\, d\bar{r}\, d\bar{\theta}\, d\bar{z}\, d\bar{x}^0,$$

$$F_{\gamma\beta}^{(2)} = \frac{2x_2^0}{\pi^3} \int\int_0^{\pi}\int\int A_{\gamma\beta}^{(2)}\left(r_1 + \frac{r_2 - r_1}{\pi}\bar{r}\right)(r_2 - r_1)\, z_2\, d\bar{r}\, d\bar{\theta}\, d\bar{z}\, d\bar{x}^0,$$

$$F_{\gamma\beta}^{(3)} = \frac{2x_2^{0\,2}}{\pi^4} \int\int\int_0^{\pi}\int_0^{\bar{x}^0}\tilde{R}(\bar{x}^0\,\bar{y}^0)\, A_{\gamma\beta}^{(1)}(\bar{x}^0\,\bar{y}^0)\, d\bar{y}^0 \left(r_1 + \frac{r_2 - r_1}{\pi}\bar{r}\right) \times \qquad (2.5.68)$$

$$\times (r_2 - r_1)\, z_2\, d\bar{r}\, d\bar{\theta}\, d\bar{z}\, d\bar{x}^0,$$

$$F_{\gamma\beta}^{(4)} = \frac{2x_2^{0\,2}}{\pi^4} \int\int_0^{\pi}\int\int\int_0^{\bar{x}^0}(\tilde{R}_1(\bar{x}^0\,\bar{y}^0) - \tilde{R}(\bar{x}^0\,\bar{y}^0))\, A_{\gamma\beta}^{(2)}(\bar{x}^0\,\bar{y}^0)\, d\bar{y}^0 \times$$

$$\times \left(r_1 + \frac{r_2 - r_1}{\pi}\bar{r}\right)(r_2 - r_1)\, z_2\, d\bar{r}\, d\bar{\theta}\, d\bar{z}\, d\bar{x};$$

их подынтегральные выражения $A_{\gamma\beta}^{(1)}$, $A_{\gamma\beta}^{(2)}$ приведены во второй части книги.

Свободные члены L_β $(ijkq)$ уравнений вычисляются по следующим формулам: для пограничного слоя, где среда вязкопластическая,

$$L_\beta = \alpha_1^{(b)} L_\beta^{(1)} + \alpha_2^{(b)} L_\beta^{(2)} + \alpha L_\beta^{(3)} + (p_0/\lambda) L_\beta^{(6)}; \qquad (2.5.69)$$

для области возмущений нагрузки упругопластической среды

$$L_\beta = (1/(2G))(\alpha_1 L_\beta^{(1)} + \alpha_2 L_\beta^{(2)}) + \alpha L_\beta^{(3)} - L_\beta^{(7)}; \qquad (2.5.69')$$

для области возмущений нагрузки вязкоупругой среды

$$L_\beta = (1/(2G))(\alpha_1^{(e)} L_\beta^{(1)} + \alpha_2^{(e)} L_\beta^{(2)}) + \alpha L_\beta^{(3)} + (1/a_{cq})(L_\beta^{(4)} + L_\beta^{(5)}/3) - L_\beta^{(7)}. \qquad (2.5.69'')$$

Интегралы $L_\beta^{(k)}$ ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$) имеют вид:

$$L_\beta^{(1)} = \frac{2x_2^0}{\pi^3} \int \int_0^\pi \int \int B_\beta^{(1)} \left(r_1 + \frac{r_2 - r_1}{\pi} \bar{r} \right) (r_2 - r_1) z_2 \, d\bar{r} d\bar{\theta} d\bar{z} d\bar{x}^0,$$

$$L_\beta^{(2)} = \frac{2x_2^0}{\pi^3} \int \int_0^\pi \int \int B_\beta^{(2)} \left(r_1 + \frac{r_2 - r_1}{\pi} \bar{r} \right) (r_2 - r_1) z_2 \, d\bar{r} d\bar{\theta} d\bar{z} d\bar{x}^0,$$

$$L_\beta^{(3)} = \frac{2x_2^0}{\pi^3} \int \int_0^\pi \int \int B_\beta^{(3)} \left(r_1 + \frac{r_2 - r_1}{\pi} \bar{r} \right) (r_2 - r_1) z_2 \, d\bar{r} d\bar{\theta} d\bar{z} d\bar{x}^0,$$

$$L_\beta^{(4)} = \frac{2x_2^{0\,2}}{\pi^4} \int \int_0^\pi \int \int \int_0^{\bar{x}^0} \tilde{R} (\bar{x}^0 \bar{y}^0) B_\beta^{(1)} (\bar{x}^0 \bar{y}^0) \, d\bar{y}^0 \left(r_1 + \frac{r_2 - r_1}{\pi} \bar{r} \right) \times$$
$$\times (r_2 - r_1) z_2 \, d\bar{r} d\bar{\theta} d\bar{z} d\bar{x}^0, \tag{2.5.70}$$

$$L_\beta^{(5)} = \frac{2x_2^{0\,2}}{\pi^4} \int \int_0^\pi \int \int \int_0^{\bar{x}^0} (\tilde{R}_1 (\bar{x}^0 \bar{y}^0) - R(\bar{x}^0 \bar{y}^0)) B_\beta^{(2)} (\bar{x}^0 \bar{y}^0) \, d\bar{y}^0 \times$$
$$\times \left(r_1 + \frac{r_2 - r_1}{\pi} \bar{r} \right) (r_2 - r_1) z_2 \, d\bar{r} d\bar{\theta} d\bar{z} d\bar{x}^0,$$

$$L_\beta^{(6)} = \frac{2x_2^0}{\pi^3} \int \int_0^\pi \int \int B_\beta^{(6)} \left(r_1 + \frac{r_2 - r_1}{\pi} \bar{r} \right) (r_2 - r_1) z_2 \, d\bar{z} d\bar{\theta} d\bar{z} d\bar{x}^0,$$

$$L_\beta^{(7)} = 2 \, \frac{z_2}{\pi} \int_0^\pi \int B_\beta^{(7)} \, r_2 (\bar{z}) \, d\bar{\theta} d\bar{z}.$$

Их подынтегральные выражения $B_\beta^{(k)}$ приведены во второй части книги; учитываются выражения для функций $f_{(\gamma)}^{\alpha\beta}$ ($mnpl$) и компонент основного тензора $T_{(0)}^{\alpha\beta}$.

Решение уравнений (2.5.66) строится с помощью процедуры последовательных приближений, изложенной в гл. 1. В первом приближении, полагая $m = 1$, $n = 1$, $p = 1$, $l = 1$, $i = 1$, $j = 1$, $k = 1$, $q = 1$, получим четыре уравнения с четырьмя неизвестными, решая которые, находим параметры A_{1111}, ..., D_{1111}, следовательно, и компоненты корректирующего тензора. Суммируя тензоры (T_o) и ($T_к$), получим тензор кинетических напряжений (T) в первом приближении. Последующие приближения строятся аналогично изложенному.

Таким образом, можно определить тензор кинетических напряжений (T) для пограничного слоя и области возмущений нагрузки с любой заданной степенью точности.

Для области возмущений разгрузки тензор $\Delta(T)$ строится в цилиндрических координатах как и в случае области возмущений нагрузки. Функции нагрузок $\Delta Q_{(\gamma)}^{\alpha\beta}$ таковы: для пограничного слоя

$$\Delta Q_{(1)}^{1l} = (\Delta\rho\Delta v^1\Delta v^l)_{r_0} - \Delta p^{1l},\ \Delta Q_{(1)}^{10} = (\Delta\rho\Delta v^1 v_0^{(r)})_{r_0}; \qquad (2.5.71)$$

для области возмущений разгрузки

$$\Delta Q_{(1)}^{1\beta} = \Delta T_{\text{п.с}}^{\alpha\beta}(S). \qquad (2.5.71')$$

Функции кинетических напряжений основного тензора равны

$$\Delta \text{П}_\alpha^{(0)} = (1/2)(1 + \cos \bar{r})\Delta F_{\alpha 1}. \qquad (2.5.72)$$

Функции $\Delta F_{\alpha 1}$ находим по формулам (2.5.53), (2.5.55) — (2.5.57), заменяя функции нагрузок $Q_{(1)}^{1\beta}$ на $\Delta Q_{(1)}^{1\beta}$, которые, в свою очередь, определяются по формулам (2.5.71). В результате выполнения известных операций в указанном ранее порядке определяем основной тензор $\Delta(T_0)$.

Корректирующий тензор $\Delta(T_к)$ имеет компоненты

$$\Delta T_{(к)}^{\alpha\beta} = \sum_{mnpl} \left(\Delta A_{mnpl} f_{(1)}^{\alpha\beta} + \Delta B_{mnpl} f_{(2)}^{\alpha\beta} + \Delta C_{mnpl} f_{(3)}^{\alpha\beta} + \Delta D_{mnpl} f_{(0)}^{\alpha\beta}\right), \qquad (2.5.73)$$

где $f_{(\gamma)}^{\alpha\beta}(mnpl)$ — известные функции цилиндрических координат, параметры $\Delta A_{mnpl}, \ldots, \Delta D_{mnpl}$ удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{mnpl} (\Delta A_{mnpl} F_{1\beta} + \Delta B_{mnpl} F_{2\beta} + \Delta C_{mnpl} F_{3\beta} + \Delta D_{mnpl} F_{0\beta}) + \Delta L_\beta = 0. \qquad (2,5.74)$$

Коэффициенты $F_{\gamma\beta}(mnplijkq)$ уравнений определяются по следующим формулам: для пограничного слоя

$$F_{\gamma\beta} = (1/(2\eta_p))\,(F_{\gamma\beta}^{(1)} + \alpha^{(p)}\ F_{\gamma\beta}^{(2)}); \qquad (2.5.75)$$

для области возмущений разгрузки

$$F_{\gamma\beta} = (1/(2G))(\alpha_1^{(e)} F_{\gamma\beta}^{(1)} + \alpha_2^{(e)} F_{\gamma\beta}^{(2)}); \qquad (2.5.75')$$

интегралы $F_{\gamma\beta}^{(1)}$ и $F_{\gamma\beta}^{(2)}$ вычисляются по формулам (2.5.68).

Свободные члены $\Delta L_\beta(ijkq)$ уравнений определяются по формулам для пограничного слоя

$$\Delta L_\beta = (1/2\eta_p))\left(\Delta L_\beta^{(1)} + \alpha^{(p)}\,\Delta L_\beta^{(2)} + \frac{2\eta_p}{\lambda}\Delta p_0\,\Delta L_\beta^{(6)}\right) - \Delta L_\beta^{(8)}, \qquad (2.5.76)$$

для области возмущений разгрузки

$$\Delta L_\beta = (1/(2G))\,(\alpha_1^{(e)}\Delta L_\beta^{(1)} + \alpha_2^{(e)}\Delta L_\beta^{(2)}) + \alpha\Delta L_\beta^{(3)} - \Delta L_\beta^{(7)} \qquad (2.5.76')$$

интегралы $\Delta L_\beta^{(1)}, \ldots, \Delta L_\beta^{(8)}$, входящие в (2.5.76), вычисляются по формулам (2.5.70), причем $T_{(0)}^{\alpha\beta}$ заменяется на $\Delta T_{(0)}^{\alpha\beta}$. Решение системы уравнений (2.5.74) строится с помощью процедуры последовательных приближений точно так же, как в предыдущем случае для области возмущений нагрузки.

В итоге находим параметры ΔA_{mnpl}, ..., ΔD_{mnpl}, следовательно, и компоненты корректирующего тензора. Сумма тензоров $(\Delta T_о) + \Delta (T_к)$ есть тензор $\Delta (T)$. По формуле (2.5.38) находим тензор кинетических напряжений $T_{разгр}$ для области возмущений разгрузки и пограничного слоя при разгрузке в случае внедрения тела в преграду под углом.

Если преграда конечной толщины h, то при достижении волной нагрузки тыльной поверхности в момент $t_{от} = h/a$ происходит явление отражения и зарождается отраженная волна нагрузки, которая распространяется со скоростью a в обратном направлении. Образуется

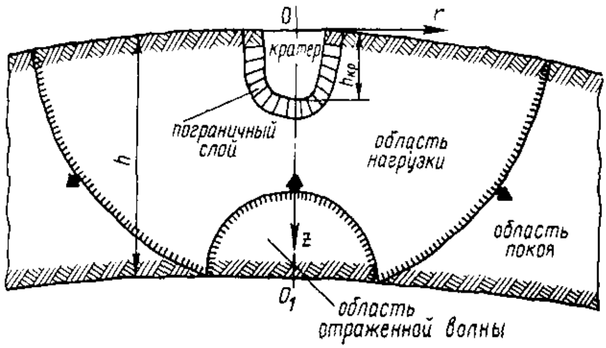

Рис. 69

область возмущений отраженной волны, расширяющаяся с течением времени. Она ограничена тыльной поверхностью преграды, где наблюдается отражение прямой волны, и поверхностью переднего фронта отраженной волны (рис. 69). Напряженное состояние среды в этой области характеризуется тензором напряжений $(\sigma)_{отр}$, движение — вектором скорости частиц $\mathbf{v}_{отр}$ и плотностью среды $\rho_{отр}$. Перечисленным характеристикам соответствует тензор кинетических напряжений отраженной волны нагрузки

$$(T)_{отр} = (T)_{нагр} - \Delta_1 (T). \tag{2.5.77}$$

Здесь $(T)_{нагр}$ — известный тензор кинетических напряжений, соответствующий прямой волне нагрузки; $\Delta_1 (T)$ — тензор, который необходимо построить, исходя из общих соображений, изложенных в § 5 гл.1.

Построение тензора $\Delta_1 (T)$ в сферических координатах проведено в § 3 данной главы, однако представляется целесообразным тензор $\Delta_1 (T)$ построить в цилиндрических координатах, так как в этом случае сохраняется единая система координат при исследовании напряженного состояния преграды в течение всего процесса внедрения тела.

Представим тензор $\Delta_1(T)$ в виде суммы основного и корректирующего тензоров:

$$\Delta_1 (T) = \Delta_1 (T_о) + \Delta_1 (T_к). \tag{2.5.78}$$

Компоненты этих тензоров выразим через функции кинетических напряжений с помощью общего решения (2.5.2) или (2.5.20), если искомые величины не зависят от координаты θ. Функции кинетических напряжений $\Delta_1\Pi_\alpha (\alpha = 1, 2, 3, 0)$ будем искать в форме

$$\Delta_1\Pi_\alpha = \Delta_1\Pi_\alpha^{(0)} + \Delta_1\Pi_\alpha^{(k)}. \tag{2.5.79}$$

Слагаемые $\Delta_1\Pi_\alpha^{(0)}$ — функции кинетических напряжений основного тензора, которые определяются граничными условиями в напряжениях: при $z = h$

$$\Delta_1 T^{3\beta}(S) = \Delta_1 Q_{(1)}^{3\beta}, \; \Delta_1 Q_{(1)}^{3\beta} = T_{np}^{3\beta}(S); \tag{2.5.80}$$

слагаемые $\Delta_1\Pi_\alpha^{(k)}$ являются функциями кинетических напряжений корректирующего тензора, которые определяются вариационным уравнением (1.5.4), нулевыми граничными условиями в напряжениях (1.5.9), граничными условиями в перемещениях:

$$\Delta_1 w^\alpha (S) = 0 \text{ при } r = r_2, \tag{2.5.81}$$

где $r_2 = \sqrt{(ax^0/a_{cq})^2 - (h - z)^2}$ — уравнение поверхности переднего фронта отраженной волны нагрузки.

Функции кинетических напряжений основного тензора $\Delta_1\Pi_\alpha^{(0)}$ запишем в виде

$$\Delta_1 \Pi_\alpha^{(0)} = \frac{1}{2}(1 + \cos\bar{z})\,\Delta_1 F_{\alpha 3}, \tag{2.5.82}$$

где $\bar{z} = \pi z/z_2$ — безразмерная координата, причем z отсчитывается от поверхности отражения. В этом случае функции $\Delta_1 F_{\alpha 3}$ должны удовлетворять уравнениям:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2}{\partial r^2}\Delta_1 F_{03} + (1/r^2)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\Delta_1 F_{03} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Delta_1 F_{03} = 0,\\
\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial\theta}\Delta_1 F_{13} = r^2\Delta_1 Q_{(1)}^{33},\\
r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\Delta_1 F_{23} + 3r\frac{\partial}{\partial r}\Delta_1 F_{23} + \Delta_1 F_{23} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\Delta_1 F_{23} - r^2\frac{\partial^2}{\partial x^{0 2}}\Delta_1 F_{23} = \Delta_1 A_{31},\\
r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\Delta_1 F_{33} - r\frac{\partial}{\partial r}\Delta_1 F_{33} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\Delta_1 F_{33} - r^2\frac{\partial^2}{\partial x^{0 2}}\Delta_1 F_{33} = r^2\Delta_1 B_{31},
\end{gathered} \tag{2.5.83}$$

где

$$\Delta_1 A_{31} = 2\left[r^2\Delta_1 Q_{(1)}^{31} + \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\int_0^{x_0}\Delta_1 Q_{(1)}^{30}\,dx^0\right)\right],$$

$$\Delta_1 B_{31} = 2\left[r^2\Delta_1 Q_{(1)}^{32} + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\int_0^{x_0}\Delta_1 Q_{(1)}^{30}\,dx^0\right)\right],$$

и следующим граничным условиям:

$$\Delta_1 F_{\alpha 3}=0 \text{ при } r=r_\gamma,$$

$$\Delta_1 F_{23}=0,\ \frac{\partial \Delta_1 F_{23}}{\partial x^0}=0,\ \Delta_1 F_{33}=0,\ \frac{\partial \Delta_1 F_{33}}{\partial x^0}=0 \text{ при } x^0=0, \tag{2.5.84}$$

по координате θ функции периодические (период 2π).

Первому из уравнений (2.5.83) и граничным условиям (2.5.84) удовлетворяет функция

$$\Delta_1 F_{03}=0. \tag{2.5.85}$$

Интегрируя второе из уравнений (2.5.83) с учетом граничных условий (2.5.84), находим

$$\Delta_1 F_{13}=\int_0^\theta \int_0^r r^2 \Delta_1 Q_{(1)}^{33}\, dr d\theta. \tag{2.5.86}$$

Третьему из уравнений (2.5.83) и граничным условиям (2.5.84) соответствует функция

$$\Delta_1 F_{23}=\sum_{p,\,m} \frac{1}{\varkappa_{pm}} \int_0^{x^0} \left(\Delta_1 A_{31\,(pm)}^{(1)}(\xi)\cos m\theta+\right.$$

$$\left.+\Delta_1 A_{31\,(pm)}^{(2)}(\xi)\sin m\theta\right)\sin \varkappa_{pm}(\xi-x^0)\,d\xi\,\frac{1}{r}J_m(r\varkappa_p), \tag{2.5.87}$$

где

$$\Delta_1 A_{31\,(pm)}^{(1)}=\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{r_2}\frac{1}{r^3}\Delta_1 A_{31} J_m(r\varkappa_p)\cos m\theta\, dr d\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^{r_2}\left(\frac{1}{r}J_m(r\varkappa_p)\cos m\theta\right)^2 dr d\theta},$$

$$\Delta_1 A_{31\,(pm)}^{(2)}=\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{r_2}\frac{1}{r^3}\Delta_1 A_{31} J_m(r\varkappa_p)\sin m\theta\, dr d\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^{r_2}\left(\frac{1}{r}J_m(r\varkappa_p)\sin m\theta\right)^2 dr d\theta}$$

— коэффициенты Фурье функции $\Delta_1 A_{31}$; $\varkappa_{pm}$ — корни характеристического уравнения $J_m(r_2\varkappa_p)=0$.

Четвертому из уравнений (2.5.83) и граничным условиям (2.5.84) удовлетворяет функция

$$\Delta_1 F_{33}=\sum_{p,\,m} \frac{1}{\omega_{pm}} \int_0^{x^0} \left(\Delta_1 B_{31\,(pm)}^{(1)}(\xi)\cos m\theta+\right.$$

$$\left.+\Delta_1 B_{31\,(pm)}^{(2)}(\xi)\sin m\theta\right)\sin \omega_{pm}(\xi-x^0)\,d\xi\, r J_\nu(r\omega_{pm}), \tag{2.5.88}$$

где

$$\Delta_1 B_{31\,(pm)}^{(1)} = \frac{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{r_2} \Delta_1 B_{31}\, r J_\nu (r\omega_{pm}) \cos m\theta\, dr d\theta}{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{r_2} (r J_\nu (r\omega_{pm}) \cos m\theta)^2\, dr d\theta},$$

$$\Delta_1 B_{31\,(pm)}^{(1)} = \frac{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{r_2} \Delta_1 B_{31}\, r J_\nu (r\omega_{pm}) \sin m\theta\, dr d\theta}{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{r_2} (r J_\nu (r\omega_{pm}) \sin m\theta)^2\, dr d\theta}$$

— коэффициенты Фурье функции $\Delta_1 B_{31}$; ω_{pm} — корни характеристического уравнения $J_\nu (r_2\omega_{pm}) = 0$, $\nu = \sqrt{1+m^2}$.

Следует отметить, что функции нагрузок $\Delta_1 Q_{(1)}^{3\beta}$ должны удовлетворять условиям самоуравновешенности.

Подставляя (2.5.82) в общее решение (2.5.2), определяем компоненты тензора $\Delta_1 (T_0^{(1)})$ для самоуравновешенных частей функций нагрузок:

$$\Delta_1 \tilde{Q}_{(1)}^{3\beta} = \frac{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{r_2} r\Delta_1 Q_{(1)}^{3\beta}\, dr d\theta}{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{r_2} r dr d\theta} \sum_{m,n} \cos m\bar{r} \cos n\bar{\theta}. \qquad (2.5.89)$$

Несамоуравновешенным частям функций нагрузок

$$\Delta_1 \bar{Q}_{(1)}^{3\beta} = \Delta_1 Q_{(1)}^{3\beta} - \Delta_1 \tilde{Q}_{(1)}^{3\beta} \qquad (2.5.90)$$

соответствует тензор $\Delta_1 (T_0^{(2)})$ с компонентами

$$\Delta_1 T_{(0)}^{13} = (1/2)(1+\cos\bar{z})\,\Delta_1 \bar{Q}_{(1)}^{31},\quad \Delta_1 T_{(0)}^{23} = (1/2)(1+\cos\bar{z})\,\Delta_1 \bar{Q}_{(1)}^{32}, \qquad (2.5.91)$$

$$\Delta_1 T_{(0)}^{33} = (1/2)(1+\cos\bar{z})\,\Delta_1 \bar{Q}_{(1)}^{33},\quad \Delta_1 T_{(0)}^{30} = (1/2)(1+\cos\bar{z})\,\Delta_1 \bar{Q}_{(1)}^{30},$$

остальные компоненты равны нулю. Основной тензор

$$\Delta_1 (T_0) = \Delta_1 (T_0^{(1)}) + \Delta_1 (T_0^{(2)}). \qquad (2.5.92)$$

Компоненты корректирующего тензора

$$\Delta_1 T_{(\kappa)}^{\alpha\beta} = \sum_{mnpl} (\Delta_1 A_{mnpl} f_{(1)}^{\alpha\beta} + \Delta_1 A_{mnpl} f_{(2)}^{\alpha\beta} + \Delta_1 C_{mnpl} f_{(3)}^{\alpha\beta} + \Delta_1 D_{mnpl} f_{(0)}^{\alpha\beta}). \qquad (2.5.93)$$

Функции $f_{(\gamma)}^{\alpha\beta}(mnpl)$ известны и записаны в цилиндрических координатах, параметры $\Delta_1 A_{mnpl}, \ldots, \Delta_1 D_{mnpl}$ определяются в результате решения системы алгебраических уравнений

$$\sum_{mnpl} (\Delta_1 A_{mnpl} F_{1\beta} + \Delta_1 B_{mnpl} F_{2\beta} + \Delta_1 C_{mnpl} F_{3\beta} + \\ + \Delta_1 D_{mnpl} F_{0\beta}) + \Delta_1 L_\beta = 0. \tag{2.5.94}$$

Коэффициенты $F_{\gamma\beta}(mnplijkq)$ уравнений вычисляются по формулам (2.5.67), их свободные члены $\Delta_1 L_\beta (ijkq)$ — по формулам (2.5.69), при этом учитываются физико-механические свойства среды и $T_{(0)}^{\alpha\beta}$ заменяется на $\Delta_1 T_{(0)}^{\alpha\beta}$.

Решение уравнений (2.5.94) строим с помощью процедуры последовательных приближений, изложенной в § 3 гл. 1. В результате находим параметры $\Delta_1 A_{mnpl}, \ldots, \Delta_1 D_{mnpl}$, следовательно, и компоненты корректирующего тензора $\Delta_1 (T_к)$.

Суммируя тензоры $\Delta_1 (T_0)$ и $\Delta_1 (T_к)$, согласно (2.5.78) определим тензор $\Delta_1 (T)$, затем по формуле (2.5.77) находим тензор кинетических напряжений $(T)_{отр}$ для области возмущений отраженной волны нагрузки. Зная тензор $(T)_{отр}$ и используя формулы, приведенные в § 3 гл. 1, находим тензор напряжений $(\sigma)_{отр}$, вектор скорости частиц $v_{отр}$ и плотность $\rho_{отр}$ среды в области возмущений отраженной волны нагрузки.

Характеристики напряженного состояния и движения среды в области возмущений отраженной волны разгрузки и других областях возмущений строятся аналогично изложенному.

Таким образом, выполняя последовательно рассмотренный цикл вычислений, можно найти тензор напряжений, вектор скорости частиц, плотность среды в любой момент времени при распространении возмущений в преграде.

Оценка интерференции прямой и отраженной волн напряжений и откольного явления на тыльной поверхности преграды производится так же, как указано в § 3 настоящей главы.

Глава 3
ВОЛНЫ НАПРЯЖЕНИЙ В ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛАХ

В настоящей главе приведены решения задач о распространении волн напряжений, возникающих при ударе и взрыве большой мощности в телах конечных размеров, физико-механические свойства которых наиболее близки к реальным (это упругие, вязкоупругие, упругопластические или вязкоупругопластические тела), с учетом механических и тепловых эффектов. Решения задач, как правило, проанализированы и представлены в форме, допускающей использование ЭВМ.

§ 1. Удар по тонкому стержню

Рассмотрим задачу о распределении напряжений в тонком стержне при ударе.

Тонким стержнем называется тело, поперечные размеры которого малы по сравнению с его длиной. Удар имитируется приложенным к стержню давлением p, которое является функцией координат и времени: $p = p(x, t)$. В зависимости от места приложения давления к стержню и характера его изменения удар может быть *продольным* или *поперечным*. Продольный и поперечный удары целесообразно рассмотреть независимо друг от друга.

Продольным называется удар, являющийся результатом приложения торцового давления, изменяющегося во времени по известному закону $p(t)$. Частицы стержня в этом случае перемещаются в осевом направлении (рис. 70).

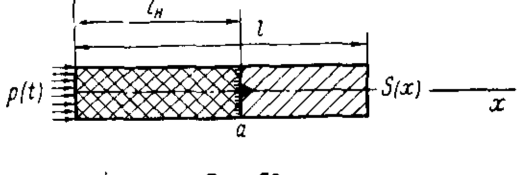

Рис. 70

В момент приложения давления t_0 зарождается волна напряжений, которая распространяется вдоль стержня с конечной скоростью a. При этом образуется область возмущений, где стержень находится в напряженно-деформированном состоянии. Этому состоянию соответствует напряжение σ и деформация

$$e = \partial u/\partial x, \tag{3.1.1}$$

где u — осевое перемещение частиц. Движение частиц характеризуется скоростью v, которой соответствует скорость деформаций

$$\dot{e} = \partial v / \partial x \tag{3.1.2}$$

и плотность материала ρ.

Основными характеристиками напряженного состояния и движения частиц стержня, подлежащими определению, являются напряжение σ, скорость v и плотность материала ρ.

Рассмотрим элемент стержня dx с площадью поперечного сечения S и координатой x. На левом торце его действует сила σS, на правом — сила $\sigma S + \frac{\partial}{\partial x}(\sigma S) dx$. По второму закону Ньютона

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sigma S) = \rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{3.1.3}$$

для стержня постоянного сечения $S = \mathrm{const}$, следовательно,

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{3.1.3'}$$

Если стержень упругий, то отношение $\sigma / e = E$ постоянно и равенство (3.1.3') можно записать в виде

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{3.1.4}$$

где $a^2 = E/\rho$ — скорость распространения волны напряжений вдоль стержня. Следует отметить, что уравнение (3.1.4) приближенное и применимо к тонким стержням любой формы поперечного сечения. Приближенность уравнения состоит в предположении, что плоские поперечные сечения стержня остаются плоскими при прохождении волны напряжений, а напряжение равномерно распределено по каждому поперечному сечению. Продольные перемещения сопровождаются поперечными, при этом отношение соответствующих поперечных и продольных деформаций равно коэффициенту Пуассона ν; это приводит к неравномерному распределению напряжений по поперечному сечению стержня, так что плоские поперечные сечения искажаются.

Общее решение уравнения (3.1.4) можно представить в виде

$$u = f_1(at - x) + f_2(at + x), \tag{3.1.5}$$

где f_j — продольные функции, которые определяются начальными условиями, причем f_1 соответствует волне, распространяющейся в направлении возрастания x, f_2 — волне, распространяющейся в противоположном направлении. Пусть $f_1 = 0$, тогда $u = f_2(at + x)$; дифференцируя по x и t, получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_2'(at + x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a f_2'(at + x),$$

следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial u}{\partial x},$$

но $\partial u/\partial x = e = \sigma/E$, так что имеем

$$\sigma = \rho a \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{3.1.6}$$

т. е. напряжение в любой точке стержня связано со скоростью частицы $v = \partial u/\partial t$ линейной зависимостью с коэффициентом пропорциональности ρa.

В момент $t = l/a$ достижения волной напряжений правого торца стержня происходит отражение, зарождается отраженная волна напряжений. Для установления природы отраженной волны воспользуемся граничным условием свободного конца стержня: $\sigma = 0$ при $x = l$. Если перемещение прямой волны $u_1 = f(at + x)$, перемещение отраженной волны $u_2 = \varphi(at - x)$, то им соответствуют напряжения $E\frac{\partial u_1}{\partial x}$, $E\frac{\partial u_2}{\partial x}$ и результирующее напряжение

$$E\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial x}\right) = E\,[f'(at + x) - \varphi'(at - x)].$$

Отсчитывая x от правого торца, перепишем условие свободного конца стержня в виде $f'(at) - \varphi'(at) = 0$, следовательно, отраженная волна имеет ту же форму, что и прямая, но противоположна по знаку, т. е. волна сжатия отражается в волну растяжения. Перемещение любой точки стержня равно $u_1 + u_2$, и на свободном конце ($x = 0$) оно равно $2f(at)$, так что перемещения и скорости частиц на конце стержня равны удвоенным их значениям во время распространения волны по стержню. Закрепленному концу стержня соответствует следующее граничное условие: $u = 0$ при $x = 0$. Так как $u = u_1 + u_2 = f(at + x) + \varphi(at - x)$, то при $x = 0$

$$f(at) + \varphi(at) = 0.$$

Таким образом, перемещение u_2 в отраженной волне равно по величине и противоположно по направлению перемещению прямой волны. Напряжение отраженной волны по доказанному равно напряжению прямой волны:

$$E\frac{\partial u_2}{\partial x} = E\frac{\partial u_1}{\partial x}.$$

Таким образом, напряжения, производимые прямой и отраженной волнами, на закрепленном конце суммируются, значение результирующего напряжения равно удвоенному значению напряжения, имеющему место при распространении волны вдоль стержня.

На основании решения (3.1.5), которое с учетом начальных условий $u = u_0(x)$, $\partial u/\partial t = v_0(x)$ при $t = 0$ имеет вид

$$u = \frac{u_0(x - at) + u_0(x + at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} v_0(\xi)\,d\xi, \tag{3.1.5'}$$

где $u_0(x)$, $v_0(x)$ — заданные распределения перемещений и скоростей в начальный момент времени, Сен-Венаном создана одномерная волновая теория продольного удара по упругому стержню [28]. Эта теория изложена в технической литературе с оговоркой, что эксперименты Фойгта, Гамбургера и других исследователей ее не подтверждают.

Было предпринято много попыток дать объяснение, согласовать теорию с опытом путем изменения постановки задачи и введения дополнительных гипотез. Для проверки теории соударения Сен-Венана Б. М. Малышевым [3, 30] было проведено обстоятельное экспериментальное исследование, которое показало, что значительные отклонения экспериментальных данных от предсказаний теории Сен-Венана обусловлены тем, что опыты по соударению проводились на недостаточно длинных и тонких стержнях и при очень малых скоростях, когда волновые эффекты малы по сравнению с влиянием других факторов, связанных с несовершенством постановки опыта, причем измерения продолжительности удара выполнялись недостаточно точными методами и аппаратурой, предназначенной для измерения малых промежутков времени. Для таких измерений Б. М. Малышевым предложен новый метод измерения продолжительности удара с помощью счетно-импульсного хронометра; полученные результаты находятся в согласии с теорией Сен-Венана.

Измерение продолжительности удара стержней позволяет определять скорость распространения упругих волн, следовательно, и динамический модуль упругости различных материалов.

Экспериментальной проверке подвергались также положения теории Сен-Венана относительно скоростей стержней после удара [3, 30].

Опыты, в которых в качестве направляющей применялся желоб, позволили производить соударение тонких и длинных стержней со скоростями 1—5 м/с, что достаточно просто обеспечивает условия, близкие к допущениям теории Сен-Венана, и получить для скоростей стержней после удара значения, согласующиеся с теорией. Все это можно противопоставить результатам Фойгта и Гамбургера и считать, что разногласий между теорией Сен-Венана и надлежащим образом поставленным экспериментом не существует. Для теории удара это имеет принципиальное значение, поскольку теория продольного соударения стержней Сен-Венана представляет в теоретическом отношении безукоризненно строгое аналитическое решение задачи теории упругости при вполне четких и обоснованных допущениях.

Эксперименты, проведенные Б. М. Малышевым [3, 9], подтверждают разрывный характер зависимости продолжительности удара от отношения масс стержня и тела, которая установлена Сен-Венаном при решении задачи о продольном ударе жесткого тела по закрепленному стержню. Анализ взаимодействия волн позволил объяснить разрывность указанной зависимости и обнаружить повторное соударение стержня и тела. При некотором критическом отношении масс стержня и тела давление тела на стержень исчезает в моменты $t_n = 2nl/a_0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, однако тело не успевает оторваться от стержня, поскольку упругая волна, приходящая к ударяемому концу в момент t_n, мгновенно прижимает торцовую поверхность стержня к телу. При других отношениях масс, близких к критическим, возможно нарушение контакта между телом и стержнем с последующим повторным соударением. Длительность прерывания контакта конечна, при критическом отношении масс она нулевая (бесконечно малая). Таким образом, доказана возможность повторного соударения стержня и тела в силу разрывности функции, характеризующей продолжительность удара. Для вязкоупругого стержня имеет место зависимость

$$\sigma = Ee - \int_0^t \Gamma(t-\tau)\, e(\tau)\, d\tau.$$

Однако если вязкоупругий стержень изготовлен из полимерных материалов, то, как показывают экспериментальные исследования по распространению волн напряжений в полимерных материалах, для таких быстрых процессов, как процесс распространения импульса, на фронте волны материал является идеально-упругим, для которого функция релаксации $\Gamma(t-\tau) = 0$, следовательно, $a^2 = E/\rho$.

Для упругопластического стержня справедлива зависимость $\sigma = \sigma(e) = Ee(1-\omega)$, дифференцируя ее и подставляя в (3.1.3′), получим уравнение (3.1.4), в котором

$$a^2 = \frac{1}{\rho}\frac{d\sigma}{de} = \frac{E}{\rho}(1-\omega) - \frac{Ee}{\rho}\frac{d\omega}{de}. \tag{3.1.7}$$

Как следует из формулы (3.1.7), при пластическом деформировании стержня распространяется множество волн напряжений различной интенсивности с различными скоростями, меньшими скорости распространения упругой волны, причем волне большей интенсивности соответствует меньшая скорость распространения. Волны напряжений, соответствующие пластическому деформированию стержня при динамическом нагружении, называются *волнами Римана*. Они, как показано Х. А. Рахматулиным [35], описываются формулами

$$v = -\psi(e), \quad e = e_0(t - x/a), \tag{3.1.8}$$

где e_0 — деформация, соответствующая напряжению $\sigma = p(t)$ при $x = 0$.

Экспериментальной проверкой деформационной теории распространения упругопластических волн в стержнях занимался Б. М. Малышев [31].

Изучение процесса распространения упругопластических волн в стержне при продольном ударе осуществлялось путем регистрации перемещений отдельных фиксированных сечений с помощью индукционных датчиков [9], обеспечивающих запись скорости сечений во время удара при осциллографировании. Экспериментальные данные сравнивались с результатами теоретического решения задачи о продольном растягивающем ударе с постоянной скоростью по стержню конечной длины [2, 3, 9], построенного на основании деформационной теории приближенным методом Г. А. Домбровского. При этом предполагалось, что при динамическом нагружении зависимость между напряжением и деформацией $\sigma \div e$ такая же, как и при статическом нагружении. Статическая диаграмма $\sigma \div e$ аппроксимировалась специально подобранными функциями, допускающими точное решение краевой задачи. Проведенное исследование показало, что экспериментальные значения скоростей фиксированных сечений и силы натяжения на закрепленном конце стержня при ударе со скоростями до 6 м/с согласуются с предсказаниями теории, не учитывающей влияния скорости деформации.

Возникающие при ударе в стержне упругопластические волны обусловливают увеличение продолжительности удара τ с возрастанием скорости удара $v_{уд}$ [31]. Начиная с некоторого значения скорости удара, τ упругопластического стержня становится больше значений τ_0, соответствующих упругому стержню ($\tau_0 = 2l/a_0$), и с увеличением скорости возрастает до величин, в несколько раз превосходящих τ_0. Опыты проводились с тонкими стержнями, изготовленными из латуни, меди и алюминия, при растягивающих ударах. Продолжительность удара τ определялась с помощью счетно-импульсного хронометра при различных скоростях удара (до 40 м/с). Для стержней из одного и того же материала, но имеющих различную длину, экспериментальные данные для отношения τ/τ_0 в зависимости от скорости удара $v_{уд}$ достаточно точно ложатся на одну кривую. Рост τ в зависимости от скорости удара $v_{уд}$ имеет четко выраженный ступенчатый характер с периодически расположенными нерезкими изломами; вид ступеней для данного материала зависит от предварительной вытяжки образцов (более четкие ступени получаются для образцов со значительной предварительной вытяжкой, когда диаграмма $\sigma \div e$ материала приближается к билинейной). Обнаруженная периодичность и геометрическое подобие свидетельствуют об определенной роли упругопластических волн в явлении отскока стержня от преграды. График $\tau(v)$, полученный из теоретического решения задачи, также имеет ступенчатую форму (горизонтальные ступени с разрывами), что согласуется со ступенями экспериментальной кривой для τ при аппроксимации статической диаграммы $\sigma \div e$ двумя прямыми, причем лучшее согласие получается для образцов с большей предварительной вытяжкой.

Все вышеизложенное показывает, что деформационная теория распространения упругопластических волн в основном правильно описывает процессы ударного нагружения стержней и может быть использована при выполнении инженерных расчетов.

Перейдем теперь к определению напряжения σ, скорости v и плотности ρ в областях возмущений стержня, используя для этого метод, изложенный в гл. 1. Первичной является область возмущений нагрузки; ей соответствует тензор кинетических напряжений $T_{нагр}$ с компонентами

$$T^{11} = \rho v^1 v^1 - \sigma^{11},\quad T^{10} = \rho v^1 a_{cq},\quad T^{00} = \rho a_{cq}^2, \tag{3.1.9}$$

где $a_{cq}^2 = (G/\rho)(1 - \omega)$.

Построение тензора $T_{нагр}$ выполняется в системе координат (x, x^0), причем $x^0 = a_{cq}t$. Искомый тензор кинетических напряжений представим в виде суммы основного и корректирующего тензоров:

$$(T)_{нагр} = (T_0) + (T_к). \tag{3.1.10}$$

При построении тензоров (T_0) и $(T_к)$ воспользуемся общим решением (1.3.56) уравнений равновесия фиктивного тела, взятым в виде

$$T^{11}=\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^{0 2}}, \quad T^{10}=\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial x^0}, \quad T^{00}=\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2}, \tag{3.1.11}$$

где $\Pi(x, x^0)$ — функция кинетических напряжений, равная сумме функции кинетических напряжений основного тензора $\Pi^{(0)}(x, x^0)$ и функции кинетических напряжений корректирующего тензора $\Pi^{(k)}(x, x^0)$:

$$\Pi(x, x^0)=\Pi^{(0)}(x, x^0)+\Pi^{(k)}(x, x^0). \tag{3.1.12}$$

Выбор функции $\Pi^{(0)}(x, x^0)$ обусловлен требованием выполнения следующих граничных условий:

$$\begin{aligned} T^{11}=Q_{(1)}^{11},\ T^{10}=Q_{(1)}^{10} \text{ при } x=x_1=0; \\ T^{10}=Q_{(1)}^{01},\ T^{00}=Q_{(1)}^{00} \text{ при } x=x_1^0=0, \end{aligned} \tag{3.1.13}$$

где $Q_{(1)}^{11}=(\rho v^1 v^1)_{x=0}-p$, $Q_{(1)}^{10}=(\rho v^1 a_{cq})_{x=0}$, $Q_{(1)}^{01}=(\rho v^1 a_{cq})_0$, $Q_{(1)}^{00}=(\rho a_{cq}^2)_0$ — функции нагрузок.

Для координаты x функция кинетических напряжений принимается в виде

$$\Pi_1^{(0)}=\frac{1}{2}(1+\cos\bar{x}) F_1+\frac{1}{2}\int_0^x(1+\cos\bar{x})\, dx \Phi_1; \tag{3.1.14}$$

функции F_1 и Φ_1 должны удовлетворять уравнениям $\partial^2 F_1/\partial x^{0 2}=Q_{(1)}^{11}$, $\partial \Phi_1/\partial x^0=Q_{(1)}^{10}$ и граничным условиям: $F_1=0$, $\partial F_1/\partial x^0=0$, $\Phi_1=0$ при $x^0=0$. Отсюда следует, что искомые функции

$$F_1=\int_0^{x^0}\!\!\int Q_{(1)}^{11}\, dx^0\, dx^0, \quad \Phi_1=\int_0^{x_0} Q_{(1)}^{10}\, dx^0. \tag{3.1.15}$$

Для координаты x^0 функция кинетических напряжений принимается в виде

$$\Pi_0^{(0)}=\frac{1}{2}(1+\cos\bar{x}^0) F_0+\frac{1}{2}\int_0^{x^0}(1+\cos\bar{x}^0)\, dx^0\, \Phi_0; \tag{3.1.16}$$

функции F_0 и Φ_0 должны удовлетворять уравнениям $\partial^2 F_0/\partial x^2=Q_{(1)}^{00}$, $\partial \Phi_0/\partial x=Q_{(1)}^{01}$ и граничным условиям: $F_0=0$, $\Phi_0=0$ при $x=x_\gamma$ $(\gamma=1, 2)$, следовательно, искомые функции имеют вид

$$\begin{gathered} F_0=\int_0^{x}\!\!\int Q_{(1)}^{00}\, dx dx-\frac{x}{l_н}\int_0^{l_н}\!\!\int Q_{(1)}^{00}\, dx dx, \\ \Phi_0=\int_0^x Q_{(1)}^{01}\, dx, \end{gathered} \tag{3.1.17}$$

где $l_н=a x^0/a_{cq}$.

Отметим, что функции нагрузок должны быть самоуравновешенными.

Функция кинетических напряжений основного тензора

$$\text{П}_{(0)} = \frac{1}{2}(1+\cos\bar{x})F_1 + \frac{1}{2}\int_0^x (1+\cos\bar{x})\,dx\Phi_1 +$$

$$+\frac{1}{2}(1+\cos\bar{x}^0)F_0 + \frac{1}{2}\int_0^{x^0}(1+\cos\bar{x}^0)dx^0\Phi_0. \qquad (3.1.18)$$

Подставляя (3.1.18) в (3.1.11), определим компоненты тензора $(T_0^{(1)})$ для самоуравновешенных частей функций нагрузок $\tilde{Q}^{\alpha\beta}_{(1)}$:

$$T^{11}_{(0)} = \frac{1}{2}(1+\cos\bar{x})\tilde{Q}^{11}_{(1)} + \frac{1}{2}\int_0^x (1+\cos\bar{x})\,dx\,\frac{\partial\tilde{Q}^{10}_{(1)}}{\partial x^0} -$$

$$-\frac{\pi}{2x_2^0}\sin\bar{x}^0\int_0^x \tilde{Q}^{01}_{(1)}\,dx - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{x_2^0}\right)^2\cos\bar{x}^0 \times$$

$$\times\left(\int_0^x\!\!\int \tilde{Q}^{00}_{(1)}\,dxdx - \frac{x}{l_{\text{н}}}\int_0^{l_{\text{н}}}\!\!\int \tilde{Q}^{00}_{(1)}\,dxdx\right),$$

$$T^{10}_{(0)} = \frac{1}{2}(1+\cos\bar{x})\tilde{Q}^{10}_{(1)} + \frac{1}{2}(1+\cos x^0)\tilde{Q}^{01}_{(1)} -$$

$$-\frac{\pi}{2l_{\text{н}}}\sin\bar{x}\int_0^{x^0}\tilde{Q}^{11}_{(1)}\,dx^0 - \frac{\pi}{2x_2^0}\sin\bar{x}^0\left(\int_0^x \tilde{Q}^{00}_{(1)}\,dx - \frac{x_{\text{н}}}{l_{\text{н}}^2}\int_0^{l_{\text{н}}}\!\!\int \tilde{Q}^{00}_{(1)}\,dxdx\right).$$

$$(3.1.19)$$

$$T^{00}_{(0)} = \frac{1}{2}(1+\cos\bar{x}^0)\tilde{Q}^{00}_{(1)} + \frac{1}{2}\int_0^{x^0}(1+\cos\bar{x}^0)\,dx^0\,\frac{\partial\tilde{Q}^{01}_{(1)}}{\partial x} -$$

$$-\frac{\pi}{2l_{\text{н}}}\left(\frac{\pi}{l_{\text{н}}}\cos\bar{x}\int_0^{x^0}\!\!\int \tilde{Q}^{11}_{(1)}\,dx^0\,dx^0 + \sin\bar{x}\int_0^{x^0}\tilde{Q}^{10}_{(1)}\,dx^0\right).$$

Для несамоуравновешенных частей функций нагрузок $\bar{Q}^{\alpha\beta}_{(1)} = Q^{\alpha\beta}_{(1)} - \tilde{Q}^{\alpha\beta}_{(1)}$ имеем тензор $(T_0^{(2)})$ с компонентами

$$T^{11}_{(0)} = (1/2)(1+\cos\bar{x})\bar{Q}^{11}_{(1)}, \quad T^{00}_{(0)} = (1/2)(1+\cos\bar{x}^0)\bar{Q}^{00}_{(1)},$$

$$(3.1.19')$$

$$T^{10}_{(0)} = (1/2)(1+\cos\bar{x})\bar{Q}^{10}_{(1)} + (1/2)(1+\cos\bar{x}^0)\bar{Q}^{01}_{(1)}.$$

Основной тензор для стержня

$$(T_0) = (T_0^{(1)}) + (T_0^{(2)}). \qquad (3.1.20)$$

Выбор функции кинетических напряжений корректирующего тензора $\Pi^{(k)}(x, x^0)$ обусловлен требованием выполнения нулевых граничных условий в напряжениях: $T^{11} = 0$, $T^{10} = 0$ при $x = x_\gamma$; $T^{10} = 0$, $T^{00} = 0$ при $x^0 = x^0_\gamma$. Им соответствует функция

$$\Pi^{(k)} = \sum_{m,n} A_{mn} P_m(\bar{x}) P_n(\bar{x}^0) \quad (m = 0, 1, \ldots;\ n = 0, 1, \ldots), \qquad (3.1.21)$$

где $\bar{x} = \pi x / l_н$, $\bar{x}^0 = \pi x^0 / x^0_2$ — безразмерные координаты.

В результате подстановки (3.1.21) в (3.1.11) находим следующие выражения для компонент корректирующего тензора:

$$T^{11}_{(к)} = \sum_{m,n} A_{mn} f^{11}_{(m,n)},$$

$$T^{10}_{(к)} = \sum_{m,n} A_{mn} f^{10}(mn), \qquad T^{00}_{(к)} = \sum_{m,n} A_{mn} f^{00}(mn), \qquad (3.1.22)$$

где

$$f^{11}(mn) = (\pi/x^0_2)^2 P_m(\bar{x}) P''_n(\bar{x}^0),$$

$$f^{10}(mn) = (\pi^2/(l_н x^0_2)) P'_m(\bar{x}) P'_n(\bar{x}^0),$$

$$f^{00}(mn) = (\pi/l_н)^2 P''_m(\bar{x}) P_n(\bar{x}^0).$$

Параметры A_{mn} определяются в результате решения системы алгебраических уравнений

$$\sum_{m,n} A_{mn} F_{11}(mnij) + L_1(ij) = 0; \qquad (3.1.23)$$

коэффициенты $F_{11}(mnij)$ уравнений соответственно равны: для упругопластического стержня

$$F_{11} = (1/(2G))(\alpha_1 F^{(1)}_{11} + \alpha_2 F^{(2)}_{11}), \qquad (3.1.24)$$

для вязкоупругого стержня

$$F_{11} = \frac{1}{2G}(\alpha^{(e)}_1 F^{(1)}_{11} + \alpha^{(e)}_2 F^{(2)}_{11}) + \frac{1}{a_{cq}}\left(F^{(3)}_{11} + \frac{1}{3} F^{(4)}_{11}\right).$$

Интегралы $F^{(k)}_{11}(mnij)$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ вычисляются по следующим формулам:

$$F^{(1)}_{11} = 2S\left(\frac{\pi}{x^0_2}\right)^2 \int_0^\pi \left(\frac{l_н}{x^0_2}\right)\left[I_1(mi) P''_n P''_j + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{x^0_2}{l_н}\right)^4 I_3(mi) P_n P_j + \left(\frac{x^0_2}{l_н}\right)^2 I_2(mi) P'_n P'_j\right] d\bar{x}^0, \qquad (3.1.24')$$

$$F^{(2)}_{11} = S\left(\frac{\pi}{x^0_2}\right)^2 \int_0^\pi \left(\frac{l_н}{x^0_2}\right)\left[I_1(mi) P''_n P''_j - \left(\frac{x^0_2}{l_н}\right)^2 (I_4(mi) P_n P''_j + \right.$$

$$\left. + I_4(im) P''_n P_j) + \left(\frac{x^0_2}{l_н}\right)^4 I_3(mi) P_n P_j\right] d\bar{x}^0,$$

$$F_{11}^{(3)} = 2S\left(\frac{\pi}{x_2^0}\right)\int_0^{\pi}\int_0^{\bar{x}^0}\left(\frac{l_{\text{н}}}{x_2^0}\right)\tilde{R}(\bar{x}^0\bar{y}^0) \times$$

$$\times\left[I_1(mi)P_n''P_j''+\left(\frac{x_2^0}{l_{\text{н}}}\right)^4 I_3(mi)P_nP_j+\left(\frac{x_2^0}{l_{\text{н}}}\right)^2 I_2(mi)P_n'P_j'\right]d\bar{y}^0\,d\bar{x}^0,$$

$$F_{11}^{(4)} = S\left(\frac{\pi}{x_2^0}\right)\int_0^{\pi}\int_0^{\bar{x}^0}\left(\frac{l_{\text{н}}}{x_2^0}\right)(\tilde{R}_1(\bar{x}^0\bar{y}^0)-\tilde{R}(\bar{x}^0\bar{y}^0)) \times$$

$$\times\left[I_1(mi)P_n''P_j''+\left(\frac{x_2^0}{l_{\text{н}}}\right)^4 I_3(mi)P_nP_j-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{x_2^0}{l_{\text{н}}}\right)^2(I_4(mi)P_nP_j''+I_4(im)P_n''P_j)\right]d\bar{y}^0\,d\bar{x}^0,$$

где

$$I_1(mi)=\int_0^{\pi}P_mP_i\,d\bar{x},\quad I_2(mi)=\int_0^{\pi}P_m'P_i'\,d\bar{x},$$

$$I_3(mi)=\int_0^{\pi}P_m''P_i''\,d\bar{x},\quad I_4(mi)=\int_0^{\pi}P_m''P_i\,d\bar{x}.$$

Свободные члены $L_1\ (ij)$ уравнений имеют вид: для упругопластического стержня

$$L_1 = (1/(2G))(\alpha_1L_1^{(1)}+\alpha_2L_1^{(2)}), \tag{3.1.25}$$

для вязкоупругого стержня

$$L_1 = (1/(2G))(\alpha_1^{(e)}L_1^{(1)}+\alpha_2^{(e)}L_1^{(2)}) + (1/a_{cg})(L_1^{(4)}+L_1^{(5)}/3).$$

Интегралы $L_1^{(k)}\ (ij)$ $(k = 1, \ldots, 5)$ вычисляются по следующим формулам:

$$L_1^{(1)} = 2S\int_0^{\pi}(l_{\text{н}}/x_2^0)\int_0^{\pi}[T_{(0)}^{11}P_iP_j''+(x_2^0/l_{\text{н}})T_{(0)}^{00}P_i''P_j-$$

$$-2(x_2^0/l_{\text{н}})T_{(0)}^{10}P_i'P_j']\,d\bar{x}d\bar{x}^0,$$

$$L_1^{(2)} = S\int_0^{\pi}\left(\frac{l_{\text{н}}}{x_2^0}\right)\int_0^{\pi}\left[(T_{(0)}^{11}-T_{(0)}^{00})\left(P_iP_j''-\left(\frac{x_2^0}{l_{\text{н}}}\right)^2P_i''P_j\right)\right]d\bar{x}d\bar{x}^0,$$

$$L_1^{(4)} = 2S\frac{x_2^0}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{l_{\text{н}}}{x_2^0}\right)\int_0^{\pi}\int_0^{\bar{x}^0}\tilde{R}(\bar{x}^0\bar{y}^0)[T_{(0)}^{11}P_iP_j''+(x_2^0/l_{\text{н}})^2T_{(0)}^{00}P_i''P_j-$$

$$-2(x_2^0/l_{\text{н}})T_{(0)}^{10}P_i'P_j']\,d\bar{y}^0\,d\bar{x}\,d\bar{x}^0, \tag{3.1.25'}$$

$$L_1^{(5)} = S\,\frac{x_2^0}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{l_{\text{н}}}{x_2^0}\right)\int_0^{\pi}\int_0^{\bar{x}^0}\left(\tilde{R}_1(\bar{x}^0\,\bar{y}^0)-\tilde{R}(\bar{x}^0\,\bar{y}^0)\right)\left(T^{11}_{(0)}-T^{00}_{(0)}\right)\times$$

$$\times\left(P_i\,P_j''-\left(\frac{x_2^0}{l_{\text{н}}}\right)^2 P_i''\,P_j\right)d\bar{y}^0\,d\bar{x}\,d\bar{x}^0.$$

Решение уравнений (3.1.23) строится с помощью процедуры последовательных приближений. Для упругого и вязкоупругого стержней эти уравнения имеют постоянные коэффициенты и свободные члены. Принимая m, n, i, j равными 0; 1, получим четыре уравнения, для которых $A_{mn} = D_{mn}/D$, где

$$D = \begin{vmatrix} F_{11}(0000) & F_{11}(0100) & F_{11}(1000) & F_{11}(1100) \\ F_{11}(0001) & F_{11}(0101) & F_{11}(1001) & F_{11}(1101) \\ F_{11}(0010) & F_{11}(0110) & F_{11}(1010) & F_{11}(1110) \\ F_{11}(0011) & F_{11}(0111) & F_{11}(1011) & F_{11}(1111) \end{vmatrix}, \qquad (3.1.26)$$

$$D_{00} = \begin{vmatrix} L_1(00) & F_{11}(0100) & F_{11}(1000) & F_{11}(1100) \\ L_1(01) & F_{11}(0101) & F_{11}(1001) & F_{11}(1101) \\ L_1(10) & F_{11}(0110) & F_{11}(1010) & F_{11}(1110) \\ L_1(11) & F_{11}(0111) & F_{11}(1011) & F_{11}(1111) \end{vmatrix}, \ldots$$

Компоненты корректирующего тензора принимают вид

$$T^{\alpha\beta}_{(\text{к})} = (1/D)(D_{00}f^{\alpha\beta}_{(00)} + D_{01}f^{\alpha\beta}_{(01)} + D_{10}f^{\alpha\beta}_{(10)} + D_{11}f^{\alpha\beta}_{(11)}). \qquad (3.1.27)$$

Суммируя тензоры (3.2.20) и (3.1.27), получим компоненты тензора кинетических напряжений (T) для упругого и вязкоупругого стержней:

$$T^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta}_{(0)} + T^{\alpha\beta}_{(\text{к})}. \qquad (3.1.28)$$

Для упругопластического стержня по известным компонентам тензора $(T)^{(e)}$ *для упругого состояния, находим величины* T и T_i, затем с помощью диаграммы $\sigma_i \div e_i$ материала тела и формулы (1.3.83) определяем функцию пластичности $\varphi\,(T_i)$ и ее производную $d\varphi/dT_i$; по формулам (1.3.72) вычисляем функции состояния α_1 и α_2 для различных значений T_i. По формулам (3.1.24) и (3.1.25) находим коэффициенты $F_{11}\,(mnij)$ и свободные члены $L_1\,(ij)$ уравнений (3.1.23), решение которых $A_{mn} = D_{mn}/D$; компоненты корректирующего тензора имеют вид (3.1.27). Суммируя тензоры (T_0) и $(T_{\text{к}})$, получим тензор кинетических напряжений упругого состояния $(T)^{(e)}$. По известному тензору $(T)^{(e)}$ и формулам (1.3.85) определяются компоненты тензора кинетических напряжений $(T_{\text{нагр}})$ области возмущений нагрузки. Напряжение σ, скорость частиц v и плотность материала ρ стержня в этой области соответственно равны:

$$\sigma_{\text{нагр}} = T^{10}T^{10}/T^{00} - T^{11}, \qquad (3.1.29)$$

$$v^1_{\text{нагр}} = T^{10}a_{cq}/T^{00}, \quad \rho_{\text{нагр}} = T^{00}/a^2_{cq}.$$

В некоторый момент времени t_p, которому соответствует значение x_p^0 координаты x^0, начинается процесс разгрузки, возникает волна разгрузки, распространяющаяся со скоростью b, и образуется область возмущений разгрузки (рис. 71).

Напряженное состояние и движение части в области возмущений разгрузки характеризуется тензором кинетических напряжений

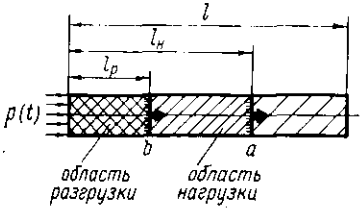

Рис. 71

$$(T)_{\text{разгр}} = (T)_{\text{нагр}} - \Delta\,(T). \qquad (3.1.30)$$

Тензор $(T)_{\text{нагр}}$ известен, тензор $\Delta\,(T)$ требуется построить, исходя из соображений, изложенных в § 4 гл. 1.

Представим тензор $\Delta\,(T)$ в виде суммы основного и корректирующего тензоров:

$$\Delta\,(T) = \Delta\,(T_0) + \Delta\,(T_{\text{к}}) \qquad (3.1.31)$$

и воспользуемся системой координат x, x^0, причем $x^0 = v^0_{(r)}t$. Компоненты основного тензора должны удовлетворять уравнениям равновесия

$$\nabla_\alpha \Delta T^{\alpha\beta} = 0 \qquad (3.1.32)$$

и граничным условиям в напряжениях

$$\begin{aligned} &\Delta T^{11} = \Delta Q^{11}_{(1)},\ \Delta T^{10} = \Delta Q^{10}_{(1)} \text{ при } x = x_1 = 0;\\ &\Delta T^{00} = 0,\ \Delta T^{10} = 0 \text{ при } x^0 = x^0_1 = 0, \end{aligned} \qquad (3.1.33)$$

где

$$\Delta Q^{11}_{(1)} = (\Delta\rho\Delta v\Delta v)_{(1)} - \Delta p,\ \ \Delta Q^{10}_{(1)} = (\Delta\rho\Delta v v^0_{(r)})_{(1)} \qquad (3.1.33')$$

— функции нагрузок. Компоненты корректирующего тензора должны удовлетворять уравнениям (3.1.32), граничным условиям в напряжениях

$$\begin{aligned} &\Delta T^{11} = 0,\ \Delta T^{10} = 0 \text{ при } x = x_\gamma\ (\gamma = 1,\ 2),\\ &\Delta T^{10} = 0,\ \Delta T^{00} = 0 \text{ при } x^0 = x^0_\gamma. \end{aligned} \qquad (3.1.34)$$

в перемещениях на фронте волны разгрузки : $\Delta w = 0$ и вариационному уравнению

$$\delta\Delta\bar{R} = 0. \qquad (3.1.35)$$

Воспользуемся общим решением уравнений равновесия (3.1.32):

$$\Delta T^{11} = \frac{\partial^2 \Delta\Pi}{\partial x^{0^2}}, \qquad \Delta T^{10} = -\frac{\partial^2 \Delta\Pi}{\partial x \partial x^0}, \qquad \Delta T^{00} = \frac{\partial^2 \Delta\Pi}{\partial x^2} \qquad (3.1.36)$$

и представим функцию кинетических напряжений в виде $\Delta\Pi = \Delta\Pi^{(0)} + \Delta\Pi^{(k)}$. Тогда $\Delta\Pi^{(0)}$ определяется граничными условиями (3.1.33), $\Delta\Pi^{(k)}$ — граничными условиями (3.1.34) и вариационным уравнением (3.1.35). Принимая функцию $\Delta\Pi^{(0)}$ в виде

$$\Delta\Pi^{(0)} = \frac{1}{2}(1+\cos\bar{x})\int_0^{x^0}\!\!\int \Delta\widetilde{Q}^{11}_{(1)}\,dx^0\,dx^0 + \frac{1}{2}\int_0^x (1+\cos\bar{x})\,dx\int_0^{x^0}\Delta\widetilde{Q}^{10}_{(1)}\,dx^0$$

и подставляя ее в (3.1.36), получим компоненты основного тензора:

$$\Delta T^{11}_{(0)} = \frac{1}{2}(1+\cos\bar{x})\,\Delta Q^{11}_{(1)} + \frac{1}{2}\int_0^x (1+\cos\bar{x})\,dx\,\frac{\partial}{\partial x^0}\,\Delta\widetilde{Q}^{10}_{(1)},$$

$$\Delta T^{10}_{(0)} = \frac{1}{2}(1+\cos\bar{x})\,\Delta Q^{10}_{(1)} - \frac{\pi}{2l_p}\sin\bar{x}\int_0^{x^0}\Delta\widetilde{Q}^{11}_{(1)}\,dx^0, \qquad (3.1.37)$$

$$\Delta T^{00}_{(0)} = -\frac{\pi}{2l_p}\left[\frac{\pi}{l_p}\cos\bar{x}\int_0^{x^0}\!\!\int \Delta\widetilde{Q}^{11}_{(1)}\,dx^0\,dx^0 + \sin x\int_0^{x^0}\Delta\widetilde{Q}^{10}_{(1)}\,dx^0\right],$$

где $\Delta\widetilde{Q}^{11}_{(1)}$, $\Delta\widetilde{Q}^{10}_{(1)}$ — самоуравновешенные части функций нагрузок.

Функцию $\Delta\Pi^{(k)}$ принимаем в следующем виде:

$$\Delta\Pi^{(k)} = \sum_{m,\,n}\Delta A_{mn}\,P_m(\bar{x})\,P_n(\bar{x}^0) \quad (m=0,1,\ldots;\ n=0,1,\ldots),$$

где $\bar{x} = \pi x/l_p$, $\bar{x}^0 = \pi x^0/x^0_2$ — безразмерные координаты, причем $x^0_2 = v^0_{(r)}t_2$ — значение координаты x^0, соответствующее продолжительности процесса разгрузки. В результате подстановки функции $\Delta\Pi^{(k)}$ в (3.1.36) определим компоненты корректирующего тензора:

$$\Delta T^{11}_{(\text{к})} = \sum_{m,\,n}\Delta A_{mn}\,f^{11}(mn), \qquad \Delta T^{10}_{(\text{к})} = \sum_{m,\,n}\Delta A_{mn}\,f^{10}(mn),$$
$$\Delta T^{00}_{(\text{к})} = \sum_{m,\,n}\Delta A_{mn}\,f^{00}(mn). \qquad (3.1.38)$$

Функции $f^{1\beta}(mn)$ ($\beta = 1, 0$) известны, параметры ΔA_{mn} удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{m,\,n}\Delta A_{mn}\,F_{11}(mnij) + \Delta L_1(ij) = 0. \qquad (3.1.39)$$

Коэффициенты F_{11} $(mnij)$ уравнений находим по формулам

$$F_{11} = (1/(2G))(\alpha^{(e)}_1 F^{(1)}_{11} + \alpha^{(e)}_2 F^{(2)}_{11}); \qquad (3.1.40)$$

свободные члены ΔL_1 (ij) — по формулам

$$\Delta L_1 = (1/(2G))(\alpha^{(e)}_1 \Delta L^{(1)}_1 + \alpha^{(e)}_2 \Delta L^{(2)}_1). \qquad (3.1.41)$$

Интегралы $F_{11}^{(k)}(mnij)$ ($k = 1, 2$) вычисляются по формулам (3.1.24′), интегралы $\Delta L_1^{(k)}(ij)$ — по формулам (3.1.25′), при этом необходимо заменить $l_н$ на l_p; $T_{(0)}^{11}$ и $T_{(0)}^{10}$ и $T_{(0)}^{00}$ — соответственно на $\Delta T_{(0)}^{11}$, $\Delta T_{(0)}^{10}$ и $\Delta T_{(0)}^{00}$.

Решение уравнений (3.1.39) строится с помощью процедуры последовательных приближений. Полагая m, n, i, j равными 0, 1, получим четыре уравнения, для которых

$$\Delta A_{mn} = \Delta D_{mn}/D,$$

где ΔD_{mn} и D — определители вида (3.1.26). Компоненты корректирующего тензора

$$\Delta T_{(к)}^{\alpha\beta} = \frac{1}{D}\left(\Delta D_{00} f_{(00)}^{\alpha\beta} + \Delta D_{01} f_{(01)}^{\alpha\beta} + \Delta D_{10} f_{(10)}^{\alpha\beta} + \Delta D_{11} f_{(11)}^{\alpha\beta}\right). \quad (3.1.42)$$

Суммируя тензоры (3.1.37) и (3.1.42), определим тензор с компонентами

$$\Delta T^{\alpha\beta} = \Delta T_{(0)}^{\alpha\beta} + \Delta T_{(к)}^{\alpha\beta}. \quad (3.1.43)$$

Компоненты тензора кинетических напряжений разгрузки $(T)_{разгр}$ равны

$$T_{разгр}^{\alpha\beta} = T_{нагр}^{\alpha\beta} - \Delta T^{\alpha\beta}. \quad (3.1.44)$$

По формулам, приведенным в § 5 гл. 1, для области возмущений разгрузки находим

$$\begin{gathered} \sigma_{разгр} = (T^{10}T^{10}/T^{00} - T^{11})_{разгр}, \\ v_{разгр} = (T^{10}/T^{00})_{разгр} v_{(r)}^0, \quad \rho_{разгр} = T_{разгр}^{00}/(v_{(r)}^0)^2. \end{gathered} \quad (3.1.45)$$

Следуя Х. А. Рахматулину [35], установим существование волны разгрузки, определим скорость ее распространения b и покажем, что $b < a_0 = \sqrt{E/\rho_0}$. Зависимость между напряжением σ и деформацией e при разгрузке стержня устанавливается соотношением $\sigma = \sigma_н - E(e_н - e)$, где $\sigma_н$ и $e_н$ — напряжение и деформация, соответствующие началу разгрузки. Подставляя это соотношение в уравнение (3.1.3′), получим:

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varphi(x), \\ \varphi(x) = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x}(\sigma_н - E e_н). \end{gathered} \quad (3.1.46)$$

Скорость распространения волны разгрузки определяется уравнением

$$t = f(x), \quad b = 1/f'(x). \quad (3.1.47)$$

Общее решение уравнения (3.1.46) имеет вид

$$\begin{gathered} u = u_0 + F_1(a_0 f(x) + x) + F_2(x - a_0 f(x)), \\ u_0 = -\frac{1}{E}\int_0^x (\sigma_н - E e_н)\, dx. \end{gathered} \quad (3.1.48)$$

Из условия непрерывности деформации на фронте волны разгрузки

$$e_{\text{н}} = e_{\text{н}} - (\sigma_{\text{н}}/E) + F_1'(a_0 f(x) + x) - F_2'(a_0 f(x) - x),$$
$$-\psi(e_{\text{н}}) = a_0 [F_1'(a_0 f(x) + x) + F_2'(a_0 f(x) - x)]$$

находим:

$$F_1'(a_0 f(x) + x) = (1/2)(\sigma_{\text{н}}/E - (1/a_0)\psi(e_{\text{н}})),$$
$$F_2'(a_0 f(x) - x) = -(1/2)(\sigma_{\text{н}}/E + (1/a_0)\psi(e_{\text{н}}));$$

дифференцируя их по x, получим:

$$\begin{aligned} F_1''(a_0 f(x)+x)\left(\frac{a_0}{b}+1\right) &= \frac{a}{2a_0}\left(\frac{a}{a_0}-1\right)\frac{de_{\text{н}}}{dx}, \\ F_2''(a_0 f(x)-x)\left(\frac{a_0}{b}-1\right) &= -\frac{a}{2a_0}\left(\frac{a}{a_0}+1\right)\frac{de_{\text{н}}}{dx}. \end{aligned} \tag{3.1.49}$$

Скорость деформации за фронтом волны разгрузки

$$\dot{e} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = a_0 [F_1''(a_0 f + x) - F_2''(a_0 f - x)].$$

Подставляя в последнее равенство (3.1.49), получим

$$\dot{e} = a\frac{a/b+1}{(a_0/b)^2-1}\frac{de_{\text{н}}}{dx}. \tag{3.1.50}$$

Отсюда следует, что если $b < a_0$, то

$$\operatorname{sign}\dot{e} = \operatorname{sign}\frac{de_{\text{н}}}{dx}.$$

Дифференцируя выражение $a(e_{\text{н}}) = x/f(x)$ по x, приходим к выражению

$$\frac{de_{\text{н}}}{dx} = \left(\frac{da}{de_{\text{н}}}\right)^{-1}\frac{1-a/b}{f},$$

внося которое в (3.1.50), получим

$$\dot{e} = \frac{a}{f}\left(\frac{da}{de_{\text{н}}}\right)^{-1}\frac{b^2-a^2}{a_0^2-b^2},$$

следовательно, $\dot{e} < 0$ при $e_{\text{н}} > 0$, $\dot{e} > 0$ при $e_{\text{н}} < 0$, т. е. каждой заданной волне разгрузки, удовлетворяющей условию $a < b < a_0$, соответствует ударная нагрузка, которая приложена к концу стержня и убывает по соответствующему закону. На волне разгрузки пластическая деформация максимальна, следовательно, $t = f(x) = x/a_1$, $a_1 = \sqrt{E_1/\rho_0}$, $E_1 = d\sigma/de = \text{const}$, тогда

$$b = \frac{1}{f'(x)} = a_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}\left(1-\omega-e\frac{d\omega}{de}\right)_{e_{\text{н}}}}. \tag{3.1.51}$$

В момент $t_{\text{от}} = l/a_0$ волна нагрузки достигает конца стержня ($x = l$) и отражается, в результате зарождается отраженная волна нагрузки, распространяющаяся в обратном направлении со скоростью a_0. Образуется область возмущений отраженной волны нагрузки (рис. 72), напряженное состояние и движение частиц в которой характеризуется тензором кинетических напряжений

$$(T)_{\text{отр}} = (T)_{\text{нагр}} - \Delta_1 (T), \tag{3.1.52}$$

где тензор $(T)_{\text{нагр}}$ известен; тензор $\Delta_1 (T)$ требуется построить на основании соображений, изложенных в § 5 гл. 1.

Представим тензор $\Delta_1 (T)$ в виде суммы основного и корректирующего тензоров:

$$\Delta_1 (T) = \Delta_1 (T_0) + \Delta_1 (T_{\text{к}}), \tag{3.1.53}$$

используя при этом систему координат x, $x^0 = a_{cq}t$.

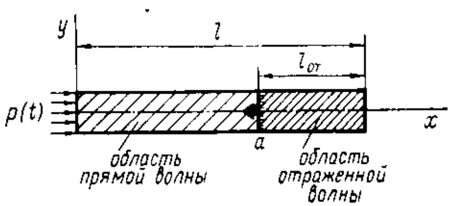

Рис. 72

Компоненты основного тензора должны удовлетворять уравнениям равновесия

$$\nabla_\alpha \Delta_1 T^{\alpha\beta} = 0 \tag{3.1.54}$$

и граничным условиям в напряжениях

$$\Delta_1 T^{1\beta} = \Delta_1 Q^{1\beta}_{(1)} \text{ при } x = l,$$
$$\Delta_1 T^{0\beta} = 0 \text{ при } x^0 = x_1^0, \tag{3.1.55}$$

где $\Delta_1 Q^{1\beta}_{(1)} = T^{1\beta}_{\text{нагр}} (l, x^0)$.

Компоненты корректирующего тензора должны удовлетворять уравнениям равновесия (3.1.54), граничным условиям в напряжениях

$$\Delta_1 T^{1\beta} = 0 \text{ при } x = x_\gamma, \ \Delta_1 T^{0\beta} = 0 \text{ при } x^0 = x_\gamma^0; \tag{3.1.56}$$

в перемещениях на фронте отраженной волны: $\Delta_1 w = 0$ и вариационному уравнению

$$\delta \Delta_1 \widetilde{R} = 0. \tag{3.1.57}$$

При построении тензоров $\Delta_1 (T_0)$ и $\Delta_1 (T_{\text{к}})$ воспользуемся общим решением уравнений (3.1.54):

$$\Delta_1 T^{11} = \frac{\partial^2 \Delta_1 \Pi}{\partial x^{0^2}}, \quad \Delta_1 T^{10} = -\frac{\partial^2 \Delta_1 \Pi}{\partial x \partial x^0}, \quad \Delta_1 T^{00} = \frac{\partial^2 \Delta_1 \Pi}{\partial x^2} \tag{3.1.58}$$

и представим функцию кинетических напряжений в виде $\Delta_1 \Pi = \Delta_1 \Pi^{(0)} + \Delta_1 \Pi^{(k)}$, где $\Delta_1 \Pi^{(0)}$ определяется из граничных условий (3.1.55), а $\Delta_1 \Pi^{(k)}$ — из граничных условий (3.1.56) и вариационного уравнения (3.1.57).

Функцию $\Delta_1 \Pi^{(0)}$ принимаем равной

$$\Delta_1 \Pi^{(0)} = \frac{1}{2} (1 + \cos \widetilde{x}) \int_{x_1^0}^{x^0} \int \Delta_1 \widetilde{Q}^{11}_{(1)} \, dx^0 \, dx^0 +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x} (1 + \cos \widetilde{x}) \, dx \int_{x_1^0}^{x^0} \Delta_1 \widetilde{Q}^{10}_{(1)} \, dx^0,$$

где $\bar{x} = [\pi(x - x_1)]/(x_2 - x_1)$, $\bar{x}^0 = [\pi(x^0 - x_1^0)]/(x_2^0 - x_1^0)$ — безразмерные координаты, причем $x_1 = l$, $x_2 = a_0 x^0/a_{cq}$, $x_1^0 = a_{cq} l/a_0$, $x_2^0 = (a_{cq}/a_0)2l$; $\Delta_1 \tilde{Q}^{11}_{(1)}$, $\Delta_1 \tilde{Q}^{10}_{(1)}$ — самоуравновешенные части функций нагрузок, которым соответствует тензор $\Delta_1(T^{(1)}_0)$; несамоуравновешенные части функций нагрузок $\Delta_1 Q^{11}_{(1)}$, $\Delta_1 \bar{Q}^{10}_{(1)}$ характеризуются тензором $\Delta_1(T^{(2)}_0)$. Основной тензор

$$\Delta_1(T_0) = \Delta_1(T^{(1)}_0) + \Delta_1(T^{(2)}_0),$$

его компоненты определяются выражениями:

$$\Delta_1 T^{11}_{(0)} = \frac{1}{2}(1+\cos\bar{x})\Delta_1 Q^{11}_{(1)} + \frac{1}{2}\int\limits_{x_1}^{x}(1+\cos\bar{x})\,dx\,\frac{\partial}{\partial x^0}\times$$

$$\times\left(\Delta_1 \tilde{Q}^{10}_{(1)}\right) + \frac{a_0}{a_{cq}}\left[\frac{\pi(x-l)}{(a_0x^0/a_{cq}-l)^2}\sin\bar{x}\int\limits_{x_1^0}^{x^0}\Delta_1 \tilde{Q}^{(11)}_{(1)}\,dx^0 + \right.$$

$$+\frac{\bar{x}}{l\pi}\sin\bar{x}\int\limits_{x_1}^{x}\Delta\tilde{Q}^{10}_{(1)}\,dx^0 + \frac{\sin\bar{x}-\bar{x}\cos\bar{x}}{\pi}\Delta_1\tilde{Q}^{10}_{(1)} -$$

$$\left. -\frac{a_0}{a_{cq}}\left(\frac{\pi(x-l)}{(a_0x^0/a_{cq}-l)^2}\right)^2\frac{1}{2}\cos\bar{x}\int\limits_{x_1^0}^{x^0}\!\!\int\Delta_1\tilde{Q}^{11}_{(1)}\,dx^0\,dx^0\right],$$

$$\Delta_1 T^{10}_{(0)} = \frac{1}{2}(1+\cos\bar{x})\Delta_1 Q^{10}_{(1)} + \frac{1}{2}\frac{\pi}{(a_0x^0/a_{cq}-l)}\times$$

$$\times\left[-\sin\bar{x}\int\limits_{x_1^0}^{x^0}\Delta_1\tilde{Q}^{11}_{(1)}\,dx^0 + \frac{a_0}{a_{cq}}\frac{\pi(x-l)}{(a_0x^0/a_{cq}-l)^2}\cos\bar{x}\times\right.$$

$$\left.\times\int\limits_{x_1^0}^{x^0}\!\!\int\Delta_1\tilde{Q}^{11}_{(1)}\,dx^0dx^0 + \frac{\bar{x}}{\pi}\sin\bar{x}\int\limits_{x_1^0}^{x^0}\Delta_1\tilde{Q}^{10}_{(1)}\,dx^0\right], \tag{3.1.59}$$

$$\Delta_1 T^{00}_{(0)} = -\frac{1}{2}\frac{\pi}{a_0x^0/a_{cq}-l}\times$$

$$\times\left[\frac{\pi}{a_0x^0/a_{cq}-l}\cos\bar{x}\int\limits_{x_1^0}^{x^0}\!\!\int\Delta_1\tilde{Q}^{11}_{(1)}\,dx^0\,dx^0 + \sin\bar{x}\int\limits_{x_1^0}^{x^0}\Delta_1\tilde{Q}^{10}_{(1)}\,dx^0\right].$$

Если $\Delta_1\tilde{Q}^{11}_{(1)} = 0$, $\Delta_1\tilde{Q}^{10}_{(1)} = 0$, то компоненты основного тензора упрощаются: $\Delta_1 T^{11}_{(0)} = (1/2)(1+\cos\bar{x})\Delta_1 Q^{11}_{(1)}$, $\Delta_1 T^{10}_{(0)} = (1/2)(1+\cos\bar{x})\Delta_1 Q^{10}_{(1)}$ $\Delta_1 T^{00} = 0$.

Функцию $\Delta_1 \Pi^{(k)}$ принимаем в виде

$$\Delta_1 \Pi^{(k)} = \sum_{m,n}\Delta_1 A_{mn} P_m(\bar{x}) P_n(\bar{x}^0);$$

подставляя ее в (3.1.58), находим компоненты корректирующего тензора:

$$\Delta_1 T^{11}_{(\kappa)} = \sum_{m,n} \Delta_1 A_{mn} f^{11}(mn), \quad \Delta_1 T^{10}_{(\kappa)} = \sum_{m,n} \Delta_1 A_{mn} f^{10}(mn),$$

$$\Delta_1 T^{00}_{(\kappa)} = \sum_{m,n} \Delta_1 A_{mn} f^{00}(mn). \tag{3.1.60}$$

Параметры $\Delta_1 A_{mn}$ определяются в результате решения системы алгебраических уравнений

$$\sum_{m,n} \Delta_1 A_{mn} F(mnij) + \Delta_1 L(i,j) = 0; \tag{3.1.61}$$

коэффициенты $F(mnij)$ уравнений вычисляются по формулам (3.1.24), свободные члены $\Delta_1 L(ij)$ — по формулам (3.1.25). Интегралы $F^{(k)}(mnij)$ ($k = 1, 2, 3, 4$) имеют следующий вид:

$$F^{(1)} = 2S \frac{l^2}{\pi^3} \frac{a_{cq}}{a_0} \int_0^{\pi}\int \bar{x}^0 A^{(1)}(\bar{x}\,\bar{x}^0)\, d\bar{x} d\bar{x}^0,$$

$$F^{(2)} = S \frac{l^2}{\pi^3} \frac{a_{cq}}{a_0} \int_0^{\pi}\int \bar{x}^0 A^{(2)}(\bar{x}\,\bar{x}^0)\, d\bar{x} d\bar{x}^0,$$

$$F^{(3)} = 2S \left(\frac{a_{cq}}{a_0}\right)^2 \frac{l^3}{\pi^4} \int_0^{\pi}\int \bar{x}^0 \int_0^{\bar{x}^0} \bar{R}(\bar{x}^0\,\bar{y}^0) A^{(1)}(\bar{x}, \bar{x}^0, \bar{y}^0)\, d\bar{y}^0 d\bar{x} d\bar{x}^0, \tag{3.1.62}$$

$$F^{(4)} = S \left(\frac{a_{cq}}{a_0}\right)^2 \frac{l^3}{\pi^4} \int_0^{\pi}\int \bar{x}^0 \int_0^{\bar{x}^0} (\bar{R}_1 - R)\,\bar{x}^0, \bar{y}^0\, A^{(2)}(\bar{x}, \bar{x}^0, \bar{y}^0)\, d\bar{y}^0 d\bar{x} d\bar{x}^0,$$

где $A^{(1)} = f^{11}f^{11} + f^{00}f^{00} - 2f^{10}f^{10}$, $A^{(2)} = f^{11}f^{11} + f^{00}f^{00} - 2f^{11}f^{00}$, причем

$$f^{11}(mn) = (\pi/l)^2 (a_0/a_{cq})^2 P_m(\bar{x}) P''_n(\bar{x}^0), \tag{3.1.63}$$

$$f^{10}(mn) = (\pi/l)^2 (a_0/a_{cq})(\pi/\bar{x}^0) P'_m(\bar{x}) P'_n(\bar{x}^0),$$

$$f^{00}(mn) = (\pi/l)^2 (\pi/\bar{x}^0)^2 P''_m(\bar{x}) P_n(\bar{x}^0).$$

Интегралы $\Delta_1 L^{(k)}(ij)$ ($k = 1, 2, 4, 5$) таковы:

$$\Delta_1 L^{(1)} = 2S \frac{l^2}{\pi^3} \frac{a_{cq}}{a_0} \int_0^{\pi}\int \bar{x}^0 \Delta_1 B^{(1)}\, d\bar{x} d\bar{x}^0,$$

$$\Delta_1 L^{(2)} = S \frac{l^2}{\pi^3} \frac{a_{cq}}{a_0} \int_0^{\pi}\int \bar{x}^0 \Delta_1 B^{(2)}\, d\bar{x}\, d\bar{x}^0,$$

$$\Delta_1 L^{(4)} = 2S \frac{l^3}{\pi^4}\left(\frac{a_{cq}}{a_0}\right)^2 \int_0^{\pi}\int \bar{x}^0 \int_0^{\bar{x}^0} \tilde{R}\Delta_1 B^{(1)}\, d\bar{y}^0\, d\bar{x}\, dx^0, \tag{3.1.64}$$

$$\Delta_1 L^{(5)} = S \frac{l^3}{\pi^4}\left(\frac{a_{cq}}{a_0}\right)^2 \int_0^{\pi}\int \bar{x}^0 \int_0^{\bar{x}^0} (\tilde{R}_1 - \tilde{R})\, \Delta_1 B^{(2)}\, d\bar{y}^0\, d\bar{x} d\bar{x}^0,$$

где $\Delta_1 B^{(1)} = \Delta_1 T^{11}_{(0)} f^{11} + \Delta_1 T^{00}_{(0)} f^{00} - 2\Delta_1 T^{10}_{(0)} f^{10}$, $\Delta_1 B^2 = (\Delta_1 T^{11}_{(0)} - \Delta_1 T^{00}_{(0)})\,(f^{11} - f^{00})$.

Решение уравнений (3.1.61) строится с помощью процедуры последовательных приближений. Полагая m, n, i, j равными 0, 1, получим уравнения, для которых $\Delta_1 A_{mn} = \Delta_1 D_{mn}/D$, где $\Delta_1 D_{mn}$, D — определители вида (3.1.26), составленные из коэффициентов $F\,(mnij)$ и свободных членов $\Delta_1 L\,(ij)$. Компоненты корректирующего тензора

$$\Delta_1 T^{\alpha\beta}_{(\kappa)} = (1/D)(\Delta_1 D_{00} f^{\alpha\beta}_{(00)} + \Delta_1 D_{01} f^{\alpha\beta}_{(01)} + \Delta_1 D_{10} f^{\alpha\beta}_{(10)} + \Delta_1 D_{11} f^{\alpha\beta}_{(11)}). \tag{3.1.65}$$

Компоненты тензора $\Delta_1\,(T)$ имеют вид

$$\Delta_1 T^{\alpha\beta} = \Delta_1 T^{\alpha\beta}_{(0)} + \Delta_1 T^{\alpha\beta}_{(\kappa)}, \tag{3.1.66}$$

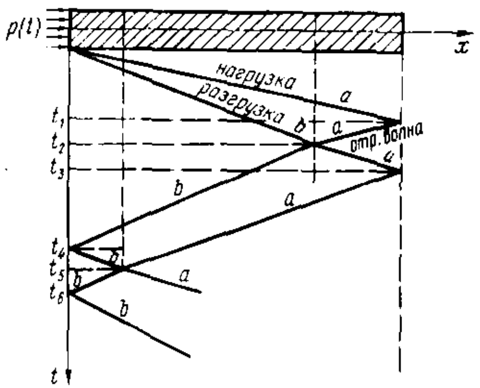

Рис. 73

компоненты тензора кинетических напряжений отраженной волны нагрузки

$$T^{\alpha\beta}_{\text{отр}} = T^{\alpha\beta}_{\text{нагр}} - \Delta_1 T^{\alpha\beta}. \tag{3.1.67}$$

По известным компонентам тензора $(T)_{\text{отр}}$, пользуясь формулами, приведенными в § 3 гл. I, для области возмущений отраженной волны нагрузки стержня, находим:

$$\sigma_{\text{отр}} = (T^{10}T^{10}/T^{00} - T^{11})_{\text{отр}},$$

$$v_{\text{отр}} = (T^{10}/T^{00})_{\text{отр}} a_{cq},\ \rho_{\text{отр}} = T^{00}_{\text{отр}}/a^2_{cq}. \tag{3.1.68}$$

Аналогично изложенному проводится исследование напряженного состояния стержня в других областях возмущений. Картина распространения волн напряжений по длине стержня и их взаимодействие для нагрузки

$$p\,(t) = p_0 \exp\,(-nx^0/v^0),$$

где p_0, n — постоянные нагрузки, приведена на рис. 73.

Итак, для любого момента $t > 0$ можно определить характеристики напряженного состояния и движения частиц тонкого упругопластического и вязкоупругого стержней.

Рассмотрим теперь напряженное состояние квазиодномерного вязкопластического стержня длины l при ударе о жесткую преграду со скоростью v_c [32]. Предполагается, что материал стержня несжимаем, движение частиц проходит в направлении оси, а координата x отсчитывается от преграды вдоль оси в противоположном движению направлении (рис. 74). После удара возмущение охватывает сразу весь стержень, поскольку предполагается, что скорость распространения упругих возмущений в среде бесконечно велика. Следовательно, скорость движения произвольного сечения $v(x, t)$ при $t>0$ отлична от v_c. При деформации ($t > 0$) в стержне образуются две области: а) вязкопластическая, которая характеризуется напряжениями, превосходящими по модулю предельное напряжение τ_0 (имеем вязкопластическое течение); б) жесткая, в которой $\tau_т \leqslant \tau_0$ (эта область движется как твердое тело). Границей областей является координата $x_0(t)$, положение которой определяется из решения задачи; на границе напряжения и скорости непрерывны.

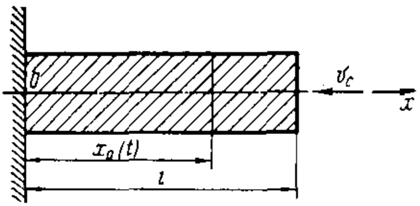

Рис. 74

Движение стержня описывается уравнением

$$\rho \frac{\partial v_2}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x}.$$

Для вязкопластической среды связь между скоростью деформации и напряжением устанавливается зависимостью

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} = \begin{cases} (\tau + \tau_0)/\eta & \text{при } |\tau| \geqslant \tau_0, \\ 0 & \text{при } |\tau| \leqslant \tau_0. \end{cases}$$

Скорость в вязкопластической области удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{\eta}{\rho}, \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0(t), \tag{3.1.69}$$

в жесткой области — уравнению $\partial v_2/\partial x = 0$, $x_0(t) \leqslant x \leqslant l$, интегрируя которое, получим $v_2 = -v_0(t)$, $x_0(t) \leqslant x \leqslant l$.

Уравнение движения в жесткой области имеет вид

$$m \frac{dv_0}{dt} = \rho S_0 [l - x_0(t)] \frac{dv_0}{dt} = \tau S_0 [x_0(t) + l].$$

Из условий непрерывности напряжений и скоростей на $x_0(t)$ следует

$$\frac{dv_0}{dt} = -\frac{\tau_0}{\rho [l - x_0(t)]}, \tag{3.1.70}$$

$$v_2[x_0(t), t] = -v_0(t), \quad \frac{\partial}{\partial x} v_2 [x_0(t), t] = 0.$$

Таким образом, имеют место следующие граничные и начальные условия:

$$v_2(0,\ t) = 0 \text{ при } t > 0,\ v_2(x,\ 0) = -v_0 \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant l,$$

$$v_0(0) = v_c,\ x_0(0) = 0. \qquad (3.1.71)$$

Определим $v_2(x,\ t)$, $v_0(t)$ и $x_0(t)$, удовлетворяющие уравнениям (3.1.69), (3.1.70) и условиям (3.1.71).

Введем безразмерные переменные:

$$\bar{x} = x/l,\ \bar{x}_0 = x_0/l,\ \bar{t} = a^2 t^2/l^2, \bar{v}_2(\bar{x},\ \bar{t}) = -[v_2(x,\ t^2)]/v_c, \bar{v}_0 = v_0/v_c. \qquad (3.1.72)$$

Тогда уравнения (3.1.69), (3.1.70) и условия (3.1.71) преобразуются соответственно к виду:

$$\frac{\partial \bar{v}_2}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial^2 \bar{v}_2}{\partial \bar{x}^2} \text{ при } 0 \leqslant \bar{x} \leqslant \bar{x}_0(t),$$

$$\frac{d\bar{v}_0}{d\bar{t}} = -\frac{\mathrm{Sen}}{1-\bar{x}_0(\bar{t})}; \qquad (3.1.73)$$

$$\bar{v}_2[\bar{x}_0(\bar{t}), \bar{t}] = \bar{v}_0(\bar{t}),\ \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial \bar{x}} = 0,$$

$$\bar{v}_2(0,\bar{t}) = 0 \text{ при } \bar{t} > 0,\ \bar{v}_2(\bar{x},\ 0) = 1 \text{ при } 0 < \bar{x} \leqslant 1,$$

$$\bar{v}_0(0) = 1 \text{ при } \bar{x}_0(0) = 0, \qquad (3.1.74)$$

где $\mathrm{Sen} = \tau_0 l/v_c\eta$ — параметр Сен-Венана.

Согласно методу Кармана—Польгаузена теории пограничного слоя, приближенно функцию $\bar{v}_2(\bar{x},\ \bar{t})$ можно представить в виде

$$\bar{v}_2(\bar{x}, \bar{t}) = \begin{cases} \bar{v}_0(\bar{t})\dfrac{\bar{x}}{\bar{x}_0(\bar{t})}\left(2-\dfrac{\bar{x}}{\bar{x}_0(\bar{t})}\right) & \text{при } 0 \leqslant \bar{x} < \bar{x}_0(\bar{t}), \\ \bar{v}_0(\bar{t}) & \text{при } \bar{x}_0(\bar{t}) \leqslant \bar{x} \leqslant 1. \end{cases} \qquad (3.1.75)$$

Функция (3.1.75) совпадает с полученной в случае применения способа осреднения Слезкина—Тарга. Если функции $\bar{v}_0(t)$ и $\bar{x}_0(t)$ удовлетворяют условиям (3.1.74), то функция (3.1.75) удовлетворяет условиям (3.1.74), но не удовлетворяет точно уравнению (3.1.73). Требуется, чтобы функция $\bar{v}_2(\bar{x},\ \bar{t})$ удовлетворяла уравнению (3.1.73) в среднем, т. е. удовлетворяла бы интегральному соотношению, полученному в результате интегрирования (3.1.73) по всей вязкопластической области. Интегрируя (3.1.73) по частям с учетом (3.1.74), получим

$$\int\limits_0^{\bar{x}_0(\bar{t})} \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial \bar{t}}\, dx = \frac{d}{d\bar{t}}\int\limits_0^{\bar{x}(\bar{t})} \bar{v}_2\, d\bar{x} - \bar{v}_2[\bar{x}_0(\bar{t}),\ \bar{t}]\,\frac{d\bar{x}_0}{dt} =$$

$$= \frac{d}{d\bar{t}}\int\limits_0^{\bar{x}_0(\bar{t})} \bar{v}_2(\bar{x},\ \bar{t})\, d\bar{x} - \bar{v}_0(\bar{t})\frac{d\bar{x}_0}{d\bar{t}} = \int\limits_0^{\bar{x}_0(\bar{t})} \frac{\partial^2 \bar{v}_2}{\partial \bar{x}^2}\, d\bar{x} = -\frac{\partial \bar{v}_2(0,\ \bar{t})}{\partial \bar{x}}.$$

Окончательно интегральное соотношение имеет вид

$$\frac{d}{d\bar{t}} \int\limits_0^{\bar{x}_0(\bar{t})} \bar{v}_2(\bar{x}\,\bar{t})\, d\bar{x} - \bar{v}_0(\bar{t})\, \frac{\overline{dx_0}}{d\bar{t}} = -\frac{\partial}{\partial x}\, v_2(0, \bar{t}),$$

но, в силу (3.1.75),

$$\int\limits_0^{\bar{x}_0(\bar{t})} \bar{v}_2(\bar{x}\,\bar{t})\, \overline{dx} = \frac{2}{3}\, \bar{v}_0(\bar{t})\, \bar{x}_0(\bar{t}),$$

$$\frac{\partial \bar{v}_2(0,\ \bar{t})}{\overline{\partial x}} = \frac{2\bar{v}_0(\bar{t})}{\bar{x}_0(\bar{t})}.$$

Подставляя последние выражения в интегральное соотношение и учитывая (3.1.73), получим

$$\frac{\overline{dx_0}}{d\bar{t}} = \frac{6}{\bar{x}_0(\bar{t})} - \frac{2\,\mathrm{Sen}\,\bar{x}_0(\bar{t})}{[1-\bar{x}_0(\bar{t})]\,\bar{v}_0(\bar{t})}. \qquad (3.1.76)$$

Вводя переменные $\xi = \bar{x}_0^2(\bar{t})$, $\zeta = \bar{v}_0(\bar{t})/\mathrm{Sen}$, преобразуем уравнения (3.1.73) и (3.1.76) соответственно к виду

$$\frac{d\xi}{d\bar{t}} = 12 - \frac{4\xi}{\zeta(1-\sqrt{\xi})}, \quad \frac{d\zeta}{d\bar{t}} = -\frac{1}{1-\sqrt{\xi}}. \qquad (3.1.77)$$

Этим уравнениям соответствуют начальные условия

$$\xi(0) = 0, \quad \zeta(0) = 1/\mathrm{Sen}. \qquad (3.1.78)$$

Разделив первое уравнение на второе, получим следующее уравнение:

$$\frac{d\xi}{d\zeta} = -12(1-\sqrt{\xi}) + \frac{4\xi}{\zeta}, \qquad (3.1.77')$$

исследование которого следует проводить в области ($\zeta \geqslant 0$, $0 \leqslant \xi \leqslant 1$).

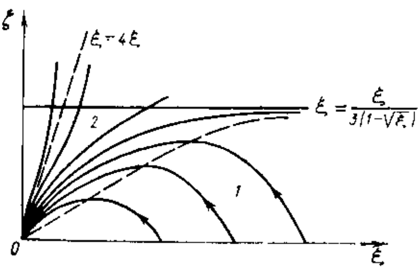

Рис. 75

Уравнению (3.1.77) соответствуют интегральные кривые 1, 2, приведенные на рис. 75. Эти кривые разделяются сепаратрисой на два класса. Интегральные кривые обоих классов выходят из начала координат, являющегося особой точкой типа узла, касаясь прямой $\xi = 4\zeta$. Вблизи начала все кривые удовлетворяют соотношению $\xi = 4\zeta + 0\zeta^4$.

Ординаты кривых первого класса возрастают до максимума (меньшего единицы), расположенного на кривой $\zeta = \xi/[3(1-\sqrt{\xi})]$, затем поворачивают к оси абсцисс и под одинаковым углом пересекают последнюю. Ординаты кривых второго класса монотонно возрастают, пересекая прямую $\zeta = 1$, не возвращаясь в область ($\zeta > 0$, $0 \leqslant \xi \leqslant 1$).

Условиям (3.1.78) соответствуют интегральные кривые первого класса. На рис. 75 стрелками указано направление движения изображающей точки с ростом времени. Качественное исследование поведения интегральных кривых уравнения (3.1.77) позволяет утверждать, что вязкопластическая область вначале движения расширяется, ее размер $\bar{x}_0 = \sqrt{\bar{\xi}(\bar{t})}$ увеличивается до некоторого максимального значения, достигаемого при $\bar{t} = \bar{t}\,(\mathrm{Sen})$, затем начинает убывать (рис. 76,*а*). В момент $\bar{t} = \bar{t}\,(\mathrm{Sen})$ вязкопластическая область исчезает, обращаются в нуль скорости $\bar{v}_0\,(\bar{t})$ жесткой области стержня (рис. 76, *б*), движение стержня прекращается и часть стержня у свободной границы остается недеформированной.

Характеристики движения при малых $\bar{t}$ асимптотически можно представить в виде

$$\bar{x}_0(\bar{t}) = \sqrt{12\bar{t}} + O\left(\sqrt{\bar{t}}\right),$$

$$\bar{v}_0(\bar{t}) = 1 - \bar{t}\,\mathrm{Sen}; \qquad (3.1.79)$$

при $\bar{t}$, близких к $\bar{t}_1 = 1/\mathrm{Sen}$,

$$\bar{x}_0(\bar{t}) = 2\sqrt{\bar{t}_1 - \bar{t}} + O\left(\sqrt{\bar{t}_1 - \bar{t}}\right),$$

$$\bar{v}_0(\bar{t}) = (\bar{t}_1 - \bar{t})\,\mathrm{Sen};$$

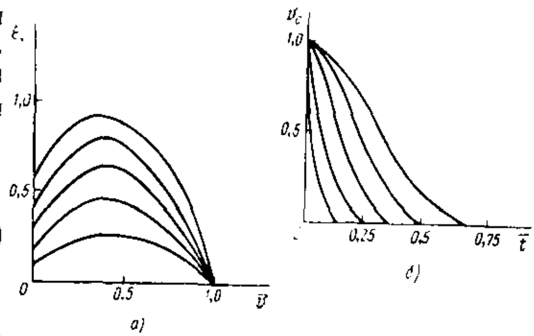

Рис. 76

при очень больших значениях Sen ξ остается достаточно малым, поэтому можно пренебречь $\sqrt{\xi}$ по сравнению с единицей. В этом случае решение уравнений (3.1.77), удовлетворяющее условиям (3.1.78), имеет вид:

$$\xi = 4\left[(\beta - \bar{t}) - \frac{1}{\beta^3}(\beta - \bar{t})^4\right],$$

$$\zeta = \beta - \bar{t}, \ \ \bar{t}_1 = \beta, \ \ \beta = 1/\alpha\,\mathrm{Sen}, \qquad (3.1.80)$$

где $\alpha = (1 - \sqrt{\xi})^{-1}$.

Если известна зависимость α от Sen или $\beta = \beta\,(\mathrm{Sen})$, то (3.1.80) — приближенное решение. Максимальная величина вязкопластической области $\bar{x}_0^*$ и полное время движения $\bar{t}_1$ соответственно равны:

$$\bar{x}_0^* = 1{,}37\sqrt{\alpha\,\mathrm{Sen}} = 1{,}37\sqrt{\beta}, \quad \bar{t}_1 = 1/(\alpha\,\mathrm{Sen}) = \beta. \qquad (3.1.81)$$

Если α равно среднему значению $(1 - \sqrt{\xi})^{-1}$ на всем интервале движения, то β определяется неявно:

$$\alpha = \frac{1}{\beta\,\mathrm{Sen}} = \int_0^1 \frac{dy}{1 - \sqrt{4\beta\,(y - y^4)}},$$

$$\frac{1}{\mathrm{Sen}} = \beta \int_0^1 \frac{dy}{1 - \sqrt{4\beta\,(y - y^4)}}. \qquad (3.1.82)$$

Положив $(\overline{\mid\ \xi})$ равным среднему значению $\overline{\overline{\mid\ \xi}}$ в течение всего времени движения и с достаточной точностью приняв $\alpha = \left|1 - (\overline{\mid\ \xi})\right|^{-1}$, можно найти аналитическое решение. В общем случае уравнения (3.1.77) интегрируются численно.

Из условия несжимаемости материала стержня имеем

$$S = S_0\left(1 + \frac{\partial v_2}{\partial x}\right)^{-1}, \qquad (3.1.83)$$

причем

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} = -2\mathrm{Re}\int\limits_{\bar{t}_*}^{\bar{t}_{**}} \frac{\bar{v}_0(\bar{t})\,[\bar{x}_0(\bar{t}) - \bar{x}]}{(\bar{x}_0(\bar{t}))^2}\,d\bar{t} = -\frac{S - S_0}{S},$$

где $\bar{t}_*$, $\bar{t}_{**}$ — корни уравнения $\bar{x} = \bar{x}(\bar{t})$, $\mathrm{Re} = \rho v_c l/\eta$ — параметр Рейнольдса.

Перейдем к определению напряжений, скорости частиц и плотности материала в области возмущений, считая, что на торце стержня длины $x_0^{\bullet}$ приложено давление $p(t)$. Для этого необходимо построить тензор кинетических напряжений (T), соответствующий области возмущений заданной волны напряжений.

Области возмущений нагрузки соответствует тензор кинетических напряжений $(T)_{\text{нагр}} = (T_0) + (T_{\text{к}})$, причем тензор (T_0) определяется по формуле (3.1.20), тензор $(T_{\text{к}})$ имеет компоненты (3.1.22). Параметры A_{mn} подчинены уравнениям (3.1.23), коэффициенты $F_{11}(mnij)$ и свободные члены $L_1(ij)$ вычисляются соответственно по формулам:

$$F_{11} = \alpha_1^{(b)}F_{11}^{(1)} + \alpha_2^{(b)}F_{11}^{(2)},$$
$$L_1 = \alpha_1^{(b)}L_1^{(1)} + \alpha_2^{(b)}L_1^{(2)} + \frac{p_0}{\lambda}L_1^{(6)} - L_1^{(8)}, \qquad (3.1.84)$$

где

$$\alpha_1^{(b)} = \frac{1}{2\eta} + \frac{\tau_i}{4}\frac{d}{d\tau_i}\left(\frac{1}{\eta}\right),$$
$$\alpha_2^{(b)} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2\eta}\right) - \frac{\tau_i}{6}\frac{d}{d\tau_i}\left(\frac{1}{\eta}\right), \qquad \eta = \mu + \tau_i/\dot{\gamma}_i.$$

Интегралы $F_{11}^{(1)}$, $F_{11}^{(2)}$ находим по формулам (3.1.24′), интегралы $L_1^{(1)}$, $L_1^{(2)}$ — по формулам (3.1.25′), а также по формулам

$$L_1^{(6)} = S\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{l_{\text{п}}}{x_2^0}\right)\int\limits_0^{\pi}\left[P_i\,P_j'' - \left(\frac{x_2^0}{l_{\text{п}}}\right)^2 P_i''\,P_j\right]d\bar{x}\,d\bar{x}^0.$$

Компоненты корректирующего тензора определяются выражениями (3.1.27). Тензор кинетических напряжений $T(_{\text{нагр}})$ имеет компоненты (3.1.28); напряжение, скорость частиц и плотность материала стержня в области возмущений нагрузки вычисляются по формулам (3.1.29).

Области возмущений разгрузки соответствует тензор кинетических напряжений $(T)_{разгр} = (T)_{нагр} - \Delta(T)$, причем $\Delta(T) = \Delta(T_0) + \Delta(T_к)$. Основной тензор $\Delta(T_0)$ известен, его компоненты имеют вид (3.1.37), корректирующий тензор $\Delta(T_к)$ имеет компоненты (3.1.38), параметры ΔA_{mn} которых удовлетворяют уравнениям (3.1.39). Коэффициенты $F_{11}(mnij)$ уравнений и их свободные члены $\Delta L_1(ij)$ находим соответственно по формулам:

$$F_{11} = (1/(2\eta_p))(F_{11}^{(1)} + \alpha^{(p)}F_{11}^{(2)}),$$
$$\Delta L_1 = (1/(2\eta_p))(\Delta L_1^{(1)} + \alpha^{(p)}\Delta L_1^{(2)}) + (\Delta p_0\ \lambda)L_1^{(0)}, \tag{3.1.85}$$

где

$$\alpha^{(p)} = (2/3)(2\eta_p/\lambda - 1).$$

Интегралы $\Delta L_1^{(1)}$, $\Delta L_1^{(2)}$ вычисляются по формулам (3.1.25′), причем $T_{(0)}^{11}$, $T_{(0)}^{10}$, $T_{(0)}^{00}$ *заменяются соответственно на* $\Delta T_{(0)}^{11}$, $\Delta T_{(0)}^{10}$, $\Delta T_{(0)}^{00}$. Компоненты корректирующего тензора имеют вид (3.1.42), компоненты тензора $\Delta(T)$ — вид (3.1.43), компоненты тензора кинетических напряжений разгрузки $(T)_{разгр}$ — вид (3.1.44). Напряжение, скорость частиц и плотность материала стержня в области возмущений разгрузки вычисляются по формулам (3.1.45).

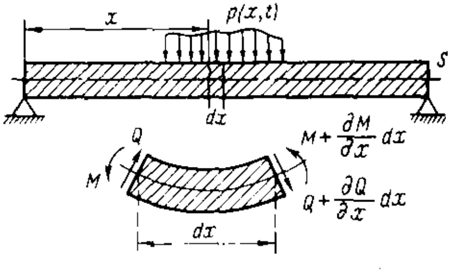

Рис. 77

Итак, изучено напряженное состояние и движение тонкого стержня при продольном ударе.

Поперечным называется удар, которому соответствует приложенное к стержню давление, *изменяющееся по известному закону* как во времени t, так и по координате x ($p = p(x, t)$). Поперечный удар сопровождается изгибным деформированием стержня, возникающие при этом возмущения распространяются в виде изгибных волн напряжений с конечной скоростью c, которая зависит от длины волны Λ.

В простейшей теории поперечного удара по стержню постоянного поперечного сечения предполагается, что движение каждого элемента стержня представляет собой чистый перенос его в направлении, перпендикулярном оси стержня. Силы, действующие на элемент стержня dx, который изгибается в плоскости xOz, показаны на рис. 77. Изгибающий момент M изменяется вдоль стержня и должен уравновешиваться поперечными силами Q, действующими параллельно оси Oz. Вычисляя моменты относительно оси Oy, получим

$$-\frac{\partial M}{\partial x}dx + \left(2Q + \frac{\partial Q}{\partial x}dx\right)\frac{dx}{2} = 0;$$

в пределе при $dx \to 0$ имеем $Q = \partial M/\partial x$.

Уравнение движения элемента в направлении оси Oz имеет вид

$$\rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial Q}{\partial x} + p(x, t),$$

где w — перемещение в направлении оси Oz (прогиб стержня). При изгибе стержня волокна, расположенные выше нейтральной линии, сжаты, ниже ее — растянуты (рис. 77). По определению,

$$M = \int\limits_S \sigma z dS,$$

причем $\sigma = \sigma(e)$. При малых деформациях $e = -z\varkappa$, $\varkappa = -\partial^2 w/\partial x^2$ для упругого стержня $\sigma = Ee$ выражения изгибающего момента и поперечной силы таковы:

$$M = -EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad Q = -EJ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3},$$

где J — момент инерции поперечного сечения стержня. Подставляя значения M и Q в уравнение движения, имеем

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -a_0^2 K^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \bar{p}, \tag{3.1.86}$$

где $a_0^2 = E/\rho$, $K^2 = J/S$, $\bar{p} = p/\rho S$.

Уравнение (3.1.86) волновое, причем непосредственная подстановка показывает, что решение $w = f(x - a_0 t)$ или $w = f(x + a_0 t)$ не удовлетворяют уравнению, следовательно, изгибное возмущение произвольной формы не может распространяться вдоль стержня без дисперсии.

Пусть вдоль стержня распространяется синусоидальная изгибная волна со скоростью c, тогда $w = D\cos(qt - fx)$, где D — амплитуда, $q = 2\pi c/\Lambda$, $f = 2\pi/\Lambda$. Дифференцируя последнее выражение и подставляя в уравнение (3.1.86), находим скорость распространения изгибной волны напряжений:

$$c = 2\pi K a_0/\Lambda, \tag{3.1.87}$$

следовательно, скорость обратно пропорциональна длине волны (если длина волны бесконечно мала, то скорость c бесконечно велика). Скорость распространения энергии импульса изгибных возмущений равна групповой скорости c_q, являющейся скоростью распространения некоторой совокупности волн, длины которых ограничены значением Λ. При этом имеет место зависимость

$$c_q = c - \Lambda \frac{dc}{d\Lambda},$$

откуда

$$c_q = c + \Lambda \frac{2\pi K a_0}{\Lambda^2} = 2c,$$

т. е. групповая скорость изгибных волн напряжений бесконечно велика для импульса, состоящего из бесконечно коротких волн, однако это не соответствует физическому смыслу. Причины, по которым приведенные рассуждения неприменимы, следующие: 1) предположение, что движение представляет собой чистый перенос в направлении оси Oz, неправильно для коротких длин волн, так как в этом случае следует учитывать вращательное движение сечений стержня; 2) предположение, что продольные сечения элементов стержня сохраняют прямоугольную форму во время движения, неверно для волн, длина которых сравнима с толщиной стержня. Для устранения первой причины необходимо учитывать инерцию вращения элемента, что приводит к соотношению

$$Q = \frac{\partial M}{\partial x} + \rho J \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2},$$

в результате подстановки которого в уравнение движения получаем уравнение Релея [39]

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -a_0^2 K^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + K^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \bar{p}. \qquad (3.1.88)$$

Аналогично изложенному, имеем

$$c = a_0 (1 + \Lambda^2/(4\pi^2 K^2))^{-1/2},$$
$$c_g = a_0 (1 + \Lambda^2/(4\pi^2 K^2))^{-1/2} (1 + 1/(1 + 4\pi^2 K^2/\Lambda^2)). \qquad (3.1.88)$$

При малом значении K/Λ формулы (3.1.88′) принимают вид (3.1.87); при больших значениях K/Λ скорости c и c_g стремятся к a_0, поэтому уравнение (3.1.88) больше соответствует физической сущности рассматриваемой задачи. Если учесть поправку на сдвиг элемента, которая сравнима с поправкой на инерцию вращения, то приходим к уравнению Тимошенко [57]

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -a_0^2 K^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - K^2 (1+\varepsilon) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{\varepsilon K^2}{a_0^2} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + \bar{p}, \qquad (3.1.89)$$

где $\varepsilon = 2R'/(1+\nu)$, R' — константа формы поперечного сечения стержня.

Упругое состояние стержня при поперечном ударе соответствует очень малым скоростям, увеличение скорости удара приводит к переходу стержня в упругопластическое состояние, которому соответствует зависимость $\sigma = E(1-\omega)e = E(1-\omega)z\varkappa$. В этом случае выражение для изгибающего момента таково: $M = E(J - I_1)\varkappa$; дифференцируя, имеем:

$$Q = \frac{\partial M}{\partial x} = EJ \frac{\partial \varkappa}{\partial x} - E(I_1 + I_2 \varkappa) \frac{\partial \varkappa}{\partial x},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = EJ \frac{\partial^2 \varkappa}{\partial x^2} - E\left[I_1 \frac{\partial^2 \varkappa}{\partial x^2} + I_2\left(\varkappa \frac{\partial^2 \varkappa}{\partial x^2} + 2\left(\frac{\partial \varkappa}{\partial x}\right)^2\right) + I_3\left(\varkappa\left(\frac{\partial \varkappa}{\partial x}\right)^2\right)\right].$$

Уравнение движения принимает вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -a_0^2 K^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - a_0^2 \bar{p}_* + \bar{p}, \qquad (3.1.90)$$

где

$$\bar{p}_* = K_1^2 \frac{\partial^2 \varkappa}{\partial x^2} + K_2^2 \left(\varkappa \frac{\partial^2 \varkappa}{\partial x^2} + 2 \left(\frac{\partial \varkappa}{\partial x} \right)^2 \right) + K_3^2 \left(\varkappa \left(\frac{\partial \varkappa}{\partial x} \right)^2 \right),$$

$$K_i^2 = I_i / S \quad (i = 1,\ 2,\ 3),$$

$$I_1 = \int_S \omega z^2\, dS, \quad I_2 = \int_S \frac{d\omega}{de} z^3\, dS, \quad I_3 = \int_S \frac{\partial^2 \omega}{\partial e^2} z^4\, dS.$$

В момент t_p начинается разгрузка, для которой характерна зависимость $\sigma = (\sigma^{\text{н}} - Ez\varkappa^{\text{н}}) + Ez\varkappa$ (индексом «н» отмечены напряжение σ и изменение кривизны $\varkappa$ при нагрузке в момент t_p).

Изгибающий момент M и поперечная сила Q соответственно равны

$$M = M^{\text{н}} - EJ\,(\varkappa^{\text{н}} - \varkappa),$$

$$Q = \frac{\partial M^{\text{н}}}{\partial x} - EJ \left(\frac{\partial \varkappa^{\text{н}}}{\partial x} - \frac{\partial \varkappa}{\partial x} \right);$$

уравнение движения принимает вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -a_0^2 K^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \bar{p}_{\text{н}} + \bar{p}, \tag{3.1.91}$$

где

$$M^{\text{н}} = \int_S \sigma^{\text{н}} z\, dS,$$

$$\bar{p}_{\text{н}} = -a_0^2 K^2 \frac{\partial^2 \varkappa^{\text{н}}}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho S} \frac{\partial^2 M^{\text{н}}}{\partial x^2}.$$

Таким образом, поперечный удар по тонкому стержню приближенно описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -a_0^2 K^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \tilde{p}, \tag{3.1.92}$$

причем для упругого стержня $\tilde{p} = \bar{p}$, для упругопластического стержня при нагрузке $\tilde{p} = \bar{p} + \bar{p}_*$, при разгрузке $\tilde{p} = \bar{p} + \bar{p}_{\text{н}}$. Уточненные уравнения движения Релея и Тимошенко имеют сложную структуру и для стержней длинных и средней длины дают незначительную поправку к решению уравнения (3.1.92), поэтому ограничимся рассмотрением только указанного уравнения.

Граничные условия для уравнения (3.1.92) следующие:

а) для заделанного конца $w = 0$, $\partial w/\partial x = 0$;

б) для свободно опертого конца $w = 0$, $\partial^2 w/\partial x^2 = 0$;

в) для свободного конца $\partial^2 w/\partial x^2 = 0$, $\partial^3 w/\partial x^3 = 0$. (3.1.93)

Решение уравнения (3.1.92) с учетом соответствующих граничных условий следует искать в виде разложения по собственным функциям упругих колебаний стержня:

$$w(x,\ t) = \sum_i q_i(x)\, X_i(x). \tag{3.1.94}$$

Таблица 2*

Собственные функции и уравнения частот

Граничные условия	$X_i(x)$	L	Уравнение частот
Шарнирное опирание на концах	$\sin(i\pi x/l)$	$l/2$	$\sin\beta_i l=0$ $\beta_i^2=\omega_i/(a_0 k)$
Заделки на концах	$\frac{\operatorname{sh}\beta_i(x-l/2)}{\operatorname{sh}\beta_i(l/2)}-\frac{\sin\beta_i(x-l/2)}{\sin\beta_i(l/2)}$	l	$\cos\beta_i l\operatorname{ch}\beta_i l=1$
Защемление на конце $x=0$	$\frac{\operatorname{ch}\beta_i x-\cos\beta_i x}{\operatorname{ch}\beta_i l+\cos\beta_i l}-\frac{\operatorname{sh}\beta_i x-\sin\beta_i x}{\operatorname{sh}\beta_i l+\sin\beta_i l}$	$l\frac{\cos^2\beta_i l}{\sin^4\beta_i l}$	$\cos\beta_i l\operatorname{ch}\beta_i l=1$
Свободное опирание $x=0$, заделка $x=l$	$\frac{\operatorname{sh}\beta_i x}{\operatorname{sh}\beta_i l}-\frac{\sin\beta_i x}{\sin\beta_i l}$	l	$\operatorname{tg}\beta_i l=\operatorname{th}\beta_i l$
Свободные концы	$\frac{\operatorname{ch}\beta_i x+\cos\beta_i x}{\operatorname{ch}\beta_i l-\cos\beta_i x}-\frac{\operatorname{sh}\beta_i x+\sin\beta_i x}{\operatorname{sh}\beta_i l-\sin\beta_i l}$	$l\frac{\cos^2\beta_i l}{\sin^4\beta_i l}$	$\cos\beta_i l\operatorname{ch}\beta_i l=1$

*Таблица заимствована из книги [6].

Здесь $X_i(x)$ — собственные функции, удовлетворяющие уравнению

$$X_i^{IV}-\frac{\omega_i^2}{a_0^2K^2}X_i=0 \tag{3.1.95}$$

и граничным условиям типа (3.1.93), выражения которых в зависимости от типа граничных условий приведены в табл. 2, там же приведены уравнения частот.

Неизвестные функции $q_i(t)$ подчинены уравнению $\ddot{q}_i+\omega_i^2q_i=\tilde{p}_i$ и начальным условиям задачи: $w=w_0(x)$, $\dot{w}=\dot{w}_0(x)$ при $t=0$. Эти функции определяются методом последовательных приближений, суть которого сводится к следующему. Пусть известно k-е приближение $q_i^{(k)}(t)$, $\bar{p}_*^{(k)}(x, t)$ или $\bar{p}_н^{(k)}(x, t)$, тогда $(k+1)$-е приближение

$$q_i^{(k+1)}(t) = w_i(0)\cos\omega_i t + \frac{\dot{w}_i(0)}{\omega_i}\sin\omega_i t +$$

$$+ \frac{1}{\omega_i}\int_0^t \tilde{p}_i^{(k)}(t')\sin\omega_i(t-t')\,dt', \qquad (3.1.96)$$

где

$$w_i(0) = \int_0^l w_0(x)X_i(x)\,dx/L, \quad \dot{w}_i(0) = \int_0^l \dot{w}_0(x)X_i(x)\,dx/L,$$

$$\tilde{p}_i^{(k)}(t) = \int_0^l \tilde{p}^{(k)}(x, t)X_i(x)\,dx/L, \quad L = \int_0^l (X_i(x))^2\,dx.$$

В итоге прогиб стержня при поперечном ударе

$$w^{(k)}(x, t) = \sum_i \left[w_i(0)\cos\omega_i t + \frac{\dot{w}_i(0)}{\omega_i}\sin\omega_i t + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\omega_i}\int_0^t \tilde{p}_i^{(k)}(t')\sin\omega_i(t-t')\,dt' \right] X_i(x). \qquad (3.1.97)$$

Первым приближением является упругое решение задачи: при сосредоточенном ударе в точке $x = C$

$$w^{(1)}(x, t) = \sum_i \left[w_i(0)\cos\omega_i t + \frac{\dot{w}_i(0)}{\omega_i}\sin\omega_i t + \right.$$

$$\left. + \frac{X_i(c)}{\rho S\omega_i L}\int_0^t P(t')\sin\omega_i(t-t')\,dt' \right] X_i(x);$$

при распределенном ударе

$$w^{(1)}(x, t) = \sum_i \left[w_i(0)\cos\omega_i t + \frac{\dot{w}_i(0)}{\omega_i}\sin\omega_i t + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\omega_i}\int_0^t \bar{p}_i(t')\sin\omega_i(t-t')\,dt' \right] X_i(x).$$

Контактная сила $P(t)$, возникающая при ударе тела массы m со скоростью v_c, определяется из условия равенства перемещений тела и стержня, рассмотренного в § 4 гл. 2. Сближение α является разностью между перемещением тела $w_т$ и перемещением стержня $w(c)$ в точке контакта $x = c$, поэтому

$$\alpha = w_т - w(c) = v_c t - \frac{1}{m}\int_0^t dt\int_0^t P(t')\,dt' - w(c).$$

Это соотношение можно рассматривать как интегральное уравнение для контактной силы P, если $w(c)$ заменить выражением

$$w(c) = \frac{1}{\rho S} \sum_i \frac{X_i^2(c)}{L\omega_i} \int_0^t P(t') \sin\omega_i (t - t')\, dt',$$

а сближение α принять равным $\alpha = (P/K_2)^{2/3}$. В этом случае имеем интегральное уравнение

$$\left(\frac{P}{K_2}\right)^{2/3} = v_c\, t - \frac{1}{m} \int_0^t dt \int_0^t P(t')\, dt' -$$

$$- \frac{1}{\rho S} \sum_i \frac{X_i^2(c)}{L\omega_i} \int_0^t P(t') \sin\omega_i (t - t')\, dt', \qquad (3.1.98)$$

решение которого можно строить различно, в частности методом конечных разностей, используя ЭВМ.

Приведенное решение задачи о поперечном ударе предполагает, что волна нагрузки распространилась во всем стержне, т. е. оно характеризует напряженно-деформированное состояние стержня с момента $t_m = \max(c/a_0(l - c)/a_0) > 0$. Изучение напряженно-деформированного состояния стержня в интервале $(0, t_m)$ можно проводить, пользуясь полученным решением, если длину стержня считать переменной, равной $2a_0t$, а его концы — закрепленными ($w = 0$ и $\partial w/\partial x = 0$), так как перед фронтом волны нагрузки стержень находится в покое. В этом случае собственные функции $X_i(x)$ удовлетворяют уравнению (3.1.95) и имеют вид, приведенный в табл. 2, где $l = 2a_0t$; остальные вычисления по определению функций $q_i(t)$ и силовой функции $P(t)$ проводятся аналогично изложенному выше с учетом зависимостей $l = 2a_0t$ и $c = a_0t$.

Изложенным методом задача о поперечном ударе по тонкому стержню прямоугольного поперечного сечения для материала с линейным упрочнением $\omega = (1 - E'/E)(1 - e_т/e)$, где E' — модуль упрочнения, подробно рассмотрена М. П. Галиным [5], Х. А. Рахматулиным и Ю. А. Демьяновым [35]. Представляют определенный интерес решения ряда частных задач о поперечном ударе по стержню, приведенные в книге В. Гольдсмита [6].

§ 2. Плита при взрыве и ударе

Исследуем напряженное состояние плиты, находящейся в условиях импульсивного нагружения. Импульсивному нагружению соответствует почти мгновенное возрастание давления до максимума с последующим уменьшением его до нуля за короткий промежуток времени, исчисляемый микро - и миллисекундами. При этом предполагается известным закон изменения давления во времени t и по координатам x^i ($i = 1, 2$); $p = p(x^i, t)$ $(0 \leqslant t \leqslant t_n)$, где t_n — продолжительность нагружения (такое нагружение реализуется при взрыве и ударе).

Плитой называется деформируемое тело, толщина h которого меньше других его размеров L. Форма плиты произвольна и определяется геометрией соответствующего ей контура. В зависимости от величины отношения h/L плита может быть тонкой (если $h/L \ll 1$) и толстой (если $h/L < 1$).

Система координат (α, β, z) выбирается в зависимости от формы плиты и загруженной области так, чтобы ее начало и координатные линии α и β находились на одной из ограничивающих плоскостей; координатная линия z направлена по нормали к указанной плоскости.

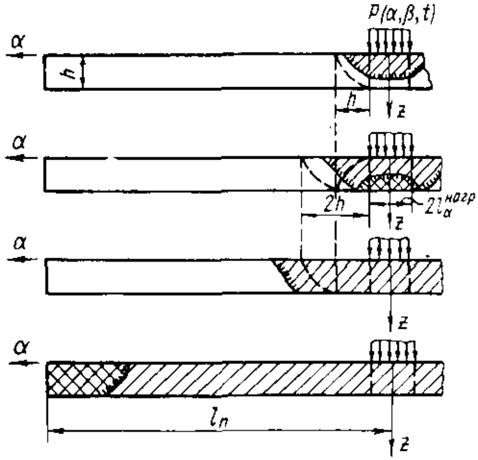

Рис. 78

При импульсивном нагружении в плите распространяются волны напряжений нагрузки, разгрузки и отраженные волны; образуются области возмущений, в которых материал плиты находится в напряженном состоянии, которое характеризуется тензором напряжений (σ); частицы среды в движении (вектор скорости $\mathbf{v}$), плотность материала ρ. Этим характеристикам состояния плиты в области возмущений соответствует тензор кинетических напряжений (T), принимаемый в дальнейшем за основную искомую величину. Зная (T) и пользуясь формулами, приведенными в § 2 гл. 2, находим тензор напряжений (σ), вектор скорости частиц $\mathbf{v}$ и плотность материала ρ в области возмущений.

При взрыве и ударе без внедрения в плите образуются только области возмущений, в которых распространяются волны напряжений, тогда как при ударе с внедрением в плите образуются область внедрения с пограничным слоем и области возмущений, в которых распространяются волны напряжений различной природы.

Процесс распространения волн напряжений можно разделить на периоды. Первый период соответствует началу нагружения и распространению волн нагрузки и разгрузки по толщине плиты, проходящему аналогично распространению волн в полупространстве, занятом средой. Второй период соответствует началу отражения волны нагрузки от тыльной поверхности плиты, включает распространение отраженных волн напряжений в пределах толщины плиты, а также откольное явление на тыльной поверхности и взаимодействие волн напряжений внутри плиты. Третий период соответствует распространению волн напряжений вдоль плиты с некоторой конечной скоростью c до момента достижения фронтом волны боковой поверхности плиты. Четвертый период охватывает явление отражения волны напряжений от боковой поверхности и распространение отраженной волны к центру плиты и т. д.; описанный процесс показан на рис. 78. В дальнейшем вся плита находится в напряженном состоянии и совершает колебательное движение.

Материал плиты в каждом из указанных периодов процесса может находиться в упругом, упругопластическом, пластическом, вязком, вязкоупругом, вязкопластическом и других состояниях в зависимости от его физико-механических свойств.

Для первого и второго периодов процесса распространения волн напряжений в плите построение тензора кинетических напряжений (T) в областях возмущений волн нагрузки, разгрузки и отраженных волн подробно рассмотрено в § 2 и 3 гл. 2 при условии линейной зависимости $\sigma = 3Ke$. При больших давлениях зависимость $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ сложнее, поэтому рассмотрим более общие определяющие уравнения, представленные уравнением состояния среды (материала плиты) $\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$ и девиаторным соотношением

$$D_{kj}(\varepsilon) = \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i^*} \frac{1}{\cos 3\alpha} \Big\{ D_{kj}(\sigma^*) \cos(2\alpha + \beta) + \\ + \frac{3\sin(\alpha - \beta)}{\sigma_i^*} \left[D_{k\gamma}(\sigma^*) D_j^{\gamma}(\sigma^*) - \frac{2}{9} \sigma_i^{*2} g_{kj} \right] \Big\}, \tag{3.2.1}$$

где $\sigma_{ij}^* = \sigma_{kj}(g_k^i + g^{\gamma i} \nabla_\gamma u_k)$ — обобщенные напряжения; $\varepsilon_i = (1 + \varphi)\sigma_i^*/3G$ соответствует динамической диаграмме $\sigma_i \div \varepsilon_i$ материала; α и β — углы наклона главных осей гиперболоидов девиаторов (D_{σ^*}) и (D_ε).

Импульсивное нагружение, реализуемое при взрыве и ударе, очевидно, близко к простому нагружению, для которого можно считать $\alpha = \beta$, тогда

$$D_{kj}(\varepsilon) = \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i^*} D_{kj}(\sigma^*). \tag{3.2.1'}$$

Фиктивному телу соответствуют следующие определяющие уравнения: при нагрузке

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}(T), \quad D_{\alpha\beta}(\tilde{\varepsilon}) = \frac{3\tilde{\varepsilon}_i}{2T_i} D_{\alpha\beta}(T), \quad \tilde{\varepsilon}_i = \frac{1+\varphi}{3G} T_i, \tag{3.2.2}$$

при разгрузке

$$\Delta\tilde{\varepsilon} = \Delta\tilde{\varepsilon}(\Delta T), \quad \Delta D_{\alpha\beta}(\tilde{\varepsilon}) = \frac{1}{2G} \Delta D_{\alpha\beta}(T).$$

Из уравнений следуют физические соотношения: при нагрузке

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1+\varphi}{2G} T_{\alpha\beta} + \left(\tilde{\varepsilon}(T) - \frac{1+\varphi}{2G} T\right) g_{\alpha\beta}; \\ &\text{при разгрузке} \\ &\Delta\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2G} \Delta T_{\alpha\beta} + \left(\Delta\tilde{\varepsilon}(\Delta T) - \frac{1}{2G} \Delta T\right) g_{\alpha\beta}. \end{aligned}\right\} \tag{3.2.3}$$

В области возмущений нагрузки тензор кинетических напряжений

$$(T)_{\text{нагр}} = (T_0) + (T_\text{к}). \tag{3.2.4}$$

Основной ($T_о$) и корректирующий ($T_к$) тензоры при взрыве и ударе без внедрения аналогичны принятым в § 2 и 3 гл. 2, функции состояния α_1 и α_2 определяются по следующим формулам:

$$\alpha_1 = 1 + \varphi + T_i \frac{d\varphi}{dT_i},$$

$$\alpha_2 = \frac{2}{3}\left[G\left(\frac{\widetilde{\varepsilon}(T)}{T} + \frac{\partial}{\partial T}\widetilde{\varepsilon}(T)\right) - \alpha_1 \right]. \tag{3.2.5}$$

Рассмотрим теперь построение тензоров ($T_о$) и ($T_к$) в цилиндрической системе координат (r, θ, z, x^0), поместив начало O в центр загруженной области (рис. 79).

При построении указанных тензоров воспользуемся общим решением (2.5.2) уравнений равновесия фиктивного тела, считая, что текущие координаты изменяются в следующих пределах:

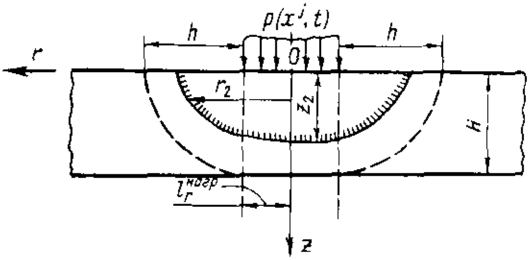

Рис. 79

$$0 \leqslant r \leqslant r_2,\quad 0 \leqslant \theta \leqslant \theta_2,$$
$$0 \leqslant z \leqslant z_2,\quad 0 \leqslant x^0 \leqslant x^0_2, \tag{3.2.6}$$

где $\theta_2 = 2\pi$, $x^0_2 = h$, $z_2 = a_0 x^0/a_{cq}$, $r_2 = l_r^{нагр} + \sqrt{(a_0 x^0/a_{cq})^2 - z^2}$.

Для основного тензора ($T_о$) имеем следующие граничные условия:

$$T^{3\beta} = Q^{3\beta}_{(1)} \text{ при } z = 0, \tag{3.2.7}$$
$$T^{0\beta} = Q^{0\beta}_{(1)} \ (\beta = 1, 2, 3, 0) \text{ при } x^0 = 0.$$

Для координаты z функции нагрузок $Q^{3\beta}_{(1)}$ таковы:

$$Q^{3j}_{(1)} = (\rho v^3 v^j)_{z=0} - p^{3j},\quad Q^{30}_{(1)} = (\rho v^3 a_{cq})_{z=0} \ (j = 1, 2, 3), \tag{3.2.8}$$

где p^{3j} (r, θ, t) — действующая импульсивная нагрузка; v^j (r, θ, t) — распределения скоростей частиц на поверхности, определяемые из решения задачи о взрыве или задачи о соударении.

Функции кинетических напряжений

$$\Pi^{(0)}_{\alpha 3} = (1/2)(1 + \cos \bar{z}) F_{\alpha 3}, \tag{3.2.9}$$

где $\bar{z} = \pi z/z_2 = \pi z/(a_0 x^0/a_{cq})$ — безразмерная координата.

Функции $F_{\alpha 3}$, входящие в (3.2.9), удовлетворяют следующим уравнениям:

$$2\frac{\partial^2 F_{13}}{\partial r \partial\theta} + \left(r^2 \frac{\partial^2 F_{03}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 F_{03}}{\partial\theta^2} + r\frac{\partial F_{03}}{\partial r}\right) = 2r^2 Q^{33}_{(1)},$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial F_{33}}{\partial r} - \frac{\partial F_{23}}{\partial\theta}\right) + r^2 \frac{\partial^2 F_{23}}{\partial x^{02}} = -2r^2 Q^{31}_{(1)}, \tag{3.2.10}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial F_{33}}{\partial r}-\frac{\partial F_{23}}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{r}\left(\frac{\partial F_{33}}{\partial r}-\frac{\partial F_{23}}{\partial\theta}\right)-\frac{\partial^2 F_{33}}{\partial x^{0 2}}=2r^2 Q^{32}_{(1)},$$

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\left(\frac{\partial F_{23}}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial F_{33}}{\partial\theta}+\frac{1}{r}F_{23}\right)=2Q^{30}_{(1)}$$

и граничным условиям:

$$F_{\alpha 3}=0 \text{ при } r=r_\gamma,$$

$$F_{23}=0,\ \frac{\partial F_{23}}{\partial x^0}=0,\quad F_{33}=0,\quad \frac{\partial F_{33}}{\partial x^0}=0 \text{ при } x^0=x^0_\gamma; \tag{3.2.10'}$$

по координате θ функции периодические (период 2π).

В силу произвольности искомых функций из первого уравнения (3.2.10) и граничных условий (3.2.10′) следует

$$F_{03}=0,\quad F_{13}=\int_0^\theta\int_0^r r^2 Q^{33}_{(1)}\,dr\,d\theta. \tag{3.2.11}$$

Для функций F_{23} и F_{33} имеем уравнения:

$$r^2\frac{\partial^2 F_{23}}{\partial r^2}+3r\frac{\partial F_{23}}{\partial r}+F_{23}+\frac{\partial^2 F_{23}}{\partial\theta^2}-r^2\frac{\partial^2 F_{23}}{\partial x^{0 2}}=A_{31},$$

$$\frac{\partial^2 F_{33}}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial F_{33}}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F_{33}}{\partial\theta^2}-\frac{\partial^2 F_{33}}{\partial x^{0 2}}=B_{31}, \tag{3.2.12}$$

где

$$A_{31}=2\left(r^2 Q^{31}_{(1)}+\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\int_0^{x^0}Q^{30}_{(1)}\,dx^0\right)\right),$$

$$B_{31}=2\left(r^2 Q^{32}_{(1)}+\frac{\partial}{\partial\theta}\int_0^{x^0}Q^{30}_{(1)}\,dx^0\right).$$

Решение первого из уравнений (3.2.12) представим в виде ряда Фурье по собственным функциям $V_{pm}(r,\theta)$:

$$F_{23}=\sum_{p,m}X_{pm}(x^0)\,V_{pm}(r,\theta), \tag{3.2.13}$$

полагая, что A_{31} можно представить в виде ряда Фурье по этим же собственным функциям:

$$\frac{1}{r^2}A_{31}=\sum_{p,m}A^{(pm)}_{31}(x^0)\,V_{pm}(r,\theta), \tag{3.2.14}$$

где

$$A^{(pm)}_{31}=\int_0^{2\pi}\int_0^{r_2}\frac{1}{r^2}A_{31}V_{pm}\,dr\,d\theta\bigg/\int_0^{2\pi}\int_0^{r_2}(V_{pm})^2\,dr\,d\theta. \tag{3.2.14'}$$

Подставляя (3.2.13) и (3.2.14) в (3.2.12), получим уравнения для функций $X_{pm}(x^0)$:

$$\ddot{X}_{pm} + \varkappa_{pm}^2 X_{pm} = -A_{31}^{(pm)},$$

решением которых являются функции

$$X_{pm}(x^0) = \frac{1}{\varkappa_{pm}} \int_0^{x^0} A_{31}^{(pm)}(\xi) \sin \varkappa_{pm} (\xi - x^0)\, d\xi.$$

Собственные функции $V_{pm}(r, \theta)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{3}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} V + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \varkappa^2 V = 0$$

и граничным условиям: $V = 0$ при $r = r_\gamma$; по координате θ функции периодические (период 2π). Отсюда следуют две системы собственных функций:

$$V_{pm}^{(1)} = (1/r) J_m (r\varkappa_{pm}) \cos m\theta$$

и

$$V_{pm}^{(2)} = (1/r) J_m (r\varkappa_{pm}) \sin m\theta,$$

которым соответствуют собственные значения $\varkappa_{pm}$ ($p = 0, 1, 2, \ldots$), определяемые как корни характеристического уравнения $J_m(r_2\varkappa) = 0$. В итоге находим функцию

$$F_{23} = \sum_{p,m} \frac{1}{\varkappa_{pm}} \int_0^{x^0} \left(A_{31}^{1(pm)}(\xi) \cos m\theta + \right.$$

$$\left. + A_{31}^{2(pm)}(\xi) \sin m\theta\right) \sin \varkappa_{pm} (\xi - x^0)\, d\xi \, \frac{1}{r} J_m (r\varkappa_{pm}). \qquad (3.2.15)$$

Решение второго из уравнений (3.2.12) строится аналогично, в результате имеем

$$F_{33} = \sum_{p,m} \frac{1}{\omega_{pm}} \int_0^{x^0} \left(B_{31}^{1(pm)}(\xi) \cos m\theta + \right.$$

$$\left. + B_{31}^{2(pm)}(\xi) \sin m\theta\right) \sin \omega_{pm} (\xi - x^0)\, d\xi\, r J_{\sqrt{1+m^2}} (r\omega_{pm}), \qquad (3.2.16)$$

где

$$B_{31}^{1(pm)} = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{r_2} B_{31}\, r J_{\sqrt{1+m^2}} (r\omega_{pm}) \cos m\theta\, dr\, d\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^{r_2} \left(r J_{\sqrt{1+m^2}} (r\omega_{pm}) \cos m\theta\right)^2 dr\, d\theta},$$

$$(3.2.16')$$

$$B_{31}^{2(pm)} = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{r_2} B_{31}\, r J_{\sqrt{1+m^2}} (r\omega_{pm}) \sin m\theta\, dr\, d\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^{r_2} \left(r J_{\sqrt{1+m^2}} (r\omega_{pm}) \sin m\theta\right)^2 dr\, d\theta}.$$

Собственные значения ω_{pm} — корни характеристического уравнения

$$J_{\sqrt{1+m^2}}(r\omega) = 0.$$

Для координаты x^0 функции нагрузок $Q^{0\beta}_{(1)}$ таковы:

$$Q^{0j}_{(1)} = (\rho a_{cq} v^j)_0, \quad Q^{00}_{(1)} = \rho_0 a^2_{cq}; \tag{3.2.17}$$

функции кинетических напряжений $\Pi^{(0)}_{\alpha 0}$ приняты в следующем виде:

$$\Pi^{(0)}_{10} = \frac{1}{2}(1+\cos\bar{x}^0)\,F_{10} + \frac{1}{2}\int_0^{x^0}(1+\cos\bar{x}^0)\,dx^0\,\Psi_{10},$$

$$\Pi^{(0)}_{20} = \frac{1}{2}\int_0^{x^0}(1+\cos\bar{x}^0)\,dx^0\,\Psi_{20}, \tag{3.2.18}$$

$$\Pi^{(0)}_{30} = \frac{1}{2}\int_0^{x^0}(1+\cos\bar{x}^0)\,dx^0\,\Psi_{30},$$

где $\bar{x}^0 = \pi x^0/x^0_2 = x^0\pi/h$ — безразмерная координата.

Функции F_{10}, Ψ_{j0} ($j = 1, 2, 3$), входящие в (3.2.18), подчинены уравнениям:

$$\frac{\partial^2 F_{10}}{\partial r\partial\theta} = -r^2 Q^{00}_{(1)},$$

$$\frac{\partial\Psi_{10}}{\partial\theta} + r^2\frac{\partial\Psi_{20}}{\partial z} = 2r^2 Q^{01}_{(1)},$$

$$\frac{\partial\Psi_{10}}{\partial r} + \frac{1}{r}\Psi_{10} + \frac{\partial\Psi_{30}}{\partial z} = 2r^2 Q^{02}_{(1)}, \tag{3.2.19}$$

$$r^2\frac{\partial\Psi_{20}}{\partial r} + r\Psi_{20} + \frac{\partial\Psi_{30}}{\partial\theta} = 2r^2 Q^{03}_{(1)} \tag{3.2.19'}$$

и следующим граничным условиям:

$$F_{10} = 0, \ \Psi_{10} = 0 \ \text{при} \ r = r_\gamma,$$
$$\Psi_{20} = 0, \ \Psi_{30} = 0 \ \text{при} \ z = z_\gamma;$$

по координате θ функции периодические (период 2π).

Решая уравнения (3.2.19) совместно с граничными условиями (3.2.19'), находим:

$$F_{10} = -\int_0^{\theta}\int_0^{r} r^2 Q^{00}_{(1)}\,dr\,d\theta,$$

$$\Psi_{10} = \int_0^{\theta} r^2(2Q^{01}_{(1)} - \psi)\,d\theta, \quad \Psi_{20} = \int_0^{z}\psi\,dz,$$

$$\Psi_{30} = \int_0^{z}\left[2r^2 Q^{02}_{(1)} - \int_0^{\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right)\left(r^2(2Q^{01}_{(1)} - \psi)\right)d\theta\right]dz, \tag{3.2.20}$$

причем

$$\psi=\left(\frac{r_1}{r}\right)^2\int\limits_{r_1}^{r}\left[\frac{3}{r}Q_{(1)}^{01}+\left(\frac{\partial Q_{(1)}^{01}}{\partial r}-\frac{\partial Q_{(1)}^{02}}{\partial\theta}+\frac{\partial Q_{(1)}^{03}}{\partial z}\right)\right]\left(\frac{r}{r_1}\right)^2 dr.$$

Полные функции кинетических напряжений основного тензора имеют вид:

$$\Pi_1^{(0)}=\frac{1}{2}(1+\cos\bar{z})F_{13}+\frac{1}{2}(1+\cos\bar{x}^0)F_{10}+\frac{1}{2}\int\limits_0^{x^0}(1+\cos\bar{x}^0)\,dx^0\,\Psi_{10},$$

$$\Pi_2^{(0)}=\frac{1}{2}(1+\cos\bar{z})F_{23}+\frac{1}{2}\int\limits_0^{x^0}(1+\cos\bar{x}^0)\,dx^0\,\Psi_{20},\qquad(3.2.21)$$

$$\Pi_3^{(0)}=\frac{1}{2}(1+\cos\bar{z})F_{33}+\frac{1}{2}\int\limits_0^{x^0}(1+\cos\bar{x}^0)\,dx^0\,\Psi_{30}.$$

В результате подстановки (2.2.21) в (3.5.2) определяем компоненты тензора $(T_0^{(1)})$ для самоуравновешенных частей функций нагрузок $\tilde{Q}_{(1)}^{3\beta}$ и $\tilde{Q}_{(1)}^{0\beta}$; несамоуравновешенным частям функций нагрузок $\bar{Q}_{(1)}^{0\beta}=Q_{(1)}^{0\beta}-\tilde{Q}_{(1)}^{0\beta}$, $\bar{Q}_{(1)}^{3\beta}=Q_{(1)}^{3\beta}-\tilde{Q}_{(1)}^{3\beta}$ соответствует тензор $(T_0^{(2)})$ с компонентами:

$$T_{(0)}^{33}=(1+\cos\bar{z})\,\bar{Q}_{(1)}^{33}/2,\quad T_{(0)}^{00}=(1+\cos\bar{x}^0)\,\bar{Q}_{(1)}^{00}/2,$$
$$T_{(0)}^{13}=(1+\cos\bar{z})\,\bar{Q}_{(1)}^{31}/2,\quad T_{(0)}^{10}=(1+\cos\bar{x}^0)\,\bar{Q}_{(1)}^{01}/2,$$
$$(3.2.22)$$
$$T_{(0)}^{23}=(1+\cos\bar{z})\,\bar{Q}_{(1)}^{32}/2,\quad T_{(0)}^{20}=(1+\cos\bar{x}^0)\,\bar{Q}_{(1)}^{02}/2,$$
$$T_{(0)}^{30}=(1+\cos\bar{z})\,\bar{Q}_{(1)}^{30}/2+(1+\cos\bar{x}^0)\,\bar{Q}_{(1)}^{03}/2.$$

Основной тензор

$$(T_0)=(T_0^{(1)})+(T_0^{(2)}).\qquad(3.2.23)$$

Если $\tilde{Q}_{(1)}^{3\beta}$ и $\tilde{Q}_{(1)}^{0\beta}$ равны нулю, то $(T_0)=(T_0^{(2)})$; при нормальном взрыве и ударе функции нагрузок $Q_{(1)}^{31}=Q_{(1)}^{32}=0$, $Q_{(1)}^{01}=Q_{(1)}^{02}=0$. Корректирующий тензор имеет компоненты

$$T_{(\kappa)}^{\alpha\beta}=\sum_{mnpl}(A_{mnpl}f_{(1)}^{\alpha\beta}+B_{mnpl}f_{(2)}^{\alpha\beta}+C_{mnpl}f_{(3)}^{\alpha\beta}+D_{mnpl}f_{(0)}^{\alpha\beta}),\quad(3.2.24)$$

где $f_{(\gamma)}^{\alpha\beta}(mnpl)$ — известные функции координат. Параметры $A_{mnpl},\ldots,D_{mnpl}$ находим в результате решения системы алгебраических уравнений

$$\sum_{mnpl}(A_{mnpl}F_{1\beta}+B_{mnpl}F_{2\beta}+C_{mnpl}F_{3\beta}+D_{mnpl}F_{0\beta})+L_\beta=0.$$

$$(3.2.25)$$

Коэффициенты $F_{\gamma\beta}$ $(mnplijkq)$ уравнений вычисляются по формулам

$$F_{\gamma\beta} = (1/2G)\,(\alpha_1 F_{\gamma\beta}^{(1)} + \alpha_2 F_{\gamma\beta}^{(2)}); \tag{3.2.26}$$

интегралы $F_{\gamma\beta}^{(k)}$ $(k = 1,\ 2)$ имеют вид

$$F_{\gamma\beta}^{(k)} = (2/\pi^3)\,(a_0/a_{cq})\,(h/\pi)^4 \times$$

$$\times \iiiint\limits_0^\pi A_{\gamma\beta}^{(k)} \left(\pi \frac{l_r^{\text{нагр}}}{h} + \frac{a_0}{a_{cq}} \bar{x}^0 \sqrt{1 - \left(\frac{\bar{z}}{\pi}\right)^2}\right)^2 \bar{x}^0 \bar{r} d\bar{r} d\bar{\theta} d\bar{z} d\bar{x}^0. \tag{3.2.26$'$}$$

Подынтегральные функции $A_{\gamma\beta}^{(k)}$ приведены во второй части книги; свободные члены L_β $(ijkq)$ уравнений вычисляются по формулам

$$L_\beta = (1/2G)\,(\alpha_1 L_\beta^{(1)} + \alpha_2 L_\beta^{(2)}) + \alpha L_\beta^{(3)}; \tag{3.2.27}$$

интегралы $L_\beta^{(k)}$ $(k = 1,\ 2,\ 3)$ имеют вид

$$L_\beta^{(k)} = (2/\pi^3)\,(a_0/a_{cq}) \left(\frac{h}{\pi}\right)^4 \times$$

$$\times \iiiint\limits_0^\pi B_\beta^{(k)} \left(\pi \frac{l_r^{\text{нагр}}}{h} + \frac{a_0}{a_{cq}} x^0 \sqrt{1 - \left(\frac{\bar{z}}{\pi}\right)^2}\right) \bar{x}^0 \bar{r} d\bar{r} d\bar{\theta} d\bar{z} d\bar{x}^0. \tag{3.2.27$'$}$$

Подынтегральные функции $B_\beta^{(k)}$ приведены во второй части книги; функции состояния α_1 и α_2 определяются формулами (3.2.5).

Решение системы (3.2.25) строится с помощью процедуры последовательных приближений, изложенной в § 3 гл. 1. В результате находим параметры $A_{mnpl}, \ldots, D_{mnpl}$, следовательно, и компоненты тензора $(T_к)$.

Таким образом, тензор кинетических напряжений $(T)_{\text{нагр}}$ построен для области возмущений нагрузки при взрыве и ударе без внедрения.

При ударе с внедрением расчет области внедрения с пограничным слоем приведен в § 4 гл. 2. Построение тензора $(T)_{\text{нагр}}$ для области возмущений нагрузки выполняется в цилиндрических координатах аналогично изложенному в § 5 гл. 2, функции состояния α_1 и α_2 вычисляются по формулам (3.2.5), функция $\varepsilon\,(T)$ полагается известной.

В области возмущений разгрузки

$$(T)_{\text{разгр}} = (T)_{\text{нагр}} - \Delta\,(T), \tag{3.2.28}$$

причем $\Delta\,(T) = \Delta\,(T_0) + \Delta\,(T_к)$.

Основной $\Delta\,(T_0)$ и корректирующий $\Delta\,(T_к)$ тензоры аналогичны приведенным в § 2 и 3 гл. 2, функции состояния $\alpha_1^{(e)}$ и $\alpha_2^{(e)}$ соответственно равны:

$$\alpha_1^{(e)} = 1,$$

$$\alpha_2^{(e)} = \frac{2}{3}\left[G\left(\frac{\widetilde{\Delta\varepsilon}\,(\Delta T)}{\Delta T} + \frac{\partial}{\partial \Delta T}\widetilde{\Delta\varepsilon}\,(\Delta T)\right) - 1\right]. \tag{3.2.29}$$

В цилиндрических координатах построение тензоров $\Delta(T_0)$ и $\Lambda(T_\text{к})$ выполняется так же, как в случае нагрузки, при этом используется общее решение (2.5.2), текущие координаты (рис. 80) изменяются в следующих пределах:

$$0 \leqslant r \leqslant r_2,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \theta_2,\ 0 \leqslant z \leqslant z_2,\ x_1^0 \leqslant x^0 \leqslant x_2^0, \tag{3.2.30}$$

где $r_2 = l_r^{\text{нагр}} + \sqrt{(bx^0/v_{(r)}^0)^2 - z^2}$, $\theta_2 = 2\pi$, $z_2 = bx^0/v_{(r)}^0$, $x_1^0 = a_{cq}t_p$, $x_2^0 = h$ или $h\,(a_0/b + 1)^{-1}$ при наличии взаимодействия с отраженной волной нагрузки.

Для основного тензора $\Lambda(T_0)$ имеем следующие граничные условия:

$$\Delta T^{3\beta} = \Delta Q_{(1)}^{3\beta} \text{ при } z = 0,\ \Delta T^{0\beta} = 0 \text{ при } x^0 = x_1^0. \tag{3.2.31}$$

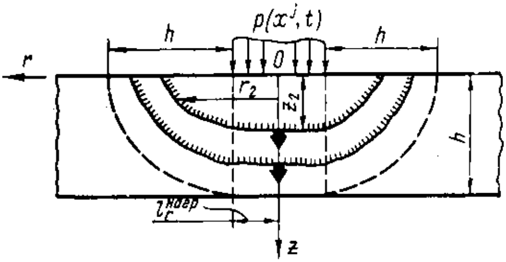

Рис. 80

Функции нагрузок $\Delta Q_{(1)}^{3\beta}$ таковы:

$$\Delta Q_{(1)}^{3j} = (\Delta\rho\Delta v^3\Delta v^j)_{z=0} - \Delta p^{3j} \quad (j = 1,\ 2,\ 3), \tag{3.2.32}$$

$$\Delta Q_{(1)}^{30} = (\Delta\rho\Delta v^3 v_{(r)}^0)_{z=0},$$

где $\Delta p^{3j}(r\theta t)$ и $\Delta v^j(r\theta t)$ — изменения действующей импульсивной нагрузки и скорости движения частиц на поверхности, определяемые из решения задачи о взрыве и ударе без внедрения. Им соответствуют функции кинетических напряжений основного тензора

$$\Delta\Pi_\alpha^{(0)} = (1/2)\,(1 + \cos\bar{z})\Delta F_{\alpha 3}, \tag{3.2.33}$$

где $\bar{z} = \pi z/z_2 = \pi z/(bx^0/v_{(r)}^0)$ — безразмерная координата.

Функции $\Delta F_{\alpha 3}$ имеют вид:

$$\Delta F_{\alpha 3} = 0, \quad \Delta F_{13} = \int_0^\theta\!\!\int_0^r r^2\,\Delta Q_{(1)}^{33}\,dr\,d\theta,$$

$$\Delta F_{23} = \sum_{p,m}\frac{1}{\varkappa_{pm}}\int_{x_1^0}^{x^0}(\Delta A_{31}^{1\,(pm)}(\xi)\cos m\theta +$$

$$+ \Delta A_{31}^{2\,(pm)}(\xi)\sin m\theta)\sin\varkappa_{pm}(\xi - x^0)\,d\xi\,\frac{1}{r}J_m(r\varkappa_{pm}), \tag{3.2.34}$$

$$\Delta F_{33} = \sum_{p,m}\frac{1}{\omega_{pm}}\int_{x_1^0}^{x^0}(\Delta B_{31}^{1\,(pm)}(\xi)\cos m\theta +$$

$$+ \Delta B_{31}^{2\,(pm)}(\xi)\sin m\theta)\sin\omega_{pm}(\xi - x^0)\,d\xi\, rJ_{\sqrt{1+m^2}}(r\omega_{pm});$$

коэффициенты Фурье $\Delta A_{31}^{k(pm)}$ и $\Delta B_{31}^{k(pm)}$ функций

$$\Delta A_{31} = 2\left(r^2 \Delta Q_{(1)}^{31} + \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \int\limits_{x_1^0}^{x^0} \Delta Q_{(1)}^{30}\, dx^0\right)\right) \tag{3.2.35}$$

и

$$\Delta B_{31} = 2\left(r^2 \Delta Q_{(1)}^{32} + \frac{\partial}{\partial \theta} \int\limits_{x_1^0}^{x^0} \Delta Q_{(1)}^{30}\, dx^0\right)$$

определяются соответственно по формулам (3.2.14′) и (3.2.16′), причем A_{31} и B_{31} следует заменить на ΔA_{31} и ΔB_{31}.

Подставляя (3.2.33) в (2.5.2), определим компоненты тензора $\Delta(T_0^{(1)})$ для самоуравновешенных частей функций нагрузок $\Delta\widetilde{Q}_{(1)}^{3\beta}$; несамоуравновешенным частям функций нагрузок $\Delta\overline{Q}_{(1)}^{3\beta} = \Delta Q_{(1)}^{3\beta} - \Delta\widetilde{Q}_{(1)}^{3\beta}$ соответствует тензор $\Delta\,(T_0^{(2)})$ с компонентами

$$\Delta T_{(0)}^{3\beta} = (1/2)\,(1 + \cos\bar{z})\Delta\overline{Q}_{(1)}^{3\beta} \quad (\beta = 1,\ 2,\ 3,\ 0). \tag{3.2.36}$$

Основной тензор

$$\Delta\,(T_0) = \Delta\,(T_0^{(1)}) + \Delta\,(T_0^{(2)}). \tag{3.2.37}$$

Если $\Delta\widetilde{Q}_{(1)}^{3\beta} = 0$, то $\Delta\,(T_0) = \Delta\,(T_0^{(2)})$; при нормальном взрыве и ударе функции нагрузок $\Delta Q_{(1)}^{31} = \Delta Q_{(1)}^{32} = 0$.

Корректирующий тензор $\Delta\,(T_{\text{к}})$ имеет компоненты

$$\Delta T_{(\text{к})}^{\alpha\beta} = \sum_{mnpl} (\Delta A_{mnpl}\, f_{(1)}^{\alpha\beta} + \Delta B_{mnpl}\, f_{(2)}^{\alpha\beta} + \Delta C_{mnpl}\, f_{(3)}^{\alpha\beta} + \Delta D_{mnpl}\, f_{(0)}^{\alpha\beta}). \tag{3.2.38}$$

Параметры ΔA_{mnpl}, ..., ΔD_{mnpl} удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{mnpl} (\Delta A_{mnpl}\, F_{1\beta} + \Delta B_{mnpl}\, F_{2\beta} + \Delta C_{mnpl}\, F_{3\beta} + D_{mnpl}\, F_{0\beta}) + \Delta L_\beta = 0, \tag{3.2.39}$$

коэффициенты $F_{\gamma\beta}$ $(mnplijkq)$ которых вычисляются по формулам

$$F_{\gamma\beta} = (1/(2G))\,(\alpha_1^{(e)} F_{\gamma\beta}^{(1)} + \alpha_2^{(e)} F_{\gamma\beta}^{(2)}), \tag{3.2.40}$$

свободные члены ΔL_β $(ijkq)$ — по формулам

$$\Delta L_\beta = (1/(2G))\,(\alpha_1^{(e)} \Delta L_\beta^{(1)} + \alpha_2^{(e)} \Delta L_\beta^{(2)}) + \alpha \Delta L_\beta^{(3)}. \tag{3.2.41}$$

Интегралы $\Delta L_\beta^{(k)}$ $(k = 1,\ 2,\ 3)$ определяются в виде

$$\Delta L_\beta^{(k)} = (2/\pi^3)\,(b/v_{(r)}^0)\,(x_2^0/\pi)^4 \times$$
$$\times \iiiint\limits_0^{\pi} \Delta B_\beta^{(k)} \left(\pi \frac{l_r^{\text{нагр}}}{x_2^0} + \frac{b\bar{x}^0}{v_{(r)}^0} \sqrt{1 - \left(\frac{\bar{z}}{\pi}\right)^2}\right)^2 \bar{x}^0\, \bar{r} d\bar{r} d\bar{\theta} d\bar{z} d\bar{x}^0 \tag{3.2.42}$$

интегралы $F^{(k)}_{\gamma\beta}$ $(k = 1,\ 2,\ 3)$ находятся по формулам

$$F^{(k)}_{\gamma\beta} = (2/\pi^3)\,(b/v^0_{(r)})\,(x^0_2/\pi)^4 \times$$

$$\times \iiiint\limits_0^{\pi} A^{(k)}_{\gamma\beta}\left(\pi\frac{l^{\text{нагр}}_r}{x^0_2} + \frac{b}{v^0_{(r)}}\bar{x}^0\sqrt{1-\left(\frac{\bar{z}}{\pi}\right)^2}\right)^2 \bar{x}^0\,\bar{r}\,d\bar{r}\,d\bar{\theta}\,d\bar{z}\,d\bar{x}^0;$$

подынтегральные выражения $A^{(e)}_{\gamma\beta}$ и $\Delta B^{(e)}_{\beta}$ приведены во второй части книги; функции $\alpha^{(e)}_1$, $\alpha^{(e)}_2$ принимают в виде (3.2.29).

Решение уравнений (3.2.39) строится с помощью процедуры последовательных приближений, изложенной в § 3 гл. 1, в результате получим параметры ΔA_{mnpl}, ..., ΔD_{mnpl}, следовательно, и компоненты корректирующего тензора $\Delta\,(T_к)$.

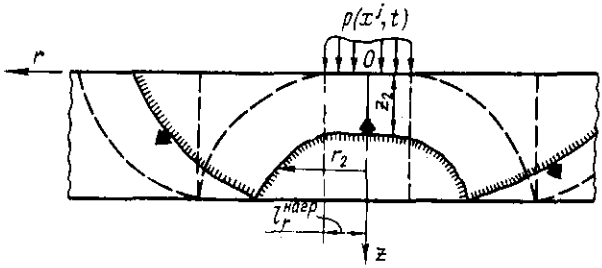

Рис. 81

Таким образом, тензор кинетических напряжений $(T)_{\text{разгр}}$ построен для области возмущений разгрузки при ударе без внедрения и взрыве.

При ударе с внедрением построение тензора кинетических напряжений $(T)_{\text{разгр}}$ для области возмущений разгрузки выполняется в цилиндрических координатах аналогично изложенному в § 5 гл. 2, функции состояния $\alpha^{(e)}_1$ и $\alpha^{(e)}_2$ следует взять в форме (3.2.29), зависимость $\Delta\tilde{\varepsilon}\,(\Delta T)$ полагается известной.

В области возмущений отраженной волны нагрузки (рис. 81) тензор кинетических напряжений

$$(T)_{\text{отр}} = (T)_{\text{нагр}} - \Delta_1\,(T), \tag{3.2.43}$$

причем

$$\Delta_1\,(T) = \Delta_1\,(T_о) + \Delta_1\,(T_к).$$

Основной $\Delta_1\,(T_о)$ и корректирующий $\Delta_1\,(T_к)$ тензоры построены в § 3 гл. 2, функции состояния α_1 и α_2 определяются по формулам (3.2.5).

В цилиндрической системе координат построение тензоров $\Delta_1\,(T_о)$ и $\Delta_1\,(T_к)$ производится на основании общего решения (2.5.2); текущие координаты (рис. 81) изменяются в следующих пределах:

$$0 \leqslant r \leqslant r_2,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \theta_2,\ h \geqslant z \geqslant z_2,\ 0 \geqslant x^0 \geqslant x^0_2, \tag{3.2.44}$$

где

$$r_2 = l_r^{\text{нагр}} + \sqrt{(a_0 x^0/a_{cq})^2 - (h - z)^2}, \quad \theta_2 = 2\pi,$$
$$z_2 = h - a_0 x^0/a_{cq}, \; x_2^0 = h \text{ или } h\,(a_0/b + 1)^{-1},$$

при взаимодействии с волной разгрузки x^0 отсчитывается от значения $x^0 = a_{cq} h/a_0$.

Для основного тензора $\Delta_1 (T_0)$ имеем граничные условия:

$$\Delta_1 T^{3\beta} = \Delta_1 Q^{3\beta}_{(1)} \text{ при } z = h, \; \Delta_1 T^{0\beta} = 0 \text{ при } x^0 = 0, \tag{3.2.45}$$

где $\Delta_1 Q^{3\beta} = T^{3\beta}_{\text{нагр}}|_{z=h}$.

Функции кинетических напряжений основного тензора

$$\Delta_1 \Pi^{(o)}_\alpha = (1/2)\,(1 + \cos \bar{z})\Delta_1 F_{\alpha 3}, \tag{3.2.46}$$

где $\bar{z} = \pi\,(h - z)\,/\,(a_0 x^0/a_{cq})$ — безразмерная координата.

Функции $\Delta_1 F_{\alpha 3}$ определяются по формулам (3.2.34), причем функции нагрузок $\Delta Q^{3\beta}_{(1)}$ заменяются на $\Delta_1 Q^{3\beta}_{(1)}$, ΔA_{31} и ΔB_{31} — соответственно на

$$\Delta_1 A_{31} = 2\left(r^2 \Delta_1 Q^{31}_{(1)} + \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \int\limits_0^{x^0} \Delta_1 Q^{30}_{(1)}\, dx^0 \right)\right) \tag{3.2.47}$$

и

$$\Delta_1 B_{31} = 2\left(r^2 \Delta_1 Q^{32}_{(1)} + \frac{\partial}{\partial \theta} \int\limits_0^{x^0} \Delta_1 Q^{30}_{(1)}\, dx^0 \right).$$

В результате подстановки (3.2.46) в (2.5.2) определяем компоненты тензора $\Delta_1 (T_0^{(1)})$ для самоуравновешенных частей функций нагрузок $\Delta_1 \tilde{Q}^{3\beta}_{(1)}$; несамоуравновешенным частям функций нагрузок $\Delta_1 \bar{Q}^{3\beta}_{(1)} = \Delta_1 Q^{3\beta}_{(1)} - \Delta_1 \tilde{Q}^{3\beta}_{(1)}$ соответствует тензор $\Delta_1 (T_0^{(2)})$ с компонентами (3.2.36), где $\Delta \bar{Q}^{3\beta}_{(1)}$ следует заменить на $\Delta_1 \bar{Q}^{3\beta}_{(1)}$.

Основной тензор $\Delta_1 (T_0)$ равен сумме тензоров:

$$\Delta_1 (T_0) = \Delta_1 (T_0^{(1)}) + \Delta_1 (T)_0^{(2)}). \tag{3.2.48}$$

Корректирующий тензор $\Delta_1 (T_\text{к})$ имеет компоненты

$$\Delta_1 T^{\alpha\beta}_{(\text{к})} = \sum_{mnpl} (\Delta_1 A_{mnpl} f^{\alpha\beta}_{(1)} + \Delta B_{mnpl} f^{\alpha\beta}_{(2)} + \Delta_1 C_{mnpl} f^{\alpha\beta}_{(3)} + \Delta_1 D_{mnpl} f^{\alpha\beta}_{(0)}). \tag{3.2.49}$$

Параметры $\Delta_1 A_{mnpl}, \ldots, \Delta_1 D_{mnpl}$ определяются в результате решения системы уравнений

$$\sum_{mnpl} (\Delta_1 A_{mnpl} F_{1\beta} + \Delta_1 B_{mnpl} F_{2\beta} + \Delta_1 C_{mnpl} F_{3\beta} + \Delta_1 D_{mnpl} F_{0\beta}) + \Delta_1 L_\beta = 0. \tag{3.2.50}$$

Коэффициенты $F_{\gamma\beta}$ $(mnplijkq)$ вычисляются по формулам (3.2.26); интегралы $F_{\gamma\beta}^{(k)}$ таковы:

$$F_{\gamma\beta}^{(k)} = -2\,\frac{a_0}{a_{cq}}\left(\frac{x_2^0}{\pi}\right)^4 \frac{1}{\pi^3} \iiiint\limits_0^\pi A_{\gamma\beta}^{(k)} \left(\frac{\pi l_r^{\text{нагр}}}{x_2^0} + \frac{a_0}{a_{cq}}\,\bar{x}^0 \sqrt{1-(\bar{z}/\pi)^2}\right)^2 \bar{r}\,\bar{x}^0\,d\bar{r}\,d\bar{\theta}\,d\bar{z}\,d\bar{x}^0; \qquad (3.2.51)$$

свободные члены $\Delta_1 L_\beta$ $(ijkq)$ находятся по формулам

$$\Delta_1 L_\beta = (1/2G))\,(\alpha_1\Delta_1 L_\beta^{(1)} + \alpha_2\Delta_1 L_\beta^{(2)}) + \alpha\Delta_1 L_\beta^{(3)}; \qquad (3.2.52)$$

интегралы $\Delta_1 L_\beta^{(k)}$ равны

$$\Delta_1 L_\beta^{(k)} = -2\,\frac{a_0}{a_{cq}}\left(\frac{x_2^0}{\pi}\right)^4 \frac{1}{\pi^3} \iiiint\limits_0^\pi B_\beta^{(k)} \left(\pi\,\frac{l_r^{\text{нагр}}}{x_2^0} + \frac{a_0}{a_{cq}}\,\bar{x}^0 \sqrt{1-(\bar{z}/\pi)^2}\right)^2 \bar{r}\,\bar{x}^0\,d\bar{r}\,d\bar{\theta}\,d\bar{z}\,d\bar{x}^0;$$

подынтегральные выражения $A_{\gamma\beta}^{(k)}$ и $B_\beta^{(k)}$ приведены во второй части книги. Решение уравнений (3.2.50) строится с помощью процедуры последовательных приближений, изложенной в § 3 гл. 1. В результате определены параметры $\Delta_1 A_{mnpl}, \ldots, \Delta_1 D_{mm}$, следовательно, и компоненты корректирующего тензора Δ_1 $(T_{\text{к}})$.

Таким образом, тензор кинетических напряжений $(T)_{\text{отр}}$ построен для области возмущений отраженной волны нагрузки при взрыве и ударе без внедрения. При ударе с внедрением тензор $(T)_{\text{отр}}$ построен (см. § 5 гл. 2). Этот тензор совпадает с построенным тензором, если $\varepsilon\,(T) = T/\,(3K)$.

Используя формулы

$$T = (1/3)\,\mathrm{T}_1(T), \quad T_i = (\sqrt{2}/2)\sqrt{3\mathrm{T}_2(T) - \mathrm{T}_1^2(T)}, \qquad (3.2.53)$$

где $\mathrm{T}_1(T) = g_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}$, $\mathrm{T}_2(T) = T_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}$, по известному тензору кинетических напряжений (T) для каждой области возмущений находим распределение среднего кинетического напряжения T и интенсивности кинетических напряжений T_i, по значениям которых можно оценить различные эффекты, сопровождающие процесс распространения волн напряжений в плите.

На тыльной поверхности плиты $(z = h)$ наблюдается интерференция прямой и отраженной волн нагрузки. Результирующая интенсивность кинетических напряжений

$$T_i^{\text{пол}} = (T_i^{\text{нагр}} + T_i^{\text{отр}})|_{z=h} = 2T_i^{\text{нагр}}|_{z=h} \qquad (3.2.54)$$

может превышать T_i^B $(T_i^{\text{пол}} > T_i^B)$. В этом случае происходит откольное явление (внешнее разрушение плиты), характер откола определяется по критерию, приведенному в § 5 гл. 1. При выводе формулы (3.2.54) использован тот факт, что при отражении волны нагрузки

$$T_i^{\text{отр}}|_{z=h} = T_i^{\text{нагр}}|_{z=h}.$$

При $z = h(a_0/b + 1)^{-1}$ имеет место интерференция волны разгрузки и отраженной волны нагрузки. Результирующая интенсивность кинетических напряжений

$$T_i^{\text{пол}} = \left(T_i^{\text{разгр}} + T_i^{\text{отр}}\right) \tag{3.2.55}$$

может превысить T_i^B $(T_i^{\text{пол}} > T_i^B)$. В результате образуется трещина (внутреннее разрушение), которая с течением времени увеличивается.

Таким образом, в зоне областей возмущений первых двух периодов процесса распространения волн напряжений тензор кинетических напряжений (T) определен как основная характеристика состояния среды плиты. В этой зоне распространение волн напряжений проходит по толщине плиты от загруженной ее поверхности до тыльной и в обратном направлении. Размеры зоны определяются размерами области приложения нагрузки $l_r^{\text{нагр}}$ и толщиной плиты h, т. е. в направлении координатной линии r имеем $(l_r^{\text{нагр}} + h)$ от начала координат O.

Третий период процесса, продолжительность которого $t_3 = [l_н - (l_r^{\text{нагр}} + h)]/c$, начинается с момента $t_{от} = h/a_0$, когда одновременно с отражением волны нагрузки формируется и распространяется продольная волна нагрузки в направлении боковой поверхности плиты с конечной скоростью c. При вычислении скорости c предположим, что деформация плиты относительно координаты $x^2 = \beta$ является плоской, этому случаю соответствуют перемещение u_1 вдоль координатной линии $x^1 = \alpha$ и перемещение u_3 вдоль координатной линии z. Переднему фронту волны напряжений соответствует упругое состояние плиты, поэтому уравнения движения имеют вид:

$$G\nabla^2 u_1 + \left(K + \frac{1}{3} G\right) \frac{\partial \theta}{\partial x^1} = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2},$$

$$G\nabla^2 u_3 + \left(K + \frac{1}{3} G\right) \frac{\partial \theta}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}.$$

Отсюда следуют уравнения:

$$\left(K + \frac{4}{3} G\right) \nabla^2 \theta = \rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}, \qquad G\nabla^2 \omega = \rho \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}, \tag{3.2.56}$$

где

$$\theta = \frac{\partial u_3}{\partial z} + \frac{\partial u_1}{\partial x^1}, \quad \omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x^1}\right).$$

Предположим, что перемещения u_1 и u_3 — периодические во времени и определяются по формулам:

$$u_1 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^1} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) e^{-ipt}, \quad u_3 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x^1}\right) e^{-ipt}, \tag{3.2.57}$$

тогда $\theta = \nabla^2 \varphi e^{-ipt}$, $2\omega = \nabla^2 \psi e^{-ipt}$.

Подставляя последние выражения в (3.2.56), для φ и ψ получим уравнения

$$\nabla^2\varphi + p^2\varphi/a_0^2 = 0, \quad \nabla^2\psi + p^2\psi/a_{cq}^2 = 0. \tag{3.2.58}$$

Если считать волну периодической по координате x^1, то в этом случае

$$\varphi = \varphi_1(z)e^{iqx^1}, \quad \psi = \psi_1(z)e^{iqx^1}, \tag{3.2.59}$$

причем длина волны $\Lambda = 2\pi/q$. Преобразуем уравнения (3.2.58) к виду:

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2} - \left(q^2 - \frac{p^2}{a_0^2}\right)\varphi_1 = 0,$$

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial z^2} - \left(q^2 - \frac{p^2}{a_{cq}^2}\right)\psi_1 = 0.$$

Решением этих уравнений являются функции:

$$\varphi_1 = \sum_n \left(A_{1n}\operatorname{ch} n\sqrt{q^2 - p^2 z/a_0^2} + B_{1n}\operatorname{sh} n\sqrt{q^2 - p^2 z/a_0^2}\right),$$

$$\psi_1 = \sum_n \left(A_{2n}\operatorname{ch} n\sqrt{q^2 - p^2 z/a_{cq}^2} + B_{2n}\operatorname{sh} n\sqrt{q^2 - p^2 z/a_{cq}^2}\right).$$

Напряжения σ_z и σ_{1z} определяются по формулам:

$$\sigma_z = G\left[\left(2q^2 - \frac{p^2}{a_{cq}^2}\right)\varphi_1 - 2iq\frac{\partial\psi_1}{\partial z}\right]e^{-i(pt - qx^1)},$$

$$\sigma_{1z} = G\left[2iq\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + \left(2q^2 - \frac{p^2}{a_{cq}^2}\right)\psi_1\right]e^{-i(pt - qx^1)}. \tag{3.2.60}$$

При $n = 1$ имеем:

$$\varphi_1 = A_1\operatorname{ch}\sqrt{q^2 - p^2 z/a_0^2} + B_1\operatorname{sh}\sqrt{q^2 - p^2 z/a_0^2},$$

$$\psi_1 = A_2\operatorname{ch}\sqrt{q^2 - p^2 z/a_{cq}^2} + B_2\operatorname{sh}\sqrt{q^2 - p^2 z/a_{cq}^2}.$$

Слагаемые $A_1\operatorname{ch}\sqrt{q^2 - p^2 z/a_0^2}$ и $A_2\operatorname{ch}\sqrt{q^2 - p^2 z/a_{cq}^2}$ характеризуют симметричное движение относительно срединной поверхности плиты $z = 0$, что соответствует волне растяжения. Подставляя эти слагаемые в граничные условия

$$\sigma_z = 0, \quad \sigma_{1z} = 0 \text{ при } z = \pm h/2, \tag{3.2.61}$$

находим уравнение частот:

$$\frac{\operatorname{th}\sqrt{q^2 - p^2/a_{cq}^2}\,h/2}{\operatorname{th}\sqrt{q^2 - p^2/a_0^2}\,h/2} = \frac{q^2\sqrt{(q^2 - p^2/a_0^2)(q^2 - p^2/a_{cq}^2)}}{(q^2 - p^2/2a_{cq}^2)^2}, \tag{3.2.62}$$

которое для длинных волн эквивалентно уравнению

$$(2q^2 - p^2/a_{cq}^2)^2 - 4q^2(q^2 - p^2/a_0^2) = 0.$$

Решая последнее уравнение, находим

$$c^2 = \frac{p^2}{q^2} = 4a_{cq}^2\frac{K/G + 1/3}{K/G + 4/3} = a_{cq}^2\frac{2}{1-\nu}. \tag{3.2.63}$$

Слагаемые $B_1 \mathrm{sh} \sqrt{q^2 - p^2/a_0^2}$ и $B_2 \mathrm{sh} \sqrt{q^2 - p^2/a_{cq}^2} z$ характеризуют несимметричное движение относительно линии $z = 0$, что соответствует волне изгиба. Подставляя их в граничные условия (3.2.61), находим уравнение частот:

$$\frac{\mathrm{th}\sqrt{q^2-p^2/a_{cq}^2}\,h/2}{\mathrm{th}\sqrt{q^2-p^2/a_0^2}\,h/2} = \frac{(2q^2-p^2/a_{cq}^2)^2}{4q^2\sqrt{(q^2-p^2/a_0^2)(q^2-p^2/a_{cq}^2)}}, \qquad (3.2.62')$$

из решения которого для длинных волн имеем

$$c^2 = \frac{p^2}{q^2} = q^2 \frac{h^2}{4} a_{cq}^2 \frac{2}{3(1-\nu)}. \qquad (3.2.63')$$

Короткие волны в обоих случаях распространяются со скоростью волн Релея.

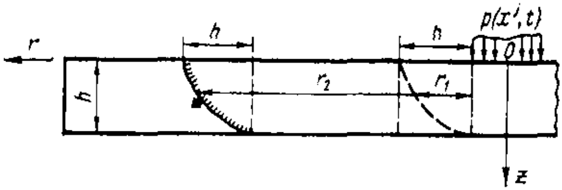

Рис. 82

Аналогично изложенному можно показать, что в направлении координатной линии x^2 скорости распространения волн определяются по формулам (3.2.63′).

Таким образом, продольная волна нагрузки представляет собой совокупность волны растяжения, распространяющейся со скоростью $c_p = a_{cq}\sqrt{2/(1-\nu)}$, и волны изгиба, распространяющейся со скоростью $c_{из} = a_{cq}\, q\, (h/2)\sqrt{2/[3(1-\nu)]}$. При распространении продольной волны нагрузки образуется область возмущений (рис. 82), ограниченная поверхностями фронта волны. В начальный момент $t_{от} = h/a_0$ (координата $x^0_{от} = a_{cq}h/a_0$)

$$r_1 = h\,(l_r^{нагр}/h + \sqrt{1-(z/h^2)}), \qquad (3.2.64)$$

в текущий момент времени t (координата x^0)

$$r_2 = h\,(l_r^{нагр}/h + (c/a_{cq})\,(x^0/h + \sqrt{1-(z/h)^2}), \qquad (3.2.64')$$

причем отсчет координаты x^0 ведется от значения $x^0 = x^0_{от}$, принятого за начальное: $x^0 = 0$. Текущие координаты (r, θ, z, x^0) (рис. 82) изменяются в следующих пределах:

$$r_1 \leqslant r \leqslant r_2,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant z \leqslant h,\ 0 \leqslant x^0 \leqslant x^0_2, \qquad (3.2.64'')$$

где $x_2^0 = a_{rq}\,(l_п - l_r^{нагр})/c$.

Напряженное состояние плиты, скорость движения частиц среды и изменение плотности материала в этой области возмущений характеризуются тензором кинетических напряжений $(T)_{пр}$, который требуется построить так, чтобы выполнялись следующие граничные условия:

$$T^{1\beta}_{\text{пр}} = T^{1\beta}_{\text{нагр}}\Big|_{r=r_1} \text{ при } r=r_1, \quad w_\alpha = 0 \text{ при } r = r_2, \tag{3.2.65}$$
$$T^{0\beta}_{\text{пр}} = T^{0\beta}_{\text{нагр}}\,\Big|\, x^0_{\text{от}} \text{ при } x^0 = 0.$$

В основу построения тензора $(T)_{\text{пр}}$ положим общее решение (2.5.2) уравнений равновесия фиктивного тела в цилиндрических координатах и представим искомый тензор в виде суммы основного и корректирующего тензоров:

$$(T)_{\text{пр}} = (T_{\text{о}}) + (T_{\text{к}}). \tag{3.2.66}$$

Для тензора $(T_{\text{о}})$ имеем следующие граничные условия:

$$T^{1\beta}_{(0)} = Q^{1\beta}_{(1)} \text{ при } r = r_1, \; T^{0\beta}_{(0)} = Q^{0\beta}_{(1)} \text{ при } x^0 = 0, \tag{3.2.67}$$

где

$$Q^{1\beta}_{(1)} = T^{1\beta}_{\text{нагр}}\Big|_{r_1}, \quad Q^{0\beta}_{(1)} = T^{0\beta}_{\text{нагр}}\,\Big|\, x^0_{\text{от}}.$$

Координате r соответствуют функции кинетических напряжений

$$\Pi^{(0)}_{\alpha 1} = (1/2)(1+\cos\bar{r})\, F_{\alpha 1}, \tag{3.2.68}$$

где $\bar{r} = \dfrac{\pi(r-r_1)}{r_2-r_1} = \dfrac{\pi(r-r_1)}{cx^0/a_{cq}}$ — безразмерная координата.

Функции $F_{\alpha 1}$, входящие в (3.2.68), подчинены уравнениям:

$$\frac{\partial^2 F_{31}}{\partial\theta\partial z} + r_1\frac{\partial F_{21}}{\partial z} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F_{01}}{\partial\theta^2} + r_1^2\frac{\partial^2 F_{01}}{\partial z^2}\right) = r_1^2 Q^{11}_{(1)},$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_{11}}{\partial z} - \frac{\partial F_{21}}{\partial\theta}\right) + \frac{2}{r_1}\frac{\partial F_{31}}{\partial z} + \frac{\partial^2 F_{11}}{\partial x^{02}} - \frac{1}{r_1}\frac{\partial F_{01}}{\partial\theta} = -2r_1^2 Q^{12}_{(1)},$$
$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial F_{11}}{\partial z} - \frac{\partial F_{21}}{\partial\theta}\right) + r_1^2\frac{\partial^2 F_{21}}{\partial x^{02}} = -2r_1^2 Q^{13}_{(1)},$$
$$\frac{\partial}{\partial x^0}\left(\frac{\partial F_{11}}{\partial\theta} + r_1^2\frac{\partial F_{21}}{\partial z}\right) = 2r_1^2 Q^{10}_{(1)} \tag{3.2.69}$$

и граничным условиям:

$$F_{21} = 0, \quad F_{10} = 0, \quad F_{31} = 0 \quad \text{при } z = z_\gamma,$$
$$\tag{3.2.69'}$$
$$F_{11} = 0, \quad \frac{\partial F_{11}}{\partial x^0} = 0, \quad F_{21} = 0, \quad \frac{\partial F_{21}}{\partial x^0} = 0 \text{ при } x^0 = x^0_\gamma;$$

по координате θ функции периодические (период 2π).

Принимая во внимание произвольный выбор искомых функций $F_{\alpha 1}$, наложим на функцию F_{01} условие

$$\frac{\partial^2 F_{01}}{\partial\theta^2} + r_1^2\frac{\partial^2 F_{01}}{\partial z^2} = 0.$$

Учитывая граничные условия (3.2.69′), можно считать

$$F_{01} = 0. \tag{3.2.70}$$

Интегрируя четвертое из уравнений (3.2.69) по x^0, находим

$$\frac{\partial F_{11}}{\partial\theta}+r_1^2\,\frac{\partial F_{21}}{\partial z}=2\int\limits_0^{x^0} r_1^2\,Q_{(1)}^{1\,0}\,dx^0;$$

исключая с помощью этого соотношения F_{11} из третьего уравнения (3.2.69), получим уравнение для функции F_{21}:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(r_1^2\,\frac{\partial F_{21}}{\partial z}\right)+\frac{\partial^2 F_{21}}{\partial\theta^2}-r_1^2\,\frac{\partial^2 F_{21}}{\partial x^{0\,2}}=A, \tag{3.2.71}$$

где

$$A=2\left(r_1^2\,Q_{(1)}^{1\,3}+\int\limits_0^{x^0}\frac{\partial}{\partial z}\left(r_1^2\,Q_{(1)}^{1\,0}\right)dx^0\right).$$

Решение уравнения (3.2.71) строим в виде ряда Фурье по собственным функциям $R_{mn}\,(\theta z)$:

$$F_{21}=\sum_{m,n}X_{mn}\,(x^0)\,R_{mn}, \tag{3.2.72}$$

предполагая, что функцию A можно представить в виде ряда Фурье по этим же собственным функциям:

$$A/r_1^2=\sum_{m,n}A_{mn}\,(x^0)\,R_{mn}, \tag{3.2.73}$$

где

$$A_{mn}\,(x^0)=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{z_2}\frac{1}{r_1^2}\,AR_{mn}\,d\theta dz\Bigg/\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_1^{z_2}(R_{mn})^2\,d\theta dz\,.$$

Подставляя (3.2.73) и (3.2.72) в уравнение (3.2.71), получим дифференциальное уравнение

$$\ddot{X}_{mn}+\omega_{mn}^2\,X_{mn}=-A_{mn},$$

решение которого с учетом (3.2.69′) имеет вид

$$X_{mn}=\frac{1}{\omega_{mn}}\int\limits_0^{x^0}A_{mn}\,(\xi)\sin\omega_{mn}\,(\xi-x^0)\,d\xi\,. \tag{3.2.74}$$

Собственные функции $R_{mn}\,(\theta z)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(r_1^2\,\frac{\partial R}{\partial z}\right)+\frac{\partial^2 R}{\partial\theta^2}=-\omega^2 r_1^2\,R$$

и граничным условиям: $R=0$ при $z=z_\nu$; по координате θ функции периодические (период 2π). Имеем две системы собственных функций:

$$R_{mn}^{(1)}=Z_{mn}\,(z)\cos n\theta\quad\text{и}\quad R_{mn}^{(2)}=Z_{mn}\,(z)\sin n\theta, \tag{3.2.75}$$

при этом

$$Z_{mn}=Z_{mn}^{(1)}(z\omega_{mn})-\frac{Z_{mp}^{(1)}(z_\gamma\omega_{mn})}{Z_{mn}^{(2)}(z_\gamma\omega_{mn})}Z_{mn}^{(2)}(z\omega_{mn}), \qquad (3.2.75')$$

где $Z^{(l)}(\overline{z\omega})$ — частные решения уравнения

$$Z''+\frac{2}{r_1}\frac{dr_1}{dz}Z'+\left(\omega^2-\frac{n^2}{r_1^2}\right)Z=0.$$

Собственные значения ω_{mn} — корни характеристического уравнения

$$Z^{(1)}(0\omega)Z^{(2)}(h\omega)-Z^{(1)}(h\omega)Z^{(2)}(0\omega)=0.$$

Подставляя (3.2.74) и (3.2.75) в (3.2.72), получим

$$F_{21}=\sum_{m,n}\frac{1}{\omega_{mn}}\int_0^{x^0}(A_{mn}^{(1)}(\xi)\cos n\theta+$$

$$+A_{mn}^{(2)}(\xi)\sin n\theta)\sin\omega_{mn}(\xi-x^0)\,d\xi Z_{mn}(z). \qquad (3.2.76)$$

Для функции F_{31} справедливо уравнение

$$\frac{\partial^2 F_{31}}{\partial\theta\partial z}=r_1\left(r_1 Q_{(1)}^{11}-\frac{\partial F_{21}}{\partial z}\right),$$

интегрируя которое с учетом граничных условий (3.2.69′), находим

$$F_{31}=\int_0^{\theta}\int_0^{z}\left(r_1 Q_{(1)}^{11}-\frac{\partial F_{21}}{\partial z}\right)r_1\,dzd\theta. \qquad (3.2.77)$$

Функция F_{11} удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 F_{11}}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 F_{11}}{\partial x^{02}}=C,$$

где

$$C=-2r_1\left(r_1 Q_{(1)}^{11}+\int_0^{\theta}Q_{(1)}^{11}\,d\theta\right)+$$

$$+\sum_{m,n}\frac{1}{\omega_{mn}}\left(\frac{1}{n}-n\right)\int_0^{x^0}(A_{mn}^{(1)}(\xi)\sin n\theta-$$

$$-A_{mn}^{(2)}(\xi)\cos n\theta)\sin\omega_{mn}(\xi-x^0)\,d\xi Z'_{mn}(z). \qquad (3.2.78)$$

Решением уравнения является функция

$$F_{11}=\sum_{m}\frac{h}{m\pi}\int_0^{x^0}C_m(\xi)\,\mathrm{sh}\,\frac{m\pi(x^0+\xi)}{h}\,d\xi Z_m(z). \qquad (3.2.79)$$

Здесь

$$Z_m(z)=\begin{cases}\cos(m\pi z/h),\\ \sin(m\pi z/h)\end{cases}$$

— собственные функции;

$$C_m(x^0)=\int_0^{z_2} CZ_m\,dz\left(\int_0^{z_2} Z_m^2\,dz\right)^{-1}$$

— коэффициенты Фурье функции $C(\theta,\ z,\ x^0)$.

Для координаты x^0 функции кинетических напряжений приняты в виде:

$$\Pi_{10}^{(0)}=\frac{1}{2}(1+\cos x^0)\,F_{10}+\frac{1}{2}\int_0^{x^0}(1+\cos\bar{x}^0)\,dx^0\,\Psi_{10},$$

$$\Pi_{20}^{(0)}=\frac{1}{2}\int_0^{x^0}(1+\cos\bar{x}^0)\,dx^0\,\Psi_{20}, \qquad (3.2.80)$$

$$\Pi_{30}^{(0)}=\frac{1}{2}\int_0^{x^0}(1+\cos\bar{x}^0)\,dx^0\,\Psi_{30},$$

где $\bar{x}^0=\pi x^0/x_2^0$ — безразмерная координата.

Функции F_{10}, Ψ_{i0} $(i=1,\ 2,\ 3)$ таковы:

$$F_{10}=-\int_0^{\theta}\int_{r_1}^{r} r^2 Q_{(1)}^{02}\,dr\,d\theta,\ \Psi_{10}=\int_0^{\theta} r^2\left(2Q_{(1)}^{01}-\psi\right)d\theta,$$

$$\Psi_{20}=\int_0^{z}\psi\,d\theta,\ \Psi_{30}=\int_0^{z}\left[2r^2 Q_{(1)}^{02}-\int_0^{\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)\left(r^2\left(2Q_{(2)}^{01}-\psi\right)\right)d\theta\right]dz, \qquad (3.2.81)$$

причем

$$\psi=\left(\frac{r_1}{r}\right)^2\int_{r_1}^{r}\left[\frac{3}{r}Q_{(1)}^{01}+\left(\frac{\partial Q_{(1)}^{01}}{\partial r}-\frac{\partial Q_{(1)}^{02}}{\partial\theta}+\frac{\partial Q_{(1)}^{03}}{\partial t}\right)\right]\left(\frac{r}{r_1}\right)^2 dr.$$

Полные функции кинетических напряжений для основного тензора имеют следующий вид:

$$\Pi_1^{(0)}=\frac{1}{2}(1+\cos\bar{r})\,F_{11}+\frac{1}{2}(1+\cos\bar{x}^0)\,F_{10}+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{x^0}(1+\cos\bar{x}^0)\,dx^0\,\Psi_{10},$$

$$\Pi_2^{(0)}=\frac{1}{2}(1+\cos\bar{r})\,F_{21}+\frac{1}{2}\int_0^{x^0}(1+\cos\bar{x}^0)\,dx^0\,\Psi_{20}, \qquad (3.2.82)$$

$$\Pi_3^{(0)}=\frac{1}{2}(1+\cos\bar{r})\,F_{31}+\frac{1}{2}\int_0^{x^0}(1+\cos\bar{x}^0)\,dx^0\,\Psi_{30}.$$

Подставляя эти функции в (2.5.2), определим компоненты основного тензора $(T_0^{(1)})$ для самоуравновешенных частей функций нагрузок $\tilde{Q}_{(1)}^{1\beta}$ и $\tilde{Q}_{(1)}^{0\beta}$; несамоуравновешенным частям функций нагрузок $\overline{Q}_{(1)}^{1\beta} = Q_{(1)}^{1\beta} - \tilde{Q}_{(1)}^{1\beta}$, $\overline{Q}_{(1)}^{0\beta} = Q_{(1)}^{0\beta} - \tilde{Q}_{(1)}^{0\beta}$ соответствует тензор $(T_0^{(2)})$ с компонентами:

$$\begin{gathered}
T_{(0)}^{11} = (1/2)\left(1+\cos\bar{r}\right)\overline{Q}_{(1)}^{11},\ T_{(0)}^{00} = (1/2)\left(1+\cos\bar{x}^0\right)\overline{Q}_{(1)}^{00},\\
T_{(0)}^{12} = (1/2)\left(1+\cos\bar{r}\right)\overline{Q}_{(1)}^{12},\ T_{(0)}^{02} = (1/2)\left(1+\cos\bar{x}^0\right)\overline{Q}_{(1)}^{02},\\
T_{(0)}^{13} = (1/2)\left(1+\cos\bar{r}\right)\overline{Q}_{(1)}^{13},\ T_{(0)}^{03} = (1/2)\left(1+\cos\bar{x}^0\right)\overline{Q}_{(1)}^{03},\\
T_{(0)}^{10} = (1/2)\left(1+\cos\bar{r}\right)\overline{Q}_{(1)}^{10} + (1/2)\left(1+\cos\bar{x}^0\right)\overline{Q}_{(1)}^{01}.
\end{gathered} \tag{3.2.83}$$

Основной тензор

$$(T_0) = (T_0^{(1)}) + (T_0^{(2)}). \tag{3.2.84}$$

Компоненты корректирующего тензора $(T_\text{к})$ таковы:

$$T_{(\text{к})}^{\alpha\beta} = \sum_{mnpl}\left(A_{mnpl}f_{(1)}^{\alpha\beta} + B_{mnpl}f_{(2)}^{\alpha\beta} + C_{mnpl}f_{(3)}^{\alpha\beta} + D_{mnpl}f_{(0)}^{\alpha\beta}\right); \tag{3.2.85}$$

параметры $A_{mnpl}, \ldots, D_{mnpl}$ подчинены уравнениям (3.2.25), коэффициенты $F_{\gamma\beta}\,(mnijkq)$ и свободные члены $L_\beta\,(ijkq)$ которых определяются соответственно по формулам (3.2.26) и (3.2.27); функции состояния α_1 и α_2 находятся по формулам (3.2.5). Интегралы $F_{\gamma\beta}^{(k)}$ $(k = 1,\ 2)$ имеют вид

$$F_{\gamma\beta}^{(k)} = 2\,\frac{c}{a_{cq}}\,\frac{h}{\pi^2}\left(\frac{x_2^0}{\pi}\right)^2\iiiint_0^{\pi} A_{\gamma\beta}^{(k)}\left(r_1 + \frac{c}{a_{cq}}x_2^0\,\frac{\bar{x}^0\,\bar{r}}{\pi^2}\right)\times$$

$$\times\,\bar{x}^0\,d\bar{r}\,d\bar{\theta}\,d\bar{z}\,d\bar{x}^0\,; \tag{3.2.86}$$

интегралы $L_\beta^{(k)}$ $(k = 1,\ 2,\ 3)$ — следующий вид:

$$L_\beta^{(k)} = 2\,\frac{c}{a_{cq}}\,\frac{h}{\pi^2}\left(\frac{x_2^0}{\pi}\right)^2\iiint_0^{\pi} B_\beta^{(k)}\left(\frac{c}{a_{cq}}x_2^0\,\frac{\bar{r}\bar{x}^0}{\pi^2} + r_1\right)\bar{x}^0\,d\bar{r}\,d\bar{\theta}\,d\bar{z}\,d\bar{x}^0. \tag{3.2.86$'$}$$

Их подынтегральные выражения $A_{\gamma\beta}^{(k)}$ и $B_\beta^{(k)}$ приведены во второй части книги, причем компоненты $T_{(0)}^{\alpha\beta}$ соответствуют тензору (3.2.84).

Решение уравнений (3.2.25) строится с помощью процедуры последовательных приближений, изложенной в § 3 гл. 1. В результате определяются параметры $A_{mnpl}, \ldots, D_{mnpl}$, следовательно, и компоненты тензора $(T_\text{к})$.

Таким образом, тензор кинетических напряжений $(T)_\text{пр}$ построен в области возмущений продольной волны нагрузки.

Для каждого направления l_n момент $t_n = (l_n - l_r^\text{нагр})/c$ достижения волной боковой поверхности различен и зависит от ряда факторов (формы контура плиты, формы и расположения загруженной области на плите и др.). В результате на части боковой поверхности наблюдается отражение продольной волны нагрузки, остальная часть боковой поверхности находится в покое.

Четвертый период процесса начинается с момента $t_n^{\min}$ - $(l_n^{\min} - l_r^{\text{нагр}})/c$, когда продольная волна нагрузки выходит на боковую поверхность в направлении $l_n^{\min}$. В этот момент зарождается отраженная волна, распространяющаяся со скоростью c в обратном направлении, образуется область возмущений отраженной продольной волны нагрузки (рис. 83), которой соответствует тензор кинетических напряжений $(T_{\text{отр}}^{\text{пр}})$, подлежащий определению.

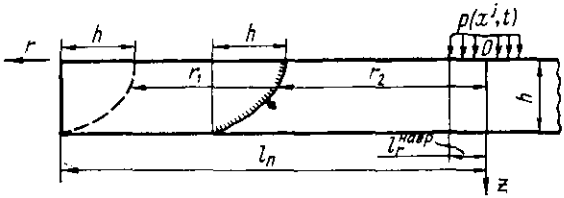

Рис. 83

Для рассматриваемой области возмущений текущие координаты изменяются в следующих пределах:

$$r_1 \geqslant r \geqslant r_2,\ \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2,\ 0 \leqslant z \leqslant h,\ 0 \leqslant x^0 \leqslant x_2^0, \tag{3.2.87}$$

где $r_1 = l_n - h\sqrt{1-(z/h)^2}$, $r_2 = l_n - cx^0/a_{cq} - h\sqrt{1-(z/h)^2}$, $x_2^0 = (a_{cq}/c)(l_n - l_r^{\text{нагр}})$; значения θ_1, θ_2 заданы, причем координата x^0 отсчитывается от значения $x_{\min}^0 = (a_{cq}/c)(l_n^{\min} - l_r^{\text{нагр}})$, принятого за начальное $(x_1^0 = 0)$.

Тензор кинетических напряжений $(T)_{\text{отр}}^{\text{пр}}$ представим в виде

$$(T)_{\text{отр}}^{\text{пр}} = (T)_{\text{пр}} - \Delta_1(T); \tag{3.2.88}$$

тензор $(T)_{\text{пр}}$ известен, тензор $\Delta_1(T)$ требуется построить. Построим его в виде

$$\Delta_1(T) = \Delta_1(T_0) + \Delta_1(T_{\text{к}}). \tag{3.2.89}$$

В основу построения тензора $\Delta_1(T_0)$ положим общее решение (2.5.2) уравнений равновесия фиктивного тела и граничные условия:

$$\Delta_1 T_{(0)}^{1\beta} = \Delta_1 Q_{(1)}^{1\beta} \text{ при } r = r_1,\ \Delta_1 T_{(0)}^{0\beta} = 0 \text{ при } x^0 = 0, \tag{3.2.90}$$

где $\Delta_1 Q_{(1)}^{1\beta} = T_{\text{пр}}^{1\beta}\big|_{r_1}$.

Функции кинетических напряжений основого тензора

$$\Delta_1\Pi_\alpha^{(0)} = (1/2)(1+\cos\bar{r})\Delta_1 F_{\alpha 1}, \tag{3.2.91}$$

где $\bar{r} = \pi(r_1 - r)/cx^0/a_{cq}$ — безразмерная координата.

Функции $\Delta_1 F_{\alpha 1}$ находим по формулам (3.2.70), (3.2.76)—(3.2.77) и (3.2.79), заменяя функции нагрузок $Q_{(1)}^{1\beta}$ на $\Delta_1 Q_{(1)}^{1\beta}$, r_1 определяется по формуле (3.2.87). Подсталяя (3.2.91) в (2.5.2), получим компоненты тензора $\Delta_1 (T_0^{(1)})$ для самоуравновешенных частей функций нагрузок $\Delta_1\widetilde{Q}_{(1)}^{1\beta}$; несамоуравновешенным частям функций нагрузок $\Delta_1\overline{Q}_{(1)}^{1\beta} = \Delta_1 Q_{(1)}^{1\beta} - \Delta_1\widetilde{Q}_{(1)}^{1\beta}$ соответствует тензор $\Delta_1 (T_0^{(2)})$ с компонентами (3.2.83), в которых вместо $\overline{Q}_{(1)}^{1\beta}$ необходимо подставить $\Delta_1\overline{Q}_{(1)}^{1\beta}$, вместо $\overline{Q}_{(1)}^{0\beta}$ — нули. Основной тензор

$$\Delta_1 (T_0) = \Delta_1 (T_0^{(1)}) + \Delta_1 (T_0^{(2)}). \tag{3.2.92}$$

Корректирующий тензор $\Delta_1 (T_к)$ имеет компоненты

$$\Delta_1 T_{(к)}^{\alpha\beta} = \sum_{mnpl} (\Delta_1 A_{mnpl} f_{(1)}^{\alpha\beta} + \Delta_1 B_{mnpl} f_{(2)}^{\alpha\beta} + \Delta_1 C_{mnpl} f_{(3)}^{\alpha\beta} + \\ + \Delta_1 D_{mnpl} f_{(0)}^{\alpha\beta}). \tag{3.2.93}$$

Параметры $\Delta_1 A_{mnpl}, \ldots, \Delta_1 D_{mnpl}$ подчинены уравнениям

$$\sum_{mnpl} (\Delta_1 A_{mnpl} F_{1\beta} + \Delta_1 B_{mnpl} F_{2\beta} + \Delta_1 C_{mnpl} F_{3\beta} + \\ + \Delta_1 D_{mnpl} F_{0\beta}) + \Delta_1 L_\beta = 0, \tag{3.2.94}$$

коэффициенты $F_{\gamma\beta}$ $(mnplijkq)$ которых вычисляются по формулам (3.2.26), свободные члены $\Delta_1 L_\beta$ $(ijkq)$ — по формулам (3.2.27), функции состояния α_1 и α_2 — по формулам (3.2.5). Интегралы $F_{\alpha\beta}^{(k)}$ ($k = 1, 2$) и $\Delta_1 L_\beta^{(k)}$ ($k = 1, 2, 3$) имеют вид:

$$F_{\gamma\beta}^{(k)} = \frac{h}{\pi}\,\frac{\theta_2-\theta_1}{\pi}\,\frac{c}{a_{cq}}\left(\frac{x_2^0}{\pi}\right)^2 \iiiint\limits_0^\pi A_{\gamma\beta}^{(k)} \left(r_1 - \right. \\ \left. - \frac{c}{a_{cq}} x_2^0 \frac{\bar{r}\bar{x}^0}{\pi^2}\right) \frac{\bar{x}^0}{\pi}\, d\bar{r}\, d\bar{\theta}\, d\bar{z}\, d\bar{x}^0, \tag{3.2.95}$$

$$\Delta_1 L_\beta^{(k)} = (h/\pi)\,((\theta_2-\theta_1)/\pi)\,(c/a_{cq})\,(x_2^0/\pi)^2 \times \\ \times \iiiint\limits_0^\pi \Delta_1 B_\beta^{(k)} \left(r_1 - \frac{c}{a_{cq}} x_2^0 \frac{\bar{r}\bar{x}^0}{\pi}\right) \frac{\bar{x}^0}{\pi}\, d\bar{r}\, d\bar{\theta}\, dz\, dx.$$

Их подынтегральные выражения приведены во второй части книги. Вместо $T_{(0)}^{\alpha\beta}$ подставляют компоненты тензора $\Delta_1 (T_0)$ (3.2.84).

Решение уравнений (3.2.94) строится с помощью процедуры последовательных приближений, рассмотренной в § 3 гл. 1; в результате определяются параметры $\Delta_1 A_{mnpl}, \ldots, \Delta_1 D_{mnpl}$, следовательно, и компоненты корректирующего тензора $\Delta_1 (T_к)$. Таким образом, тензор кинетических напряжений $(T)_{отр}^{пр}$ в области возмущений отраженной продольной волны нагрузки построен.

Пользуясь формулами (3.2.53), по известным компонентам тензоров кинетических напряжений $(T)_{пр}$ и $(T)_{отр}^{пр}$ вычисляем интенсивности кинетических напряжений $T_i^{пр}$ и $T_i^{отр}$, по значениям которых можно оценить откольное явление на боковой поверхности плиты, если

$$T_i^{пол} = T_i^{пр} + T_i^{отр} > T^{в}. \tag{3.2.96}$$

{арактер откольного явления устанавливается по критерию, рассмот-
енному в § 5 гл. 1, но $T_i^{\text{отр}} = T_i^{\text{пр}}|r_1$, *поэтому* (3.2.96) *можно запи-*
ать в виде

$$2T_i^{\text{пр}}|r_1 > T_i^{\text{в}}. \qquad (3.2.96')$$

Для других областей возмущений тензор кинетических напряжений
троится аналогично изложенному. К моменту времени $t_m =$
$= [2\,(l_n - l_r^{\text{нагр}})\,]/c$ процесс распространения волн напряжений ста-
ювится установившимся, плита совершает колебательное движение
находится в напряженном состоянии, которое характеризуется тен-
ором кинетических напряжений (T). Построение этого тензора для
аданной формы плиты приведено в [19]. Если плита изготовлена из
іязкопластического материала, то все исследование напряженного
остояния и движения частиц плиты в областях возмущений волн на-
іряжений проводится аналогично изложенному, однако функции со-
тояния материала имеют другой вид и определяются по следующим
юрмулам: в случае нагрузки

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1^{(b)} &= \frac{1}{2\eta} + \frac{\tilde{\tau}_i}{4}\,\frac{d}{d\tilde{\tau}_i}\left(\frac{1}{\eta}\right), \\ \alpha_2^{(b)} &= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2\eta}\right) - \frac{\tilde{\tau}_i}{6}\,\frac{d}{d\tilde{\tau}_i}\left(\frac{1}{\eta}\right); \\ &\text{в случае разгрузки} \\ \alpha^{(p)} &= (2/3)\,(2\eta_p/\lambda - 1). \end{aligned}\right\} \qquad (3.2.97)$$

Здесь

$$\eta = \mu + \tilde{\tau}_i/\tilde{\gamma}_i, \quad \tilde{\tau}_i = 2\sqrt{2}\,T_i/3, \quad \tilde{\gamma}_i = \tilde{e}_i/\sqrt{2} \qquad (3.2.98)$$

іри условии известной зависимости $T_i - \tilde{\tilde{e}}_i$, которая эквивалента ди-
іамической диаграмме $\sigma_i \div e_i$.

Действующая на плиту импульсивная нагрузка $p\,(x^j,\,t)$ при взры-
ве определяется в результате решения задачи о взрыве [47, 36, 38];
іри ударе с внедрением и без внедрения — из соображений, изложен-
ных в § 2 гл. 2. Остановимся на последнем случае более подробно.

При ударе по тонкой плите возникают явно выраженные изгибные
деформации, т. е. доминирующим является перемещение $u_3 = w$ (про-
гиб плиты). Рассматривая плиту в декартовой системе координат $Oxyz$,
начало O и координатная линия Ox которой расположены на средин-
ной поверхности, а координатная линия Oz направлена по нормали к
ней, для упругой плиты получим уравнение

$$D\nabla^4 w + \rho h\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q_n, \qquad (3.2.99)$$

где $D = Eh^3/\,[12\,(1 - \nu^2)\,]$ — цилиндрическая жесткость, q_n — дей-
ствующая нагрузка.

Удар тела массы m о плиту со скоростью v_c характеризуется соотношением

$$\alpha = w_т - w(C) = v_c t - \frac{1}{m}\int_0^t dt \int_0^{t'} P(t')\,dt' - w(C), \qquad (3.2.100)$$

причем $w(C)$ определяет прогиб плиты в точке удара $C(x^0;\ y^0)$, вызванный действием контактной силы $P(t)$. Следовательно, для выполнения соотношения (3.2.100) необходимо иметь соответствующую зависимость: для упругой плиты $\alpha = K_1 P^{2/3}$, для упругопластической плиты

$$\alpha = K_1 P^{2/3} + \varkappa P^q, \qquad (3.2.101)$$

а также выражение $w(xy)$, удовлетворяющее уравнению (3.2.99) и граничным условиям. Это выражение имеет вид

$$w(xy) = \frac{1}{\rho h}\sum_{m,n} \frac{R_{mn}(xy)\,R_{mn}(x^0 y^0)}{\omega_{mn}\int_S R_{mn}^2\,dxdy}\int_0^t P(\tau)\sin\omega_{mn}(t-\tau)\,d\tau,$$

где $R_m(xy)$ — собственные функции, удовлетворяющие уравнению

$$(D/(\rho h))\,\nabla^4 R_{mn} - \omega^2{}_{mn} R_{mn} = 0.$$

Здесь ω_{mn} — соответствующие этим функциям собственные значения, которые зависят от формы плиты и граничных условий. В точке удара $C(x_0;\ y_0)$ прогиб w равен

$$w(C) = \frac{1}{\rho h}\sum_{mn} \frac{R_{mn}^2(x_0 y_0)}{\omega_{mn}\int_S R_{mn}^2\,dxdy}\int_0^t P(\tau)\sin\omega_{mn}(t-\tau)\,d\tau. \qquad (3.2.102)$$

Подставляя (3.2.101) и (3.2.102) в (3.2.100), получим интегральное уравнение

$$K_1 P^{2/3} + \varkappa P^q = v_c t - \frac{1}{m}\int_0^t dt \int_0^{t'} P(t')\,dt' -$$

$$- \frac{1}{\rho h}\sum_{mn} \frac{R_{mn}^2(x_0 y_0)}{\omega_{mn}\int_S R_{mn}^2\,dxdy}\int_0^t P(\tau)\sin\omega_{mn}(t-\tau)\,d\tau, \qquad (3.2.103)$$

решая которое, определим силу $P(t)$. Знать эту силу необходимо для того, чтобы приведенное решение задачи о напряженном состоянии плиты было замкнутым.

Для центрального удара собственные функции $R_{mn}(xy)$ и уравнения частот прямоугольных и круглых плит приведены в табл. 3.

Таблица 3*

Форма плиты и граничные условия	R_{mn}	$\iint R_{mn}^2\,dx\,dy$	Уравнение частот $\omega_{mn}=\frac{h}{2}\lambda_{mn}^2\sqrt{\frac{E}{3\rho(1-\nu^2)}}$
Свободно опертая круглая плита радиуса r_0	$\left(J_m(\lambda_n r)-\frac{J_m(\lambda_n r_0)}{Y_m(\lambda_n r_0)}Y_m(\lambda_n r)\right)\sin n\theta$	$2\pi r_0^2 J_m^2(\lambda_n r_0)\left[\frac{1+\nu+2m}{\nu-1}-2\left(\frac{\lambda_n r_0}{1-\nu}\right)^2+2\frac{\lambda_n r_0}{1-\nu}\frac{J_{m+1}(\lambda_n r_0)}{J_m(\lambda_n r_0)}\right]$	$\frac{Y_{m+1}(\lambda_n r_0)}{Y_m(\lambda_n r_0)}+\frac{Y_{m+1}(\lambda_n r_0)}{Y_m(\lambda_n r_0)}=\frac{2\lambda_n r_0}{1-\nu}$
Защемленная круглая плита радиуса r_0	$\left(J_m(\lambda_n r)-\frac{J_m(\lambda_n r_0)}{Y_m(\lambda_n r_0)}\times Y_m(\lambda_n r)\right)\sin\theta$	$2\pi r_0^2 J_m^2(\lambda_n r_0)$	$\frac{Y_{m+1}(\lambda_n r_0)}{Y_m(\lambda_m r_0)}+\frac{J_{m+1}(\lambda_n r_0)}{J_m(\lambda_n r_0)}=0$
Прямоугольная плита со сторонами l_x, l_y, свободно опертая по контуру; начало координат в одном из углов плиты	$\sin(m\pi x/l_x)\sin(n\pi y/l_y)$	$l_x l_y/4$	$\lambda_{mn}^2=(m\pi/l_x)^2+(n\pi/l_y)^2$

* Таблица заимствована из книги [6].

Продолжение табл. 3

Форма плиты и граничные условия	R_{mn}	$\iint R_{mn}^2\,dxdy$	Уравнение частот $\omega_{mn}=\frac{h}{2}\lambda_{mn}^2\sqrt{\frac{E}{3\rho(1-\nu^2)}}$
Прямоугольная плита, свободно опертая вдоль $0,\ x=l_x$ и защемленная вдоль $y=0,\ y=l_y$	$-\frac{\operatorname{ch}\alpha_{mn}y-\cos\beta_{mn}y-\operatorname{ch}\alpha_{mn}l_x-\cos\beta_{mn}l_y}{\cos\beta_{mn}l_y-\frac{\beta_{mn}}{\alpha_{mn}}\operatorname{sh}\alpha_{mn}l_x}\times$ $\times\left(\sin\beta_{mn}y-\frac{\beta_{mn}}{\alpha_{mn}}\operatorname{sh}\alpha_{mn}y\right),$ $\alpha_{mn}=\left(\lambda_{mn}^2+\left(\frac{m\pi}{l_x}\right)^2\right)^{1/2},$ $\beta_{mn}=\left(\lambda_{mn}^2-\left(\frac{m\pi}{l_x}\right)^2\right)^{1/2}$	$\frac{1}{4}l_x l_y\left(1+\frac{\beta_{mn}^2}{\alpha_{mn}^2}\right)+\frac{1}{4}\frac{l_x}{\alpha_{mn}}\times$ $\times\left(\sin\beta_{mn}l_y-\frac{\beta_{mn}}{\alpha_{mn}}\operatorname{sh}\alpha_{mn}l_y\right)^{-1}\times$ $\times\left\{\left[\left(1-\frac{\beta_{mn}^2}{\alpha_{mn}^2}\right)\operatorname{sh}\alpha_{mn}l_y\sin\beta_{mn}l_y-\right.\right.$ $\left.-\frac{2\beta_{mn}}{\alpha_{mn}}\operatorname{ch}\alpha_{mn}l_y\cos\beta_{mn}l_y\right]\times$ $\times\left(\operatorname{ch}\alpha_{mn}l_y+\frac{\alpha_{mn}^2}{\beta_{mn}^2}\cos\alpha_{mn}l_y\right)+$ $+2\frac{\alpha_{mn}}{\beta_{mn}}\left(\operatorname{ch}\alpha_{mn}l_y+\right.$ $\left.\left.+\frac{\beta_{mn}^2}{\alpha_{mn}^2}\cos\beta_{mn}l_y\right)\right\}$	$(\cos\beta_{mn}l_y-\operatorname{ch}\alpha_{mn}l_y)^2+$ $+\left(\sin\beta_{mn}l_y-\frac{\beta_{mn}}{\alpha_{mn}}\times\right.$ $\left.\times\operatorname{sh}\alpha_{mn}l_y\right)\left(\sin\beta_{mn}l_y+\right.$ $\left.+\frac{\alpha_{mn}}{\beta_{mn}}\operatorname{sh}\alpha_{mn}l_y\right)=0$

Примечание. Здесь J_κ и Y_κ — функции Бесселя первого рода с действительным и мнимым аргументом; для полярных координат $dx=dr$, $dy=2\pi r d\theta$.

§ 3. Взрыв в полой сфере

Внутри полой сферы с радиусами r_i $(i=1, 2)$ произведен взрыв заряда В. В., расположенного в центре. В результате взрыва на внутреннюю поверхность в момент $t=0$ начинает действовать давление p большой интенсивности (рис. 84), закон изменения которого во времени определяется из решения задачи о взрыве [47, 36, 44]:

$$p(t)=\begin{cases} p_1(t) \text{ при } 0\leqslant t\leqslant t_p, \\ p_2(t) \text{ при } t_p\leqslant t\leqslant t_в, \end{cases} \qquad (3.3.1)$$

где $t_р$ — продолжительность нагрузки; $t_в$ — общая продолжительность процесса нагружения сферы при взрыве. Продукты взрыва сильно разогреты, их тепловая энергия передается сфере, образуется температурное поле $T^0(x^j, t)$, определяемое в результате решения задачи о распределении тепла в объеме сферы:

$$\rho_0 c\frac{\partial T^0}{\partial t}=\Lambda\nabla^2 T^0;$$

$$T^0=0 \text{ при } t=0, \qquad (3.3.2)$$

$$\frac{\partial T^0}{\partial r}=-\frac{1}{\Lambda}q_r \text{ при } r=r_1,$$

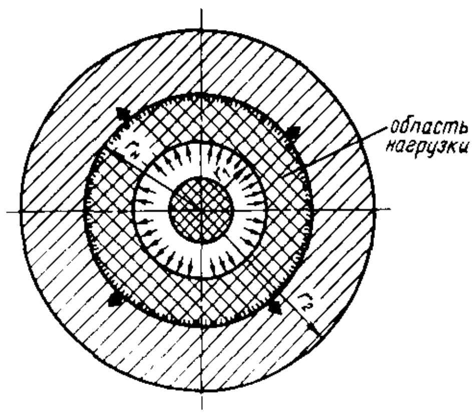

Рис. 84

где q_r — радиальный тепловой поток, Λ — коэффициент теплопроводности, c — теплоемкость.

В момент $t=0$ приложения давления p и температуры T^0 от внутренней поверхности r_1 начинает распространяться волна нагрузки со скоростью a_0, образуя область возмущений нагрузки, которая ограничена внутренней поверхностью сферы и поверхностью $r_н$ переднего фронта волны нагрузки (см. рис. 84). Напряженное состояние тела и движение его частиц в этой области характеризуются тензором кинетических напряжений $(T)_{нагр}$, который требуется построить. Решим эту задачу в сферических координатах θ, φ, r, x^0, полагая, что текущие координаты изменяются в следующих пределах:

$$r_1\leqslant r\leqslant r_н,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant x^0\leqslant x_2^0, \qquad (3.3.3)$$

где $r_н=r_1+a_0x^0/a_{cq}$, $x_2^0=a_{cq}t_p$. Давление p и тепловой поток q_r большой интенсивности, приложенные почти мгновенно, создают вблизи внутренней поверхности сильное ударное сжатие, при котором материал среды переходит в пластическое или жидкое состояние. Внутренняя полость сферы первоначального радиуса r_0 расширяется и имеет радиус r_1, который в случае пластического состояния равен $r_1 = r_0 + w(t)$, в случае жидкого состояния

$$r_1 = r_0 + \int_0^t v(\tau)\, d\tau. \qquad (3.3.4)$$

Перемещение $w(t)$ для идеально-пластического состояния материала как показано в § 1 гл. 2, равно

$$w = r_0 \frac{\sigma_\text{т}}{3E} \left[(1+\nu) \left(\frac{r_\text{пл}}{r_0} \right)^3 - 2(1-2\nu) \left(1 + 3 \ln \frac{r_\text{пл}}{r_0} \right) \right], \qquad (3.3.5)$$

где $r_\text{пл}/r_0 = 1 + (a_0/a_{cq})(x^0/r_0)$; скорость расширения

$$v_\text{р} = a_\text{р} \frac{\sigma_\text{т}}{E} \left[(1+\nu) \left(\frac{r_\text{пл}}{r_0} \right)^2 - 2(1-2\nu) \left(\frac{r_\text{пл}}{r_0} \right)^{-1} \right]; \qquad (3.3.6)$$

добавочное давление $p_\text{т} = (2/3)\sigma_\text{т} (1 + 3\ln(r_\text{пл}/(r_0))$; давление на внутренней поверхности полости при $r = r_1$

$$p(t) = p_1(t) + p_\text{т}. \qquad (3.3.7)$$

Для жидкого состояния материала, учитывая вязкость, имеем

$$v = \frac{2r_0}{\sqrt{\pi\lambda}} \left[\frac{r_0}{r_1} \int_0^\infty \left(\frac{r_1}{r_0} \right)^2 (p_1(\bar{t}) + p_\text{т}) e^{-\tau^2} d\tau + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(\frac{r_1}{r_0 \tau} \right)^2 p_1'(t') e^{-\tau^2} d\tau \right], \qquad (3.3.8)$$

где $\bar{t} = a^2 t / r_0^2$ — безразмерное время, λ — динамический коэффициент вязкости материала, p_0 — начальное давление.

Для тензора кинетических напряжений $(T)_\text{нагр}$ справедливы следующие граничные условия:

$$T^{3\beta} = Q_{(1)}^{3\beta} \text{ при } r = r_1,\ w = 0 \text{ при } r = r_\text{н}, \qquad (3.3.9)$$
$$T^{0\beta} = Q_{(1)}^{0\beta} \text{ при } x^0 = 0,$$

где $Q_{(1)}^{33} = (\rho v^3 v^3)_{r_1} - p$, $Q_{(1)}^{03} = (\rho v^3 a_{cq})_0$, $Q_{(1)}^{00} = \rho_0 a_{cq}^2$.

Следует отметить, что плотность ρ при $r = r_1$ определяется из уравнения состояния материала по известной величине давления $p_1(t)$.

Тензор кинетических напряжений $(T)_\text{нагр}$ можно представить в виде суммы:

$$(T)_\text{нагр} = (T_\text{о}) + (T_\text{к}). \qquad (3.3.10)$$

Построение основного $(T_\text{о})$ и корректирующего $(T_\text{к})$ тензоров основано на использовании общего решения (2.1.61) уравнений равновесия фиктивного тела.

Функции кинетических напряжений основного тензора имеют вид

$$f^{(0)} = -\frac{1}{2}\left(1+\cos\bar{r}\right) r_1^3 Q_{(1)}^{33} - \frac{1}{2}\left(1+\cos\bar{x}^0\right)\frac{r}{r_1^2}\int_{r_1}^{r} r^3 Q_{(1)}^{00}\,dr +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{x^0}\left(1+\cos\bar{x}^0\right)dx^0\, r^2 Q_{(1)}^{03}, \qquad (3.3.11)$$

где $\bar{r} = \pi\ (r - r_1)\ /\ (a_0 x^0\ /\ a_{cq})$, $\bar{x}^0 = \pi x^0/x_2^0$ — безразмерные координаты.

Подставляя функцию $f^{(0)}$ в (2.1.61), получим компоненты тензора $T_0^{(1)})$ для самоуравновешенных частей функций нагрузок $\tilde{Q}_{(1)}^{33}$, $\tilde{Q}_{(1)}^{03}$, $\tilde{Q}_{(1)}^{00}$; несамоуравновешенным частям функций нагрузок $\bar{Q}_{(1)}^{33} = Q_{(1)}^{33} - \tilde{Q}_{(1)}^{33}$, $\bar{Q}_{(1)}^{03} = Q_{(1)}^{03} - \tilde{Q}_{(1)}^{03}$, $\bar{Q}_{(1)}^{00} = Q_{(1)}^{00} - \tilde{Q}_{(1)}^{00}$ соответствует тензор (T_0^2) с компонентами:

$$T_{(0)}^{33} = (1/2)\left(1+\cos\bar{r}\right)\bar{Q}_{(1)}^{33},\quad T_{(0)}^{03} = -(1/2)\left(1+\cos\bar{x}^0\right)\bar{Q}_{(1)}^{03},$$

$$T_{(0)}^{00} = (1/2)\left(1+\cos\bar{x}^0\right)\bar{Q}_{(1)}^{00}\,. \qquad (3.3.12)$$

Основной тензор равен сумме тензоров:

$$(T_0) = (T_0^{(1)}) + (T_0^{(2)}). \qquad (3.3.13)$$

Корректирующий тензор имеет компоненты:

$$T_{(\text{к})}^{11} = \sum_{mn} A_{mn} f^{11}(mn),\ T_{(\text{к})}^{00} = \sum_{mn} A_{mn} f^{00}(mn),$$

$$T_{(\text{к})}^{33} = \sum_{mn} A_{mn} f^{33}(mn),\ T_{(\text{к})}^{03} = \sum_{mn} A_{mn} f^{30}(mn), \qquad (3.3.14)$$

где $f^{\alpha\beta}(mn)$ — известные функции, параметры A_{mn} удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{mn} A_{mn} F(mnij) + L(ij) = 0. \qquad (3.3.15)$$

Коэффициенты $F(mnij)$ вычисляются по формулам (2.1.70′), свободные члены $L(ij)$ — по формулам (2.1.72), при этом учитываются физико-механические свойства материала сферы, отражаемые функциями состояния α_1 и α_2. Интегралы $F^{(k)}$ вычисляются по формулам

$$F^{(k)} = 8\frac{a_0}{a_{cq}}\left(\frac{x_2^0}{\pi}\right)^2 \iint_0^{\pi} A^{(k)}\left(r_1 + \frac{a_0}{a_{cq}}\frac{x_2^0}{\pi}\frac{\bar{r}\bar{x}^0}{\pi}\right)^2 \bar{x}^0\, d\bar{r}\, d\bar{x}^0; \qquad (3.3.16)$$

интегралы $L^{(l)}$ — по формулам

$$L^{(l)} = 8\frac{a_0}{a_{cq}}\left(\frac{x_2^0}{\pi}\right)^2 \iint_0^{\pi} B^{(l)}\left(r_1 + \frac{a_0}{a_{cq}}\frac{x_2^0}{\pi}\frac{\bar{r}\bar{x}^0}{\pi}\right)^2 \bar{x}^0\, d\bar{r}\, d\bar{x}^0. \qquad (3.3.17)$$

Подынтегральные выражения $A^{(k)}$ и $B^{(l)}$ приведены во второй части книги, компоненты $T^{\alpha\beta}_{(0)}$ соответствуют тензору (3.3.13). Решение уравнений (3.3.15) находится с помощью процедуры последовательных приближений, изложенной в § 3 гл. 1. В результате находим параметры A_{mn}, следовательно, и компоненты корректирующего тензора $(T_к)$.

Таким образом, тензор кинетических напряжений $(T)_{нагр}$ для области возмущений нагрузки построен.

В момент t_p начинается разгрузка. Давление p, достигнув максимума, уменьшается по закону $p_2(t)$. В этот момент зарождается волна разгрузки, распространяющаяся со скоростью b, образуется область возмущений разгрузки (рис. 85), которая ограничена внутренней поверхностью сферы радиуса r_1, и поверхностью переднего фронта волны разгрузки радиуса

$$r_в = r_1 + bx^0/v^0_{(r)}. \qquad (3.3.18)$$

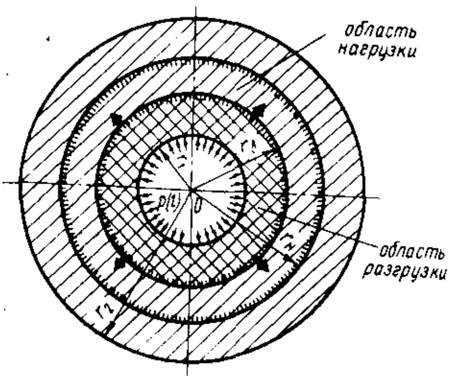

Рис. 85

Напряженное состояние и движение частиц материала сферы в области возмущений разгрузки определяется тензором кинетических напряжений

$$(T)_{разгр} = (T)_{нагр} - \Delta(T), \qquad (3.3.19)$$

где тензор $(T)_{нагр}$ известен, а тензор $\Delta(T)$ требуется построить в виде суммы

$$\Delta(T) = \Delta(T_0) + \Delta(T_к). \qquad (3.3.20)$$

Построение тензоров $\Delta(T_0)$ и $\Delta(T_к)$ выполняется в сферической системе координат $(\theta, \varphi, r, x^0)$ с началом в точке O, при этом считается, что текущие координаты изменяются в следующих пределах:

$$r_1 \leqslant r \leqslant r_в, \ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \ 0 \leqslant x^0 \leqslant x^0_2, \qquad (3.3.21)$$

где отсчет координаты x^0 проводится с момента начала разгрузки $x^0_1 = a_{cq} t_p$, принятого на нулевое; $x^0_2 = (r_2 - r_1)$ или $x^0_2 = v^0_{(r)} [(2r_2 - r_1) - at_p]/(a + b)$, если учитывается взаимодействие волны разгрузки с отраженной волной нагрузки, происходящее в момент $t_в = [(2r_2 - r_1) + bt_p]/(a + b)$. При построении указанных тензоров воспользуемся общим решением (2.1.61) уравнений равновесия фиктивного тела. Это решение определяет компоненты тензоров через функцию кинетических напряжений $f(r, x^0)$. Для основного тензора $\Delta(T_0)$ имеем следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} &\Delta T^{33} = \Delta Q^{33}_{(1)}, \ \Delta T^{30} = \Delta Q^{30}_{(1)} \ \text{при} \ r = r_1, \\ &\Delta T^{00} = 0, \ \Delta T^{30} = 0 \ \text{при} \ x^0 = 0, \end{aligned} \qquad (3.3.22)$$

где

$$\Delta Q^{33}_{(1)} = (\Delta\rho\Delta v^3\Delta v^3)_{r_1} - \Delta p,\ \ \Delta Q^{30}_{(1)} = (\Delta\rho\Delta v^3 v^0_{(r)}),$$
$$\Delta p = p_1(t_p) - p_2(t),\ \ \Delta v^3 = v^3(t_p) - v^3(t).$$

Этим условиям соответствуют компоненты

$$\Delta T^{33}_{(0)} = (1/2)(1 + \cos\bar r)\Delta Q^{33}_{(1)},\ \ \Delta T^{30}_{(0)} = (1/2)(1 + \cos\bar r)\,\Delta Q^{30}_{(1)}, \tag{3.3.23}$$

остальные компоненты равны нулю. Здесь $\bar r = \pi(r - r_1)/(bx^0/v^0_{(r)})$ — безразмерная координата.

Корректирующий тензор $\Delta(T_{\text{к}})$ имеет компоненты:

$$\Delta T^{11}_{(\text{к})} = \sum_{mn}\Delta A_{mn} f^{11}(mn),\ \Delta T^{(\text{к})}_{00} = \sum_{mn}\Delta A_{mn} f^{00}(mn),$$
$$\Delta T^{33}_{(\text{к})} = \sum_{mn}\Delta A_{mn} f^{33}(mn),\ \Delta T^{30}_{(\text{к})} = \sum_{mn}\Delta A_{mn} f^{30}(mn). \tag{3.3.24}$$

Параметры ΔA_{mn} подчинены уравнениям

$$\sum_{mn}\Delta A_{mn} F(mnij) + \Delta L(ij) = 0\,, \tag{3.3.25}$$

Коэффициенты $F(mnij)$ вычисляются по формулам (2.1.83), свободные члены $\Delta L(ij)$ — по формулам (2.1.84), при этом следует учитывать физико-механические свойства материала сферы, которые определяются функциями состояния.

Интегралы $F^{(k)}(mnij)$ равны

$$F^{(k)} = 8\,\frac{b}{v^0_{(r)}}\left(\frac{x^0_2}{\pi}\right)^2\iint_0^{\pi} A^{(k)}\left(r_1 + \frac{b}{v^0_{(r)}}\frac{x^0_2}{\pi}\frac{\bar r\bar x^0}{\pi}\right)^2 \bar x^0\,d\bar r d\bar x^0; \tag{3.3.26}$$

интегралы $\Delta L^{(l)}$ таковы:

$$\Delta L^{(l)} = 8\,\frac{b}{v^0_{(r)}}\left(\frac{x^0_2}{\pi}\right)^2\iint_0^{\pi}\Delta B^{(l)}\left(r_1 + \frac{b}{v^0_{(r)}}\frac{x^0_2}{\pi}\frac{\bar r\bar x^0}{\pi}\right)^2 \bar x^0\,d\bar r d\bar x^0.$$

Подынтегральные выражения $A^{(k)}$ и $\Delta B^{(l)}$ определяются по известным формулам, причем $f^{\alpha\beta}$ принимаются в виде (2.1.68′), компоненты $T^{\alpha\beta}_{(0)}$ следует заменить на компоненты $\Delta T^{\alpha\beta}_{(0)}$ тензора (3.3.23).

Решение уравнений (3.3.25) проводится с помощью процедуры последовательных приближений, рассмотренной в § 3 гл. 1. В результате будут определены параметры ΔA_{mn}, следовательно, и компоненты корректирующего тензора $\Delta(T_{\text{к}})$.

Таким образом, тензор кинетических напряжений $(T)_{\text{разгр}}$ для области возмущений разгрузки построен.

В момент $t_{\text{от}} = (r_2 - r_1)/a$ волна нагрузки достигает внешней поверхности сферы и отражается, зарождается отраженная волна нагрузки, которая распространяется со скоростью a в обратном направлении. При этом образуется область возмущений отраженной волны нагрузки (рис. 86), ограниченная внешней поверхностью сферы и поверхностью переднего фронта отраженной волны нагрузки радиуса

$$r_{\text{от}} = r_2 - ax^0/a_{cq}, \tag{3.3.27}$$

причем отсчет координаты x^0 ведется от значения

$$x_1^0 = \frac{a_{cq}}{a_0}(r_2 - r_1),$$

которое принято за начальное.

Текущие координаты θ, φ, r, x^0 изменяются в следующих пределах:

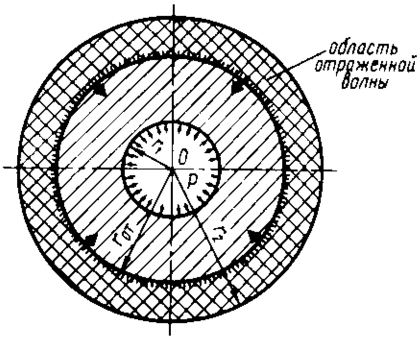

Рис. 86

$$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$

$$r_2 \geqslant r \geqslant r_{\text{от}}, \quad 0 \leqslant x^0 \leqslant x_2^0, \tag{3.3.28}$$

где $x_2^0 = a_{cq}\,[(r_2 - (b/a)(r_2 - r_1) + bt_p)\,]/(a + b)$.

Области возмущений отраженной волны нагрузки соответствует тензор кинетических напряжений

$$(T)_{\text{отр}} = (T)_{\text{нагр}} - \Delta_1(T). \tag{3.3.29}$$

Тензор $\Delta_1(T)$ требуется построить в виде суммы тензоров:

$$\Delta_1(T) = \Delta_1(T_0) + \Delta_1(T_{\text{к}}). \tag{3.3.30}$$

Для основного тензора $\Delta_1(T_0)$ имеем следующие граничные условия:

$$\Delta_1 T^{3\beta} = \Delta_1 Q^{3\beta}_{(1)} \text{ при } r = r_2, \quad \Delta_1 T^{0\beta} = 0 \text{ при } x^0 = 0, \tag{3.3.31}$$

где

$$\Delta_1 Q^{33}_{(1)} = T^{33}_{\text{нагр}}\,|_{r_2}, \quad \Delta_1 Q^{30}_{(1)} = T^{30}_{\text{нагр}}\,|_{r_2}.$$

Этим условиям соответствует тензор $\Delta_1(T_0)$ с компонентами:

$$\begin{aligned} \Delta_1 T^{33}_{(0)} &= (1/2)(1 + \cos\bar{r})\Delta_1 Q^{33}_{(1)}, \\ \Delta_1 T^{30}_{(0)} &= (1/2)(1 + \cos\bar{r})\Delta_1 Q^{30}_{(1)}, \end{aligned} \tag{3.3.32}$$

остальные компоненты равны нулю. Здесь $\bar{r} = \pi(r_2 - r)/(a_0 x^0/a_{cq})$ — безразмерная координата.

Компоненты корректирующего тензора $\Delta_1(T_{\text{к}})$ принимаем в виде:

$$\begin{aligned} \Delta_1 T^{11}_{(\text{к})} &= \sum_{mn} \Delta_1 A_{mn} f^{11}(mn), \quad \Delta_1 T^{00}_{(\text{к})} = \sum_{mn} \Delta_1 A_{mn} f^{00}(mn), \\ \Delta_1 T^{33}_{(\text{к})} &= \sum_{mn} \Delta_1 A_{mn} f^{33}(mn), \quad \Delta_1 T^{30}_{(\text{к})} = \sum_{mn} \Delta_1 A_{mn} f^{30}(mn). \end{aligned} \tag{3.3.33}$$

Функции $f^{\alpha\beta}(mn)$ определяются по формулам (2.1.68′), параметры $\Delta_1 A_{mn}$ подчинены уравнениям

$$\sum_{m,n} \Delta_1 A_{mn} F(mnij) + \Delta_1 L(ij) = 0. \tag{3.3.34}$$

Коэффициенты $F\,(mnij)$ вычисляются по формулам (2.1.70), свободные члены $\Delta_1 L\,(ij)$ — по формулам (2.1.72), при этом с помощью функций состояния учитываются физико-механические свойства материала сферы. Интегралы $F^{(k)}$ $(k = 1,\ 2)$ находим по формулам

$$F^{(k)} = 8\,\frac{a_0}{a_{cq}}\left(\frac{x_2^0}{\pi}\right)^2 \int\limits_0^{\pi}\!\!\int A^{(k)}\left(r_2 - \frac{a_0}{a_{cq}}\,\frac{x_2^0}{\pi}\,\frac{\bar{r}\bar{x}^0}{\pi}\right)^2 \bar{x}^0\, d\bar{r}\, d\bar{x}^0; \quad (3.3.35)$$

интегралы $\Delta_1 L^{(l)}$ — по формулам

$$\Delta_1 L^{(l)} = 8\,\frac{a_0}{a_{cq}}\left(\frac{x_2^0}{\pi}\right)^2 \int\limits_0^{\pi}\!\!\int \Delta_1 B^{(l)}\left(r_2 - \frac{a_0}{a_{cq}}\,\frac{x_2^0}{\pi}\,\frac{\bar{r}\bar{x}^0}{\pi}\right)^2 \bar{x}^0\, d\bar{r}\, d\bar{x}^0.$$

Подынтегральные выражения $A^{(k)}$ и $\Delta_1 B^{(l)}$ находим по известным формулам, в которых $f^{\alpha\beta}$ принимаются в виде (2.1.68′), компоненты $T^{\alpha\beta}_{(0)}$ следует заменить на $\Delta_1 T^{\alpha\beta}_{(0)}$.

Решение уравнений (3.3.34) строится с помощью процедуры последовательных приближений, приведенной в § 3 гл. 1. В результате находим параметры $\Delta_1\ A_{mn}$, следовательно, и компоненты корректирующего тензора $\Delta_1\ (T_{\text{к}})$.

Таким образом, для области возмущений отраженной волны нагрузки тензор кинетических напряжений $(T)_{\text{отр}}$ построен. Для других областей возмущений тензор кинетических напряжений строится аналогично изложенному. По известному тензору кинетических напряжений (T), используя соображения, изложенные в гл. 1, можно оценить откольные явления на поверхностях сферы и эффекты, которые вызваны взаимодействием волн напряжений друг с другом при их распространении внутри объема сферы. Для этого требуется вычислить распределение среднего кинетического напряжения $T = (1/3)\mathrm{T}_1\,(T)$ и интенсивности кинетических напряжений $T_i = (\sqrt{2}/2)\sqrt{3\mathrm{T}_2\,(T) - \mathrm{T}_1^2\,(T)}$, где в рассматриваемых областях возмущений

$$T_1\,(T) = g_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta},\quad \mathrm{T}_2\,(T) = T_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}. \qquad (3.3.36)$$

Откольные явления на внешней поверхности реализуется в том случае, когда выполняется условие

$$2T_i^{\text{нагр}}|_{r_2} > T_i^B; \qquad (3.3.37)$$

характер откола определяется по критерию, приведенному в § 5 гл. 1.

Образование внутренней трещины оценивается соотношением

$$[T_l^{\text{разгр}} + T_l^{\text{отр}}]_{r_{\text{вс}}} > T_l^B, \qquad (3.3.38)$$

где $r_{\text{вс}} = b[\,(\,(2r_2 - r_1) - at_p)\,]/(a + b)$.

Проведенное исследование напряженного состояния сферы при взрыве соответствует условию

$$t_p < t_{\text{от}} = (r_2 - r_1)/a_0, \qquad (3.3.39)$$

однако при малой толщине $h = r_2 - r_1$ сферы условие (3.3.39) не выполняется, т. е. имеем

$$t_p > t_{\text{от}}. \qquad (3.3.40)$$

В этом случае отраженная волна нагрузки может достигнуть внутрен ней поверхности сферы раньше, чем возникнет волна разгрузки (д начала разгрузки) и будет взаимодействовать с давлением от продукто взрыва. Это обстоятельство изменит начало разгрузки, очевидно, вы зовет преждевременную разгрузку и приведет к образованию откол ного явления на внутренней поверхности сферы, т. е. к преждевреме ному ее разрушению.

После трех-четырехкратного пробега волн напряжений по сфер наступает процесс колебательного движения сферы, находящейся по действием указанных внешних силовых факторов. Этот процесс хара теризуется тензором кинетических напряжений (T). Построение это го тензора выполняется в сферической системе координат $(\theta, \varphi, r, x^0)$ с началом в центре сферы и основано на использовании общего решени (2.1.61) уравнений равновесия фиктивного тела, которое выражает ком поненты тензора (T) через функцию кинетических напряжений $f(r, x^0)$. Функция кинетических напряжений $f(rx^0)$ строится так, чтобы выпол нялись следующие граничные условия:

$$T^{3\beta} = Q^{3\beta}_{(\gamma)} \text{ при } r = r_\gamma,\ T^{0\beta} = Q^{0\beta}_{(1)} \text{ при } x^0 = x^0_1 \qquad (3.3.41)$$

и вариационное уравнение, приведенное в § 3, гл. 1, выбираемое в со ответствии с физико-механическими свойствами и состоянием материа ла сферы в момент $t = 3(r_2 - r_1)/a_0$. Здесь $Q^{3\beta}_{(1)}$ и $Q^{0\beta}_{(1)}$ — функции на грузок, которыми характеризуется распределение напряжений, ско ростей и внешних нагрузок на поверхностях сферы.

В момент $t_{\text{нач}} = 3(r_2 - r_1)/a_0$, принятый за начальный, сфера на ходится в напряженном состоянии, причем тензор кинетических на пряжений $(T)_{\text{нач}}$, соответствующий волне нагрузки, волне разгруз ки или какой-либо другой волне напряжений, известен. Искомый тен зор можно представить в виде

$$(T) = (T)_{\text{нач}} + \Delta_*(T), \qquad (3.3.42)$$

где $\Delta_*(T)$ — дополнительный тензор кинетических напряжений, ко торый требуется построить, исходя из выполнения вышеуказанны условий; для процесса нагрузки $\Delta_*(T)$ берется со знаком плюс, дл разгрузки — со знаком минус.

Тензор $\Delta_*(T)$ строится в виде суммы основного и корректирующег тензоров:

$$\Delta_*(T) = \Delta_*(T_0) + \Delta_*(T_\text{к}). \qquad (3.3.43)$$

Компоненты основного тензора $\Delta_*(T_0)$ подчинены следующим гра ничным условиям:

$$\Delta_* T^{3\beta}_{(0)} = \Delta_* Q^{3\beta}_{(\gamma)} \text{ при } r = r_\gamma,\ \Delta_* T^{0\beta}_{(0)} = \Delta_* Q^{0\beta}_{(\gamma)} \text{ при } x^0 = 0, \qquad (3.3.44)$$

где $\Delta_* Q^{3\beta}_{(\gamma)}$ и $\Delta_* Q^{0\beta}_{(\gamma)}$ — изменения функций нагрузок $Q^{3\beta}_{(\gamma)}$ и $Q^{0\beta}_{(\gamma)}$ в мо менты $t \geqslant t_{\text{нач}}$, т. е.

$$\Delta_* Q^{3\beta}_{(\gamma)} = Q^{3\beta}_{(\gamma)\,\text{нач}} - Q^{3\beta}_{(\gamma)},\ \Delta_* Q^{0\beta}_{(\gamma)} = 0. \qquad (3.3.45)$$

Этим условиям соответствуют компоненты основного тензора:

$$\Delta_* T^{11}_{(0)} = \frac{1}{2r}\frac{d\bar{r}}{dr}\sin\bar{r}\left[\left(\frac{r_1}{r}\right)^3 \Delta_* \widetilde{Q}^{33}_{(1)} - \left(\frac{r_2}{r}\right)^3 \Delta_* \widetilde{Q}^{33}_{(2)}\right],$$

$$\Delta_* T^{33}_{(0)} = \frac{1}{2}(1+\cos\bar{r})\left(\frac{r_1}{r}\right)^3 \Delta_* Q^{33}_{(1)} + \frac{1}{2}(1-\cos\bar{r})\left(\frac{r_2}{r}\right)^2 \Delta_* Q^{33}_{(2)},$$

$$\Delta_* T^{30}_{(0)} = \frac{1}{2}(1+\cos\bar{r})\left[\Delta_* Q^{30}_{(1)} - \left(\frac{r_1}{r}\right)^2\left(r_1 \frac{\partial}{\partial x^0}\Delta_* \widetilde{Q}^{33}_{(1)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 3\frac{dr_1}{dx^0}\Delta_* \widetilde{Q}^{33}_{(1)}\right)\right] + \frac{1}{2}(1-\cos\bar{r})\left[\Delta_* Q^{30}_{(2)} - \left(\frac{r_2}{r}\right)^2\left(r_2 \frac{\partial}{\partial x^0}\Delta_* \widetilde{Q}^{33}_{(2)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 3\frac{dr_2}{dx^0}\Delta_* \widetilde{Q}^{33}_{(2)}\right)\right] + \frac{1}{2}\frac{d\bar{r}}{dx^0}\sin\bar{r}\left(\frac{r_1^3}{r^2}\Delta_* \widetilde{Q}^{33}_{(1)} - \frac{r_2^3}{r^2}\Delta_* \widetilde{Q}^{33}_{(2)}\right),$$

$$\Delta_* T^{00}_{(0)} = -\frac{1}{2}(1+\cos\bar{r})\left(\frac{r_1}{r}\right)^3 \Delta_* \widetilde{Q}^{33}_{(1)} - \frac{1}{2}(1-\cos\bar{r})\left(\frac{r_2}{r}\right)^2 \Delta_* \widetilde{Q}^{33}_{(2)} -$$

$$- \frac{d\bar{r}}{dr}\sin\bar{r}\left(\frac{r_1^3}{r^3}\Delta_* \widetilde{Q}^{33}_{(1)} - \frac{r_2^3}{r^2}\Delta_* \widetilde{Q}^{33}_{(2)}\right), \qquad (3.3.46)$$

где $\Delta_*\widetilde{Q}^{33}_{(\gamma)}$ и $\Delta_*\widetilde{Q}^{30}_{(\gamma)}$ — самоуравновешенные части функций нагрузок $\Delta_*Q^{3\beta}_{(\gamma)}$ и $\Delta_*Q^{30}_{(\gamma)}$; $\bar{r} = \pi(r - r_1)/(r_2 - r_1)$.

Корректирующий тензор $\Delta_*(T_\text{к})$ имеет компоненты:

$$\Delta_* T^{11}_{(\text{к})} = \sum_{mn}\Delta_* A_{mn} f^{11}(mn), \quad \Delta_* T^{00}_{(\text{к})} = \sum_{mn}\Delta_* A_{mn} f^{00}(mn),$$

$$\Delta_* T^{33}_{(\text{к})} = \sum_{mn}\Delta_* A_{mn} f^{33}(mn), \quad \Delta_* T^{30}_{(\text{к})} = \sum_{mn}\Delta_* A_{mn} f^{30}(mn). \qquad (3.3.47)$$

Функции $f^{\alpha\beta}(mn)$ определяются по формулам (2.1.68′); параметры Δ_*A_{mn} подчинены уравнениям

$$\sum_{mn}\Delta_* A_{mn} F(mnij) + \Delta_* L(ij) = 0. \qquad (3.3.48)$$

Коэффициенты $F(mnij)$ вычисляются по формулам (2.1.70), свободные члены $\Delta_* L(ij)$ — по формулам (2.1.72), физико-механические свойства и состояние материала сферы учитываются с помощью функций состояния. Интегралы $F^{(k)}$ имеют вид

$$F^{(k)} = 8\left(\frac{x_2^0}{\pi}\right)\iint_0^\pi r_1^3\left(\frac{r_2}{r_1} - 1\right)\left(1 + \left(\frac{r_2}{r_1} - 1\right)\frac{\bar{r}}{\pi}\right)^2 A^{(k)}\, d\bar{r}\, d\bar{x}^0; \qquad (3.3.49)$$

их подынтегральные выражения находятся по известным формулам, интегралы $\Delta_*L^{(l)}$ имеют вид

$$\Delta_* L^{(l)} = 8\left(\frac{x_2^0}{\pi}\right)\iint_0^\pi r_1^3\left(\frac{r_2}{r_1} - 1\right)\left(1 + \left(\frac{r_2}{r_1} - 1\right)\frac{\bar{r}}{\pi}\right)^2 \Delta_* B^{(l)}\, \overline{d\bar{r}\, d\bar{x}^0}.$$

(3.3.50)

Подынтегральные выражения $\Delta^* B^{(l)}$ определяются по известным формулам, в которых компоненты $T^{\alpha\beta}_{(0)}$ следует заменить соответственно на (3.3.46).

Решение уравнений (3.3.48) строится с помощью процедуры последовательных приближений, изложенной в § 3 гл. 1. В итоге находим параметры $\Delta_* A_{mn}$, следовательно, и компоненты корректирующего тензора $\Delta_* (T_к)$.

Таким образом, тензор кинетических напряжений (T) для сферы, находящейся в состоянии колебательного движения, построен.

Итак, используя приведенное решение, можно определить характеристики напряженного состояния и движения частиц сферы в областях возмущений волн напряжений в начальный период и в объеме всей сферы в последующий период процесса нагружения.

§ 4. Удар сферы о преграду

Физико-механические свойства материала сферы и преграды, условия и скорость соударения определяют локальные особенности удара. Возможны следующие случаи: а) удар с местным смятием без внедрения; б) удар с внедрением в преграду. Как при ударе без внедрения, так и при ударе с внедрением сфера испытывает действие силы тяжести, силы инерции и давления, которое приложено на части поверхности, находящейся в контакте с преградой, и распределено по закону

$$p(x^i, t) = \begin{cases} p_1(x^i, t) \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant t_p, \\ p_2(x^i, t) \text{ при } t_p \leqslant t \leqslant t_в, \end{cases} \tag{3.4.1}$$

где t_p — продолжительность нагрузки, $t_в$ — продолжительность всего процесса нагружения. Давление p определяется в результате решения задачи о соударении (см. § 2 гл. 2). Из этого решения также определяется скорость движения частиц материала сферы на контактной поверхности:

$$v^i = v^i(x^j, t) \; (i = 1, 2, 3). \tag{3.4.2}$$

При ударе в сфере возникают волны напряжений, которые, распространяясь с конечной скоростью, образуют области возмущений. Материал сферы в этих областях находится в напряженном состоянии, которое характеризуется тензором напряжений (σ), частицы движутся, вектор скорости $\mathbf{v}$, плотность материала ρ. Этим характеристикам соответствует тензор кинетических напряжений (T), который требуется построить для каждой области возмущений, учитывая при этом ее природу, физико-механические свойства и состояние материала.

В начальный момент $t = 0$ происходит удар (сфера вступает во взаимодействие с преградой), в точке контакта A возникает давление большой интенсивности, которое является источником волны нагрузки, распространяющейся со скоростью a_0. Образуется область возмущений нагрузки (рис. 87), ограниченная частью поверхности сферы, включая загруженную область, и поверхностью переднего фронта волны нагрузки, которой соответствует тензор кинетических напряжений

$$(T)_{\text{нагр}} = (T_0) + (T_{\text{к}}). \quad (3.4.3)$$

Построение основного (T_0) и корректирующего $(T_{\text{к}})$ тензоров выполняется в сферической системе координат $(\theta, \varphi, r, x^0)$ с началом в точке O, при этом считается, что текущие координаты изменяются в следующих пределах:

$$\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_2; \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$
$$r_2 \leqslant r \leqslant R_2, \; 0 \leqslant x^0 \leqslant x_2^0. \quad (3.4.4)$$

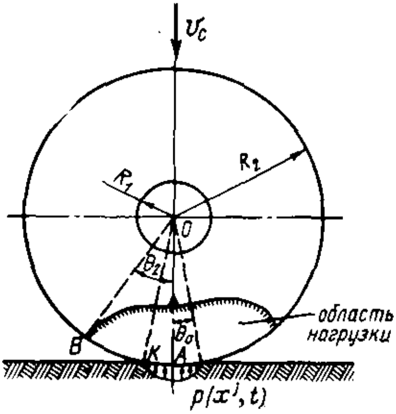

Рис. 87

Для сплошной сферы (рис. 88, *а*) пределы соответственно равны:

$$\theta_2 = \arcsin\,[(a_0/a_{cq})\,(x_0/R)\,], \;\; x_2^0 = a_{cq}R/a_0$$

и

$$\theta_2 = \pi, \;\; x_2^0 = (a_{cq}/a_0)2R,$$
$$r_2 = R\left[\cos(\theta-\theta_0) - \sqrt{\left(\cos^2(\theta-\theta_0) - 1 + \left(\frac{a_0}{a_{cq}}\frac{x^0}{R}\right)^2\right)}\right], \quad (3.4.5)$$

где θ_0 — угол загруженной области. Отражение волны нагрузки от противоположного полюса сферы происходит в момент $t_{\text{от}} = 2R/a_0$, которому соответствуют значения $\theta_2 = \pi$, $x_2^0 = a_{cq}2R/a_0$.

Для полой сферы (рис. 88, *б*) пределы (3.4.5) относятся к начальному периоду процесса распространения волны нагрузки, действие их ограничено условиями

$$\theta_2 \leqslant \arcsin\,(1 - R_1/R_2), \;\; x_2^0 \leqslant (a_{cq}/a_0)\,(R_2 - R_1). \quad (3.4.5')$$

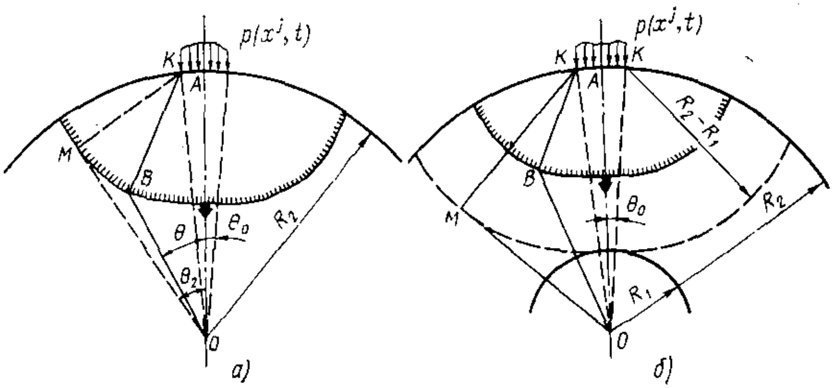

Рис. 88

В момент $t_{\text{от}} = (R_2 - R_1)/a_0$, которому соответствуют значения

$$\theta_2 = \arcsin(1 - R_1/R_2),\ x_2^0 = (a_{cq}/a_0)(R_2 - R_1), \tag{3.4.6}$$

волна нагрузки, достигнув внутренней поверхности сферы, отражается. При этом возникает отраженная волна нагрузки, распространяющаяся в обратном направлении со скоростью a_0, образуя область возмущений отраженной волны нагрузки. В дальнейшем, одновременно с распространением отраженной волны, продолжает распространяться прямая волна нагрузки, граница соответствующей ей области возмущений определяется уравнениями:

$$r_2 = R_2\left[\cos(\theta - \theta_0) - \sqrt{\left(\cos^2(\theta - \theta_0) - 1 + \left(\frac{a_0}{a_{cq}}\frac{x^0}{R_2}\right)^2\right)}\right] \geqslant R_1,$$
$$\theta_2 = \arcsin[(a_0/a_{cq})(x^0/R_2)] \leqslant \pi x_2^0/2 = (a_{cq}/a_0)R_2, \tag{3.4.6'}$$
$$\theta_2 = \pi,\ x_2^0 = (a_{cq}/a_0)(2R_2).$$

Таким образом, область возмущений нагрузки распадается на две области, каждая из которых определяется своими уравнениями. Так, в первой области

$$\theta_2 = \arcsin[(a_0/a_{cq})(x^0/R_2)],\ x_2^0 = (a_{cq}/a_0)R_2;$$

во второй области

$$\theta_2 = \pi,\ x_2^0 = (a_{cq}/a_0)(2R_2), \tag{3.4.7}$$

в обеих областях

$$r_2 = R_2\left[\cos(\theta - \theta_0) - \sqrt{\left(\cos^2(\theta - \theta_0) - 1 + \left(\frac{a_0}{a_{cq}}\frac{x^0}{R_2}\right)^2\right)}\right].$$

Искомые тензоры строятся в форме общего решения (1.4.21) уравнений равновесия фиктивного тела. Это решение позволяет выразить компоненты тензоров через функции кинетических напряжений Π_α ($\alpha = 1, 2, 3, 0$), которые подчинены следующим граничным условиям

$$T^{3\beta} = Q_{(1)}^{3\beta} \text{ при } r = r_1 = R_2,$$
$$w_\alpha = 0 \text{ при } r = r_2,\ T^{0\beta} = Q_{(1)}^{0\beta} \text{ при } x^0 = 0, \tag{3.4.8}$$

где $Q_{(1)}^{(3j)} = (\rho v^3 v^j)_{R_2} - p_1^{3j}$, $Q_{(1)}^{30} = (\rho v^3 a_{cq})_{R_2}$, $Q_{(1)}^{0j} = (\rho v^j a_{cq})_0$, $Q_{(1)}^{00} = (\rho a_{cq}^2)_0$, и вариационному уравнению (см. § 3 гл. 1), взятому в соответствии с состоянием области возмущений нагрузки.

Для основного тензора (T_0) имеем следующие граничные условия:

$$T^{3\beta} = Q_{(1)}^{3\beta} \text{ при } r = R_2,\ T^{0\beta} = Q_{(1)}^{0\beta} \text{ при } x^0 = 0. \tag{3.4.9}$$

Координате r соответствуют функции кинетических напряжений

$$\Pi_{\alpha}^{(0)} - (1/2)(1 + \cos\bar{r})F_{\alpha 3}, \tag{3.4.10}$$

где $\bar{r} = \pi(R_2 - r)/(R_2 - r_2)$ — безразмерная координата.

Функции $F_{\alpha 3}$ удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{\partial^2 F_{13}}{\partial\theta\partial\varphi}+R_2\left(\sin\theta\frac{\partial F_{23}}{\partial\theta}+\cos\theta F_{23}\right)\sin\theta+\frac{R_2^2}{2}\left(\sin^2\theta\frac{\partial^2 F_{03}}{\partial\theta^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 F_{03}}{\partial\varphi^2}+\sin\theta\cos\theta\frac{\partial F_{03}}{\partial\theta}+2\ (\cos^2\theta-\sin^2\theta)F_{03}\right)=R_2^4\sin^2\theta Q^{33}_{(1)},$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial F_{33}}{\partial\theta}-\frac{\partial F_{23}}{\partial\varphi}\right)-\frac{2}{R_2}\frac{\partial F_{13}}{\partial\varphi}+2\sin^2\theta F_{23}-R_2^2\sin^2\theta\frac{\partial^2 F_{23}}{\partial x^{02}}-$$

$$-R_2\left(4\cos\theta F_{03}-\sin\theta\frac{\partial F_{03}}{\partial\theta}\right)\sin\theta=2R_2^4\sin^2\theta Q^{31}_{(1)},\qquad(3.4.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial F_{33}}{\partial\theta}-\frac{\partial F_{23}}{\partial\varphi}\right)+\frac{2}{R_2}\frac{\partial F_{13}}{\partial\theta}-\operatorname{ctg}\theta\left(\frac{\partial F_{33}}{\partial\theta}-\frac{\partial F_{23}}{\partial\varphi}\right)+2F_{33}+$$

$$+\frac{2\operatorname{ctg}\theta}{R_2}F_{13}-R_2^2\frac{\partial^2 F_{33}}{\partial x^{02}}+R_2\frac{\partial F_{03}}{\partial\varphi}=2R_2^4\sin^2\theta Q^{32}_{(1)},$$

$$\sin\theta\frac{\partial^2 F_{23}}{\partial\theta\partial x^0}+\frac{\partial^2 F_{33}}{\partial\varphi\partial x^0}+\cos\theta\sin\theta\frac{\partial F_{23}}{\partial x^0}=2R_2^2\sin^2\theta Q^{30}_{(1)}$$

и граничным условиям:

$$F_{\alpha 3}=0,\ \frac{\partial F_{23}}{\partial\theta}=0 \text{ при } \theta=\theta_\gamma,$$

$$F_{23}=0,\ \frac{\partial F_{23}}{\partial x^0}=0,\ F_{33}=0,\ \frac{\partial F_{33}}{\partial x^0}=0 \text{ при } x^0=x^0_\gamma;\qquad(3.4.11')$$

по координате φ функции периодические (период 2π).

Учитывая произвольность искомых функций, подчиним функцию F_{03} условию

$$\sin^2\theta\frac{\partial^2 F_{03}}{\partial\theta}+\frac{\partial^2 F_{03}}{\partial\varphi^2}+\sin\theta\cos\theta\frac{\partial F_{03}}{\partial\theta}+2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)F_{03}=0.$$

Из этого уравнения и граничных условий (3.4.11′) следует, что

$$F_{03}=0.\qquad(3.4.12)$$

Для функции F_{23} из (3.4.11) можно получить уравнение

$$\frac{\partial^3 F_{23}}{\partial\theta\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(\sin^2\theta\frac{\partial F_{23}}{\partial\theta}+\sin\theta\sin\theta F_{23}\right)-$$

$$-2\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin^2\theta\left(F_{23}-\frac{R_2^2}{2}\frac{\partial^2 F_{23}}{\partial x^{02}}\right)\right)-2\sin\theta\left(\sin\theta\frac{dF_{23}}{\partial\theta}+\right.$$

$$\left.+\cos\theta F_{23}\right)=-2A,\qquad(3.4.13)$$

где

$$A=R_2^2\left[R_2\sin^2\theta Q^{33}_{(1)}+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(R_2^2\sin^2\theta\ Q^{31}_{(1)}-\frac{\partial}{\partial\theta}\int_0^{x^0}\sin^2\theta Q^{30}_{(1)}\,dx^0\right)\right].$$

Решением уравнения (3.4.13) является функция

$$F_{23} = -\sum_{m,n} \frac{2}{R_2 \omega_{mn}} \int_0^{x^0} (A_{mn}^{(1)}(\xi) \cos n\varphi +$$

$$+ A_{mn}^{(2)}(\xi) \sin n\varphi) \sin \omega_{mn} \frac{x^0 - \xi}{R_2} d\xi \Theta_{mn}(\theta), \qquad (3.4.14)$$

где

$$A_{mn}^{(l)} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} A \left(\frac{d}{d\theta} (\sin^2 \theta \Theta_{mn}(\theta)) \right) \left\{ \begin{matrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{matrix} d\theta d\varphi \right.}{\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\frac{d}{d\theta} (\sin^2 \theta \Theta_{mn}(\theta)) \right)^2 d\theta}$$

— коэффициенты Фурье функции A.

Собственные функции $\Theta_{mn}(\theta)$ и собственные значения ω_{mn} находим в результате интегрирования уравнения

$$\sin^2 \theta \Theta''' + 5 \sin \theta \cos \theta \Theta'' + [4 (\cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta) -$$
$$- n^2 - \omega^2 \sin^2 \theta] \Theta' - 2 (5 + \omega^2) \sin \theta \cos \theta \Theta = 0 \qquad (3.4.15)$$

совместно с граничными условиями: $\Theta = 0$, $\Theta' = 0$ при $\theta = \theta_\gamma$, причем при интегрировании учитывается, что значения θ_2 меняются.

Функция F_{13} подчинена уравнению

$$\frac{\partial^2 F_{13}}{\partial \theta \partial \varphi} = R_2 \sin \theta (R_2^3 \sin \theta Q_{(1)}^{33} - \Psi),$$

где $\Psi = \sin \theta \frac{\partial F_{23}}{\partial \theta} + \cos \theta F_{23}$.

Решением этого уравнения является функция

$$F_{13} = \int_0^{\varphi} \int_{\theta_1}^{\theta} R_2 \sin \theta (R_2^3 \sin \theta Q_{(1)}^{33} - \Psi) \, d\theta d\varphi. \qquad (3.4.16)$$

Для функции F_{33} имеем уравнение

$$\frac{\partial^2 F_{33}}{\partial \theta^2} - \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial F_{33}}{\partial \theta} + 2F_{33} - R_2^2 \frac{\partial^2 F_{33}}{\partial x^{02}} = C, \qquad (3.4.17)$$

где

$$C = 2R_2^3 \left[R_2 \sin \theta Q_{(1)}^{32} - \int_0^{\varphi} \left(\sin^2 \theta Q_{(1)}^{33} - \operatorname{ctg} \theta \int_{\theta_1}^{\theta} \sin^2 \theta Q_{(1)}^{33} \, d\theta \right) d\varphi \right] +$$

$$+ 2 \int_0^{\varphi} \left(\sin \theta \Psi + \operatorname{ctg} \theta \int_{\theta_1}^{\theta} \sin \theta \Psi d\theta \right) d\varphi + \frac{1}{\sin \theta} (\Psi - 2 \cos \theta F_{23}).$$

Решение уравнения (3.4.17) имеет вид

$$F_{33} = -\sum_m \frac{1}{R_2^2 \varkappa_m} \int_0^{x^0} C_m(\xi) \sin \varkappa_m \frac{x^0 - \xi}{R_2} d\xi \Theta_m(\theta), \tag{3.4.18}$$

где $C_m(x^0) = \int_{\theta_1}^{\theta_m} C\Theta_m d\theta / \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\Theta_m)^2 d\theta$ — коэффициенты Фурье функции C.

Собственные функции $\Theta_m(\theta)$ и собственные значения $\varkappa_m$ определяются в результате решения следующей краевой задачи:

$$\Theta'' - \operatorname{ctg}\theta\Theta' + (2 + \varkappa^2)\Theta = 0, \tag{3.4.19}$$

при $\theta = \theta_\gamma$ имеем: $\Theta = 0$.

Для координаты x^0 функции кинетических напряжений таковы

$$\begin{gathered}\Pi_{i0}^{(0)} = \frac{1}{2}\int_0^{x^0} \left(1 + \cos \overline{x^0}\right) dx^0 F_{i0}, \\ \Pi_{00}^{(0)} = (1/2)\left(1 + \cos \overline{x^0}\right) F_{00},\end{gathered} \tag{3.4.20}$$

где $\overline{x^0} = \pi x^0 / x_2^0$ — *безразмерная координата, причем x_2^0 (как отмечалось ранее) имеет два значения, что необходимо учитывать.* Этим функциям соответствуют уравнения:

$$F_{00} = r^2 \sin^2\theta Q_{(1)}^{00}, \tag{3.4.21}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial F_{10}}{\partial \varphi} + r^2 \frac{\partial F_{20}}{\partial r} + 2r \sin^2\theta F_{20} = 2r^4 \sin^2\theta Q_{(1)}^{01}, \\ \frac{\partial F_{10}}{\partial \theta} + r^2 \frac{\partial F_{20}}{\partial r} + \operatorname{ctg}\theta F_{10} + rF_{20} = 2r^4 \sin^2\theta Q_{(1)}^{02}, \\ \sin^2\theta \frac{\partial F_{30}}{\partial \theta} + \frac{\partial F_{30}}{\partial \varphi} + \sin\theta\cos\theta F_{20} = 2r^2 \sin^2\theta Q_{(1)}^{03}\end{gathered} \tag{3.4.22}$$

и граничные условия:

$$F_{i0} = 0 \text{ при } \theta = \theta_\gamma, \; F_{i0} = 0 \text{ при } r = r_\gamma; \tag{3.4.22'}$$

по координате φ функции периодические (период 2π).

Решая уравнения (3.4.22) с учетом условий (3.4.22′), получим:

$$\begin{gathered}F_{10} = 2r^4 \operatorname{tg}\theta \left[\sin^2\theta Q_{(1)}^{02} - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin^2\theta \int_0^{\varphi} Q_{(1)}^{01} d\varphi\right)\right], \\ F_{20} = 0, \; F_{30} = 2r^2 \sin^2\theta \int_0^{\varphi} Q_{(1)}^{03} d\varphi.\end{gathered} \tag{3.4.23}$$

Полные функции кинетических напряжений основного тензора таковы:

$$\Pi_1^{(0)} = \frac{1}{2}\left(1+\cos\bar{r}\right)F_{13} + \frac{1}{2}\int\limits_0^{x^0}\left(1+\cos\overline{x^0}\right)dx^0\,F_{10},$$

$$\Pi_2^{(0)} = \frac{1}{2}\left(1+\cos\bar{r}\right)F_{23},\ \Pi_0^{(0)} = \frac{1}{2}\left(1+\cos\overline{x^0}\right)F_{00}, \tag{3.4.24}$$

$$\Pi_3^{(0)} = \frac{1}{2}\left(1+\cos\bar{r}\right)F_{33} + \frac{1}{2}\int\limits_0^{x^0}\left(1+\cos\overline{x^0}\right)dx^0\,F_{30}.$$

Подставляя эти функции в общее решение (1.4.21), получим компоненты тензора $(T_0^{(1)})$ для самоуравновешенных частей $\widetilde{Q}^{\alpha\beta}_{(\gamma)}$ функций нагрузок (3.4.8):

$$\widetilde{Q}^{0\beta}_{(1)} = 0,$$

$$\widetilde{Q}^{3\beta}_{(1)} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} Q^{3\beta}_{(1)}\sin\theta d\varphi d\theta \sum_{m,n}\cos\frac{m\theta}{2}\cos\frac{n\varphi}{2}. \tag{3.4.25}$$

Несамоуравновешенным частям функций нагрузок $\overline{Q}^{3\beta}_{(1)} = Q^{3\beta}_{(1)} - \widetilde{Q}^{3\beta}_{(1)}$, $\overline{Q}^{0\beta}_{(1)} = Q^{0\beta}_{(1)}$ соответствует тензор $(T_0^{(2)})$ с компонентами:

$$\begin{aligned}
T^{33}_{(0)} &= (1/2)\left(1+\cos\bar{r}\right)\overline{Q}^{33}_{(1)},\ T^{00}_{(0)} = (1/2)\left(1+\cos\overline{x^0}\right)\overline{Q}^{00}_{(1)},\\
T^{13}_{(0)} &= (1/2)\left(1+\cos\bar{r}\right)\overline{Q}^{31}_{(1)},\ T^{10}_{(0)} = (1/2)\left(1+\cos\overline{x^0}\right)\overline{Q}^{01}_{(1)},\\
T^{23}_{(0)} &= (1/2)\left(1+\cos\bar{r}\right)\overline{Q}^{32}_{(1)},\ T^{20}_{(0)} = (1/2)\left(1+\cos\overline{x^0}\right)\overline{Q}^{02}_{(1)},\\
T^{30}_{(0)} &= (1/2)\left(1+\cos\bar{r}\right)\overline{Q}^{30}_{(1)} + (1/2)\left(1+\cos\overline{x^0}\right)\overline{Q}^{03}_{(1)}.
\end{aligned} \tag{3.4.26}$$

Основной тензор

$$(T_0) = (T_0^{(1)}) + (T_0^{(2)}). \tag{3.4.27}$$

Компоненты корректирующего тензора равны

$$T^{\alpha\beta}_{(\kappa)} = \sum_{mnpl}\left(A_{mnpl}f^{\alpha\beta}_{(1)} + B_{mnpl}f^{\alpha\beta}_{(2)} + C_{mnpl}f^{\alpha\beta}_{(3)} + D_{mnpl}f^{\alpha\beta}_{(0)}\right); \tag{3.4.28}$$

функции $f^{\alpha\beta}_{(\gamma)}$ $(mnpl)$ известны [19], они зависят от координат и значений θ_γ, x^0_γ, характерных для рассматриваемой области; параметры $A_{mnpl}, \ldots, D_{mnpl}$ удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{mnpl}\left(A_{mnpl}F_{1\beta} + B_{mnpl}F_{2\beta} + C_{mnpl}F_{3\beta} + D_{mnpl}F_{0\beta}\right) + L_\beta = 0. \tag{3.4.29}$$

Коэффициенты $F_{\gamma\beta}$ $(mnplijkq)$ и свободные члены L_β $(ijkq)$ находим по известным формулам; функции состояния α_1 и α_2 выбираются в соответствии с физико-механическими свойствами и состоянием материала сферы в области возмущений нагрузки. Интегралы $F_{\gamma\beta}^{(k)}$ ($k=1, 2$) вычисляем по формулам

$$F_{\gamma\beta}^{(k)} = -2R^3 x_2^0/\pi^3 \times$$

$$\times \left[\int\int_0^{\pi}\int\int \frac{(\theta_2-\theta_1)}{\pi}\left(1-\frac{r_2}{R_2}\right)\left(1-\left(1-\frac{r_2}{R_2}\right)\frac{\bar r}{\pi}\right)^2 \times \right.$$

$$\times \sin\theta A_{\gamma\beta}^{(k)}\, d\bar\theta d\bar\varphi d\bar r d\bar x^0 +$$

$$\left. + \frac{1}{2}\int\int_0^{\pi}\int\int\left(1-\frac{r_2}{R_2}\right)\left(1-\left(1-\frac{r_2}{R_2}\right)\frac{\bar r}{\pi}\right)^2 \sin\theta A_{\gamma\beta}^{(k)}\, d\bar\theta d\bar\varphi d\bar r d\bar x^0\right]. \tag{3.4.30}$$

Подынтегральные выражения $A_{\gamma\beta}^{(k)}$ приведены во второй части книги; интегралы $L_\beta^{(l)}$ вычисляем по формулам

$$L_\beta^{(l)} = -2R^3 x_2^0/\pi^3 \left[\int\int_0^{\pi}\int\int \frac{(\theta_2-\theta_1)}{\pi}\left(1-\frac{r_2}{R_2}\right)\left(1-\left(1-\frac{r_2}{R_2}\right)\frac{\bar r}{\pi}\right)^2 \times \right.$$

$$\times \sin\theta B_\beta^{(l)}\, d\bar\theta d\bar\varphi d\bar r d\bar x^0 +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\int_0^{\pi}\int\int\left(1-\frac{r_2}{R_2}\right)\left(1-\left(1-\frac{r_2}{R_2}\right)\frac{\bar r}{\pi}\right)^2 \times$$

$$\left. \times \sin\theta B_\beta^{(l)}\, d\bar\theta d\bar\varphi d\bar r d\bar x^0 \right]. \tag{3.4.31}$$

Подынтегральные выражения $B_\beta^{(l)}$ приведены во второй части книги, $T_{(0)}^{\alpha\beta}$ — компоненты тензора (3.4.27). Решение уравнений (3.4.29) строится с помощью процедуры последовательных приближений, изложенной в § 3 гл. I, в результате получим параметры $A_{mnpl}, \ldots, D_{mnpl}$, следовательно, и компоненты тензора $(T_к)$.

Таким образом, тензор кинетических напряжений $(T)_{нагр}$ для области возмущений нагрузки построен с учетом всех отмеченных особенностей.

В момент времени t_p давление p достигает максимального значения $p_{max} = p_1(t_p)$, в последующие моменты оно изменяется по закону $p_2(t)$ и имеет значения, меньшие p_{max}, т. е. в момент времени t_p начинается разгрузка. В этот момент на внешней поверхности сферы, где приложено давление, зарождается волна разгрузки, которая распространяется с некоторой скоростью внутрь сферы, образуя область возмущений разгрузки. Область возмущений разгрузки ограничена (рис. 89) внешней поверхностью сферы, включая загруженную область, и поверхностью переднего фронта волны разгрузки, которая определяется в сферических координатах уравнениями:

$$r_2 = R_2 \left[\cos(\theta - \theta_0) - \sqrt{\left(\cos^2(\theta - \theta_0) - 1 + \left(\frac{b}{v^0_{(r)}} \frac{x^0}{R_2} \right)^2 \right)} \right], \tag{3.4.32}$$

$$\theta_2 = \arcsin\left(\frac{b}{v^0_{(r)}} \frac{x^0}{R_2} \right), \quad x^0_2 = \frac{v^0_{(r)}}{b} R_2; \quad \theta_2 = \pi, \quad x^0_2 = 2 \frac{v^0_{(r)}}{b} R_2,$$

при этом отсчет координаты x^0 ведется от значения $x^0 = a_{cq} t_p$, принимаемого за нулевое.

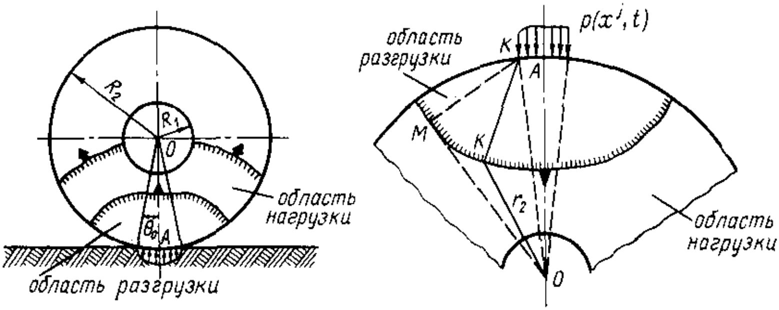

Рис. 89

Области возмущений разгрузки соответствует тензор кинетических напряжений

$$(T)_{\text{разгр}} = (T)_{\text{нагр}} - \Delta (T), \tag{3.4.32'}$$

где тензор $(T)_{\text{нагр}}$ известен, а тензор $\Delta (T)$ требуется построить в виде

$$\Delta (T) = \Delta (T_0) + \Delta (T_\text{к}). \tag{3.4.33}$$

Искомые тензоры представим в форме общего решения (1.4.21) уравнений равновесия фиктивного тела и подчиним их следующим граничным условиям:

$$\Delta T^{3\beta} = \Delta Q^{\beta}_{(1)} \text{ при } r = r_1 = R_2,$$
$$\Delta w_\alpha = 0 \text{ при } r = r_2, \ \Delta T^{0\beta} = 0 \text{ при } x^0 = 0; \tag{3.4.34}$$

функции нагрузок соответственно равны:

$$\Delta Q^{3j}_{(1)} = (\Delta\rho \Delta v^3 \Delta v^j)_{R_2} - \Delta p^{3j}, \quad \Delta Q^{30}_{(1)} = (\Delta\rho \Delta v^3 v^0_{(r)})_{R_2},$$

где $\Delta p = p_1(t_p) - p_2(t)$, $\Delta v^j = v^j(t_p) - v^j(t)$ $(t_p \leqslant t)$.

Кроме того, подчиним искомые тензоры соответствующему вариационному уравнению, приведенному в § 3 гл. 1, взятому для состояния материала при разгрузке.

Для основного тензора $\Delta (T_0)$ имеют место следующие граничные условия:

$$\Delta T^{3\beta}_{(0)} = \Delta Q^{3\beta}_{(1)} \text{ при } r = R_2, \ \Delta T^{0\beta}_{(0)} = 0 \text{ при } x^0 = 0, \tag{3.4.35}$$

которым соответствуют функции кинетических напряжений

$$\Delta\Pi_\alpha^{(0)} = (1/2)\,(1+\cos\bar r)\Delta F_{\alpha 3}, \qquad (3.4.36)$$

где $\bar r = [\pi\,(R_2-r)\,]/\,(R_2-r_2)$ — безразмерная координата. Функции $\Delta F_{\alpha 3}$, входящие в (3.4.36), имеют вид:

$$\Delta F_{03}=0,$$

$$\Delta F_{23}=-\sum_{m,n}\frac{2}{R_2\,\omega_{mn}}\int\limits_0^{x^0}(\Delta A_{mn}^{(1)}(\xi)\cos n\varphi+$$

$$+\Delta A_{mn}^{(2)}(\xi)\sin n\varphi)\sin\omega_{mn}\frac{x^0-\xi}{R_2}d\xi\Theta_{mn}(\theta), \qquad (3.4.37)$$

$$\Delta F_{13}=\int\limits_0^{\varphi}\int\limits_{\theta_1}^{\theta}R_2\sin\theta\,(R_2^3\sin\theta\Delta Q_{(1)}^{33}-\Delta\Psi)\,d\theta d\varphi,$$

$$\Delta F_{33}=-\sum_m\frac{1}{R_2^2\varkappa_m}\int\limits_0^{x^0}\Delta C_m(\xi)\sin\varkappa_m\frac{x^0-\xi}{R_2}\,d\xi\Theta_m(\theta),$$

где

$$\Delta A_{mn}^{(l)}(x^0)=\frac{\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2}\Delta A\left(\frac{d}{d\theta}(\sin^2\theta\Theta_{mn})\right)\begin{Bmatrix}\cos n\varphi\\ \sin n\varphi\end{Bmatrix}d\theta d\varphi}{\displaystyle\pi\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2}\left(\frac{d}{d\theta}(\sin^2\theta\Theta_{mn})\right)^2d\theta} \qquad (3.4.38)$$

— коэффициенты Фурье функции

$$\Delta A=R_2^3\left[R_2\sin^2\theta\Delta Q_{(1)}^{33}+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(R_2^3\sin^2\theta\Delta Q_{(1)}^{32}-\frac{\partial}{\partial\theta}\int\limits^{x^0}\sin^2\theta\Delta Q_{(1)}^{30}\,dx^0\right)\right] \qquad (3.4.39)$$

$$\Delta C_m(x^0)=\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2}\Delta C\Theta_m\,d\theta\Bigg/\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2}(\Theta_m)^2\,d\theta$$

— коэффициенты Фурье функции

$$\Delta C=2R_2^3\left[R_2\sin\theta\Delta Q_{(1)}^{32}-\int\limits_0^{\varphi}\left(\sin^2\theta\Delta Q_{(1)}^{33}-\operatorname{ctg}\theta\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\int\limits_{\theta_1}^{\theta}\sin^2\theta\Delta Q_{(1)}^{33}\,d\theta\right)d\varphi\right]+2\int\limits_0^{\varphi}\left(\sin\theta\Delta\Psi+\operatorname{ctg}\theta\int\limits_{\theta_1}^{\theta}\sin\theta\Delta\Psi d\theta\right)d\varphi+$$

$$+\frac{1}{\sin\theta}(\Delta\Psi-2\cos\theta\Delta F_{23}); \qquad (3.4.40)$$

$$\Delta\Psi=\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Delta F_{23}+\cos\theta\Delta F_{23}.$$

Собственные функции $\Theta_{mn}(\theta)$ и собственные значения ω_{mn} определяются в результате решения краевой задачи (3.4.15); собственные функции $\Theta_m(\theta)$ и собственные значения $\varkappa_m$ находим в результате решения краевой задачи (3.4.19).

В результате подстановки функции кинетических напряжений $\Delta\Pi_\alpha^{(0)}$ в общее решение (1.4.21) определяем компоненты тензора $\Delta(T_0^{(1)})$ для самоуравновешенных частей функций нагрузок $\Delta\tilde{Q}_{(1)}^{3\beta}$, которые, в свою очередь, определяются по формулам (3.4.25); несамоуравновешенным частям функций нагрузок $\Delta\bar{Q}_{(1)}^{3\beta} = \Delta Q_{(1)}^{3\beta} - \Delta\tilde{Q}_{(1)}^{3\beta}$ соответствует тензор $\Delta(T_0^{(2)})$ с компонентами

$$\Delta T_{(0)}^{\alpha\beta} = (1/2)(1 + \cos\bar{r})\Delta\bar{Q}_{(1)}^{3\beta} \ (\alpha = 1, 2, 3, 0;\ \beta = 1, 2, 3, 0). \quad (3.4.41)$$

Основной тензор

$$\Delta(T_0) = \Delta(T_0^{(1)}) + \Delta(T_0^{(2)}). \quad (3.4.42)$$

Корректирующий тензор имеет компоненты:

$$\Delta T_{(\kappa)}^{\alpha\beta} = \sum_{mnpl}(\Delta A_{mnpl} f_{(1)}^{\alpha\beta} + \Delta B_{mnpl} f_{(2)}^{\alpha\beta} + \\ + \Delta C_{mnpl} f_{(3)}^{\alpha\beta} + \Delta D_{mnpl} f_{(0)}^{\alpha\beta}). \quad (3.4.43)$$

Параметры $\Delta A_{mnpl}, \ldots, \Delta D_{mnpl}$ подчинены уравнениям

$$\sum_{mnpl}(\Delta A_{mnpl} F_{1\beta} + \Delta B_{mnpl} F_{2\beta} + \Delta C_{mnpl} F_{3\beta} + \\ + \Delta D_{mnpl} F_{0\beta}) + \Delta L_\beta = 0. \quad (3.4.44)$$

Коэффициенты $F_{\gamma\beta}$ $(mnplijkq)$ и свободные члены ΔL_β $(ijkq)$ находим по известным формулам; функции состояния $\alpha_1^{(e)}$, $\alpha_2^{(e)}$ или $\alpha^{(p)}$ выбираются в соответствии с физико-механическими свойствами и состоянием материала сферы в области возмущений разгрузки. Интегралы $F_{\gamma\beta}^{(k)}$ $(mnplijkq)$ вычисляем по формулам (3.4.30), где r_2, θ_2 и x_2^0 имеют вид (3.4.32); интегралы $\Delta L_\beta^{(i)}$ $(ijkq)$ вычисляются по формулам (3.4.31), где r_2, θ_2, x_2^0 имеют вид (3.4.32) и вместо $T_{(0)}^{\alpha\beta}$ следует подставить компоненты тензора (3.4.42).

Решение уравнений (3.4.44) строится с помощью процедуры последовательных приближений, изложенной в § 3 гл. 1. В итоге находим параметры $\Delta A_{nmpl}, \ldots, \Delta D_{mnpl}$, следовательно, и компоненты корректирующего тензора $\Delta(T_\kappa)$.

Таким образом, тензор кинетических напряжений $(T)_{\text{разгр}}$ для области возмущений разгрузки построен.

В моменты времени $t_{\text{от}} = (R_2 - R_1)/a_0$ для полой сферы и $t_{\text{от}} = 2R/a_0$ для сплошной волна нагрузки достигает поверхности и отражается, возникает отраженная волна нагрузки, распространяющаяся со скоростью a_0 в обратном направлении. Образуется область возмущений отраженной волны нагрузки, которой соответствует тензор кинетических напряжений

$$(T)_{\text{отр}} = (T)_{\text{нагр}} - \Delta_1(T), \quad (3.4.45)$$

причем тензор $(T)_{\text{нагр}}$ известен, а тензор $\Delta_1(T)$ требуется построить в виде

$$\Delta_1(T) = \Delta_1(T_о) + \Delta_1(T_к). \tag{3.4.46}$$

При построении тензора используется общее решение (1.4.21) уравнений равновесия фиктивного тела.

Область возмущений отраженной волны нагрузки сплошной сферы ограничена внешней поверхностью сферы, где имеет место отражение волны нагрузки, и поверхностью переднего фронта отраженной волны (рис. 90), область возмущений характеризуется уравнениями:

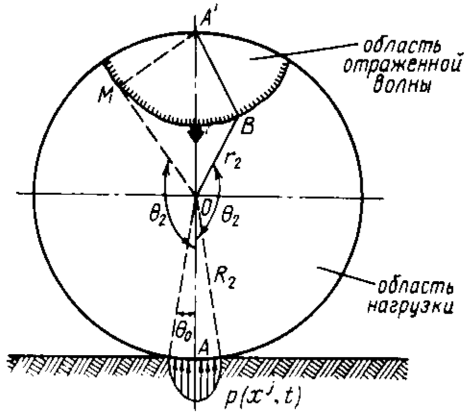

Рис. 90

$$r_2 = R\left[\cos(\pi-\theta) - \sqrt{\cos^2(\pi-0) - 1 + [(a_0/a_{cq})(x^0/R)]^2}\right],$$
$$\theta_2 = \pi - \arcsin\left[(a_0/a_{cq})(x^0/R)\right],\quad x_2^0 = a_{cq}R/a_0, \tag{3.4.47}$$
$$\theta_2 = \theta_0,\quad x_2^0 = 2a_{cq}R/a_0.$$

Область возмущений отраженной волны нагрузки полой сферы ограничена внутренней поверхностью сферы, где имеет место отражение, и поверхностью переднего фронта отраженной волны (рис. 91). В этом случае область возмущений характеризуется уравнениями:

$$r_2 = R_1\left[\cos(\theta-0_0) + \sqrt{\cos^2(\theta-0_0) - 1 + \left(\frac{a_0}{a_{cq}}\frac{x^0}{R_1}\right)^2}\right], \tag{3.4.48}$$
$$\theta_2 = \pi,\quad x_2^0 = a_{cq}(R_2 - R_1)/a_0.$$

$$\theta_2 = 0_0 + \arccos \times$$
$$\times\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{a_0}{a_{cq}}\frac{x_0}{R_1}\right)^2\right),$$
$$x_2^0 = 2R_1\frac{a_{cq}}{a_0}.$$

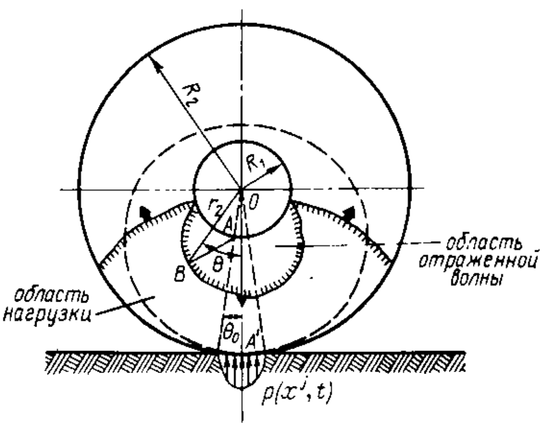

Рис. 91

Текущие координаты в области возмущений отраженной волны нагрузки изменяются в следующих пределах: $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant x^0 \leqslant x_2^0$, где $r_1 = R_2$ для внешней поверхности и $r_1 = R_1$ для внутренней; $x_1^0 = x_{от}^0 = a_{cq}t_{от}$ соответствует началу отражения волны нагрузки, которое принято за начало отсчета координаты x^0 ($x_1^0 = 0$). Компоненты тензоров $\Delta_1(T_0)$ и $\Delta_1(T_к)$ подчинены следующим граничным условиям:

$$\Delta_1 T^{3\beta} = \Delta_1 Q_{(1)}^{3\beta} \text{ при } r = r_1,\ \Delta_1 w^\alpha = 0 \text{ при } r = r_2,$$
$$\Delta_1 T^{0\beta} = 0 \text{ при } x^0 = x_1^0 = 0, \qquad (3.4.49)$$

где $\Delta_1 Q_{(1)}^{3\beta} = T_{нагр}^{3\beta}|_{r_1}$ — функции нагрузок для области возмущений отраженной волны, и вариационному уравнению, приведенному в § 3 гл. 1, которое выбирается в соответствии с состоянием материала в области возмущений отраженной волны.

Основному тензору $\Delta_1(T_0)$ соответствуют граничные условия:

$$\Delta_1 T^{3\beta} = \Delta_1 Q_{(1)}^{3\beta} \text{ при } r = r_1,\ \Delta_1 T^{0\beta} = 0 \text{ при } x^0 = 0 \qquad (3.4.50)$$

и функции кинетических напряжений

$$\Delta_1 \Pi_\alpha^{(0)} = (1/2)\,(1 + \cos \bar{r})\Delta_1 F_{\alpha 3}, \qquad (3.4.51)$$

где $\bar{r} = \pi\,(r - r_1)/\,(r_2 - r_1)$ — безразмерная координата.

Функции $\Delta_1 F_{\alpha 3}$, входящие в (3.4.51), соответственно равны:

$$\Delta_1 F_{03} = 0,$$

$$\Delta_1 F_{23} = -\sum_{m,\,n} \frac{2}{r_1\,\omega_{mn}} \int\limits_0^{x^0} (\Delta_1 A_{mn}^{(1)}(\xi)\cos n\varphi +$$
$$+ \Delta_1 A_{mn}^{(2)}(\xi)\sin n\varphi)\sin \omega_{mn}\frac{x^0 - \xi}{r_1}\,d\xi\Theta_{mn}(\theta), \qquad (3.4.52)$$

$$\Delta_1 F_{13} = \int\limits_0^{\varphi}\int\limits_{\theta_1}^{\theta} r_1 \sin\theta\,(r_1^3 \sin\theta\Delta_1 Q_{(1)}^{33} - \Delta_1 \Psi)\,d\theta d\varphi,$$

$$\Delta_1 F_{33} = -\sum_m \frac{1}{r_1^2\varkappa_m}\int\limits_0^{x^0} \Delta_1 C_m(\xi)\sin\varkappa_m \frac{x^0 - \xi}{r_1}\,d\xi\Theta_m(\theta),$$

где

$$\Delta_1 A_{mn}^{(l)}(x^0) = \frac{\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \Delta_1 A\left(\frac{d}{d\theta}\,(\sin^2\theta\Theta_{mn})\right)\begin{cases}\cos n\varphi\\ \sin n\varphi\end{cases} d\theta d\varphi}{\displaystyle\pi\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2}\left(\frac{d}{d\theta}\,(\sin^2\theta\Theta_{mn})\right)^2 d\theta} \qquad (3.4.53)$$

— коэффициенты Фурье функции

$$\Delta_1 A = r_1^2 \left[r_1 \sin^2\theta \Delta_1 Q^{33}_{(1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial\theta} \left(r_1^2 \sin^2\theta \Delta_1 Q^{31}_{(1)} - \frac{\partial}{\partial\theta} \int_0^{x^0} \sin^2\theta \Delta_1 Q^{30}_{(1)}\, dx^0 \right) \right]; \tag{3.4.54}$$

$$\Delta_1 C_m(x^0) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Delta_1 C\Theta_m\, d\theta \Big/ \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Theta_m^2\, d\theta$$

— коэффициенты Фурье функции

$$\Delta_1 C = 2r_1^3 \left[r_1 \sin\theta \Delta_1 Q^{32}_{(1)} - \right.$$

$$\left. - \int_0^{\varphi} \left(\sin^2\theta \Delta_1 Q^{33}_{(1)} - \operatorname{ctg}\theta \int_{\theta_1}^{\theta} \sin^2\theta \Delta_1 Q^{33}_{(1)}\, d\theta \right) d\varphi \right] +$$

$$+ 2 \int_0^{\varphi} \left(\sin\theta \Delta_1 \Psi + \operatorname{ctg}\theta \int_{\theta_1}^{\theta} \sin\theta \Delta_1 \Psi d\theta \right) d\varphi +$$

$$+ \frac{1}{\sin\theta} (\Delta_1 \Psi - 2\cos\theta \Delta_1 F_{23});$$

$$\Delta_1 \Psi = \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \Delta_1 F_{23} + \cos\theta \Delta_1 F_{23}. \tag{3.4.55}$$

Собственные функции $\Theta_{mn}(\theta)$ и собственные значения ω_{mn} определяются в результате решения краевой задачи (3.4.15); собственные функции $\Theta_m(\theta)$ и собственные значения $\varkappa_m$ находим в результате решения краевой задачи (3.4.19).

Подставляя функции кинетических напряжений (3.4.51) в общее решение (1.4.21), определим тензор $\Delta_1(T_0^{(1)})$ для самоуравновешенных частей функций нагрузок $\tilde{Q}^{3\beta}_{(1)}$; несамоуравновешенным частям функций нагрузок $\Delta_1\overline{Q}^{3\beta}_{(1)} = \Delta_1 Q^{3\beta}_{(1)} - \Delta_1\tilde{Q}^{3\beta}_{(1)}$ соответствует тензор $\Delta_1(T_0^{(2)})$ с компонентами

$$\Delta_1 T^{3\beta}_{(0)} = (1/2)(1 + \cos\bar{r})\Delta_1\overline{Q}^{3\beta}_{(1)} \quad (\beta = 1, 2, 3, 0). \tag{3.4.56}$$

Основной тензор

$$\Delta_1(T_0) = \Delta_1(T_0^{(1)}) + \Delta_1(T_0^{(2)}). \tag{3.4.57}$$

Компоненты корректирующего тензора

$$\Delta_1 T^{\alpha\beta}_{(\kappa)} = \sum_{mnpl} (\Delta_1 A_{mnpl} f^{\alpha\beta}_{(1)} + \Delta_1 B_{mnpl} f^{\alpha\beta}_{(2)} +$$

$$+ \Delta_1 C_{mnpl} f^{\alpha\beta}_{(3)} + \Delta_1 D_{mnpl} f^{\alpha\beta}_{(0)}); \tag{3.4.58}$$

функции $f_{\gamma}^{\alpha\beta}(mnpl)$ известны [19]; параметры $\Delta_1 A_{mnpl}, \ldots, \Delta_1 D_{mnpl}$ удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{mnpl} (\Delta_1 A_{mnpl} F_{1\beta} + \Delta_1 B_{mnpl} F_{2\beta} + \Delta_1 C_{mnpl} F_{3\beta} + $$
$$+ \Delta_1 D_{mnpl} F_{0\beta}) + \Delta_1 L_\beta = 0. \qquad (3.4.59)$$

Коэффициенты $F_{\gamma\beta}(mnplijkq)$ и свободные члены $\Delta_1 L_\beta(ijkq)$ уравнений вычисляются по известным формулам; функции состояния α_1, α_2 выбираются в зависимости от физико-механических свойств и состояния материала сферы в области возмущений отраженной волны нагрузки. Интегралы $F_{\gamma\beta}^{(k)}(mnplijkq)$ находим по формулам

$$F_{\gamma\beta}^{(k)} = 2x_2^0 r_1^3/\pi^2 \int\int_0^\pi\int\int \left(1 + \left(\frac{r_2}{r_1} - 1\right)\frac{\bar{r}}{\pi}\right)^2 \times$$
$$\times \left(\frac{r_2}{r_1} - 1\right)\frac{\theta_2 - \theta_1}{\pi} \sin\theta\, A_{\gamma\beta}^{(k)}\, d\bar{\theta}\, d\bar{\varphi}\, d\bar{r}\, d\bar{x}^0. \qquad (3.4.60)$$

Подынтегральные выражения $A_{\gamma\beta}^{(k)}$ приведены во второй части книги; интегралы $\Delta_1 L_\beta^{(l)}(ijkq)$ вычисляем по формулам

$$\Delta_1 L_\beta^{(l)} = 2x_2^0 r_1^3/\pi^2 \int\int_0^\pi\int\int \left(1 + \left(\frac{r_2}{r_1} - 1\right)\frac{\bar{r}}{\pi}\right)^2 \times$$
$$\times \left(\frac{r_2}{r_1} - 1\right)\frac{\theta_2 - \theta_1}{\pi} \sin\theta\, \Delta_1 B_\beta^{(l)}\, d\bar{\theta}\, d\bar{\varphi}\, d\bar{r}\, d\bar{x}^0. \qquad (3.4.61)$$

Подынтегральные выражения $\Delta_1 B_\beta^{(l)}$ приведены во второй части книги; $T_{(0)}^{\alpha\beta}$ — компоненты тензора (3.4.57). Поскольку θ_2 и x_2^0 имеют два значения, интегралы (3.4.60) и (3.4.61) распадаются на два интеграла каждый.

Решение уравнений (3.4.59) строится с помощью процедуры последовательных приближений, изложенной в § 3 гл. 1, в результате получим параметры $\Delta_1 A_{mnpl}, \ldots, \Delta_1 D_{mnpl}$, следовательно, и компоненты корректирующего тензора $\Delta_1 (T_к)$.

Таким образом, тензор кинетических напряжений $(T)_{отр}$ для области возмущений отраженной волны нагрузки построен. Для других областей возмущений тензор кинетических напряжений строится аналогично изложенному.

При распространении волны напряжений взаимодействуют друг с другом. Взаимодействие может быть внешним (при отражении прямой волны напряжений от поверхности сферы) и внутренним (при столкновении прямой и отраженной волн напряжений).

Для оценки внешнего взаимодействия прямой и отраженной волн нагрузки используется соотношение

$$2T_i^{нагр} \mid_{r_1} > T_i^B, \qquad (3.4.62)$$

при выполнении которого имеет место явление откола на внешней поверхности ($r_1 = R_2$) сплошной сферы и на внутренней поверхности ($r_1 = R_1$) полой сферы. Характер и вид откола определяются по критерию, рассмотренному в § 5 гл. 1, при этом учитываются величины $T_i^{\text{нагр}}$ и T_i^B материала сферы.

Для оценки внутреннего взаимодействия прямой волны разгрузки и отраженной волны нагрузки используется соотношение

$$[T_i^{\text{разгр}} + T_i^{\text{отр}}]_{r_{\text{вс}}} > T_i^B, \tag{3.4.63}$$

где

$$r_{\text{вс}} = [\,(R_2/b + R_1/a) + (t_{\text{р}} - t_{\text{от}})\,]/\,(1/b + 1/a).$$

В случае выполнения этого неравенства внутри сферы образуются трещины.

Реализация оценок с помощью соотношений (3.4.62) и (3.4.63) требует знания интенсивности кинетических напряжений

$$T_i = (\sqrt{2}/2)\sqrt{3\mathrm{T}_2(T) - \mathrm{T}_1^2(T)}. \tag{3.4.64}$$

Интенсивность T_i можно вычислить по известным компонентам тензора (T) для рассматриваемой области возмущений.

Все изложенное относится к начальному периоду процесса нагружения сферы при ударе, когда процесс неустановившийся и связан с распространением волн напряжений. После трех-четырехкратного пробега волн в объеме сферы процесс нагружения становится установившимся, сфера переходит в состояние колебательного движения, которое характеризуется тензором кинетических напряжений (T). Построение этого тензора выполняется методом М. М. Филоненко-Бородича, изложенного во второй части книги.

Тензор кинетических напряжений сферы можно представить в виде суммы:

$$(T) = (T)_{\text{нач}} + \Delta_* (T), \tag{3.4.65}$$

где $(T)_{\text{нач}}$ — известный тензор кинетических напряжений области возмущений, соответствующий рассматриваемой части объема. Этот тензор характеризует состояние сферы в момент $t_{\text{нач}} = 4R_2/a_0$, принятый за начальный. Вторым слагаемым является дополнительный тензор кинетических напряжений, с помощью которого учитываются все изменения состояния сферы, имеющие место в моменты времени $t > t_{\text{нач}}$. Этот тензор требуется построить и взять в случае нагрузки со знаком плюс, в случае разгрузки — со знаком минус. Построение тензора $\Delta_* (T)$ выполняется в сферической системе координат (θ, φ, r, x^0) с началом в центре сферы. В основу построения положено общее решение (1.4.21) уравнений равновесия фиктивного тела и требование выполнения компонентами тензора $\Delta_* (T)$ следующих граничных условий:

$$\Delta_* T^{3\beta} = \Delta_* Q_{(\gamma)}^{3\beta} \text{ при } r = R_\gamma \ (\gamma = 1, 2),\ \Delta_* T^{0\beta} = 0 \text{ при } x^0 = 0, \tag{3.4.66}$$

где $\Delta_* Q^{3\beta}_{(\gamma)} = Q^{3\beta}_{(\gamma)\,\text{нач}} - Q^{3\beta}_{(\gamma)}$ — изменения функций нагрузок $Q^{3\beta}_{(\gamma)}$ в моменты $t > t_{\text{нач}}$, с помощью которых учитываются все изменения напряжений, скоростей частиц и внешних нагрузок на поверхностях сферы, и вариационного уравнения (см. § 3 гл.1), выбранного для рассматриваемого состояния. Граничным условиям (3.4.66) соответствуют функции кинетических напряжений основного тензора

$$\Delta_* \Pi^{(0)}_{\alpha} = \frac{1}{2}(1+\cos\bar{r})\,\Delta_* F_{\alpha 3} + \frac{1}{2}(1-\cos\bar{r})\,\Delta_* \Phi_{\alpha 3}, \qquad (3.4.67)$$

где $\bar{r} = \pi(r - R_1)/(R_2 - R_1)$ — безразмерная координата. Функции $\Delta_* F_{\alpha 3} = y^{(1)}_{\alpha}$ при $r = R_1$ и $\Delta_* \Phi_{\alpha 3} = y^{(2)}_{\alpha}$ при $r = R_2$ удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{\partial^2 y^{(\gamma)}_1}{\partial\theta\partial\varphi} + R_\gamma \sin\theta\left(\sin\theta\frac{\partial y^{(\gamma)}_2}{\partial\theta} + \cos\theta\, y^{(\gamma)}_2\right) +$$

$$+\frac{R^2_\gamma}{2}\left(\sin^2\theta\frac{\partial^2 y^{(\gamma)}_0}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 y^{(\gamma)}_0}{\partial\varphi^2} + \sin\theta\cos\theta\frac{\partial y^{(\gamma)}_0}{\partial\theta} +\right.$$

$$\left. + (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\, 2y^{(\gamma)}_0\right) = R^4_\gamma \sin^2\theta\,\Delta_* Q^{33}_{(\gamma)},$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial y^{(\gamma)}_3}{\partial\theta} - \frac{\partial y^{(\gamma)}_2}{\partial\varphi}\right) - \frac{2}{R_\gamma}\frac{\partial y^{(\gamma)}_1}{\partial\varphi} + 2\sin^2\theta\, y^{(\gamma)}_2 - R^2_\gamma \sin^2\theta\frac{\partial^2 y^{(\gamma)}_2}{\partial x^{0^2}} -$$

$$- R_\gamma \sin\theta\left(4\cos\theta\, y^{(\gamma)}_0 - \sin\theta\frac{\partial y^{(\gamma)}_0}{\partial\theta}\right) = 2R^4_\gamma \sin^2\theta\,\Delta_* Q^{31}_{(\gamma)}, \qquad (3.4.68)$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial y^{(\gamma)}_3}{\partial\theta} - \frac{\partial y^{(\gamma)}_2}{\partial\varphi}\right) + \frac{2}{R_\gamma}\frac{\partial y^{(\gamma)}_1}{\partial\theta} - \operatorname{ctg}\theta\left(\frac{\partial y^{(\gamma)}_3}{\partial\theta} - \frac{\partial y^{(\gamma)}_2}{\partial\varphi}\right) +$$

$$+\frac{2\operatorname{ctg}\theta}{R_\gamma} y^{(\gamma)}_1 + 2y^{(\gamma)}_3 - R^2_\gamma\frac{\partial^2 y^{(\gamma)}_3}{\partial x^{0^2}} + R_\gamma\frac{\partial y^{(\gamma)}_0}{\partial\varphi} = 2R^4_\gamma \sin^2\theta\,\Delta_* Q^{32}_{(\gamma)},$$

$$\sin\theta\frac{\partial^2 y^{(\gamma)}_2}{\partial\theta\partial x^0} + \frac{\partial^2 y^{(\gamma)}_3}{\partial\varphi\partial x^0} + \sin\theta\cos\theta\frac{\partial y^{(\gamma)}_2}{\partial x^0} = 2R^2_\gamma \sin^2\theta\,\Delta_* Q^{30}_{(\gamma)}$$

и граничным условиям:

$$y^{(\gamma)}_{\alpha} = 0, \quad \frac{\partial y^{(\gamma)}_2}{\partial\theta} = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \theta_\gamma, \qquad (3.4.69)$$

$$y^{(\gamma)}_2 = 0, \quad y^{(\gamma)}_3 = 0, \quad \frac{\partial y^{(\gamma)}_2}{\partial x^0} = 0, \quad \frac{\partial y^{(\gamma)}_3}{\partial x^0} = 0 \quad \text{при} \quad x^0 = 0;$$

по координате φ функции периодические (период 2π).

Учитывая произвольность искомых функций, подчиним $y^{(\gamma)}_0$ следующему условию:

$$\sin^2\theta\frac{\partial^2 y^{(\gamma)}_0}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 y^{(\gamma)}_0}{\partial\varphi^2} + \sin\theta\cos\theta\frac{\partial y^{(\gamma)}_0}{\partial\theta} + 2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\, y^{(\gamma)}_0 = 0,$$

отсюда при соблюдении условий (3.4.69) имеем

$$y_0^{(\gamma)} = 0. \qquad (3.4.70)$$

Функция $y_2^{(\gamma)}$ определяется уравнением

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(R_\gamma \frac{\partial^2 y_2^{(\gamma)}}{\partial\varphi^2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta} R_\gamma \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin^2\theta \frac{\partial y_2^{(\gamma)}}{\partial\theta} + \sin\theta\cos\theta y_2^{(\gamma)}\right) -$$

$$-\frac{\partial}{\partial\theta} R_\gamma \sin^2\theta\left(y_2^{(\gamma)} - \frac{R_\gamma^2}{2}\frac{\partial^2 y_2^{(\gamma)}}{\partial x^{0^2}}\right) -$$

$$-R_\gamma \sin\theta\left(\sin\theta\frac{\partial y_2^{(\gamma)}}{\partial\theta} + \cos\theta y_2^{(\gamma)}\right) = -A_\gamma, \qquad (3.4.71)$$

где

$$A_\gamma = R_\gamma^4 \sin^2\theta\Delta_* Q_{(\gamma)}^{33} +$$

$$+\frac{\partial}{\partial\theta} R_\gamma\left(R_\gamma^4 \sin^2\theta\Delta_* Q_{(\gamma)}^{31} - \frac{\partial}{\partial\theta}\int_0^{x^0} R_\gamma^3 \sin^2\theta\Delta_* Q_{(\gamma)}^{30}\, dx^0\right).$$

Решая уравнение (3.4.71), имеем

$$y_2^{(\gamma)} = -\sum_{m,\,n}\frac{2}{R_\gamma\omega_{mn}}\int_0^{x_0}\left(A_{\gamma mn}^{(1)}(\xi)\cos n\varphi +\right.$$

$$\left.+A_{\gamma mn}^{(2)}(\xi)\sin n\varphi\right)\sin\omega_{mn}\frac{x^0-\xi}{R_\gamma}\, d\xi\Theta_{mn}(\theta), \qquad (3.4.72)$$

где

$$A_{\gamma mn}^{(l)} = \frac{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} A_\gamma\left(\frac{d}{d\theta}(\sin^2\theta\Theta_{mn})\right)\left\{\begin{matrix}\cos n\varphi\\ \sin n\varphi\end{matrix}\right. d\theta d\varphi}{\pi\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2}\left(\frac{d}{d\theta}(\sin^2\theta\Theta_{mn})\right)^2 d\theta}$$

— коэффициенты Фурье функции A_γ.

Собственные функции $\Theta_{mn}(\theta)$ и собственные значения ω_{mn} находим в результате решения краевой задачи (3.4.15). Функция $y_1^{(\gamma)}$ подчинена уравнению

$$\frac{\partial^2 y_1^{(\gamma)}}{\partial\theta\partial\varphi} = R_\gamma \sin\theta\left(R_\gamma^3 \sin\theta\Delta_* Q_{(\gamma)}^{33} - \Psi_\gamma\right),$$

где

$$\Psi_\gamma = \sin\theta\frac{\partial y_2^{(\gamma)}}{\partial\theta} + \cos\theta y_2^{(\gamma)}.$$

Решая последнее уравнение, получим

$$y_1^{(\gamma)} = \int_0^{\varphi}\int_{\theta_1}^{\theta_2} R_\gamma \sin\theta \left(R_\gamma^3 \sin\theta \Delta_* Q_{(\gamma)}^{33} - \Psi_\gamma\right) d\theta d\varphi. \qquad (3.4.73)$$

Для функции $y_3^{(\gamma)}$ имеем уравнение

$$\frac{\partial^2 y_3^{(\gamma)}}{\partial\theta^2} - \operatorname{ctg}\theta \frac{\partial y_3^{(\gamma)}}{\partial\theta} + 2y_3^{(\gamma)} - R_\gamma^2 \frac{\partial^2 y_3^{(\gamma)}}{\partial x^{0^2}} = C_\gamma, \qquad (3.4.74)$$

где

$$C_\gamma = 2R_\gamma^3 \left[R_\gamma \sin\theta\Delta_* Q_{(\gamma)}^{33} - \int_0^{\varphi} \left(\sin^2\theta\Delta_* Q_{(\gamma)}^{33} - \operatorname{ctg}\theta \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \int_{\theta_1}^{\theta} \sin^2\theta\Delta_* Q_{(\gamma)}^{33}\, d\theta \right) d\varphi \right] + 2\int_0^{\varphi} \left(\sin\theta\Psi_\gamma + \operatorname{ctg}\theta \int_{\theta_1}^{\theta} \sin\theta\Psi_\gamma\, d\theta\right) d\varphi +$$

$$+ \frac{1}{\sin\theta} \left(\Psi_\gamma - 2\cos\theta y_2^{(\gamma)}\right).$$

Решение уравнения (3.4.74) имеет вид

$$y_3^{(\gamma)} = -\sum_m \frac{1}{R_\gamma^2 \varkappa_m} \int_0^{x_0} C_{\gamma m}(\xi) \sin\varkappa_m \frac{x^0 - \xi}{R_\gamma}\, d\xi\Theta_m(\theta), \qquad (3.4.75)$$

где

$$C_{\gamma m}(x^0) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} C_\gamma \Theta_m\, d\theta \Big/ \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Theta_m^2\, d\theta$$

— коэффициент Фурье функции C_γ. Собственные функции $\Theta_m(\theta)$ и собственные значения $\varkappa_m$ определяются в результате решения краевой задачи (3.4.19).

Подставляя функции кинетических напряжений (3.4.67) в общее решение (1.4.21), получим компоненты тензора $\Delta_*(T_0^{(1)})$ для самоуравновешенных частей $\Delta_*\widetilde{Q}_{(\gamma)}^{3\beta}$ функций нагрузок, несамоуравновешенным частям функций нагрузок $\Delta_*\overline{Q}_{(\gamma)}^{3\beta} = \Delta_* Q_{(\gamma)}^{3\beta} - \Delta_*\widetilde{Q}_{(\gamma)}^{3\beta}$ соответствует тензор $\Delta_*(T_0^{(2)})$ с компонентами

$$\Delta_* T_{(0)}^{\alpha 3} = (1/2)(1 + \cos\bar{r})\,\Delta_*\overline{Q}_{(1)}^{3\beta} + (1/2)(1 - \cos\bar{r})\,\Delta_*\overline{Q}_{(2)}^{3\beta}. \qquad (3.4.76)$$

Основным тензором $\Delta_*(T_0)$ является сумма

$$\Delta_*(T_0) = \Delta_*(T_0^{(1)}) + \Delta_*(T_0^{(2)}). \qquad (3.4.77)$$

Корректирующий тензор $\Delta_*(T_\text{к})$ имеет компоненты

$$\Delta_* T_\text{к}^{\alpha\beta} = \sum_{mnpl} (\Delta_* A_{mnpl} f_{(1)}^{\alpha\beta} + \Delta_* B_{mnpl} f_{(2)}^{\alpha\beta} +$$

$$+ \Delta_* C_{mnpl} f_{(3)}^{\alpha\beta} + \Delta_* D_{mnpl} f_{(0)}^{\alpha\beta}). \qquad (3.4.78)$$

Функции $f^{\alpha\beta}(mnpl)$ известны, параметры $\Delta_* A_{mnpl}, \ldots, \Delta_* D_{mnpl}$ находятся в результате решения уравнений

$$\sum_{mnpl} (\Delta_* A_{mnpl} F_{1\beta} + \Delta_* B_{mnpl} F_{2\beta} + \Delta_* C_{mnpl} F_{3\beta} + \\ + \Delta_* D_{mnpl} F_{0\beta}) + \Delta_* L_\beta = 0. \tag{3.4.79}$$

Коэффициенты $F_{\gamma\beta}(mnplijkq)$ и свободные члены $\Delta_* L_\beta(ijkq)$ вычисляются по известным формулам; функции α_1, α_2 выбираются в соответствии с физико-механическими свойствами и состоянием материала сферы, а также с учетом характера процесса нагружения.

Интегралы $F_{\gamma\beta}^{(k)}(mnplijkq)$ имеют вид

$$F_{\gamma\beta}^{(k)} = \int\int_0^\pi\int\int A_{\gamma\beta}^{(k)} R_1^3 \left(1 + \left(\frac{R_2}{R_1} - 1\right)\frac{\bar r}{\pi}\right)^2 \times \\ \times \left(\frac{R_2}{R_1} - 1\right)\frac{2x_2^0}{\pi^2}\,\frac{\theta_2 - \theta_1}{\pi} \sin\theta\, d\bar\theta\, d\bar\varphi\, d\bar r\, d\bar x^0. \tag{3.4.80}$$

Подынтегральные выражения $A_{\gamma\beta}^{(k)}$ определены во второй части книги, интегралы $\Delta_* L_\beta^{(l)}(ijkq)$ имеют вид

$$\Delta_* L_\beta^{(l)} = \int\int_0^\pi\int\int \Delta B_\beta^{(l)} R_1^3 \left(1 + \left(\frac{R_2}{R_1} - 1\right)^2 \frac{\bar r}{\pi}\right)^2 \times \\ \times \left(\frac{R_2}{R_1} - 1\right)\frac{2x_2^0}{\pi^2}\,\frac{\theta_2 - \theta_1}{\pi} \sin\theta\, d\bar\theta\, d\bar\varphi\, d\bar r\, d\bar x^0. \tag{3.4.81}$$

Подынтегральные выражения $\Delta_* B_\beta^{(l)}$ определены во второй части книги, $T_{(0)}^{\alpha\beta}$ — компоненты тензора (3.4.77). Решение уравнений (3.4.79) строится с помощью процедуры последовательных приближений, рассмотренной в § 3 гл. 1. В результате определяем параметры $\Delta_* A_{mnpl}, \ldots$ $\ldots, \Delta_* D_{mnpl}$, следовательно, и компоненты корректирующего тензора $\Delta_*(T_к)$. Таким образом, тензор кинетических напряжений (T) для сферы, находящейся в колебательном движении, построен.

Пользуясь приведенным решением, можно определить характеристики напряженного состояния и движения частиц сферы в областях возмущений в начальный период и в объеме всей сферы в последующий период процесса нагружения.

§ 5. Взрыв в полом цилиндре и конусе

В полом цилиндре с радиусами r_γ ($\gamma = 1, 2$) и длиной l, отнесенном к цилиндрической системе координат (r, θ, z, x^0), произведен взрыв заряда В. В., в результате которого на внутренней поверхности возникло давление p (рис. 92). Это давление определяется в результате решения задачи о взрыве цилиндрического заряда [47, 36, 44].

Распределение давления на внутренней поверхности цилиндра задано:

$$p_1(\theta, z, t) \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant t_p,\quad p_2(\theta, z, t) \text{ при } t_p \leqslant t \leqslant t_в, \tag{3.5.1}$$

где $t_р$ — продолжительность нагрузки, $t_в$ — продолжительность процесса нагружения цилиндра при взрыве.

Продукты взрыва, находясь в сильно разогретом состоянии (температура их равна нескольким тысячам градусов), передают тепловую энергию цилиндру в виде тепловых потоков q_r и распределения температуры на внутренней поверхности. В цилиндре образуется температурное поле, определяемое интегрированием уравнения теплопроводности

$$\rho c \frac{\partial T^0}{\partial t} = \Lambda \nabla^2 T^0 \tag{3.5.2}$$

при начальных условиях: $T^0 = T_0^0(r, \theta, z)$ при $t = 0$ и следующих граничных условиях:

$$\frac{\partial T^0}{\partial r} = q_r/\Lambda \text{ при } r = r_1, \; T^0 = T^0(r_2, \theta, z, t) \text{ при } r = r_2, \tag{3.5.2'}$$

где $T_0^0(r, \theta, z)$ — начальное распределение температуры, $T^0(r_2, \theta, z, t)$ — распределение температуры на внешней поверхности цилиндра, c — теплоемкость, Λ — коэффициент теплопроводности материала цилиндра.

Итак, при взрыве цилиндр находится в интенсивном, быстро изменяющемся температурном поле под действием импульсивного давления большой интенсивности. Такой характер воздействия в началь-

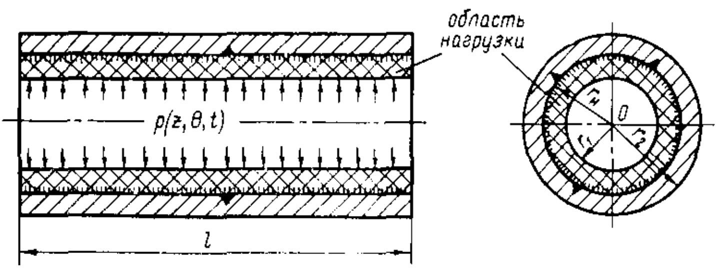

Рис. 92

ный период приводит к распространению волн напряжений в цилиндре и образованию областей возмущений различной природы; при этом следует учитывать расширение внутренней полости цилиндра при взрыве, т. е. что r_1 изменяется во времени:

$$r_1 = r_{01} + w(z, \theta, t), \tag{3.5.3}$$

где $w(\theta, z, t)$ — радиальное перемещение внутренней поверхности.

В областях возмущений материал цилиндра находится в напряженном состоянии. Это состояние характеризуется тензором напряжений (σ); частицы среды находятся в движении, вектор скорости $\mathbf{v}$; плотность материала ρ. Этим характеристикам соответствует тензор кинетических напряжений (T), который требуется построить для каждой области возмущений, учитывая ее специфические особенности.

Первичной является область возмущений нагрузки (рис. 92), ограниченная внутренней поверхностью $r = r_1$ цилиндра и поверхностью $r = r_*$ фронта волны нагрузки, распространяющейся со скоростью a_0.

$$r_* = r_1 + a_0 x^0/a_{cq}. \tag{3.5.4}$$

Область возмущений нагрузки характеризуется тензором кинетических напряжений $(T)_{\text{нагр}}$, построение которого основано на использовании общего решения (2.5.2) уравнений равновесия фиктивного тела, удовлетворении граничных условий:

$$T^{1\beta} = Q^{1\beta}_{(1)} \text{ при } r = r_1,\ w_\alpha = 0 \text{ при } r = r_*, \quad T^{0\beta} = Q^{0\beta}_{(1)} \text{ при } x^0 = 0, \tag{3.5.5}$$

где $Q^{1\beta}_{(1)}$, $Q^{0\beta}_{(1)}$ — функции нагрузок, и выполнении вариационного уравнения (см. § 3 гл. 1), выбранного в соответствии с состоянием среды в области возмущений нагрузки.

Тензор кинетических напряжений $(T)_{\text{нагр}}$ строится в виде суммы основного и корректирующего тензоров:

$$(T)_{\text{нагр}} = (T_о) + (T_к), \tag{3.5.6}$$

при этом расширение полости полагается постоянным по длине цилиндра.

Компоненты основного тензора подчинены следующим граничным условиям:

$$T^{1\beta} = Q^{1\beta}_{(1)} \text{ при } r = r_1,\ T^{0\beta} = Q^{0\beta}_{(1)} \text{ при } x^0 = 0, \tag{3.5.7}$$

где $Q^{11}_{(1)} = (\rho v^1 v^1)_{r_1} - p_1$, $Q^{10}_{(1)} = (\rho v^1 a_{cq})_{r_1}$, $Q^{01}_{(1)} = \rho_0 a_{cq} v^1_0$, $Q^{00}_{(1)} = \rho_0 a^2_{cq}$ — функции нагрузок, которым соответствуют функции кинетических напряжений

$$\Pi^{(0)}_\alpha = \Pi^{(0)}_{\alpha 1} + \Pi^{(0)}_{\alpha 0}. \tag{3.5.8}$$

Для координаты r имеем

$$\Pi^{(0)}_{\alpha 1} = (1/2)\,(1 + \cos \bar r) F_{\alpha 1}, \tag{3.5.9}$$

где $\bar r = [\pi\,(r - r_1)]/(a_0 x^0/a_{cq}]$ — безразмерная координата.

Функции $F_{\alpha 1}$ удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 F_{31}}{\partial\theta\partial z} + r_1 \frac{\partial F_{21}}{\partial z} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F_{01}}{\partial\theta^2} + r_1^2 \frac{\partial^2 F_{01}}{\partial z^2}\right) = r_1^2 Q^{11}_{(1)},\\
\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_{11}}{\partial z} - \frac{\partial F_{21}}{\partial\theta}\right) + \frac{2}{r_1}\frac{\partial F_{31}}{\partial z} + \frac{\partial^2 F_{11}}{\partial x^{0 2}} - \frac{1}{r_1}\frac{\partial F_{01}}{\partial\theta} = 0,\\
\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial F_{11}}{\partial z} - \frac{\partial F_{21}}{\partial\theta}\right) + r_1^2 \frac{\partial^2 F_{21}}{\partial x^{0 2}} = 0,\\
\frac{\partial}{\partial x^0}\left(\frac{\partial F_{11}}{\partial z} + r_1^2 \frac{\partial F_{21}}{\partial z}\right) = 2 r_1^2 Q^{10}_{(1)}
\end{gathered} \tag{3.5.10}$$

и граничным условиям:

$$F_{21}=0,\ F_{31}=0,\ F_{01}=0 \text{ при } z=z_\gamma;$$

$$F_{11}=0,\ \frac{\partial F_{11}}{\partial x^0}=0,\ F_{21}=0,\ \frac{\partial F_{31}}{\partial x^0}=0 \text{ при } x^0=0; \quad (3.5.10')$$

по координате θ функции периодические, период 2π.

Из (3.5.10) следует, что функция F_{01} определяется уравнением

$$\frac{\partial^2 F_{01}}{\partial\theta^2}+r_1^2\frac{\partial^2 F_{01}}{\partial z^2}=0,$$

решая которое с учетом условия (3.5.10), имеем

$$F_{01}=0. \quad (3.5.11)$$

Для функции F_{21} справедливо уравнение

$$\frac{\partial^2 F_{21}}{\partial z^2}+\frac{1}{r_1^2}\frac{\partial^2 F_{21}}{\partial\theta^2}-\frac{\partial^2 F_{21}}{\partial x^{0^2}}=A, \quad (3.5.12)$$

где

$$A=\frac{2}{r_1^2}\int\limits_0^{x^0} r_1^2\frac{\partial}{\partial z}Q_{(1)}^{(0)}\,dx^0.$$

Решение уравнения (3.5.12) представим в виде ряда

$$F_{21}=\sum_{mn}\left(X_{mn}^{(1)}(x^0)\cos n\theta+X_{mn}^{(2)}(x^0)\sin n\theta\right)\sin m\bar z, \quad (3.5.13)$$

где $\bar z=\pi z/l$ — безразмерная координата, предполагая, что функцию A можно разложить в ряд Фурье:

$$A=\sum_{m,n}\left(A_{mn}^{(1)}(x^0)\cos n\theta+A_{mn}^{(2)}(x^0)\sin n\theta\right)\sin m\bar z, \quad (3.5.14)$$

где

$$A_{mn}^{(1)}=\frac{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{l}A\cos n\theta\sin m\bar z\,dz\,d\theta}{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{l}(\cos n\theta\sin m\bar z)^2\,dz\,d\theta},\quad A_{mn}^{(2)}=\frac{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{l}A\sin n\theta\sin m\bar z\,dz\,d\theta}{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{l}(\sin n\theta\sin m\bar z)^2\,dz\,d\theta}$$

— коэффициенты Фурье функции A.

Подставляя (3.5.13) и (3.5.14) в (3.5.12), для функций $X_{mn}(x^0)$ получим уравнение

$$\ddot X_{mn}^{(j)}+(m^2\pi^2/l^2+n^2/r_1^2)\,X_{mn}^{(j)}=-A_{mn}^{(j)}\ (j=1,2). \quad (3.5.15)$$

Пусть $Y_k(x^0)$ $(k=1,2)$ — частные решения уравнения

$$\ddot X_{mn}^{(j)}+(m^2\pi^2/l^2+n^2/r_1^2)X_{mn}^{(j)}=0, \quad (3.5.15')$$

тогда решением уравнения (3.5.15) является функция

$$X_{mn}^{(j)}=D_{1mn}^{(j)}Y_1+D_{2mn}^{(j)}Y_2+\int\limits_0^{x^0}A_{mn}^{(j)}(\xi)\frac{N(\xi x^0)}{M(\xi)}d\xi, \quad (3.5.16)$$

где

$$M(x^0) = Y_2\dot{Y}_1 - Y_1\dot{Y}_2,$$
$$N(x^0\xi) = Y_1(\xi)Y_2(x^0) - Y_2(\xi)Y_1(x^0).$$

Постоянные $D^{(j)}_{1(mn)}$, $D^{(j)}_{2(mn)}$ определяются из граничных условий (3.5.10′):

$$D^{(j)}_{1(mn)} = -\frac{A^{(j)}_{mn}(0)\,N(0)}{M^2(0)}Y_2(0),\ D^{(j)}_{2(mn)} = \frac{A^{(j)}_{mn}(0)\,N(0)}{M^2(0)}Y_1(0).$$

Подставляя эти постоянные в (3.5.16), получим

$$X^{(3)}_{mn} = \frac{A^{(j)}_{mn}(0)\,N(0)}{M^2(0)}(Y_1(0)\,Y_2(x^0) - Y_2(0)\,Y_1(x^0)) + \int\limits_0^{x^0} A^{(j)}_{mn}(\xi)\,\frac{N(\xi x^0)}{M(\xi)}\,d\xi. \tag{3.5.17}$$

Окончательно функция F_{21} имеет вид

$$F_{21} = \sum_{mn}\Bigg[(A^{(1)}_{mn}(0)\cos n\theta + A^{(2)}_{mn}(0)\sin n\theta)\frac{N(0)}{M^2(0)}(Y_1(0)\,Y_2(x^0) -$$
$$-Y_2(0)\,Y_1(x^0)) + \int\limits_0^{x^0}(A^{(1)}_{mn}(\xi)\cos n\theta + A^{(2)}_{mn}(\xi)\sin n\theta)\,\frac{N(\xi x^0)}{M(\xi)}\,d\xi\Bigg]\sin m\bar{z}. \tag{3.5.18}$$

Функция F_{31} удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 F_{31}}{\partial\theta\partial z} = r_1\left(r_1 Q^{11}_{(1)} - 2\frac{\partial F_{21}}{\partial z}\right),$$

решая которое с учетом граничных условий (4.5.10), находим

$$F_{31} = r_1\left(r_1\int\limits_0^{\theta}\int\limits_0^{z} Q^{11}_{(1)}\,dz\,d\theta - 2\int\limits_0^{\theta} F_{21}\,d\theta\right). \tag{3.5.19}$$

Для функции F_{11} имеем уравнение

$$\frac{\partial^2 F_{11}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F_{11}}{\partial x^{02}} = B, \tag{3.5.20}$$

где

$$B = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_{31}}{\partial\theta} + 2\int\limits_0^{\theta} F_{21}\,d\theta\right) - 2r_1\int\limits_0^{\theta} Q^{11}_{(1)}\,d\theta.$$

Решение уравнения (3.5.20) представим в виде ряда

$$F_{11} = \sum_m X_m(x^0)\sin m\bar{z}, \tag{3.5.21}$$

полагая, что функцию B можно разложить в ряд Фурье:

$$B = \sum_m B_m(\theta x^0) \sin m\bar{z}, \tag{3.5.22}$$

где

$$B_m = \int_0^l B \sin m\bar{z} dz \Bigg/ \int_0^l \sin^2 m\bar{z} dz.$$

Подставляя (3.5.21) и (3.5.22) в (3.5.20), находим уравнение для функций $X_m(x^0)$:

$$\ddot{X}_m - m^2\pi^2 X_m/l^2 = B_m.$$

Этому уравнению удовлетворяют функции

$$X_m = \frac{l}{m\pi}\int_0^{\alpha_0} B_m(y^0) \operatorname{sh}\frac{m\pi(x^0-y^0)}{l} dy^0,$$

подставляя их в (3.5.21), получим

$$F_{11} = \sum_m \frac{l}{m\pi}\int_0^{x^0} B_m \operatorname{sh}\frac{m\pi(x^0-y^0)}{l} dy^0 \sin m\bar{z}. \tag{3.5.23}$$

Координате x^0 соответствуют функции кинетических напряжений

$$\Pi_{10}^{(0)} = \frac{1}{2}(1+\cos\bar{x}^0) F_{10} + \frac{1}{2}\int_0^{x^0}(1+\cos\bar{x}^0)\, dx^0\, \Psi_{10},$$

$$\Pi_{20}^{(0)} = \frac{1}{2}\int_0^{x^0}(1+\cos\bar{x}^0)\, dx^0\, \Psi_{20}, \tag{3.5.24}$$

$$\Pi_{30}^{(0)} = \frac{1}{2}\int_0^{x_0}(1+\cos\bar{x}^0)\, dx^0\, \Psi_{30}, \quad \Pi_{00}^{(0)} = 0.$$

Функции F_{10}, Ψ_{i0} $(i = 1, 2, 3)$, входящие в (3.5.24), подчинены уравнениям:

$$\frac{\partial^2 F_{10}}{\partial r\partial\theta} = -r^2 Q_{(1)}^{00}, \quad \frac{\partial\Psi_{10}}{\partial\theta} + r^2\frac{\partial\Psi_{20}}{\partial z} = 2r^2 Q_{(1)}^{01},$$

$$\frac{\partial\Psi_{10}}{\partial r} + \frac{1}{r}\Psi_{10} + \frac{\partial\Psi_{30}}{\partial z} = 0, \tag{3.5.25}$$

$$r^2\frac{\partial\Psi_{20}}{\partial r} + r\Psi_{20} + \frac{\partial\Psi_{30}}{\partial\theta} = 0$$

и следующим граничным условиям:

$$F_{10} = 0, \ \Psi_{20} = 0 \ \text{ при } r = r_\gamma,$$

$$\Psi_{20} = 0, \ \Psi_{30} = 0 \ \text{ при } z = z_\gamma, \tag{3.5.25'}$$

по координате θ функции периодические (период 2π).

Интегрируя первое из уравнений (3.5.25) с учетом граничных условий (3.5.25), находим

$$F_{10} = -\int_0^{\theta}\int_{r_1}^{r} r^2 Q_{(1)}^{00}\, dr d\theta. \tag{3.5.26}$$

Рассматривая совместно уравнения (3.5.25), приходим к уравнению

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{2}{r}\psi = A, \tag{3.5.27}$$

где

$$\psi = \frac{\partial\Psi_{20}}{\partial z}, \qquad A = \frac{3}{r} Q_{(1)}^{01} + \frac{\partial}{\partial r} Q_{(1)}^{01}.$$

Отсюда получим

$$\psi = \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 \int_{r_1}^{r} A \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 dr. \tag{3.5.28}$$

Интегрируя (3.5.28) по z, находим

$$\Psi_{20} = \int_0^z \psi dz. \tag{3.5.29}$$

Подставляя (3.5.29) во второе из уравнений (3.5.25), приходим к уравнению для функции Ψ_{10}:

$$\frac{\partial\Psi_{10}}{\partial\theta} = r^2 (2Q_{(1)}^{01} - \psi),$$

решение которого имеет вид

$$\Psi_{10} = r^2 \left(\int_0^{\theta} (2Q_{(1)}^{01} - \psi)\, d\theta \right). \tag{3.5.30}$$

Функция Ψ_{30} удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial\Psi_{30}}{\partial z} = -r^2 \int_0^{\theta} \left[2\left(\frac{\partial Q_{(1)}^{01}}{\partial r} + \frac{3}{r} Q_{(1)}^{01}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{3}{r}\psi\right) \right] d\theta,$$

интегрируя которое по z, получим

$$\Psi_{30} = -r^2 \int_0^z\int_0^{\theta} \left[2\left(\frac{\partial Q_{(1)}^{01}}{\partial r} + \frac{3}{r} Q_{(1)}^{01}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{3}{r}\psi\right) \right] d\theta dz. \tag{3.5.31}$$

Полные функции кинетических напряжений основного тензора согласно (3.5.8) таковы:

$$\Pi_1^{(0)} = \frac{1}{2}(1+\cos\bar{r})F_{11} + \frac{1}{2}(1+\cos\bar{x}^0)F_{10} + \frac{1}{2}\int_0^{x^0}(1+\cos\bar{x}^0)\,dx^0\,\Psi_{10},$$

$$\Pi_2^{(0)} = \frac{1}{2}(1+\cos\bar{r})F_{21} + \frac{1}{2}\int_0^{x^0}(1+\cos\bar{x}^0)\,dx^0\,\Psi_{20}, \tag{3.5.32}$$

$$\Pi_3^{(0)} = \frac{1}{2}(1+\cos\bar{r})F_{31} + \frac{1}{2}\int_0^{x^0}(1+\cos\bar{x}^0)\,dx^0\,\Psi_{30},$$

где $\bar{x}^0 = \pi x^0/x_2^0$ — безразмерная координата. Подставляя эти функции в общее решение (2.5.2), определяем компоненты тензора (T_0^1) для самоуравновешенных частей $\tilde{Q}_0^{1\beta}$, $\tilde{Q}_{(1)}^{0\beta}$ функций нагрузок.

Несамоуравновешенным частям функций нагрузок $\bar{Q}_{(1)}^{1\beta} = Q_{(1)}^{1\beta} - \tilde{Q}_{(1)}^{1\beta}$, $\bar{Q}_{(1)}^{0\beta} = Q_{(1)}^{0\beta} - \tilde{Q}_{(1)}^{0\beta}$ соответствует тензор $(T_0^{(2)})$ с компонентами:

$$T_{(0)}^{11} = (1/2)(1+\cos\bar{r})\bar{Q}_{(1)}^{11}, \quad T_{(0)}^{00} = (1/2)(1+\cos\bar{x}^0)\bar{Q}_{(1)}^{00},$$

$$T_{(0)}^{10} = (1/2)(1+\cos\bar{r})\bar{Q}_{(1)}^{10} + (1/2)(1+\cos\bar{x}^0)\bar{Q}_{(1)}^{01}. \tag{3.5.33}$$

Основным тензором является сумма тензоров:

$$(T_0) = (T_0^1) + (T_{(0)}^{(2)}). \tag{3.5.34}$$

Корректирующий тензор $(T_к)$ имеет компоненты

$$T_{(к)}^{\alpha\beta} = \sum_{mnpl}(A_{mnpl}f_{(1)}^{\alpha\beta} + B_{mnpl}f_{(2)}^{\alpha\beta} + C_{mnpl}f_{(3)}^{\alpha\beta} + D_{mnpl}f_{(0)}^{\alpha\beta}). \tag{3.5.35}$$

Функции $f_\gamma^{\alpha\beta}$ $(mnpl)$ известны [19], параметры $A_{mnpl}, \ldots, D_{mnpl}$ определяются в результате решения уравнений

$$\sum_{mnpl}(A_{mnpl}F_{1\beta} + B_{mnpl}F_{2\beta} + C_{mnpl}F_{3\beta} + D_{mnpl}F_{0\beta}) + L_\beta = 0. \tag{3.5.36}$$

Коэффициенты $F_{\gamma\beta}$ $(mnplijkq)$ и свободные члены L_β $(ijkq)$ вычисляют по известным формулам. Функции состояния выбираются в зависимости от физико-механических свойств и состояния материала цилиндра. В случае упругопластического состояния они определяются по формулам (1.3.72), в случае вязкопластического — по формулам (1.3.76), при этом диаграмма $\sigma_i - e_i$ или диаграмма $\tau_i - \dot{\gamma}_i$ материала предполагается известной.

Интегралы $F_{\gamma\beta}^{(k)}$ $(mnplijkq)$ имеют вид

$$F_{\gamma\beta}^{(k)} = \frac{a_0}{a_{cq}}\left(\frac{x_2^0}{\pi}\right)^3 2\frac{l}{\pi^2}\int\int_0^{\pi}\int\int A_{\gamma\beta}^{(k)}\left(\pi\frac{r_1}{x_2^0} + \frac{a_0}{a_{cq}}\frac{\bar{x}^0\bar{r}}{\pi}\right)\bar{x}^0\,d\bar{r}\,d\bar{\theta}\,d\bar{z}\,d\bar{x}^0. \tag{3.5.37}$$

Их подынтегральные выражения приведены во второй части книги, интегралы $L_{\beta}^{(\lambda)}(ijkq)$ имеют вид

$$L_{\beta}^{(\lambda)} = \frac{a_0}{a_{cq}} \left(\frac{x_2^0}{\pi}\right)^3 2 \frac{l}{\pi^2} \times$$

$$\times \int\int_0^{\pi}\int\int B_{\beta}^{(\lambda)} \left(\pi \frac{r_1}{x_2^0} + \frac{a_0}{a_{cq}} \frac{\bar{x}^0 \bar{r}}{\pi}\right) \bar{x}^0 \, d\bar{r} d\bar{\theta} d\bar{z} d\bar{x}^0. \qquad (3.5.38)$$

Их подынтегральные выражения приведены во второй части книги, $T_{(0)}^{\alpha\beta}$ соответствуют тензору (3.5.34).

Решение уравнений (3.5.36) строится с помощью процедуры последовательных приближений, изложенной в § 3 гл. 1. В результате находим параметры A_{mnpl}, ..., D_{mnpl}, следовательно, и компоненты корректирующего тензора $(T_к)$.

Таким образом, тензор кинетических напряжений $(T)_{нагр}$ для области возмущений нагрузки построен.

В момент t_p давление достигает максимума: $p_{max} = p_1(t_p)$, затем с течением времени $(t \geqslant t_p)$ уменьшается, изменяясь по закону $p_2(r_1\theta zt)$, т. е. начинается процесс разгрузки. При $t = t_p$ на внутренней поверхности $r = r_1$ цилиндра зарождается волна разгрузки, которая распространяется со скоростью b в направлении внешней поверхности, образуя область возмущений разгрузки. Область возму-

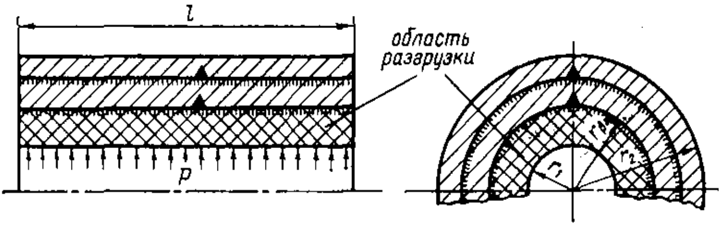

Рис. 93

щений разгрузки ограничена внутренней поверхностью $r = r_1$ и поверхностью $r = r_p$ переднего фронта волны разгрузки (рис. 93), ей соответствует тензор кинетических напряжений

$$(T)_{разгр} = (T)_{нагр} - \Delta(T), \qquad (3.5.39)$$

причем тензор $(T)_{нагр}$ известен, а тензор $\Delta(T)$ требуется построить так, чтобы выполнялись следующие граничные условия:

$$\Delta T^{1\beta} = \Delta Q_{(1)}^{1\beta} \text{ при } r = r_1, \qquad (3.5.40)$$

$$\Delta w_{\alpha} = 0 \text{ при } r = r_{\ }, \ \Delta T^{0\beta} = 0 \text{ при } x^0 = 0,$$

где $\Delta Q_{(1)}^{1\beta}$ — функции нагрузок, и вариационное уравнение (см. § 3 гл. 1), взятое в соответствии с состоянием исследуемой области, при этом компоненты тензора $\Delta(T)$ берутся в форме общего решения (2.5.2) уравнений равновесия.

Представим тензор $\Delta(T)$ в виде суммы основного и корректирующего тензоров:

$$\Delta(T) = \Delta(T_{\text{о}}) + \Delta(T_{\text{к}}). \qquad (3.5.41)$$

Основной тензор $\Delta(T_{\text{о}})$ подчинен требованию выполнения граничных условий:

$$\Delta T^{1\beta}_{(0)} = \Delta Q^{1\beta}_{(1)} \text{ при } r = r_1, \ \Delta T^{0\beta}_{(0)} = 0 \text{ при } x^0 = 0, \qquad (3.5.42)$$

где $\Delta Q^{11}_{(1)} = (\Delta\rho\Delta v^1\Delta v^1)_{r_1} - \Delta p$, $\Delta Q^{10}_{(1)} = (\Delta\rho\Delta v^1 v^0_{(r)})_{r_1}$, причем $\Delta p = p_1(t_p) - p_2(t)$, $\Delta v^1 = v^1(t_p) - v^1(t)$ — соответственно изменение давления и скорости частиц при разгрузке на внутренней поверхности. Этим условиям соответствуют функции кинетических напряжений

$$\Delta\Pi^{(0)}_{\alpha} = (1/2)(1 + \cos\bar{r})\Delta F_{\alpha_1}, \qquad (3.5.43)$$

где $\bar{r} = \pi(r - r_1)/bx^0/v^0_r$ — безразмерная координата.

Функции $\Delta F_{\alpha 1}$ имеют вид:

$$\Delta F_{01} = 0,$$

$$\Delta F_{21} = \sum_{m,n}\Bigg[(\Delta A^{(1)}_{mn}(0)\cos n\theta + \Delta A^{(2)}_{mn}(0)\sin n\theta)\frac{N(0)}{M^2(0)}(Y_1(0)Y_2(x^0) - -Y_2(0)Y_1(x^0)) + \int_0^{x^0}(\Delta A^{(1)}_{mn}(\xi)\cos n\theta + \Delta A^{(2)}_{mn}(\xi)\sin\theta)\frac{N(\xi x^0)}{M(\xi)}d\xi\Bigg]\sin m\bar{z}, \qquad (3.5.44)$$

$$\Delta F_{31} = r_1\left(r_1\int_0^{\theta}\int_0^{z}\Delta Q^{11}_{(1)}\,dz d\theta - 2\int_0^{\theta}\Delta F_{21}\,d\theta\right),$$

$$\Delta F_{11} = \sum_m \frac{l}{m\pi}\int_0^{x^0}\Delta B_m(\theta y^0)\operatorname{sh}\frac{m\pi(x^0 - y^0)}{l}\,dy^0 \sin m\bar{z}.$$

Здесь

$$\Delta A^{(1)}_{mn}(x^0) = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{l}\Delta A\cos n\theta\sin m\bar{z}\,dz d\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^{l}(\cos n\theta\sin m\bar{z})^2\,dz d\theta},$$

$$\Delta A^{(2)}_{mn}(x^0) = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{l}\Delta A\sin n\theta\sin m\bar{z}\,dz d\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^{l}(\sin n\theta\sin m\bar{z})^2\,dz d\theta} \qquad (3.5.45)$$

— коэффициенты Фурье функции

$$\Delta A = \frac{2}{r_1^2} \int_0^{x^0} r_1^2 \frac{\partial}{\partial z} \Delta Q_{(1)}^{10} \, dx^0;$$

$$\Delta B_m = \int_0^l \Delta B \sin m\bar{z} dz \Big/ \int_0^l \sin^2 m\bar{z} dz \tag{3.5.46}$$

— коэффициенты Фурье функции

$$\Delta B = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \Delta F_{21} + 2 \int_0^\theta \Delta F_{21} \, d\theta \right) - 2r_1 \int_0^\theta \Delta Q_{(1)}^{11} \, d\theta.$$

Подставляя (3.5.43) в общее решение (2.5.2), получим компоненты тензора $\Delta(T_0^{(1)})$ для самоуравновешенных частей $\Delta\tilde{Q}_{(1)}^{1\beta}$ функций нагрузок.

Несамоуравновешенным частям $\Delta\bar{Q}_{(1)}^{1\beta} = \Delta Q_{(1)}^{1\beta} - \Delta\tilde{Q}_{(1)}^{1\beta}$ функций нагрузок соответствует тензор $\Delta(T_0^{(2)})$ с компонентами:

$$\Delta T_{(0)}^{11} = (1/2)(1 + \cos\bar{r}) \Delta\bar{Q}_{(1)}^{11},$$

$$\Delta T_{(0)}^{10} = (1/2)(1 + \cos\bar{r}) \Delta\bar{Q}_{(1)}^{10}, \tag{3.5.47}$$

остальные компоненты равны нулю.

Основной тензор

$$\Delta(T_0) = \Delta(T_0^{(1)}) + \Delta(T_0^{(2)}). \tag{3.5.48}$$

Корректирующий тензор $\Delta(T_\text{к})$ имеет компоненты

$$\Delta T_{(\text{к})}^{\alpha\beta} = \sum_{mnpl} (\Delta A_{mnpl} f_{(1)}^{\alpha\beta} + \Delta B_{mnpl} f_{(2)}^{\alpha\beta} + C_{mnpl} f_{(3)}^{\alpha\beta} + \Delta D_{mnpl} f_{(0)}^{\alpha\beta}), \tag{3.5.49}$$

параметры $\Delta A_{mnpl}, \ldots, \Delta D_{mnpl}$ которых подчинены уравнениям

$$\sum_{mnpl} (\Delta A_{mnpl} F_{1\beta} + \Delta B_{mnpl} F_{2\beta} + \Delta C_{mnpl} F_{3\beta} + \Delta D_{mnpl} F_{0\beta}) + \Delta L_\beta = 0. \tag{3.5.50}$$

Коэффициенты $F_{\gamma\beta}(mnplijkq)$ и свободные члены $\Delta L_\beta(ijkq)$ определяют по известным формулам, функции состояния выбирают в зависимости от физико-механических свойств и состояния материала цилиндра в области возмущений разгрузки. В случае упругопластического состояния они определяются по формулам (1.3.74), в случае вязкопластического — по формулам (1.3.82). Интегралы $F_{\gamma\beta}^{(k)}(mnplijkq)$ имеют вид

$$F_{\gamma\beta}^{(k)} = \frac{b}{v_r^{(0)}} \left(\frac{x_2^0}{\pi} \right)^3 2 \frac{l}{\pi^2} \times$$

$$\times \int\int_0^\pi\int\int A_{\gamma\beta}^{(k)} \left(\pi \frac{r_1}{x_2^0} + \frac{b}{v_r^{(0)}} \frac{\bar{x}^0 \bar{r}}{\pi} \right) \bar{x}^0 \, d\bar{r} d\bar{\theta} d\bar{z} d\bar{x}^0, \tag{3.4.51}$$

интегралы $\Delta L_{\beta}^{(\lambda)}$ $(ijkq)$ — следующий вид:

$$\Delta L_{\beta}^{(\lambda)} = \frac{b}{v_{(r)}^{0}}\left(\frac{x_2^0}{\pi}\right)^3 2\,\frac{l}{\pi^2}\,\times$$

$$\times \int\int_0^{\pi}\int\int \Delta B_{\beta}^{(\lambda)}\left(\pi\frac{r_1}{x_2^0} + \frac{b}{v_{(r)}^{0}}\,\frac{\bar{x}^0\,\bar{r}}{\pi}\right)\bar{x}^0\,d\bar{r}d\bar{\theta}d\bar{z}d\bar{x}^0. \qquad (3.4.52)$$

Их подынтегральные выражения приведены во второй части книги, $f_{(\gamma)}^{\alpha\beta}$ — известные функции, $T_{(0)}^{\alpha\beta}$ — компоненты тензора (3.5.48); отсчет координаты x^0 ведется от значения $x_p^0 = a_{cq}t_p$, принимаемого за нулевое.

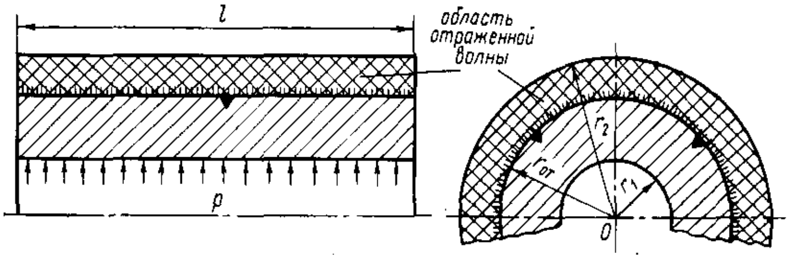

Рис. 94

Решение уравнений (3.5.50) строится с помощью процедуры последовательных приближений, изложенной в § 3 гл. 1. В результате получим параметры ΔA_{mnpl}, ..., ΔD_{mnpl}, следовательно, и компоненты корректирующего тензора $\Delta\ (T_{к})$.

Таким образом, тензор кинетических напряжений $(T)_{разгр}$ для области возмущений разгрузки построен.

В момент времени $t_{от}$, которому соответствует значение координаты $x_{от}^0 = (a_{cq}/a_0)\,(r_2 - r_1)$, волна нагрузки достигает внешней поверхности $r = r_2$ цилиндра и отражается. В этот момент зарождается отраженная волна нагрузки, распространяющаяся в обратном направлении со скоростью a_0. Образуется область возмущений отраженной волны (рис. 94), ограниченная внешней поверхностью цилиндра и поверхностью $r = r_{от}$ переднего фронта отраженной волны,

$$r_{от} = r_2 - a_0x^0/a_{cq}. \qquad (3.5.53)$$

Этой области соответствует тензор кинетических напряжений

$$(T)_{от} = (T)_{нагр} - \Delta_1\,(T), \qquad (3.5.54)$$

где тензор $(T)_{нагр}$ известен, а тензор $\Delta_1\ (T)$ требуется построить в форме общего решения (2.5.2) так, чтобы удовлетворялись следующие граничные условия:

$$\Delta_1 T^{1\beta} = \Delta_1 Q_{(1)}^{1\beta}\ \text{при}\ r = r_2,\ \Delta_1 w_\alpha = 0\ \text{при}\ r = r_{от},$$
$$\Delta_1 T^{0\beta} = 0\ \text{при}\ x^0 = 0, \qquad (3.5.55)$$

где $\Delta_1 Q^{1\beta}_{(1)} = T^{1\beta}_{\text{нагр}}|_{r_2}$ — функции нагрузок, и вариационное уравнение (см. § 3 гл. 1), взятое в соответствии с состоянием материала в области возмущений отраженной волны нагрузки.

Тензор $\Delta_1(T)$ строится в виде суммы основного и корректирующего тензоров:

$$\Delta_1(T) = \Delta_1(T_0) + \Delta_1(T_\text{к}). \tag{3.5.56}$$

Компоненты основного тензора должны удовлетворять граничным условиям:

$$\Delta_1 T^{1\beta} = \Delta_1 Q^{1\beta}_{(1)} \text{ при } r = r_2,\ \Delta_1 T^{0\beta} = 0 \text{ при } x^0 = 0. \tag{3.5.57}$$

Этим условиям соответствуют функции кинетических напряжений

$$\Delta_1 \Pi^{(0)}_\alpha = (1/2)(1 + \cos \bar{r})\Delta_1 F_{\alpha 1}, \tag{3.5.58}$$

где $\bar{r} = \pi(r_2 - r)/(a_0 x^0/a_{c9})$ — безразмерная координата.

Функции $\Delta_1 F_{21}$ подчинены уравнениям:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 \Delta_1 F_{31}}{\partial\theta\partial z} + r_2 \frac{\partial \Delta_1 F_{21}}{\partial z} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \Delta_1 F_{01}}{\partial\theta^2} + r_2^2 \frac{\partial^2 \Delta_1 F_{01}}{\partial z^2}\right) = r_2^2 \Delta_1 Q^{11}_{(1)}, \\
\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\Delta_1 F_{11}}{\partial z} - \frac{\partial\Delta_1 F_{21}}{\partial\theta}\right) + \frac{2}{r_2}\frac{\partial\Delta_1 F_{31}}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Delta_1 F_{11}}{\partial x^{0 2}} - \\
- \frac{1}{r_2}\frac{\partial\Delta_1 F_{01}}{\partial\theta} = -2r_2^2 \Delta_1 Q^{12}_{(1)}, \\
\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\Delta_1 F_{11}}{\partial z} - \frac{\partial\Delta_1 F_{21}}{\partial\theta}\right) + r_2^2 \frac{\partial^2 \Delta_1 F_{21}}{\partial x^{0 2}} = -2r_2^2 \Delta_1 Q^{13}_{(1)}, \\
\frac{\partial}{\partial x^0}\left(\frac{\partial\Delta_1 F_{11}}{\partial\theta} + r_2^2 \frac{\partial\Delta_1 F_{21}}{\partial z}\right) = 2r_2^2 \Delta_1 Q^{10}_{(1)}
\end{gathered} \tag{3.5.59}$$

и граничным условиям:

$$\begin{gathered}
\Delta_1 F_{\alpha 1} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3, 0) \text{ при } z = z_\gamma; \\
\Delta_1 F_{11} = 0,\ \frac{\partial\Delta_1 F_{11}}{\partial x^0} = 0,\ \Delta_1 F_{21} = 0,\ \frac{\partial\Delta_1 F_{21}}{\partial x^0} = 0 \text{ при } x^0 = 0;
\end{gathered} \tag{3.5.59'}$$

по координате θ функции периодические (период 2π).

Как и в предыдущих случаях, принимаем

$$\Delta_1 F_{01} = 0. \tag{3.5.60}$$

Функция $\Delta_1 F_{21}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \Delta_1 F_{21}}{\partial z^2} + \frac{1}{r_2^2}\frac{\partial^2 \Delta_1 F_{21}}{\partial\theta^2} - \frac{\partial^2 \Delta_1 F_{21}}{\partial x^{0 2}} = \Delta_1 A,$$

где

$$\Delta_1 A = 2\left(\Delta_1 Q^{13}_{(1)} + \frac{1}{r_2^2}\int_0^{x^0} r_2^2 \frac{\partial\Delta_1 Q^{10}_{(1)}}{\partial z}\,dx^0\right). \tag{3.5.61}$$

Решением этого уравнения является функция

$$\Delta_1 F_{21} = \sum_{m,\,n} [(\Delta_1 A_{mn}^{(1)}(0)\cos n\theta + \Delta_1 A_{mn}^{(2)}(0)\sin n\theta)\times$$

$$\times \frac{N(0)}{M^2(0)}(Y_1(0)\,Y_2(x^0) - Y_2(0)\,Y_1(x^0)) + \int_0^{x^0}(\Delta_1 A_{mn}^{(1)}(\xi)\cos n\theta +$$

$$+\Delta_1 A_{mn}^{(2)}(\xi)\sin n\theta)\frac{N(\xi x^0)}{M(\xi)}\,d\xi\Big]\sin m\bar{z}, \qquad (3.5.62)$$

где

$$\Delta_1 A_{mn}^{(j)}(x^0) = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{l}\Delta_1 A\sin m\bar{z}\begin{Bmatrix}\cos n\theta\\ \sin n\theta\end{Bmatrix}dz\,d\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^{l}\left(\sin m\bar{z}\begin{Bmatrix}\cos n\theta\\ \sin n\theta\end{Bmatrix}\right)^2 dz\,d\theta} \qquad (3.5.63)$$

— коэффициенты Фурье функции $\Delta_1 A$; $Y_j(x^0)$ $(j = 1,\ 2)$ — частные решения уравнения (3.5.15′).

Для функции $\Delta_1 F_{31}$ имеем уравнение

$$\frac{\partial^2\Delta_1 F_{31}}{\partial\theta\partial z} = r_2\left(r_2\,\Delta_1 Q_{(1)}^{11} - \frac{\partial\Delta_1 F_{21}}{\partial z}\right).$$

Интегрируя его с учетом условий (3.5.59′), находим

$$\Delta_1 F_{31} = r_2\int_0^{\theta}\left(r_2\int_0^{z}\Delta_1 Q_{(1)}^{11}\,dz - \Delta_1 F_{21}\right)d\theta. \qquad (3.5.64)$$

Функция $\Delta_1 F_{11}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2\Delta_1 F_{11}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\Delta_1 F_{11}}{\partial x^{0^2}} = \Delta_1 B,$$

где

$$\Delta_1 B = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\Delta_1 F_{21}}{\partial\theta} + 2\int_0^{\theta}\Delta_1 F_{21}\,d\theta\right) -$$

$$-2r_2\left(r_2\,\Delta_1 Q_{(1)}^{12} + \int_0^{\theta}\Delta_1 Q_{(1)}^{11}\,d\theta\right). \qquad (3.5.65)$$

Решение уравнения имеет вид

$$\Delta_1 F_{11} = \sum_m \frac{l}{m\pi}\int_0^{x_0}\Delta_1 B_m(y^0)\,\mathrm{sh}\,\frac{m\pi(x^0 - y^0)}{l}\,dy^0\sin m\bar{z}, \qquad (3.5.66)$$

где

$$\Delta_1 B_m = \int_0^{l}\Delta_1 B\sin m\bar{z}\,dz \Big/ \int_0^{l}\sin^2 m\bar{z}\,d\bar{z}$$

— коэффициенты Фурье функции $\Delta_1 B$.

Подставляя (3.5.58) в общее решение (2.5.2), получим компоненты тензора $\Delta_1 (T_0^{(1)})$ для самоуравновешенных частей $\Delta_1\widetilde{Q}_{(l)}^{l\beta}$ функций нагрузок. Несамоуравновешенным частям $\Delta_1\overline{Q}_{(l)}^{l\beta} = \Delta_1 Q_{(l)}^{l\beta} - \Delta_1\widetilde{Q}_{(l)}^{l\beta}$ функций нагрузок соответствует тензор $\Delta_1 (T_0^{(2)})$ с компонентами

$$\Delta_1 T_0^{1\beta} = (1/2)\,(1 + \cos\bar{r})\Delta_1\widetilde{Q}_{(1)}^{l\beta}; \qquad (3.5.67)$$

остальные компоненты равны нулю.

Основной тензор

$$\Delta_1 (T_0) = \Delta_1 (T_0^{(1)}) + \Delta_1 (T_0^{(2)}). \qquad (3.5.68)$$

Компоненты корректирующего тензора $\Delta_1 (T_{\text{к}})$ имеют вид

$$\Delta_1 T_{(\text{к})}^{\alpha\beta} = \sum_{mnpl} (\Delta_1 A_{mnpl} f_{(1)}^{\alpha\beta} + \Delta_1 B_{mnpl} f_{(2)}^{\alpha\beta} +$$

$$+ \Delta_1 C_{mnpl} f_{(3)}^{\alpha\beta} + \Delta_1 D_{mnpl} f_{(0)}^{\alpha\beta}), \qquad (3.5.69)$$

параметры $\Delta_1 A_{mnpl}, \ldots, \Delta_1 D_{mnpl}$ определяются в результате решения уравнений

$$\sum_{mnpl} (\Delta_1 A_{mnpl} F_{1\beta} + \Delta_1 B_{mnpl} F_{2\beta} +$$

$$+ \Delta_1 C_{mnpl} F_{3\beta} + \Delta_1 D_{mnpl} F_{0\beta}) + \Delta_1 L_\beta = 0. \qquad (3.5.70)$$

Коэффициенты $F_{\gamma\beta}\,(mnplijkq)$ и свободные члены $\Delta_1 L_\beta\,(ijkq)$ определяются по известным формулам, функции состояния выбираются в зависимости от физико-механических свойств и состояния материала цилиндра, как и в случае волны нагрузки. Интегралы $F_{\gamma\beta}^{(k)}\,(mnp\,l\,ijkq)$ вычисляются по формулам

$$F_{\gamma\beta}^{(k)} = -\frac{a_0}{a_{cq}} \left(\frac{x_2^0}{\pi}\right)^3 2\,\frac{l}{\pi^2} \times$$

$$\times \int\int_0^\pi\int\int A_{\gamma\beta}^{(k)} \left(\pi\,\frac{r_2}{x_2^0} - \frac{a_0}{a_{cq}}\,\frac{\bar{x}^0\bar{r}}{\pi}\right) \bar{x}^0\, d\bar{r}\, d\bar{\theta}\, d\bar{z}\, d\bar{x}^0, \qquad (3.5.71)$$

интегралы $\Delta_1 L_\beta^\lambda\,(ijkq)$ — по формулам

$$\Delta_1 L_\beta^{(\lambda)} = -(a_0/a_{cq})\,(x_2^0/\pi)^3\,(2l/\pi^2) \times$$

$$\times \int\int_0^\pi\int\int \Delta_1 B_\beta^{(\lambda)} \left(\pi\,\frac{r_2}{x_2^0} - \frac{a_0}{a_{cq}}\,\frac{\bar{x}^0\bar{r}}{\pi}\right) \bar{x}^0\, d\bar{r}\, d\bar{\theta}\, d\bar{z}\, d\bar{x}^0. \qquad (3.5.72)$$

Их подынтегральные выражения определены во второй части книги, $f_{(\gamma)}^{\alpha\beta}$ — известные функции, а $T_{(0)}^{\alpha\beta}$ — компоненты тензора (3.5.68); отсчет координаты x^0 ведется от значения $x_{\text{от}}^{(0)} = (a_{cq}/a_0)\,(r_2 - r_1)$, принятого за нулевое.

Решение уравнений (3.5.70) строится с помощью процедуры последовательных приближений, изложенной в § 3 гл. 1. В результате получаем параметры $\Delta_1 A_{mnpl}, \ldots, \Delta_1 D_{mnpl}$, следовательно, и компоненты корректирующего тензора $\Delta_1 (T_{\text{к}})$.

Таким образом, тензор кинетических напряжений $(T)_{\text{от}}$ для области возмущений отраженной волны нагрузки построен.

В других областях возмущений волн напряжений тензор кинетических напряжений (T) строится аналогично изложенному.

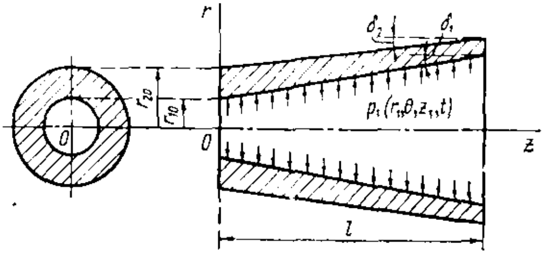

Рис. 95

Рассмотрим с таких же позиций напряженное состояние полого конуса при взрыве (рис. 95). Конус отнесен к цилиндрической системе координат и определяется уравнениями

$$r_\gamma = r_{\gamma_0} + z \operatorname{tg} \delta_\gamma \; (\gamma = 1,\ 2). \tag{3.5.73}$$

Продукты взрыва создают на внутренней поверхности конуса давление, изменяющееся по закону

$$p(\theta,\ z,\ t) = \begin{cases} p_1(\theta,\ z,\ t) \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant t_p, \\ p_2(\theta,\ z,\ t) \text{ при } t_p \leqslant t \leqslant t_{\text{в}}, \end{cases}$$

и температурное поле $T^0 = T^0(r,\ \theta,\ z,\ t)$.

В момент времени $t = 0$ на внутренней поверхности конуса зарождается волна нагрузки, которая распространяется с конечной скоростью a_0 в направлении внешней поверхности, образуя область возму-

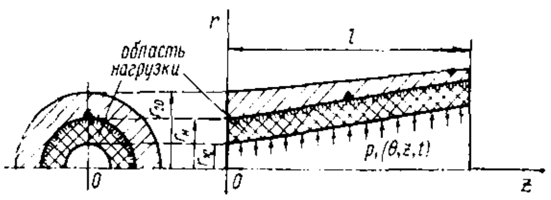

Рис. 96

щений нагрузки. Область возмущений нагрузки ограничена внутренней поверхностью $r = r_1$ и поверхностью $r = r_{\text{н}}$ переднего фронта волны нагрузки (рис. 96), причем

$$r_{\text{н}} = r_1 + (a_0/a_{cq})\,(x^0/\cos\delta_1). \tag{3.5.74}$$

Этой области соответствует тензор кинетических напряжений $(T)_{\text{нагр}}$, который необходимо построить в виде суммы основного и корректирующего тензоров:

$$(T)_{\text{нагр}} = (T_{\text{о}}) + (T_{\text{к}}). \tag{3.5.75}$$

Искомые тензоры строятся в форме общего решения (2.5.2) уравнений равновесия так, чтобы выполнялись следующие граничные условия:

$$T^{1\beta}=Q^{1\beta}_{(1)} \text{ при } r=r_1,\ w_\alpha=0 \text{ при } r=r_{\text{н}},$$
$$T^{0\beta}=Q^{0\beta}_{(1)} \text{ при } x^0=0, \tag{3.5.76}$$

где $Q^{11}_{(1)}=(\rho v^1v^1)_{r_1}-p_1$, $Q^{10}_{(1)}=(\rho v^1 a_{cq})_{r_1}$, $Q^{00}_{(1)}=\rho_0 a^2_{cq}$, $Q^{01}_{(1)}=$ $=\rho_0 a_{cq} v^1_0$ — функции нагрузок, и вариационное уравнение (см. § 3 гл. 1), взятое в соответствии с состоянием материала в области возмущений нагрузки.

Для основного тензора (T_0) функции кинетических напряжений можно представить в виде

$$\Pi^{(0)}_\alpha=\Pi^{(0)}_{\alpha 1}+\Pi^{(0)}_{\alpha 0}.$$

Слагаемое $\Pi^{(0)}_{\alpha 1}$ относится к координате $r=r_1$ и равно

$$\Pi^{(0)}_{\alpha 1}=(1/2)\,(1+\cos\bar{r})F_{\alpha 1}, \tag{3.5.77}$$

где

$$\bar{r}=[\pi\,(r-r_1)]/[(a_0\,x^0/a_{cq})\,(1/\cos\delta_1)]$$

— безразмерная координата.

Функции $F_{\alpha 1}$ удовлетворяют уравнениям (3.5.10) и граничным условиям (3.5.10′), однако r_1 является функцией z и x^0. Рассматривая совместно эти уравнения, приходим к следующим уравнениям:

$$\frac{\partial^2 F_{01}}{\partial\theta^2}+r_1^2\,\frac{\partial^2 F_{01}}{\partial z^2}=0,$$
$$\frac{\partial^2 F_{31}}{\partial\theta\partial z}=r_1\left(r_1\,Q^{11}_{(1)}-\frac{\partial F_{21}}{\partial z}\right), \tag{3.5.78}$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(r_1^2\,\frac{\partial F_{21}}{\partial z}\right)+\frac{\partial^2 F_{21}}{\partial\theta^2}-r_1^2\,\frac{\partial^2 F_{21}}{\partial x^{0^2}}=A,$$
$$\frac{\partial^2 F_{11}}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 F_{11}}{\partial x^{0^2}}=B,$$

где

$$A=2\int_0^{x^0}\frac{\partial}{\partial z}\,(r_1^2\,Q^{10}_{(1)})\,dx^0,\qquad B=\frac{\partial^2 F_{21}}{\partial z\partial\theta}-\frac{2}{r_1}\,\frac{\partial F_{31}}{\partial z}.$$

Уравнения (3.5.78) решаются последовательно, начиная с уравнения

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(r_1^2\,\frac{\partial F_{21}}{\partial z}\right)+\frac{\partial^2 F_{21}}{\partial\theta^2}-r_1^2\,\frac{\partial^2 F_{21}}{\partial x^{0^2}}=A,$$

в которое входит функция r_1 (z; x^0). Зависимость r_1 от x^0 реализуется через перемещение u_r, которое либо мало по сравнению с радиусом r_{10}, либо отсутствует, поэтому зависимость r_1 от x^0 слабая и ею можно пренебречь. Решение рассматриваемого уравнения ищем в виде ряда Фурье по собственным функциям $V^{(l)}_{mn}(\theta,\ z)$:

$$F_{21}=\sum_{m,\,n}\,(X^{(1)}_{mn}(x^0)\,V^{(1)}_{mn}+X^{(2)}_{mn}(x^0)\,V^{(2)}_{mn}),$$

предполагая, что функцию A можно представить в виде ряда Фурье по этим же собственным функциям:

$$A = \sum_{m,\,n} (A_{mn}^{(1)}(x^0)\, V_{mn}^{(1)} + A_{mn}^{(2)}(x^0)\, V_{mn}^{(2)}),$$

где

$$A_{mn}^{(j)}(x^0) = \int_0^{2\pi}\int_0^l \frac{1}{r_1^2} A V_{mn}^{(j)}\, dz d\theta \Bigg/ \int_0^{2\pi}\int_0^l (V_{mn}^{(j)})^2\, dz d\theta.$$

Подставляя приведенные ряды в рассматриваемое уравнение, для функций $X_{mn}^{(j)}(x^0)$ получим уравнение

$$\ddot{X}_{mn}^{(j)} + \lambda_{mn}^2 X_{mn}^{(j)} = -A_{mn}^{(j)},$$

частным решением которого является функция

$$X_{mn}^{(j)} = \frac{1}{\lambda_{mn}} \int_0^{x^0} A_{mn}^{(j)}(\xi) \sin\lambda_{mn}(\xi - x^0)\, d\xi.$$

Окончательно имеем

$$F_{21} = \sum_{m,n} \frac{1}{\lambda_{mn}} \int_0^{x^0} (A_{mn}^{(1)}(\xi)\, V_{mn}^{(1)} + A_{mn}^{(2)}(\xi)\, V_{mn}^{(2)}) \sin\lambda_{mn}(\xi - x^0)\, d\xi. \quad (3.5.79)$$

Собственные функции $V_{mn}^{(j)}(\theta, z)$ $(j = 1, 2)$ определяются в результате решения следующей краевой задачи:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(r_1^2 \frac{\partial V}{\partial z}\right) + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = -\lambda^2 r_1^2 V,$$

$V = 0$ при $z = z_\gamma$; по координате θ функция периодическая (период 2π). Отсюда следуют две системы собственных функций:

$$V_{mn}^{(1)} = Z_{mn}(z) \cos n\theta \quad \text{и} \quad V_{mn}^{(2)} = Z_{mn}(z) \sin n\theta, \quad (3.5.80)$$

причем

$$Z_{mn}(z) = Z_{mn}^{(2)}(z) - \frac{Z_{mn}^{(2)}(0)}{Z_{mn}^{(1)}(0)} Z_{mn}^{(1)}(z), \quad (3.5.81)$$

где

$$Z^{(1)}(z) = \frac{1}{\sqrt{r_1}} J_\nu\left(\frac{\lambda}{\operatorname{tg}\delta_1} r_1\right), \quad Z^{(2)}(z) = \frac{1}{\sqrt{r_1}} Y_\nu\left(\frac{\lambda}{\operatorname{tg}\delta_1} r_1\right)$$

— частные решения уравнения

$$r_1^2 Z'' + 2r_1 Z' + (\lambda^2 r_1^2/\operatorname{tg}^2\delta_1 - n^2/\operatorname{tg}^2\delta_1) Z = 0,$$

для которого

$$\nu = \sqrt{n^2 + (1/4)\operatorname{tg}^2\delta_1}/\operatorname{tg}\delta_1.$$

Собственными значениями λ_{mn} для функций (3.5.80) являются корни характеристического уравнения

$$Z^{(1)}(0)Z^{(2)}(l)-Z^{(1)}(l)Z^{(2)}(0)=0.$$

Интегрируя второе из уравнений (3.5.78) с учетом граничных условий (3.5.10), имеем

$$F_{31}=\int_0^{\theta}\int_0^{z} r_1\left(r_1 Q_{(1)}^{11}-\frac{\partial F_{21}}{\partial z}\right)dz\,d\theta. \qquad (3.5.82)$$

Решением четвертого уравнения (3.5.78) является функция

$$F_{11}=\sum_m \frac{l}{m\pi}\int_0^{x^0} B_m(y^0)\operatorname{sh}\frac{m\pi(x^0-y^0)}{l}\,dy^0\sin m\bar{z}, \qquad (3.5.83)$$

где

$$B_m=\frac{2\pi}{l}\int_0^l B\sin m\bar{z}\,dz$$

— коэффициенты Фурье функции

$$B=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_{21}}{\partial\theta}+2\int_0^{\theta}F_{21}\,d\theta\right)-2r_1\int_0^{\theta}Q_{(1)}^{11}\,d\theta.$$

Первому из уравнений (3.5.78) и граничным условиям (3.5.10) соответствует функция $F_{01}=0$.

Для координаты x^0 функции кинетических напряжений $\Pi_{\alpha 0}^{(0)}$ определяются по формулам (3.5.24), при этом функции F_{10} и Ψ_{i0} ($i=1, 2, 3$) те же, что и для цилиндра, однако r_1 является функцией координат z и x^0.

Полные функции кинетических напряжений основного тензора таковы:

$$\Pi_1^{(0)}=\frac{1}{2}(1+\cos\bar{r})F_{11}+\frac{1}{2}(1+\cos\bar{x}^0)F_{10}+\frac{1}{2}\int_0^{x^0}(1+\cos\bar{x}^0)\,dx^0\,\Psi_{10},$$

$$\Pi_2^{(0)}=\frac{1}{2}(1+\cos\bar{r})F_{21}+\frac{1}{2}\int_0^{x^0}(1+\cos\bar{x}^0)\,dx^0\,\Psi_{20}, \qquad (3.5.84)$$

$$\Pi_3^{(0)}=\frac{1}{2}(1+\cos\bar{r})F_{31}+\frac{1}{2}\int_0^{x^0}(1+\cos\bar{x}^0)\,dx^0\,\Psi_{30},$$

$$\Pi_0^{(0)}=0.$$

Подставляя их в общее решение (2.5.2), получим компоненты тензора $(T_0^{(1)})$ для самоуравновешенных частей $\tilde{Q}_{(1)}^{1\beta}$ и $\tilde{Q}_{(1)}^{0\beta}$ функций нагрузок. Несамоуравновешенным частям функций нагрузок (3.5.33) соответствует тензор $(T_0^{(2)})$ с компонентами (3.5.33). Основной тензор (T_0) определяется в виде суммы тензоров [см. формулу (3.5.34)]. Корректирующий тензор $(T_к)$ для конуса строится так же, как и для цилиндра, но при этом учитывается зависимость r_γ $(\gamma = 1,\ 2)$ от координат z, x^0.

Итак, можно считать тензор кинетических напряжений (T) для области возмущений нагрузки построенным.

В момент времени $t_р$ начинается разгрузка. На внутренней поверхности конуса зарождается волна разгрузки, распространяющаяся со скоростью b в направлении внешней поверхности, образуя область возмущений разгрузки. Область возмущений разгрузки ограничена

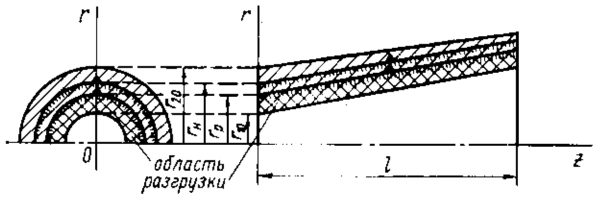

Рис. 97

внутренней поверхностью $r = r_1$ и поверхностью $r = r_р$ переднего фронта волны разгрузки (рис. 97). Она характеризуется тензором кинетических напряжений

$$(T)_{разгр} = (T)_{нагр} - \Delta\,(T). \qquad (3.5.85)$$

Тензор $(T)_{нагр}$ известен, построение тензора $\Delta\,(T)$ для конуса выполняется как и в случае цилиндра, однако учитываются особенности, характерные для конуса. Функции $\Delta F_{\alpha 1}$ имеют вид:

$$\Delta F_{01} = 0,$$

$$\Delta F_{21} = \sum_{m,n} \frac{1}{\lambda_{mn}} \int\limits_0^{x_0} \left(\Delta A_{mn}^{(1)}(\xi)\, V_{mn}^{(1)} + \Delta A_{mn}^{(2)}(\xi)\, V_{mn}^{(2)}\right) \sin \lambda_{mn}(\xi - x^0)\, d\xi,$$

$$\Delta F_{31} = \int\limits_0^{\theta} \int\limits_0^{z} \left(r_1\, \Delta Q_{(1)}^{11} - \frac{\partial \Delta F_{21}}{\partial z}\right) r_1\, dz\, d\theta, \qquad (3.5.86)$$

$$\Delta F_{11} = \sum_{m} \frac{l}{m\pi} \int\limits_0^{x^0} \Delta B_m(y^0)\, \mathrm{sh}\, \frac{m\pi(x^0 - y^0)}{l}\, dy^0 \sin m\bar{z},$$

где

$$\Delta A_{mn}^{(l)} = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{l} \frac{1}{r_1^2}\, \Delta A V_{mn}^{(l)}\, dz\, d\theta \Bigg/ \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{l} (V_{mn}^{(l)})^2\, dz\, d\theta$$

— коэффициенты Фурье функции

$$\Delta A = 2\int_0^{x^0} \frac{\partial}{\partial z}(r_1^2\,\Delta Q_{(1)}^{10})\,dx^0;$$

$$\Delta B_m = \frac{2\pi}{l}\int_0^l \Delta B \sin m\bar{z} dz$$

— коэффициенты Фурье функции

$$\Delta B = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\Delta F_{21} + 2\int_0^\theta \Delta F_{21}\,d\theta\right) - 2r_1\int_0^\theta \Delta Q_{(1)}^{11}\,d\theta.$$

В результате для области возмущений разгрузки конуса построены основной и корректирующий тензоры, следовательно, и тензор Δ (T). Таким образом, тензор кинетических напряжений $(T)_{\text{разгр}}$ определен.

В момент времени $t_{\text{от}} = (r_2 - r_1)_{\min}/a_0$, которому соответствует координата $x^0_{\text{от}} = (a_{cq}/a_0)\,(r_2 - r_1)_{\min}$, волна нагрузки достигает внеш-

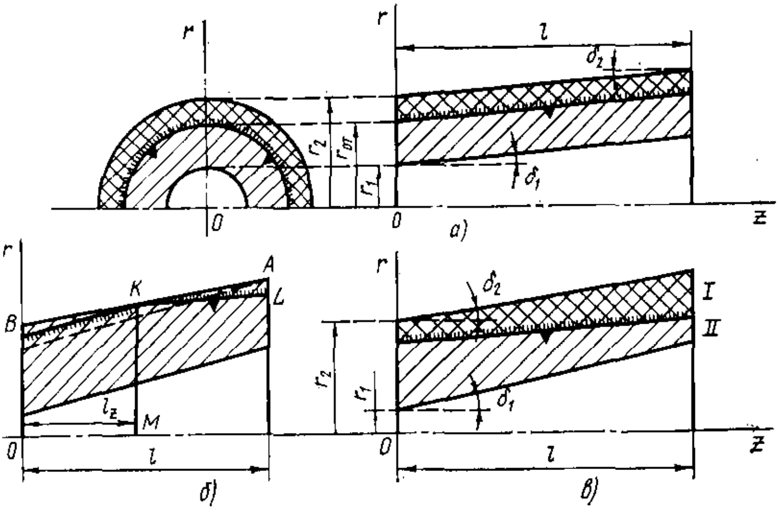

Рис. 98

ней поверхности конуса и отражается, зарождается отраженная волна нагрузки, распространяющаяся в обратном направлении со скоростью a_0.

Если толщина $h = (r_2 - r_1)$ *конуса постоянна* $(\delta_1 = \delta_2)$, *то* отражение начинается на всей внешней поверхности. Образуется область возмущений отраженной волны нагрузки (рис. 98, *а*), ограниченная внешней поверхностью $r = r_2$ конуса и поверхностью $r = r_{\text{от}}$ переднего фронта отраженной волны нагрузки,

$$r_{\text{от}} = r_2 - (a_0 x^0/a_{cq})\,(1/\cos\delta_2). \qquad (3.5.87)$$

Если толщина $h = r_2 - r_1$ конуса переменна ($\delta_1 \neq \delta_2$), то отражение начинается на внешней поверхности в сечении, где $h = (r_2 - r_1)_{\min}$. Образуется область возмущений отраженной волны нагрузки (рис. 98, *б*), ограниченная частью внешней поверхности конуса и поверхностью $r = r_{\text{от}}$ переднего фронта отраженной волны нагрузки. Выражение для $r_{\text{от}}$ и положение точки K определяются из следующих соображений.

В момент времени $t_{\text{к}} > t_{\text{от}}$ в точке K внешней поверхности конуса с координатами (r_k, l_z) происходит отражение волны нагрузки. Эта точка находится на пересечении прямых $r_1 = r_{10}^* + z \operatorname{tg} \delta_1$, $r_2 = r_{20} + z \operatorname{tg} \delta_2$, где $r_{10}^* = r_{10} - l (\operatorname{tg} \delta_1 - \operatorname{tg} \delta_2) + (a_0/a_{cq}) (x^0/\cos \delta_1)$.

Из приведенных уравнений имеем

$$r_k = r_{10}^* + l_z \operatorname{tg} \delta_1 = r_{20} + l_z \operatorname{tg} \delta_2;$$

отсюда находим координаты точки K:

$$l_z = l - \frac{a_0}{a_{cq}} \frac{x^0}{\cos \delta_1 (\operatorname{tg} \delta_1 - \operatorname{tg} \delta_2)},$$

$$r_k = r_{20} + l \operatorname{tg} \delta_2 - \frac{a_0}{a_{cq}} x^0 \frac{\operatorname{tg} \delta_2}{\cos \delta_1 (\operatorname{tg} \delta_1 - \operatorname{tg} \delta_2)}. \tag{3.5.88}$$

Уравнение поверхности переднего фронта отраженной волны нагрузки запишем в виде

$$r_{\text{от}} (z) = r_k + (z - l_z) \operatorname{tg} \delta.$$

Угол конусности δ определяется из условия

$$r_L = r_{20} + l \operatorname{tg} \delta_2 - (a_0/a_{cq}) (x^0/\cos \delta_2) = r_k + (l - l_z) \operatorname{tg} \delta,$$

подставляя в которое выражения для r_k и l_z, находим

$$\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} \delta_2 - (\cos \delta_1/\cos \delta_2) (\operatorname{tg} \delta_1 - \operatorname{tg} \delta_2). \tag{3.5.89}$$

В результате уравнение образующей поверхности переднего фронта отраженной волны нагрузки принимает вид

$$r_{\text{от}} = r_{20} + z \operatorname{tg} \delta_2 - \frac{a_0}{a_{cq}} \frac{x^0}{\cos \delta_2} + (l - z) \frac{\cos \delta_1}{\cos \delta_2} (\operatorname{tg} \delta_1 - \operatorname{tg} \delta_2). \tag{3.5.90}$$

Таким образом, область возмущений отраженной волны нагрузки в промежутке времени $((r_2 - r_1)_l/a_0, (r_2 - r_1)_0/a_0)$, соответствующем интервалу $(0, (a_{cq} l/a_0) (\operatorname{tg} \delta_1 - \operatorname{tg} \delta_2))$ с начальным значением $x_{\text{от}}^0 = (a_{cq}/a_0) (r_2 - r_1)_l$, определяется уравнениями (3.5.88) и (3.5.90).

Совпадение точки K с точкой B означает, что отражение волны нагрузки произошло на всей внешней поверхности конуса. Это происходит в момент $(r_2 - r_1)_0/a_0$. Отраженная волна нагрузки отрывается от внешней поверхности и в дальнейшем распространяется внутри объема конуса (рис. 98, *в*). Уравнение поверхности переднего фронта отраженной волны имеет вид

$$r_{\text{от}} = r_{20} + z \operatorname{tg} \delta_2 - \frac{a_0}{a_{cq}} \frac{x^0}{\cos \delta_2} + \frac{\operatorname{tg} \delta_1 - \operatorname{tg} \delta_2}{\cos \delta_2} (l - z \cos \delta_1). \tag{3.5.91}$$

Итак, для моментов времени $t > (r_2 - r_1)_0/a_0$ область возмущений отраженной волны ограничена внешней поверхностью $r = r_2$ и поверхностью переднего фронта отраженной волны нагрузки, определяемой уравнениями (3.5.91).

Области возмущений отраженной волны нагрузки соответствует тензор кинетических напряжений

$$(T_{\text{от}}) = (T)_{\text{нагр}} - \Delta_1(T). \tag{3.5.92}$$

Тензор $(T)_{\text{нагр}}$ известен, тензор $\Delta_1(T)$ требуется построить в форме общего решения (2.5.2) уравнений равновесия фиктивного тела так, чтобы выполнялись следующие граничные условия:

$$\Delta_1 T^{1\beta} = \Delta_1 Q^{1\beta}_{(1)} \text{ при } r = r_2, \ \Delta_1 w_\alpha = 0 \text{ при } r = r_{\text{от}}, \tag{3.5.93}$$
$$\Delta_1 T^{0\beta} = 0 \text{ при } x^0 = 0,$$

где $\Delta_1 Q^{1\beta}_{(1)} = T^{1\beta}_{\text{нагр}}|_{r_2}$, и вариационное уравнение (см. § 3 гл. 1), взятое в соответствии с состоянием материала в рассматриваемой области возмущений.

Тензор $\Delta_1(T)$, как и в предыдущих случаях, представим в виде суммы основного и корректирующего тензоров:

$$\Delta_1(T) = \Delta_1(T_{\text{о}}) + \Delta_1(T_{\text{к}}). \tag{3.5.94}$$

Основному тензору соответствуют функции кинетических напряжений

$$\Delta_1 \Pi^{(0)}_\alpha = (1/2)(1 + \cos \bar{r}) \Delta_1 F_{\alpha 1}, \tag{3.5.95}$$

где $\bar{r} = [\pi (r - r_2)]/(r_{\text{от}} - r_2)$ — безразмерная координата, причем

$$r_2 - r_{\text{от}} = \frac{a_0}{a_{cq}} \frac{x^0}{\cos\delta_2} - (l - z)\frac{\cos\delta_1}{\cos\delta_2}(\operatorname{tg}\delta_1 - \operatorname{tg}\delta_2),$$

или

$$r_2 - r_{\text{от}} = \frac{a_0}{a_{cq}} \frac{x^0}{\cos\delta_2} - (l - z\cos\delta_1)\frac{\operatorname{tg}\delta_1 - \operatorname{tg}\delta_2}{\cos\delta_2}.$$

Функции $\Delta_1 F_{\alpha 1}$ удовлетворяют уравнениям (3.5.59) и граничным условиям (3.5.59′), однако в данном случае r_2 — функция координаты z. Пользуясь произвольностью выбора искомых функций, полагаем

$$\Delta_1 F_{01} = 0. \tag{3.5.96}$$

В этом случае, рассматривая совместно уравнения (3.5.59), приходим для функции $\Delta_1 F_{21}$ к уравнению

$$\frac{1}{r_2^2}\frac{\partial}{\partial z}\left(r_2^2 \frac{\partial}{\partial z}\Delta_1 F_{21}\right) + \frac{1}{r_2^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\Delta_1 F_{21} - \frac{\partial^2}{\partial x^{0 2}}\Delta_1 F_{21} = \Delta_1 A,$$

где

$$\Delta_1 A = 2\left[\Delta_1 Q^{13}_{(1)} + \frac{1}{r_2^2}\frac{\partial}{\partial z}\left(r_2^2 \int_0^{x^0} \Delta_1 Q^{10}_{(1)}\, dx^0\right)\right].$$

Этому уравнению и граничным условиям (3.5.59) удовлетворяет функция

$$\Delta_1 F_{21} = \sum_{m,n} \frac{1}{\lambda_{mn}} \int_0^{x^0} (\Delta_1 A_{mn}^{(1)}(\xi) V_{mn}^{(1)} + \Delta_1 A_{mn}^{(2)}(\xi) V_{mn}^{(2)}) \sin \lambda_{mn} (\xi - x^0)\, d\xi, \tag{3.5.97}$$

где

$$\Delta_1 A_{mn}^{(j)} = \int_0^{2\pi} \int_0^{l} \Delta_1 A V_{mn}^{(j)}\, dz d\theta \Bigg/ \int_0^{2\pi} \int_0^{l} (V_{mn}^{(j)})^2\, dz d\theta$$

— коэффициенты Фурье функции $\Delta_1 A$. Собственные функции $V_{mn}^{(j)}(\theta z)$ ($j = 1, 2$) определяются по формулам (3.5.80) и (3.5.81), частные решения имеют вид

$$\begin{gathered} Z^{(1)}(z) = J_\nu (\lambda r_2 / \operatorname{tg} \delta_2) / \sqrt{r_2}, \\ Z^{(2)}(z) = Y_\nu (\lambda r_2 / \operatorname{tg} \delta_2) / \sqrt{r_2}, \end{gathered} \tag{3.5.98}$$

где

$$\nu = \sqrt{n^2 + 1/4 \operatorname{tg}^2 \delta_2} / \operatorname{tg} \delta_2.$$

Собственные значения λ_{mn} — корни характеристического уравнения (3.5.81), составленного из частных решений (3.5.98). Функция $\Delta_1 F_{31}$ подчинена уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta \partial z} \Delta_1 F_{31} = r_2 \left(r_2 \Delta_1 Q_{(1)}^{11} - \frac{\partial}{\partial z} \Delta_1 F_{21} \right),$$

решением которого является функция

$$\Delta_1 F_{31} = \int_0^{\theta} \int_0^{z} r_2 \left(r_2 \Delta_1 Q_{(1)}^{11} - \frac{\partial}{\partial z} \Delta_1 F_{21} \right) dz d\theta. \tag{3.5.99}$$

Для функции $\Delta_1 F_{11}$ имеем уравнение

$$\frac{\partial^2 \Delta_1 F_{11}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Delta_1 F_{11}}{\partial x^{0\,2}} = \Delta_1 B,$$

где

$$\Delta_1 B = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \Delta_1 F_{21} + 2 \int_0^{\theta} \Delta_1 F_{21}\, d\theta \right) - 2 r_2 \int_0^{\theta} \Delta_1 Q_{(1)}^{11}\, d\theta.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\Delta_1 F_{11} = \sum_m \frac{l}{m\pi} \int_0^{x^0} \Delta_1 B_m (y^0) \operatorname{sh} \frac{m\pi (x^0 - y^0)}{l}\, dy^0 \sin m \bar{z}, \tag{3.5.100}$$

где

$$\Delta_1 B_m = \frac{2\pi}{l} \int\limits_0^l \Delta_1 B \sin m \bar{z} dz$$

— коэффициенты Фурье функции $\Delta_1 B$.

Подставляя выражения (3.5.95) в общее решение (2.5.2), определяем компоненты тензора $\Delta_1 (T_0^{(1)})$ для самоуравновешенных частей $\Delta_1 \tilde{Q}_{(1)}^{|\beta}$ функций нагрузок. Несамоуравновешенным частям $\Delta_1 \overline{Q}_{(1)}^{|\beta} = \Delta_1 Q_{(1)}^{|\beta} - \Delta_1 \tilde{Q}_{(1)}^{|\beta}$ функции нагрузок соответствует тензор $\Delta_1 (T_0^{(2)})$ с компонентами

$$\Delta_1 T_{(0)}^{1\beta} = (1/2)(1 + \cos \bar{r}) \Delta_1 \overline{Q}_{(1)}^{|\beta}. \tag{3.5.101}$$

Основной тензор $\Delta_1 (T_o)$ равен сумме тензоров:

$$\Delta_1 (T_o) = \Delta_1 (T_0^{(1)}) + \Delta_1 (T_0^{(2)}). \tag{3.5.102}$$

Построение корректирующего тензора $\Delta_1 (T_к)$ выполняется так же, как для цилиндра, однако следует учитывать зависимости $r_y (z, x^0)$, $r_{от} (z, x^0)$, характерные для области возмущений отраженной волны нагрузки конуса, а также физико-механические свойства и состояние материала в этой области. Интегралы $F_{\gamma\beta}^{(k)}$ *(mnplijkq)* вычисляются по формулам

$$F_{\gamma\beta}^{(k)} = 2\,\frac{x_2^0 - x_1^0}{\pi} \iiiint\limits_0^{\pi} A_{\gamma\beta}^{(k)} \left(r_2 - \frac{r_2 - r_{от}}{\pi}\bar{r}\right) \frac{(r_2 - r_{от})(z_1 - z_2)}{\pi}\, d\bar{r} d\bar{\theta} d\bar{z} d\bar{x}^0; \tag{3.5.103}$$

интегралы $\Delta_1 L_\beta^{(\lambda)}$ *(ijkq)* — по формулам

$$\Delta_1 L_\beta^{(\lambda)} = 2\,\frac{x_2^0 - x_1^0}{\pi} \iiiint\limits_0^{\pi} \Delta_1 B_\beta^{(\lambda)} \left(r_2 - \frac{r_2 - r_{от}}{\pi}\bar{r}\right) \times$$

$$\times \frac{r_2 - r_{от}}{\pi}\,\frac{z_1 - z_2}{\pi}\, d\bar{r} d\bar{\theta} d\bar{z} d\bar{x}^0;$$

при этом каждый интеграл разбивается на три. Первому интегралу соответствуют значения

$$x_1^0 = 0, \quad x_2^0 = (a_{cq}/a_0)(\operatorname{tg}\delta_1 - \operatorname{tg}\delta_2),$$

$$z_1 - z_2 = \frac{a_0}{a_{cq}} x^0 \frac{1}{\cos\delta_1 (\operatorname{tg}\delta_1' - \operatorname{tg}\delta_2)}, \tag{3.5.104}$$

$$r_2 - r_{от} = \frac{a_0}{a_{cq}} \frac{x^0}{\cos\delta_2} - (l - z)\frac{\cos\delta_1}{\cos\delta_2}(\operatorname{tg}\delta_1 - \operatorname{tg}\delta_2);$$

второму — значения

$$x_1^0 = \frac{a_{cq}}{a_0} l (\operatorname{tg} \delta_1 - \operatorname{tg} \delta_2), \quad x_2^0 = \frac{a_{cq}}{a_0} [(r_{20} - r_{10}) - l (\operatorname{tg} \delta_1 - \operatorname{tg} \delta_2)],$$

$$z_1 - z_2 = l, \tag{3.5.104'}$$

$$r_2 - r_{\text{от}} = \frac{a_0}{a_{cq}} \frac{x^0}{\cos \delta_2} - (l - z \cos \delta_1) \frac{\operatorname{tg} \delta_1 - \operatorname{tg} \delta_2}{\cos \delta_2};$$

третьему — следующие значения

$$x_1^0 = a_{cq}/a_0 [(r_{20} - r_{10}) - l (\operatorname{tg} \delta_1 - \operatorname{tg} \delta_2)],$$

$$x_2^0 = (a_{cq}/a_0) [(r_{20} - r_{10}) + l (\operatorname{tg} \delta_1 - \operatorname{tg} \delta_2)],$$

$$z_1 - z_2 = \frac{a_0}{a_{cq}} x^0 \frac{1}{\cos \delta_1 (\operatorname{tg} \delta_1 - \operatorname{tg} \delta_2)}, \tag{3.5.104''}$$

$$r_2 - r_{\text{от}} = \frac{a_0}{a_{cq}} \frac{x^0}{\cos \delta_1} - (l - z) \frac{\cos \delta_1}{\cos \delta_2} (\operatorname{tg} \delta_1 - \operatorname{tg} \delta_2).$$

Подынтегральные выражения определены во второй части книги, $f_{(\gamma)}^{\alpha\beta}$ — известные функции, $T_{(0)}^{\alpha\beta}$ — компоненты тензора (3.5.102).

Отсчет координаты x^0 ведется от значения $x_{\text{от}}^0 = (a_{cq}/a_0) [(r_{20} - r_{10}) - l (\operatorname{tg} \delta_1 - \operatorname{tg} \delta_2)]$, принятого за нулевое.

Для конуса постоянной толщины интегралы $F_{\gamma\beta}^{(k)}$ и $\Delta_1 L_\beta^{(\lambda)}$ вычисляются по формулам (4.5.103), им соответствуют значения

$$x_1^0 = 0, \quad x_2^0 = (a_{cq}/a_0)(r_{20} - r_{10}),$$

$$z_1 - z_2 = l, \quad r_2 - r_{\text{от}} = (a_0/a_{cq})(x^0/\cos \delta_2). \tag{3.5.105}$$

В результате корректирующий тензор $\Delta_1 (T_{\text{к}})$ построен, следовательно, определены тензор $\Delta_1 (T)$ и тензор кинетических напряжений $(T)_{\text{от}}$ для области возмущений отраженной волны нагрузки конуса.

В других областях возмущений волн напряжений построение тензора кинетических напряжений выполняется аналогично изложенному.

Таким образом, для области возмущений волны напряжений можно считать тензор (T) известным в любой момент времени. Зная тензор кинетических напряжений (T) и используя соображения, приведенные в § 5 гл. 1, можно дать оценку внешнему и внутреннему разрушению цилиндра и конуса.

Внешнее разрушение связано с отражением волны нагрузки на внешней поверхности и характеризуется откольным явлением, которое имеет место при выполнении условия

$$T_i^{\text{нагр}} |_{r_2} > T_i^B/2. \tag{3.5.106}$$

Вид откола определяется по критерию, рассмотренному в § 5 гл. 1, в зависимости от значений $T_{i\,\text{нагр}}$ и T_i^B материала.

Для внутреннего разрушения характерно образование трещины, происходящее при взаимодействии волны разгрузки и отраженной волны нагрузки на поверхности

$$r_{bc} = r_1 + \frac{b}{a_0 + b}\left(2\left(r_2 - r_1\right) - a_0 t_p\right) \qquad (3.5.107)$$

и характеризуемое соотношением

$$T_l^{\text{пол}} = \left(T_l^{\text{разгр}} + T_l^{\text{отр}}\right)_{r_{bc}}. \qquad (3.5.108)$$

Трещина образуется в том случае, если

$$T_l^{\text{пол}} > T_l^B. \qquad (3.5.109)$$

Трехкратный пробег волн напряжений в объеме тела приводит к усреднению напряжений, тело переходит в состояние колебательного движения, которому соответствует тензор кинетических напряжений (Т) всего объема тела (его построение изложено в книге [19]).

Распределение температуры T^0 (r, θ, z, t) в объеме цилиндра или конуса определяется в результате решения краевой задачи теплопроводности (3.5.2). Такие задачи достаточно продробно изучены [22] и не требуют специального рассмотрения, поэтому будем считать закон распределения температуры в теле известным.

Радиальное перемещение w (r, θ, z, t), входящее в (3.5.3), определяется в результате решения задачи о движении частиц внутренней поверхности цилиндра или конуса, находящихся под действием давления взрыва. Если считать, что при взрыве распределение давления на внутренней поверхности постоянно, а материал тела вблизи поверхности находится в пластическом или вязкожидком состоянии, то искомое перемещение w является функцией r и t [w (r, t)] и найдено в § 1 гл. 2. Его можно использовать при решении задачи о расчете напряжений цилиндра и конуса при взрыве.

Таким образом, изложенное дает полное представление о распределении напряжений, возникающих при распространении волн напряжений в областях возмущений полого цилиндра и полого конуса.

§ 6. Цилиндр и конус при ударе

Исследуем напряженное состояние цилиндра и конуса при ударе. В цилиндрической системе координат (r, θ, z, x^0) рассматриваемые тела определяются длиной l и уравнениями образующих ограничивающих (внутренней и внешней) поверхностей: для цилиндра

$$r_\gamma(z) = r_{\gamma_0} = \text{const} \quad (\gamma = 1,\ 2), \qquad (3.6.1)$$

для конуса

$$r_\gamma(z) = r_{\gamma_0} + z \operatorname{tg} \delta_\gamma,$$

где r_{γ_0} — радиусы ограничивающих поверхностей при $z = 0$, δ_γ — углы конусности.

Достаточно исследовать напряженное состояние конуса, поскольку цилиндр — частный случай конуса при $\delta_\gamma = 0$. Рассмотрим только конус заданной конфигурации. Материал конуса считаем известным, его физико-механические свойства заданы диаграммой $\sigma_i \div e_i$ или $\tau_i \div \gamma_i$, а также функциями ползучести $R(t, \tau)$, $R_1(t, \tau)$ и другими характеристиками.

Удар тела в преграду проходит различно (при одних условиях с внедрением, при других — без внедрения), поэтому рассмотрим оба случая отдельно.

Соударение тела с преградой без внедрения в большинстве случаев сопровождается упругопластическим или вязкопластическим деформированием как тела, так и преграды. В области контакта наблюдается смятие тела, характеризуемое динамической зависимостью

$$\alpha = \alpha(P), \tag{3.6.2}$$

где α — местное смятие, P — контактная сила. Величина местного смятия зависит от условий и скорости соударения, физико-механических свойств материала, геометрической конфигурации тел и других факторов.

Процесс удара, очевидно, распадается на два периода. В первой (активной) стадии контактная сила P растет, деформация в зоне контакта упругопластическая или вязкопластическая, т. е. имеет место нагрузка, которой соответствует зависимость вида

$$\alpha = bP^n. \tag{3.6.2$'$}$$

Во втором (пассивном) периоде происходит восстановление упругих или вязких деформаций, при этом контактная сила P уменьшается. Если $P = 0$, то происходит нарушение контакта. Имеем разгрузку, которой соответствует зависимость

$$\alpha = \alpha^{(e)} + \alpha^{(p)}_{\max} = b^{(e)} P^{n_e} + \alpha^{(p)}_{\max}. \tag{3.6.2$''$}$$

Первому периоду соответствует уравнение

$$v\frac{dv}{d\alpha} = -\frac{K_2}{b^{1/n}}\alpha^{1/n},$$

интегрируя которое с учетом начальных условий $\alpha = 0$, $v = v_c$ при $t = 0$, получим

$$v = v_c\sqrt{1 - \frac{2K_2}{v_c^2}\,\frac{1}{b^{1/n}}\,\frac{n}{1+n}\,\alpha^{(1+n)/n}}\,; \tag{3.6.3}$$

при $v = 0$ имеем:

$$\begin{gathered}\alpha_{\max} = \left(E_0\, b^{1/n}\,\frac{1+n}{n}\right)^{n(1+n)},\\ P_{\max} = \left(\frac{E_0}{b}\,\frac{1+n}{n}\right)^{1/(1+n)},\end{gathered} \tag{3.6.4}$$

где $E_0 = v_c^2/2K_2$ — кинетическая энергия соударения.

Характеристики процесса нагрузки $\alpha(t)$, $v(t)$, $P(t)$, t_p определяются [1] по формулам:

$$\alpha = \alpha_{\max}\psi^{n(1+n)}, \quad v = v_c\sqrt{1-\psi}, \qquad (3.6.5)$$

$$P = P_{\max}\psi^{1/(1+n)}, \quad t_p = F_1(n)\frac{\alpha_{\max}}{v_c},$$

где

$$F_1(n) = \sqrt{\pi}\,\frac{1+3n}{2(1+n)}\,\frac{\Gamma\left(\dfrac{1+2n}{1+n}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{3+5n}{2(1+n)}\right)},$$

$$\psi = (\alpha/\alpha_{\max})^{(1+n)/n}\ (0 \leqslant \psi \leqslant 1).$$

Второму периоду соответствует уравнение

$$\frac{d^2\alpha^{(e)}}{dt^2} = -K_2\left(\frac{\alpha^{(e)}}{b^{(e)}}\right)^{1/n_e}.$$

Интегрируя его, находим

$$v = P_{\max}^{(1+n_e)/n_e}\sqrt{2K_2 b^{(e)}\frac{n_e}{1+n_e}(1-\psi)},$$

$$\alpha^{(e)} = \alpha_{\max}^{(e)}\psi^{n_e/(1+n_e)}, \quad P = P_{\max}\psi^{1/(1+n_e)}. \qquad (3.6.6)$$

Параметр ψ изменяется от 1 до 0, поскольку $\alpha^{(e)} = \alpha_{\max}^{(e)}$ при $t = t_p$, $\alpha^{(e)} = 0$ при $t = t_{\text{в}}$, что соответствует полному исчезновению упругих деформаций.

Используя выражения (3.6.6), после некоторых преобразований получим соотношение

$$(t-t_p)P_{\max}^{(1-n_e)/n_e}\sqrt{\frac{2K_2}{b^{(e)}}\frac{n_e}{1+n_e}} = F_1(n_e) - \frac{n_e}{1+n_e}I(\psi, n_e), \qquad (3.6.7)$$

где

$$I(\psi, n) = \frac{1+n}{n}\psi^{n/(1+n)}\left[1+n\left(\frac{1}{2}\frac{\psi}{1+2n} + \frac{3}{8}\frac{\psi^2}{2+3n} + \ldots\right)\right].$$

При $\psi = 0$ имеем

$$(t_{\text{п}}-t_p)P_{\max}^{(1-n_e)/n_e}\sqrt{\frac{2K_2}{b^{(e)}}\frac{n_e}{1+n_e}} = F_1(n_e),$$

откуда следует зависимость

$$\frac{t-t_p}{t_{\text{в}}-t_p} = 1 - \frac{n_e}{1+n_e}\frac{I(\psi n_e)}{F_1(n_e)}, \qquad (3.6.8)$$

с помощью которой можно найти закон изменения $P(t)$ при разгрузке.

Расчет процесса соударения, в частности активного периода как основного, целесообразно проводить по формулам

$$\alpha = \alpha_{\max} f_1, \ P = P_{\max} f_2, \ v = v_c f_3, \ t = t_p f_4, \tag{3.6.9}$$

где f_j (ψ, n) ($j = 1, 2, 3, 4$) — известные функции, таблицы которых приведены в книге [1].

Таким образом, при взаимодействии конуса с преградой переднее торцовое сечение ($z = 0$) является площадкой контакта, где возникает давление

$$p(t) = \begin{cases} p_1(t) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant t_p, \\ p_2(t) & \text{при } t_p \leqslant t \leqslant t_в, \end{cases} \tag{3.6.10}$$

причем $p_i = P/S_0$ ($i = 1, 2$), где S_0 — площадь поперечного сечения при $z = 0$. Схема нагружения конуса приведена на рис. 99. В первом периоде ($0 \leqslant t \leqslant t_p$) процесса удара вдоль конуса распространяется со скоростью a волна нагрузки, при этом образуется область возму-

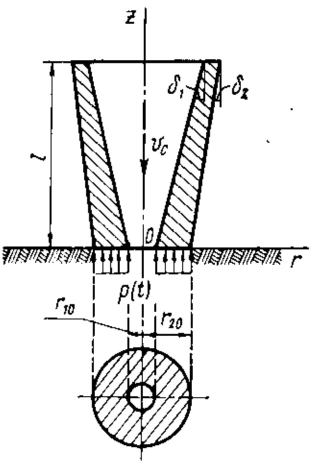

Рис. 99

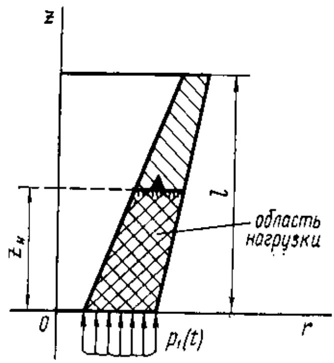

Рис. 100

щений нагрузки, ограниченная поверхностью конуса и поверхностью переднего фронта волны нагрузки (рис. 100). Напряженное состояние и движение частиц в области возмущений нагрузки характеризуется тензором кинетических напряжений

$$(T)_{нагр} = (T_0) + (T_к). \tag{3.6.11}$$

Основной и корректирующий тензоры строятся в форме общего решения (2.5.2) уравнений равновесия фиктивного тела так, чтобы выполнялись граничные условия:

$$\begin{gathered} T^{3\beta} = Q^{3\beta}_{(1)} \text{ при } z = 0, \ w_\beta = 0 \text{ при } z = z_н, \\ T^{0\beta} = Q^{0\beta}_{(1)} \ (\beta = 1, 2, 3, 0) \text{ при } x^0 = 0, \end{gathered} \tag{3.6.12}$$

где $Q^{3j}_{(1)} = (\rho v^3 v^j)_{z=0} - p^{3j}(t)$, $Q^{30}_{(1)} = (\rho v^3 a_{cq})_{z=0}$, $Q^{0j}_{(1)} = \rho_0 v_0^j a_{cq}$, $Q^{00}_{(1)} = \rho_0 a_{cq}^2$ — функции нагрузок, действующие на конус, и вариационное уравнение (см. § 3 гл. 1), взятое в соответствии с состоянием в области возмущений нагрузки.

Функции кинетических напряжений основного тензора $\Pi^{(0)}_{\alpha}$ ($\alpha = 1, 2, 3, 0$) строятся так, чтобы удовлетворялись граничные условия: $T^{3\beta}_{(0)} = Q^{3\beta}_{(1)}$ при $z = 0$, $T^{0\beta}_{(0)} = Q^{0\beta}_{(1)}$ при $x^0 = 0$.

Для координаты z функции кинетических напряжений имеют вид

$$\Pi^{(0)}_{\alpha 3} = (1/2)\,(1 + \cos \bar{z})\, F_{\alpha 3}, \tag{3.6.13}$$

где $\bar{z} = \pi z/(a x^0/a_{cq})$ — безразмерная координата.

Функции $F_{\alpha 3}$ подчинены уравнениям:

$$2\frac{\partial^2 F_{13}}{\partial r \partial \theta} + \left(r^2 \frac{\partial^2 F_{03}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 F_{03}}{\partial \theta^2} + r\frac{\partial F_{03}}{\partial r}\right) = 2r^2 Q^{33}_{(1)},$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial F_{33}}{\partial r} - \frac{\partial F_{23}}{\partial \theta}\right) - \frac{1}{r}\left(\frac{\partial F_{33}}{\partial r} - \frac{\partial F_{23}}{\partial \theta}\right) - \frac{\partial^2 F_{33}}{\partial x^{0 2}} = 2r^2 Q^{32}_{(1)},$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial F_{33}}{\partial r} - \frac{\partial F_{23}}{\partial \theta}\right) + r^2 \frac{\partial^2 F_{23}}{\partial x^{0 2}} = -2r^2 Q^{31}_{(1)}, \tag{3.6.14}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\left(\frac{\partial F_{23}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial F_{33}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} F_{23}\right) = 2Q^{30}_{(1)}$$

и граничным условиям:

$$F_{\alpha 3} = 0 \quad \text{при} \quad r = r_\gamma \quad (\gamma = 1,\ 2),$$

$$F_{23} = 0, \quad \frac{\partial F_{23}}{\partial x^0} = 0, \quad F_{33} = 0, \quad \frac{\partial F_{33}}{\partial x^0} = 0 \quad \text{при} \quad x^0 = 0, \tag{3.6.14'}$$

по координате θ функции периодические (период 2π).

Пользуясь произвольностью выбора функций $F_{\alpha 3}$, подчиним функцию F_{03} уравнению

$$r^2 \frac{\partial^2 F_{03}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 F_{03}}{\partial \theta^2} + r\frac{\partial F_{03}}{\partial r} = 0,$$

рассматривая которое с учетом граничных условий (3.6.14′), имеем

$$F_{03} = 0. \tag{3.6.15}$$

В этом случае первое из уравнений (3.6.14) упрощается и принимает вид $\partial^2 F_{13}/\partial r \partial \theta = r^2 Q^{33}_{(1)}$. Интегрируя это уравнение с учетом граничных условий (3.6.14′), находим

$$F_{13} = \int\limits_0^{\theta}\int\limits_{r_1}^{r} r^2 Q^{33}_{(1)}\, dr d\theta. \tag{3.6.16}$$

Рассматривая совместно остальные уравнения (3.6.14), приходим к следующим уравнениям для функции F_{23}:

$$r^2 \frac{\partial^2 F_{23}}{\partial r^2} + 3r \frac{\partial F_{23}}{\partial r} + F_{23} + \frac{\partial^2 F_{23}}{\partial \theta^2} - r^2 \frac{\partial^2 F_{23}}{\partial x^{02}} = A, \qquad (3.6.17)$$

где

$$A = 2\left(r^2 Q^{31}_{(1)} + \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \int\limits_0^{x^0} Q^{30}_{(1)}\, dx^0 \right)\right).$$

Для функции F_{33} имеем уравнения

$$r^2 \frac{\partial^2 F_{33}}{\partial r^2} - r \frac{\partial F_{33}}{\partial r} + \frac{\partial^2 F_{33}}{\partial \theta^2} - r^2 \frac{\partial^2 F_{33}}{\partial x^{02}} = r^2 B, \qquad (3.6.18)$$

где

$$B = 2\left(r^2 Q^{32}_{(1)} + \int\limits_0^{x^0} \frac{\partial Q^{30}_{(1)}}{\partial \theta}\, dx^0 \right).$$

Решение уравнения (3.6.17) строится в форме ряда Фурье по собственным функциям $V_{pm}(r\theta)$:

$$F_{23} = \sum_{p,m} X_{pm}(x^0)\, V_{pm} \qquad (3.6.19)$$

в предположении, что правую часть A можно представить в виде ряда Фурье по этим же собственным функциям:

$$\frac{1}{r^2} A = \sum_{p,m} A_{pm}(x^0)\, V_{pm}, \qquad (3.6.20)$$

где

$$A_{pm} = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} A V_{pm}\, dr\, d\theta \Bigg/ \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{r_1}^{r_2} (V_{pm})^2\, dr\, d\theta.$$

В результате подстановки (3.6.19) и (3.6.20) в (3.6.17) приходим к уравнению для функции $X_{pm}(x^0)$:

$$\ddot{X}_{pm} + \varkappa^2_{pm} X_{pm} = -A_{pm},$$

решением которого является функция

$$X_{pm} = \frac{1}{\varkappa_{pm}} \int\limits_0^{x^0} A_{pm}(\xi) \sin \varkappa_{pm}(\xi - x^0)\, d\xi.$$

Собственные функции $V_{pm}(r\theta)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{3}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \varkappa^2 V = 0$$

и граничным условиям: $V = 0$ при $r = r_\gamma$; по координате θ функции периодические (период 2π).

Решением краевой задачи являются функции

$$V_{pm}^{(1)} = R_{pm}^{(1)}(r)\cos m\theta,\ V_{pm}^{(2)} = R_{pm}^{(1)}(r)\sin m\theta, \tag{3.6.21}$$

при этом

$$R_{pm}^{(1)}(r) = \frac{1}{r}\left[J_m(r\varkappa_p) - \frac{J_m(r_\gamma \varkappa_p)}{Y_m(r_\gamma \varkappa_p)} Y_m(r\varkappa_p)\right].$$

Собственным функциям (3.6.21) соответствуют собственные значения $\varkappa_p$ $(p = 0, 1, \ldots)$, определяемые как корни характеристического уравнения $J_m(r_1\varkappa)\,Y_m(r_2\varkappa) - J_m(r_2\varkappa)Y_m(r_1\varkappa) = 0$.

Окончательно имеем

$$F_{23} = \sum_{p,m} \frac{1}{\varkappa_{pm}} \int_0^{x^0} (A_{pm}^{(1)}(\xi)\cos m\theta + A_{pm}^{(2)}(\xi)\sin m\theta)\sin\varkappa_{pm}(\xi - x^0)\,d\xi R_{pm}^{(1)}(r). \tag{3.6.22}$$

Решение уравнения (3.6.18) представим в виде ряда Фурье по собственным функциям U_{pm} $(r\theta)$:

$$F_{33} = \sum_{p,m} X_{pm}(x^0)\,U_{pm}, \tag{3.6.23}$$

полагая, что правую часть B можно представить в виде ряда Фурье по этим же собственным функциям:

$$B = \sum_{p,m} B_{pm}(x^0)\,U_{pm}. \tag{3.6.24}$$

Подставляя (3.6.23) и (3.6.24) в (3.6.18), для функций $X_{pm}(x^0)$ получим уравнение

$$\ddot{X}_{pm} + \omega^2{}_{pm}X_{pm} = -B_{pm},$$

решением которого является функция

$$X_{pm} = \frac{1}{\omega_{pm}} \int_0^{x^0} B_{pm}(\xi)\sin\omega_{pm}(\xi - x^0)\,d\xi.$$

Собственные функции U_{pm} $(r\theta)$ определяются уравнением

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} + \omega^2 U = 0$$

и граничными условиями: $U = 0$ при $r = r_\gamma$; по координате θ функции периодические (период 2π).

Решением краевой задачи являются функции

$$U_{pm}^{(1)} = R_{pm}^{(2)}(r)\cos m\theta,\ U_{pm}^{2} = R_{pm}^{(2)}(r)\sin m\theta, \tag{3.6.25}$$

где

$$R_{pm}^{(2)} = r\left[J_\nu(r\omega_{pm}) - \frac{J_\nu(r_\gamma\omega_{pm})}{Y_\nu(r_\gamma\omega_{pm})} Y_\nu(r\omega_{pm})\right].$$

Собственным функциям (3.6.25) соответствуют собственные значения ω_{pm} ($p = 0, 1, \ldots$), определяемые как корни характеристического уравнения

$$J_\nu(r_1\omega)Y_\nu(r_2\omega) - J_\nu(r_2\omega)Y_\nu(r_1\omega) = 0,$$
$$\nu = \sqrt{1 + m^2} \quad (m = 0, 1, \ldots).$$

Окончательно имеем

$$F_{33} = \sum_{p,m} \frac{1}{\omega_{pm}} \int_0^{x^0} (B_{pm}^{(1)}(\xi)\cos m\theta + B_{pm}^{(2)}(\xi)\sin m\theta)\sin\omega_{pm}(\xi - x^0)\,d\xi R_{pm}^{(2)}(r), \tag{3.6.26}$$

где

$$B_{pm}^{(j)} = \int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} BU_{pm}^{(j)}\,dr\,d\theta \Bigg/ \int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} (U_{pm}^{(j)})^2\,dr\,d\theta.$$

Для координаты x^0 имеем следующие функции кинетических напряжений:

$$\Pi_{10}^{(0)} = \frac{1}{2}(1 + \cos\bar{x}^0)F_{10} + \frac{1}{2}\int_0^{x^0}(1 + \cos\bar{x}^0)\,dx^0\,\Psi_{10},$$

$$\Pi_{20}^{(0)} = \frac{1}{2}\int_0^{x^0}(1 + \cos\bar{x}^0)\,dx^0\,\Psi_{20}, \tag{3.6.27}$$

$$\Pi_{30}^{(0)} = \frac{1}{2}\int_0^{x^0}(1 + \cos\bar{x}^0)\,dx^0\,\Psi_{30},$$

где $\bar{x}_0 = \pi x^0/(a_{cq}l/a_0)$ — безразмерная координата.

Функции F_{10}, Ψ_{i0} подчинены уравнениям:

$$\frac{\partial^2 F_{10}}{\partial r\partial\theta} = -r^2 Q_{(1)}^{00}, \quad \frac{\partial\Psi_{10}}{\partial\theta} + r^2\frac{\partial\Psi_{20}}{\partial z} = 2r^2 Q_{(1)}^{01},$$

$$\frac{\partial\Psi_{10}}{\partial r} + \frac{1}{r}\Psi_{10} + \frac{\partial\Psi_{30}}{\partial z} = 2r^2 Q_{(1)}^{02}, \quad r^2\frac{\partial\Psi_{20}}{\partial r} + r\Psi_{20} + \frac{\partial\Psi_{30}}{\partial\theta} = 2r^2 Q_{(1)}^{03} \tag{3.6.28}$$

и граничным условиям:

$$F_{10} = 0,\ \Psi_{20} = 0 \text{ при } r = r_\gamma,\ \Psi_{20} = 0,\ \Psi_{30} = 0 \text{ при } z = z_\gamma; \tag{3.6.28$'$}$$

по координате θ функции периодические (период 2π).

Интегрируя первое из уравнений (3.6.28) с учетом граничных условий (3.6.28′), находим

$$F_{10} = -\int_0^{\theta}\int_{r_1}^{r} r^2 Q_{(1)}^{00}\,dr\,d\theta. \tag{3.6.29}$$

Рассматривая совместно остальные уравнения (3.6.28), приходим к уравнению

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{2}{r}\psi=A,$$

где

$$\psi=\frac{\partial\Psi_{20}}{\partial z},\quad A=\frac{3}{r}Q^{01}_{(1)}+\left(\frac{\partial Q^{01}_{(1)}}{\partial r}+\frac{\partial Q^{03}_{(1)}}{\partial z}-\frac{\partial Q^{02}_{(1)}}{\partial\theta}\right). \tag{3.6.30}$$

Решением этого уравнения является функция

$$\psi=\left(\frac{r_1}{r}\right)^2\int\limits_{r_1}^{r}A\left(\frac{r}{r_1}\right)^2dr. \tag{3.6.31}$$

Интегрируя ψ по z, находим

$$\Psi_{20}=\int\limits_0^z\psi dz. \tag{3.6.32}$$

Подставляя (3.6.30) во второе из уравнений (3.6.28) и интегрируя по θ, имеем функцию

$$\Psi_{10}=\int\limits_0^\theta r^2\left(2Q^{01}_{(1)}-\psi\right)d\theta. \tag{3.6.33}$$

Подставляя (3.6.33) в третье из уравнений (3.6.28) и интегрируя затем по z, найдем функцию

$$\Psi_{30}=\int\limits_0^z\left[2r^2Q^{02}_{(1)}-\int\limits_0^\theta\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)\left(r^2\left(2Q^{01}_{(1)}-\psi\right)\right)d\theta\right]dz. \tag{3.6.34}$$

Полные функции кинетических напряжений основного тензора имеют вид:

$$\Pi_1^{(0)}=\frac{1}{2}(1+\cos\bar{z})F_{13}+\frac{1}{2}(1+\cos\bar{x}^0)F_{10}+\frac{1}{2}\int\limits_0^{x^0}(1+\cos\bar{x}^0)\,dx^0\,\Psi_{10},$$

$$\Pi_2^{(0)}=\frac{1}{2}(1+\cos\bar{z})F_{23}+\frac{1}{2}\int\limits_0^{x^0}(1+\cos\bar{x}^0)\,dx^0\,\Psi_{20}, \tag{3.6.35}$$

$$\Pi_3^{(0)}=\frac{1}{2}(1+\cos\bar{z})F_{33}+\frac{1}{2}\int\limits_0^{x^0}(1+\cos\bar{x}^0)\,dx^0\,\Psi_{30},$$

$$\Pi_0^{(0)}=0.$$

Подставляя их в общее решение (2.5.2), получим компоненты тензора $(T_0^{(1)})$ для самоуравновешенных частей функций нагрузок $\tilde{Q}^{3\beta}_{(1)}$ и $\tilde{Q}^{0\beta}_{(1)}$. Несамоуравновешенным частям функций нагрузок $\overline{Q}^{3\beta}_{(1)}=Q^{3\beta}_{(1)}-$

$-\tilde{Q}^{3\beta}_{(1)}$, $\overline{Q}^{0\beta}_{(1)} = Q^{0\beta}_{(1)} - \tilde{Q}^{0\beta}_{(1)}$ соответствует тензор $(T_0^{(2)})$ с компонентами:

$$T^{33}_{(0)} = (1/2)(1+\cos\bar{z})\,\overline{Q}^{33}_{(1)},\quad T^{00}_{(0)} = (1/2)(1+\cos\bar{x}^0)\,\overline{Q}^{00}_{(1)},$$
$$T^{13}_{(0)} = (1/2)(1+\cos\bar{z})\,\overline{Q}^{31}_{(1)},\quad T^{10}_{(0)} = (1/2)(1+\cos\bar{x}^0)\,\overline{Q}^{01}_{(1)},$$
$$T^{23}_{(0)} = (1/2)(1+\cos\bar{z})\,\overline{Q}^{32}_{(1)},\quad T^{20}_{(0)} = (1/2)(1+\cos\bar{x}^0)\,\overline{Q}^{02}_{(1)},$$
$$T^{30}_{(0)} = (1/2)(1+\cos\bar{z})\,\overline{Q}^{30}_{(1)} + (1/2)(1+\cos\bar{x}^0)\,\overline{Q}^{03}_{(1)}. \qquad (3.6.36)$$

Итак, основной тензор (T_0) равен сумме тензоров:

$$(T_0) = (T_0^{(1)}) + (T_0^{(2)}). \qquad (3.6.37)$$

Корректирующий тензор $(T_к)$ имеет компоненты

$$T^{\alpha\beta}_{(к)} = \sum_{mnpl} (A_{mnpl} f^{\alpha\beta}_{(1)} + B_{mnpl} f^{\alpha\beta}_{(2)} + C_{mnpl} f^{\alpha\beta}_{(3)} + D_{mnpl} f^{\alpha\beta}_{(0)}), \qquad (3.6.38)$$

где функции $f^{\alpha\beta}_{(\gamma)}$ $(mnpl)$ известны [19], параметры $A_{mnpl}, \ldots, D_{mnpl}$ определяются в результате решения уравнений

$$\sum_{mnpl} (A_{mnpl} F_{1\beta} + B_{mnpl} F_{2\beta} + C_{mnpl} F_{3\beta} + D_{mnpl} F_{0\beta}) + L_\beta = 0. \qquad (3.6.39)$$

Коэффициенты $F_{\gamma\beta}$ $(mnplijkq)$ и свободные члены $L_\beta\,(ijkq)$ уравнений находим по известным формулам. Функции состояния выбираются в зависимости от физико-механических свойств и состояния материала конуса в области возмущений нагрузки: в случае упругопластического состояния они имеют вид (1.3.72), в случае вязкопластического — (1.3.76).

Интегралы $F^{(k)}_{\gamma\beta}$ $(mnplijkq)$ вычисляются по формулам

$$F^{(k)}_{\gamma\beta} = 2\left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \frac{a_{cq}}{a} \iiiint_0^\pi A^{(k)}_{\gamma\beta} \left(r_1 + \frac{r_2 - r_1}{\pi}\bar{r}\right) \frac{r_2 - r_1}{\pi} \frac{\bar{x}^0}{\pi}\, d\bar{r}\, d\bar{\theta}\, d\bar{z}\, d\bar{x}^0; \qquad (3.6.40)$$

их подынтегральные выражения определены во второй части книги. Интегралы $L^{(\lambda)}_\beta$ $(ijkq)$ вычисляются по формулам

$$L^{(\lambda)}_\beta = 2\left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \frac{a_{cq}}{a} \iiiint_0^\pi B^{(\lambda)}_\beta \left(r_1 + \frac{r_2 - r_1}{\pi}\bar{r}\right) \frac{r_2 - r_1}{\pi} \frac{\bar{x}^0}{\pi}\, d\bar{r}\, d\bar{\theta}\, d\bar{z}\, d\bar{x}^0; \qquad (3.6.41)$$

их подынтегральные выражения определены во второй части книги, $T_0^{\alpha\beta}$ — компоненты тензора (3.6.37).

Решение уравнений (3.6.39) строится с помощью процедуры последовательных приближений, изложенной в § 3 гл. 1, в результате получаем параметры $A_{mnpl}, \ldots, D_{mnpl}$, следовательно, и компоненты корректирующего тензора $(T_к)$.

Таким образом, тензор кинетических напряжений $(T)_{\text{нагр}}$ области возмущений нагрузки построен.

В момент времени t_p начинается разгрузка, контактная сила P (давление p_1) достигает максимума и начинает уменьшаться. В этот момент на загруженной поверхности конуса зарождается волна разгрузки, которая распространяется со скоростью b, образуя область возмущений разгрузки. Область возмущений разгрузки ограничена поверхностью конуса и поверхностью переднего фронта волны разгрузки (рис. 101). Напряженное состояние и движение частиц материала в этой области характеризуются тензором кинетических напряжений

$$(T)_{\text{разгр}} = (T)_{\text{нагр}} - \Delta (T), \qquad (3.6.42)$$

причем тензор $(T)_{\text{нагр}}$ известен, а тензор $\Delta (T)$ требуется построить так, чтобы выполнялись уравнения равновесия фиктивного тела и следующие граничные условия:

$$\Delta T^{3\beta} = \Delta Q^{3\beta}_{(1)} \text{ при } z = 0,$$
$$\Delta w_\alpha = 0 \text{ при } z = z_p, \qquad (3.6.43)$$
$$\Delta T^{0\beta} = 0 \quad \text{при } x^0 = 0$$

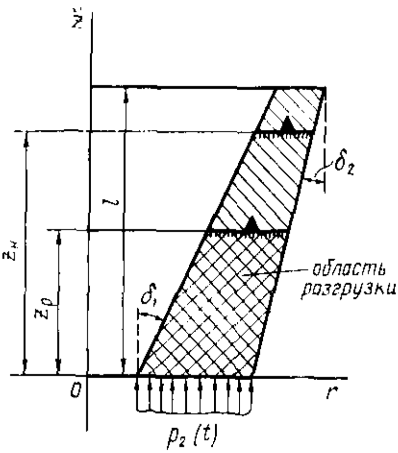

Рис. 101

и вариационное уравнение (см. § 3 гл. 1), соответствующее состоянию в области возмущений разгрузки.

Построение тензора $\Delta (T)$ основано на использовании общего решения (2.5.2) уравнений равновесия фиктивного тела в цилиндрических координатах и представления его в виде суммы основного и корректирующего тензоров:

$$\Delta (T) = \Delta (T_0) + \Delta (T_\text{к}). \qquad (3.6.44)$$

Функции кинетических напряжений основного тензора $\Delta \Pi^{(0)}_\alpha$ выбираются так, чтобы удовлетворялись следующие граничные условия в напряжениях:

$$\Delta T^{3\beta} = \Delta Q^{3\beta}_{(1)} \quad \text{при} \quad z = 0, \quad \Delta T^{0\beta} = 0 \quad \text{при} \quad x^0 = 0, \qquad (3.6.44')$$

где

$$\Delta Q^{3j}_{(1)} = (\Delta\rho \Delta v^3 \Delta v^j)_{z=0} - \Delta p^{3j}, \; \Delta Q^{30}_{(1)} = (\Delta \rho \Delta v^3 v^0_{(r)})_{z=0} \qquad (3.6.45)$$

— функции нагрузок при разгрузке.

Функции кинетических напряжений $\Delta \Pi^{(0)}_\alpha$ принимаются в виде

$$\Delta \Pi^{(0)}_\alpha = (1/2)\,(1 + \cos \bar{z})\, \Delta F_{\alpha 3}, \qquad (3.6.46)$$

где $\bar{z} = (\pi z / x^0)\,(b / v^0_{(r)})^{-1}$ — безразмерная координата.

Функции $\Delta F_{\alpha 3}$ таковы:

$$\Delta F_{03}=0, \quad \Delta F_{13}=\int\limits_0^{\theta}\int\limits_{r_1}^{r} r^2\,\Delta Q_{(1)}^{33}\,dr\,d\theta,$$

$$\Delta F_{23}=\sum_{p,m}\frac{1}{\varkappa_{pm}}\int\limits_0^{x^0}(\Delta A_{pm}^{(1)}(\xi)\cos m\theta +$$

$$+\Delta A_{pm}^{(2)}(\xi)\sin m\theta)\sin\varkappa_{pm}(\xi-x^0)\,d\xi R_{pm}^{(1)}(r) \qquad (3.6.47)$$

$$\Delta F_{33}=\sum_{pm}\frac{1}{\omega_{pm}}\int\limits_0^{x^0}(\Delta B_{pm}^{(1)}(\xi)\cos m\theta +$$

$$+\Delta B_{pm}^{(2)}(\xi)\sin m\theta)\sin\omega_{pm}(\xi-x^0)\,d\xi R_{pm}^{(2)}(r),$$

где

$$\Delta A_{pm}^{(l)}=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r^2}\,\Delta A V_{pm}^{(l)}\,dr\,d\theta \Bigg/ \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{r_1}^{r_2}(V_{pm}^{(l)})^2\,dr\,d\theta$$

— коэффициенты Фурье функции

$$\Delta A=2\left(r^2\,\Delta Q_{(1)}^{31}+\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\int\limits_0^{x^0}\Delta Q_{(1)}^{30}\,dx^0\right)\right);$$

$$\Delta B_{pm}^{(l)}=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{r_1}^{r_2}\Delta B U_{pm}^{(l)}\,dr\,d\theta \Bigg/ \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{r_1}^{r_2}(U_{pm}^{(l)})^2\,dr\,d\theta$$

— коэффициенты Фурье функции

$$\Delta B=2\left(r^2\,\Delta Q_{(1)}^{32}+\int\limits_0^{x^0}\frac{\partial}{\partial\theta}\,\Delta Q_{(1)}^{30}\,dx^0\right).$$

Подставляя (3.6.46) в общее решение (2.5.2), получим компоненты тензора $\Delta\,(T_0^{(1)})$ для самоуравновешенных частей $\Delta\widetilde{Q}_{(1)}^{3\beta}$ функций нагрузок. Несамоуравновешенным частям $\Delta\overline{Q}_{(1)}^{3\beta}=\Delta Q_{(1)}^{3\beta}-\Delta\widetilde{Q}_{(1)}^{3\beta}$ функций нагрузок соответствует тензор $\Delta\,(T_0^{(2)})$ с компонентами:

$$\Delta T_{(0)}^{33}=(1+\cos\bar{z})\,\Delta\overline{Q}_{(1)}^{33}/2, \quad \Delta T_{(0)}^{13}=(1+\cos\bar{z})\,\Delta\overline{Q}_{(1)}^{31}/2, \qquad (3.6.48)$$

$$\Delta T_{(0)}^{23}=(1+\cos\bar{z})\,\Delta\overline{Q}_{(1)}^{32}/2, \quad \Delta T_{(0)}^{30}=(1+\cos\bar{z})\,\Delta\overline{Q}_{(1)}^{30}/2.$$

Основной тензор $\Delta\,(T_0)$ равен сумме тензоров:

$$\Delta\,(T_0)=\Delta\,(T_0^{(1)})+\Delta\,(T_0^{(2)}). \qquad (3.6.49)$$

Корректирующий тензор $\Delta(T_к)$ имеет компоненты

$$\Delta T_{(k)}^{\alpha\beta} = \sum_{mnpl} (\Delta A_{mnpl} f_{(1)}^{\alpha\beta} + \Delta B_{mnpl} f_{(2)}^{\alpha\beta} + \Delta C_{mnpl} f_{(3)}^{\alpha\beta} + \Delta D_{mnpl} f_{(0)}^{\alpha\beta}), \tag{3.6.50}$$

где параметры $\Delta A_{mnpl}, \ldots, \Delta D_{mnpl}$ подчинены уравнениям

$$\sum_{mnpl} (\Delta A_{mnpl} F_{1\beta} + \Delta B_{mnpl} F_{2\beta} + \Delta C_{mnpl} F_{3\beta} + \Delta D_{mnpl} F_{0\beta}) + \Delta L_\beta = 0. \tag{3.6.51}$$

Коэффициенты $F_{\gamma\beta}$ $(mnplijkq)$ и свободные члены ΔL_β $(ijkq)$ вычисляют по известным формулам. Функции состояния выбираются в зависимости от физико-механических свойств и состояния материала в области возмущений разгрузки.

Интегралы $F_{\gamma\beta}^{(k)}$ $(mnplijkq)$ имеют вид

$$F_{\gamma\beta}^{(k)} = 2\left(\frac{1}{\pi}\right)^2 \frac{v_{(r)}^0}{b} \iiiint_0^\pi A_{\gamma\beta}^{(k)} \left(r_1 + \frac{r_2 - r_1}{\pi}\bar{r}\right) \frac{r_2 - r_1}{\pi} \frac{\bar{x}^0}{\pi}\, d\bar{r}\, d\bar{\theta}\, d\bar{z}\, d\bar{x}^0, \tag{3.6.52}$$

их подынтегральные выражения определены во второй части книги; интегралы $\Delta L_\beta^{(\lambda)}$ $(ijkq)$ таковы:

$$\Delta L_\beta^{(\lambda)} = 2\left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \frac{v_{(r)}^0}{b} \iiiint_0^\pi \Delta B_\beta^{(\lambda)} \left(r_1 + \frac{r_2 - r_1}{\pi}\bar{r}\right) \frac{r_2 - r_1}{\pi} \frac{\bar{x}^0}{\pi}\, d\bar{r}\, d\bar{\theta}\, d\bar{z}\, d\bar{x}^0, \tag{3.6.53}$$

их подынтегральные выражения определены во второй части книги, $T_{(0)}^{\alpha\beta}$ — компоненты тензора (3.6.49).

Решение уравнений (3.6.51) строится с помощью процедуры последовательных приближений, рассмотренной в § *3* гл. *1*. В результате находим параметры $\Delta A_{mnpl}, \ldots, \Delta D_{mnpl}$, следовательно, и компоненты корректирующего тензора $\Delta(T_к)$, а также тензора $\Delta(T)$.

Таким образом, тензор кинетических напряжений $(T)_{разгр}$ для области возмущений разгрузки построен. Следует заметить, что значение координаты x^0, равное $a_{cq}t_p$, для рассматриваемой области возмущений принято за начальное (нулевое).

В момент времени $t_{от} = l/a$, которому соответствует значение $x_{от}^0 = a_{cq}l/a$, волна нагрузки достигает сечения $z = l$ конуса и отражается. Возникает отраженная волна нагрузки, распространяющаяся со скоростью a в обратном направлении. Образуется область возмущений отраженной волны нагрузки, ограниченная поверхностью конуса и поверхностью переднего фронта отраженной волны нагрузки (рис. 102).

Напряженное состояние и движение частиц в этой области описывается тензором кинетических напряжений

$$(T)_{отр} = (T)_{нагр} - \Delta_1(T). \tag{3.6.54}$$

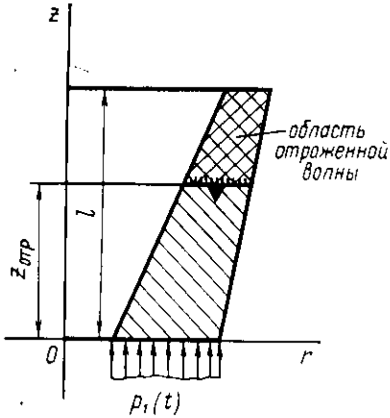

Рис. 102

Здесь тензор $(T)_{нагр}$ известен, тензор $\Delta_1(T)$ требуется построить так, чтобы выполнялись уравнения равновесия фиктивного тела и граничные условия:

$$\Delta_1 T^{3\beta} = \Delta_1 Q^{3\beta}_{(1)} \quad \text{при } z = l,$$
$$\Delta_1 \omega_\alpha = 0 \quad \text{при } z = z_{от}, \qquad (3.6.55)$$
$$\Delta_1 T^{0\beta} = 0 \quad \text{при } x^0 = 0,$$

и вариационное уравнение (см. § 3 гл. 1), соответствующее состоянию в области возмущений.

Тензор $\Delta_1(T)$ строится в виде суммы:

$$\Delta_1(T) = \Delta_1(T_о) + \Delta_1(T_к). \qquad (3.6.56)$$

Основной $\Delta_1(T_о)$ и корректирующий $\Delta_1(T_к)$ тензоры берут в форме общего решения (2.5.2) уравнений равновесия фиктивного тела. Для основного тензора $\Delta_1(T_о)$ имеем следующие граничные условия:

$$\Delta_1 T^{3\beta} = \Delta_1 Q^{3\beta}_{(1)} \quad \text{при } z = l,\ \Delta_1 T^{0\beta} = 0 \quad \text{при } x^0 = 0, \qquad (3.6.57)$$

где $\Delta_1 Q^{3\beta}_{(1)} = T^{3\beta}_{нагр}\big|_{z=l}$ — функции нагрузок при отражении, которым соответствуют функции кинетических напряжений основного тензора

$$\Delta_1 \Pi^{(0)}_\alpha = (1/2)(1 + \cos\bar{z})\,\Delta_1 F_{\alpha 3}. \qquad (3.6.58)$$

Здесь $\bar{z} = (\pi(l - z)/x^0)(a/a_{cq})^{-1}$ — безразмерная координата, причем x^0 отсчитывается от значения $x^0_{от} = a_{cq} l/a$, принятого за начальное (нулевое).

Функции $\Delta_1 F_{\alpha 3}$ таковы:

$$\Delta_1 F_{03} = 0,\ \Delta_1 F_{13} = \int_0^{\theta}\int_{r_1}^{r} r^2 \Delta_1 Q^{33}_{(1)}\,dr\,d\theta,$$

$$\Delta_1 F_{23} = \sum_{p,m} \frac{1}{\varkappa_{pm}} \int_0^{x^0} (\Delta_1 A^{(1)}_{pm}(\xi)\cos m\theta +$$
$$+ \Delta_1 A^{(2)}_{pm}(\xi)\sin m\theta)\sin\varkappa_{pm}(\xi - x^0)\,d\xi\,R^{(1)}_{pm}(r), \qquad (3.6.59)$$

$$\Delta_1 F_{33} = \sum_{p,m} \frac{1}{\omega_{pm}} \int_0^{x_0} (\Delta_1 B^{(1)}_{pm}(\xi)\cos m\theta +$$
$$+ \Delta_1 B^{(2)}_{pm}(\xi)\sin m\theta)\sin\omega_{pm}(\xi - x^0)\,d\xi\,R^{(2)}_{pm}(r),$$

где

$$\Delta_1 A^{(j)}_{pm} = \int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2}\Delta_1 A V^{(j)}_{mp}\,dr\,d\theta \Bigg/ \int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} (V^{(j)}_{pm})^2\,dr\,d\theta$$

— коэффициенты Фурье функции

$$\Delta_1 A = 2\left(r^2 \Delta_1 Q^{31}_{(1)} + \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \int\limits_0^{x^0} \Delta_1 Q^{30}_{(1)}\, dx^0\right)\right);$$

$$\Delta_1 B^{(l)}_{pm} = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{r_1}^{r_2} \Delta_1 B U^{(l)}_{pm}\, dr d\theta \Big/ \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{r_1}^{r_2} \left(U^{(l)}_{pm}\right)^2 dr d\theta$$

— коэффициенты Фурье функции

$$\Delta_1 B = 2\left(r^2 \Delta_1 Q^{32}_{(1)} + \frac{\partial}{\partial \theta} \int\limits_0^{x^0} \Delta_1 Q^{30}_{(1)}\, dx^0\right).$$

Подставляя функции кинетических напряжений (3.6.58) в общее решение (2.5.2), получим компоненты тензора $\Delta_1 (T^{(1)}_0)$ для самоуравновешенных частей $\Delta_1 \tilde{Q}^{3\beta}_{(1)}$ функций нагрузок. Несамоуравновешенным частям $\Delta_1 \overline{Q}^{3\beta}_{(1)} = \Delta_1 Q^{3\beta}_{(1)} - \Delta_1 \tilde{Q}^{3\beta}_{(1)}$ функций нагрузок соответствует тензор $\Delta_1 (T^{(2)}_0)$, компоненты которого имеют вид

$$\Delta_1 T^{\alpha\beta}_{(0)} = (1/2)\,(1 + \cos \overline{z})\, \Delta_1 \overline{Q}^{3\beta}_{(1)}. \tag{3.6.60}$$

Основной тензор

$$\Delta_1 (T_0) = \Delta_1 (T^{(1)}_0) + \Delta_1 (T^{(2)}_0). \tag{3.6.61}$$

Корректирующий тензор $\Delta_1\ (T_к)$ имеет компоненты

$$\Delta_1 T^{\alpha\beta}_{(к)} = \sum_{mnpl} (\Delta_1 A_{mnpl} f^{\alpha\beta}_{(1)} + \Delta_1 B_{mnpl} f^{\alpha\beta}_{(2)} + \Delta_1 C_{mnpl} f^{\alpha\beta}_{(3)} + \\ + \Delta_1 D_{mnpl} f^{\alpha\beta}_{(0)}). \tag{3.6.62}$$

Параметры $\Delta_1 A_{mnpl}, \ldots, \Delta_1 D_{mnpl}$ определяются в результате решения системы уравнений

$$\sum_{mnpl} (\Delta_1 A_{mnpl} F_{1\beta} + \Delta_1 B_{mnpl} F_{2\beta} + \Delta_1 C_{mnpl} F_{3\beta} + \\ + \Delta_1 D_{mnpl} F_{0\beta}) + \Delta_1 L_\beta = 0\,. \tag{3.6.63}$$

Коэффициенты $F_{\gamma\beta}$ $(mnplijkq)$ уравнений и их свободные члены $\Delta_1 L_\beta$ $(ijkq)$ находим по известным формулам, функции состояния выбираются в соответствии с физико-механическими свойствами и состоянием материала в области возмущений.

Интегралы $F^{(k)}_{\gamma\beta}$ $(mnplijkq)$ имеют вид

$$F^{(k)}_{\gamma\beta} = -2\,\frac{a}{a_{cq}}\left(\frac{x^0_2}{\pi}\right)^2 \iint\limits_0^{\pi}\!\!\iint A^{(k)}_{\gamma\beta}\left(r_1 + \frac{r_2 - r_1}{\pi}\,\overline{r}\right) \times \\ \times \frac{r_2 - r_1}{\pi}\,\frac{\overline{x}^0}{\pi}\, d\overline{r}\, d\overline{\theta}\, d\overline{z}\, d\overline{x}^0, \tag{3.6.64}$$

их подынтегральные выражения определены во второй части книги. Интегралы $\Delta_1 L_\beta^{(\lambda)}(ijkq)$ таковы:

$$\Delta_1 L_\beta^{(\lambda)} = -(2a/a_{cq})(x_2^0/\pi)^2 \times$$

$$\times \int_0^\pi\!\!\iiiint \Delta_1 B_\beta^{(\lambda)}\left(r_1 + \frac{r_2-r_1}{\pi}\bar{r}\right)\frac{r_2-r_1}{\pi}\,\frac{\bar{x}^0}{\pi}\,d\bar{r}d\bar{\theta}d\bar{z}d\bar{x}^0, \qquad (3.6.65)$$

их подынтегральные выражения определены во второй части книги, $T_{(0)}^{\alpha\beta}$ — компоненты тензора (3.6.61). Величина x_2^0 зависит от наличия других волн напряжений. Если волн напряжений нет ($t_p > l/a$), то $x_2^0 = a_{cq}l/a$; если имеют место волны разгрузки ($t_p < l/a$), то имеем $x_2^0 = a_{cq}(l - z_{bc})/a$, причем $z_{bc} = b\,(2l - at_p)/(a + b)$ определяет место встречи волны разгрузки с отраженной волной нагрузки.

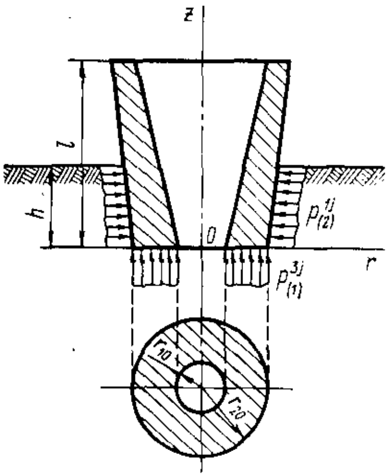

Рис. 103

Решение уравнений (3.6.63) строится с помощью процедуры последовательных приближений, рассмотренной в § 3 гл. 1. В результате находим параметры $\Delta_1 A_{mnpl}, \ldots$ $\ldots, \Delta_1 D_{mnpl}$, следовательно, и компоненты корректирующего тензора $\Delta_1(T_к)$.

Таким образом, тензор кинетических напряжений $(T)_{отр}$ для области возмущений отраженной волны нагрузки построен.

Для других областей возмущений тензор кинетических напряжений строится аналогично изложенному.

Итак, приведенное решение позволяет найти тензор кинетических напряжений в любой момент времени с учетом всех особенностей рассматриваемой области возмущений. Трехкратный пробег волн напряжений по телу усредняет характеристики напряженного состояния и движения, которому соответствует тензор кинетических напряжений (T), отнесенный ко всему телу. Построение этого тензора рассмотрено в книге [19].

Распространение волн напряжений в теле при ударе его в преграду с внедрением существенно отличается от аналогичного процесса при соударении. Отличие состоит в том, что внедрение сопровождается приложением нагрузки не только на торцовое сечение (что имеет место при соударении), но и на части его боковой поверхности, которая увеличивается с течением времени по мере внедрения тела (рис. 103). При этом источником волн напряжений является как торцовое сечение ($z = 0$), так и загруженная часть внешней боковой поверхности тела.

Первичной является волна нагрузки, распространяющаяся со скоростью a вдоль тела и по его толщине. При этом в начальный период $(0, (r_2 - r_1)_0/a)$ образуется область возмущений нагрузки с передним фронтом сложной конфигурации (рис. 104, *а*), однако с течением времени поверхность фронта волны выравнивается и распространяется в дальнейшем вдоль тела в направлении заднего торцового сечения (рис. 104, *б*). Область возмущений нагрузки ограничена поверхностью конуса и поверхностью переднего фронта волны нагрузки. Ей соот-

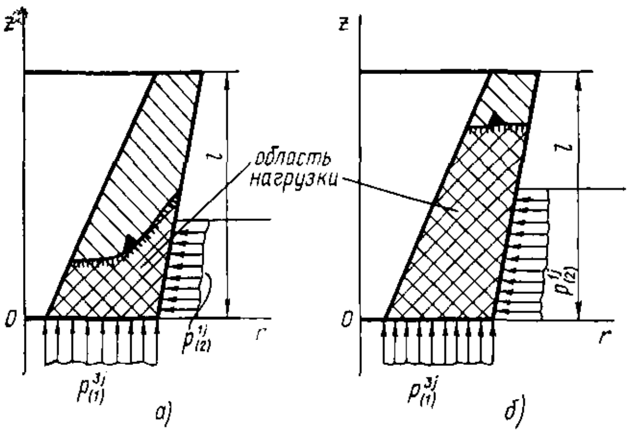

Рис. 104

ветствует тензор кинетических напряжений $(T)_{\text{нагр}}$, который требуется построить так, чтобы удовлетворялись уравнения равновесия фиктивного тела при следующих граничных условиях:

$$T^{3\beta} = Q_{(1)}^{3\beta} \quad \text{при } z = 0, \; w_\alpha = 0 \quad \text{при } z = z_{\text{н}}, \tag{3.6.66}$$

$$T^{1\beta} = Q_{(2)}^{1\beta} \text{ при } r = r_2 \; (0 \leqslant z \leqslant h), \; T^{0\beta} = Q_{(1)}^{0\beta} \text{ при } x^0 = 0,$$

и вариационное уравнение (см. § 3 гл. 1), соответствующее состоянию материала в области возмущений нагрузки.

Представим тензор кинетических напряжений $(T)_{\text{нагр}}$ в виде суммы основного и корректирующего тензоров:

$$(T)_{\text{нагр}} = (T_{\text{о}}) + (T_{\text{к}}). \tag{3.6.67}$$

Компоненты тензоров выразим в форме общего решения (2.5.2) уравнений равновесия фиктивного тела через функции кинетических напряжений:

$$\Pi_\alpha = \Pi_\alpha^{(0)} + \Pi_\alpha^{(k)}. \tag{3.6.68}$$

Функции кинетических напряжений основного тензора $\Pi_\alpha^{(0)}$ таковы:

$$\Pi_\alpha^{(0)} = \Pi_{\alpha 1}^{(0)} + \Pi_{\alpha 3}^{(0)} + \Pi_{\alpha 0}^{(0)}, \tag{3.6.69}$$

причем слагаемые выбираются так, чтобы выполнялись следующие граничные условия в напряжениях:

$$T^{1\beta} = Q^{1\beta}_{(2)} \text{ при } r = r_2 \ (0 \leqslant z \leqslant h)$$

$$T^{3\beta} = Q^{3\beta}_{(1)} \text{ при } z = 0, \ T^{0\beta} = Q^{0\beta}_{(1)} \text{ при } x^0 = 0, \qquad (3.6.70)$$

где $Q^{1j}_{(2)} = (\rho v^1 v^j)_{r_2} - p^{1j}_{(2)}$, $Q^{10}_{(2)} = (\rho v^1 a_{cq})_{r_2}$, $Q^{3j}_{(1)} = (\rho v^3 v^j)_{z=0} - p^{3j}_{(1)}$, $Q^{30}_{(1)} = (\rho v^3 a_{cq})_{z=0}$, $Q^{0j}_{(1)} = (\rho v^j a_{cq})_0$, $Q^{00}_{(1)} = \rho_0 a^2_{cq}$ — функции нагрузок, действующих на тело.

Для координаты r функции кинетических напряжений $\Pi^{(0)}_{\alpha 1}$ строим в форме

$$\Pi^{(0)}_{\alpha 1} = (1/2)\ (1 + \cos \bar{r}) F_{\alpha 1}, \qquad (3.6.71)$$

где $\bar{r} = \pi (r_2 - r)/(r_2 - r_н)$ — безразмерная координата, причем $r_н = r_2 - a x^0/a_{cq}$ в промежутке $(0,\ a_{cq}(r_2 - r_1)/a)$ и $r_н = r_1$ в промежутке $(a_{cq}\ (r_2 - r_1)/a,\ a_{cq} l/a)$.

Функции $F_{\alpha 1}$ подчинены уравнениям:

$$\frac{\partial^2 F_{31}}{\partial\theta \partial z} + r_2 \frac{\partial F_{21}}{\partial z} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F_{01}}{\partial \theta^2} + r_2^2 \frac{\partial^2 F_{01}}{\partial z^2}\right) = r_2^2 Q^{11}_{(2)},$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_{11}}{\partial z} - \frac{\partial F_{21}}{\partial \theta}\right) + \frac{2}{r_2} \frac{\partial F_{31}}{\partial z} + \frac{\partial^2 F_{11}}{\partial x} - \frac{1}{r_2} \frac{\partial F_{01}}{\partial \theta} = -2 r_2^2 Q^{12}_{(2)},$$

$$(3.6.72)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial F_{11}}{\partial z} - \frac{\partial F_{21}}{\partial \theta}\right) + r_2^2 \frac{\partial^2 F_{21}}{\partial x^{02}} = -2 r_2^2 Q^{13}_{(2)},$$

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\left(\frac{\partial F_{11}}{\partial \theta} + r_2^2 \frac{\partial F_{21}}{\partial z}\right) = 2 r_2^2 Q^{10}_{(2)}$$

и граничным условиям

$$F_{21} = 0,\ F_{01} = 0,\ F_{31} = 0 \text{ при } z = z_\gamma,$$

$$F_{11} = 0,\ \frac{\partial F_{11}}{\partial x^0} = 0,\ F_{21} = 0,\ \frac{\partial F_{21}}{\partial x^0} = 0 \text{ при } x^0 = 0; \qquad (3.6.72')$$

по координате θ функции периодические (период 2π).

Пользуясь произвольным выбором функций $F_{\alpha 1}$, подчиним функцию F_{01} уравнению

$$\frac{\partial^2 F_{01}}{\partial \theta^2} + r_2^2 \frac{\partial^2 F_{01}}{\partial z^2} = 0,$$

рассматривая которое вместе с граничными условиями (3.6.72′), имеем

$$F_{01} = 0. \qquad (3.6.73)$$

Третье и четвертое из уравнений (3.6.72) эквивалентны уравнению

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(r_2^2 \frac{\partial F_{21}}{\partial z}\right) + \frac{\partial^2 F_{21}}{\partial \theta^2} - r_2^2 \frac{\partial^2 F_{21}}{\partial x^{02}} = 2A, \qquad (3.6.74)$$

где

$$A = r_2^2 Q^{13}_{(2)} + \frac{\partial}{\partial z}\left(r_2^2 \int\limits_0^{x^0} Q^{10}_{(2)}\, dx^0\right).$$

Уравнение (3.6.74) подробно рассмотрено в § 5 гл. 3. Его решение имеет вид

$$F_{21}=\sum_{mn}\frac{1}{\lambda_{mn}}\int_0^{x^0}(A_{mn}^{(1)}(\xi)\,V_{mn}^{(1)}(\theta z)+$$
$$+A_{mn}^{(2)}(\xi)\,V_{mn}^{(2)}(\theta z))\sin\lambda_{mn}(\xi-x^0)\,d\xi, \tag{3.6.75}$$

где

$$A_{mn}^{(j)}(x^0)=\int_0^{2\pi}\int_0^{h}\frac{1}{r_2^2}AV_{mn}^{(j)}\,dzd\theta\Bigg/\int_0^{2\pi}\int_0^{h}\left(V_{mn}^{(j)}\right)^2dzd\theta$$

— коэффициенты Фурье функции (3.6.74).

Собственные функции $V_{mn}^{(j)}(\theta z)$ таковы:

$$V_{mn}^{(1)}=Z_{mn}(z)\cos n\theta,\quad V_{mn}^{(2)}=Z_{mn}(z)\sin n\theta, \tag{3.6.76}$$

причем $Z_{mn}(z)$ определяется по формуле

$$Z_{mn}(z)=Z_{mn}^{(2)}(z)-\frac{Z_{mn}^{(2)}(0)}{Z_{mn}^{(1)}(0)}Z_{mn}^{(1)}(z), \tag{3.6.77}$$

где

$$Z^{(1)}(z)=\left(1/\sqrt{r_2}\right)J_\nu(\lambda r_2/\operatorname{tg}\delta_2),\quad Z^{(2)}(z)=\left(1/\sqrt{r_2}\right)Y_\nu(\lambda r_2/\operatorname{tg}\delta_2),$$
$$\nu=\sqrt{(n^2+\operatorname{tg}^2\delta_2/4)/\operatorname{tg}\delta_2}.$$

Собственными значениями λ_{mn} функций (3.6.76) являются корни характеристического уравнения

$$Z^{(1)}(0)\,Z^{(2)}(z_{\text{н}})-Z^{(1)}(z_{\text{н}})Z^{(2)}(0)=0,$$

где $z_{\text{н}}=ax^0/a_{cq}$.

Первое уравнение можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 F_{31}}{\partial\theta\partial z}=r_2\left(r_2\,Q_{(1)}^{11}-\frac{\partial F_{21}}{\partial z}\right).$$

Интегрируя последнее уравнение с учетом граничных условий (3.6.72′), получим

$$F_{31}=\int_0^{\theta}\int_0^{z}r_2\left(r_2\,Q_{(2)}^{11}-\frac{\partial F_{21}}{\partial z}\right)dzd\theta. \tag{3.6.78}$$

Второе из уравнений (3.6.72) можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial^2 F_{11}}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 F_{11}}{\partial x^{02}}=B, \tag{3.6.79}$$

где

$$B=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_{21}}{\partial\theta}+2\int_0^{\theta}F_{21}\,d\theta\right)-2r_2\left(r_2\,Q_{(2)}^{12}+\int_0^{\theta}Q_{(2)}^{11}\,d\theta\right).$$

Решением уравнения (3.6.78) является функция

$$F_{11}=\sum_{m}\frac{z_{\text{н}}}{m\pi}\int_{0}^{x^0}B_m(y^0)\,\mathrm{sh}\,\frac{m\pi(x^0-y^0)}{z_{\text{н}}}\,dy^0\sin m\bar{z}. \qquad (3.6.80)$$

Здесь

$$B_m=\frac{2\pi}{z_{\text{н}}}\int_{0}^{h}B\sin m\bar{z}dz$$

— коэффициенты Фурье функции B; $\bar{z}=\pi z/z_{\text{н}}$ — безразмерная координата.

Для координаты z функции кинетических напряжений $\Pi_{\alpha 3}^{(0)}$ принимаются в виде

$$\Pi_{\alpha 3}^{(0)}=(1/2)(1+\cos\bar{z})\,F_{\alpha 3}. \qquad (3.6.81)$$

Функции $F_{\alpha 3}$ удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{gathered}
2\frac{\partial^2 F_{13}}{\partial r\partial\theta}+\left(r^2\frac{\partial^2 F_{03}}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 F_{03}}{\partial\theta^2}+r\frac{\partial F_{03}}{\partial r}\right)=2r^2Q_{(1)}^{33},\\
\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial F_{33}}{\partial r}-\frac{\partial F_{23}}{\partial\theta}\right)+r^2\frac{\partial^2 F_{23}}{\partial x^{02}}=-2r^2Q_{(1)}^{31},\\
\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial F_{33}}{\partial r}-\frac{\partial F_{23}}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{r}\left(\frac{\partial F_{33}}{\partial r}-\frac{\partial F_{23}}{\partial\theta}\right)-\frac{\partial^2 F_{33}}{\partial x^{02}}=2r^2Q_{(1)}^{32},\\
\frac{\partial}{\partial x^0}\left(\frac{\partial F_{23}}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial F_{33}}{\partial\theta}+\frac{1}{r}F_{23}\right)=2Q_{(1)}^{30}
\end{gathered} \qquad (3.6.82)$$

и граничным условиям:

$$F_{\alpha 3}=0 \text{ при } r=r_\gamma;$$

$$F_{23}=0,\ \frac{\partial F_{23}}{\partial x^0}=0,\ F_{33}=0,\ \frac{\partial F_{33}}{\partial x^0}=0 \text{ при } x^0=0; \qquad (3.6.82')$$

по координате θ функции периодические (период 2π).

Пользуясь произволом выбора функций $F_{\alpha 3}$, наложим на функцию F_{03} ограничение

$$r^2\frac{\partial^2 F_{03}}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 F_{03}}{\partial\theta^2}+r\frac{\partial F_{03}}{\partial r}=0,$$

которое выполняется с учетом граничных условий (3.6.82′) в случае, если

$$F_{03}=0. \qquad (3.6.83)$$

В этом случае первое из уравнений (3.6.82) упрощается:

$$\frac{\partial^2 F_{13}}{\partial r\partial\theta}=r^2Q_{(1)}^{33}.$$

Интегрируя это уравнение с учетом (3.6.82′), получим

$$F_{13}=\int_{0}^{\theta}\int_{r_1}^{r}r^2Q_{(1)}^{33}\,dr d\theta. \qquad (3.6.84)$$

Рассматривая совместно остальные уравнения (3.6.82) для функции F_{23}, получим уравнение

$$r^2 \frac{\partial^2 F_{23}}{\partial r^2} + 3r \frac{\partial F_{23}}{\partial r} + F_{23} + \frac{\partial^2 F_{23}}{\partial \theta^2} - r^2 \frac{\partial^2 F_{23}}{\partial x^{0 2}} = A, \quad (3.6.85)$$

где

$$A = 2\left(r^2 Q^{31}_{(1)} + \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \int\limits_0^{x^0} Q^{30}_{(1)}\, dx^0 \right)\right).$$

Для функции F_{33} имеем уравнение

$$r^2 \frac{\partial^2 F_{33}}{\partial r^2} - r \frac{\partial F_{33}}{\partial r} + \frac{\partial^2 F_{33}}{\partial \theta^2} - r^2 \frac{\partial^2 F_{33}}{\partial x^{0 2}} = r^2 B, \quad (3.6.86)$$

где

$$B = 2\left(r^2 Q^{32}_{(1)} + \frac{\partial}{\partial \theta} \int\limits_0^{x^0} Q^{30}_{(1)}\, dx^0 \right).$$

Оба уравнения были рассмотрены ранее, их решения имеют соответственно вид:

$$F_{23} = \sum_{pm} \frac{1}{\varkappa_{pm}} \int\limits_0^{x^0} (A^{(1)}_{pm}(\xi) \cos m\theta +$$

$$+ A^{(2)}_{pm}(\xi) \sin m\theta) \sin \varkappa_{pm} (\xi - x^0)\, d\xi\, R^{(1)}_{pm}(r), \quad (3.6.87)$$

$$F_{33} = \sum_{pm} \frac{1}{\omega_{pm}} \int\limits_0^{x^0} (B^{(1)}_{pm}(\xi) \cos m\theta +$$

$$+ B^{(2)}_{pm}(\xi) \sin m\theta) \sin \omega_{pm} (\xi - x^0)\, d\xi R^{(2)}_{pm}(r).$$

Здесь

$$A^{(j)}_{pm} = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{r_2}^{r_{\text{н}}} \frac{1}{r^3} A V^{(j)}_{pm}\, dr d\theta \Bigg/ \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{r_2}^{r_{\text{н}}} \left(V^{(j)}_{pm}\right)^2 dr d\theta$$

— коэффициенты Фурье функции A;

$$B^{(j)}_{pm} = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{r_2}^{r_{\text{н}}} B U^{(j)}_{pm}\, dr d\theta / \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{r_2}^{r_{\text{н}}} \left(U^{(j)}_{pm}\right)^2 dr d\theta$$

— коэффициенты Фурье функции B.

Для координаты x^0 имеют место функции кинетических напряжений:

$$\Pi_{10}^{(0)} = \frac{1}{2}\left(1+\cos\overline{x^0}\right) F_{10} + \frac{1}{2}\int\limits_0^{x^0}\left(1+\cos\overline{x^0}\right) dx^0\, \Psi_{10},$$

$$\Pi_{20}^{(0)} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{x^0}\left(1+\cos\overline{x^0}\right) dx^0\, \Psi_{20}, \qquad (3.6.88)$$

$$\Pi_{30}^{(0)} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{x^0}\left(1+\cos\overline{x^0}\right) dx^0\, \Psi_{30},$$

где $\overline{x^0} = \pi x^0 (a_{cq} l / a_0^{-1})$ — безразмерная координата.

Функции F_{10} и Ψ_{i0} определены ранее и имеют вид:

$$F_{10} = -\int\limits_0^{\theta}\int\limits_{r_2}^{r} r^2 Q_{(1)}^{00}\, dr\, d\theta,$$

$$\Psi_{20} = \int\limits_0^{z} \psi dz,\ \Psi_{10} = \int\limits_0^{\theta} r^2 \left(2Q_{(1)}^{01} - \psi\right) d\theta, \qquad (3.6.89)$$

$$\Psi_{30} = \int\limits_0^{z}\left[2r^2\, Q_{(1)}^{02} - \int\limits_0^{\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right)\left(r^2\left(2Q_{(1)}^{01} - \psi\right)\right) d\theta\right] dz,$$

причем

$$\psi = \left(\frac{r_2}{r}\right)^2 \int\limits_{r_2}^{r} A\left(\frac{r}{r_2}\right)^2 dr,$$

$$A = \frac{3}{r} Q_{(1)}^{01} + \left(\frac{\partial Q_{(1)}^{01}}{\partial r} - \frac{\partial Q_{(1)}^{02}}{\partial \theta} + \frac{\partial Q_{(1)}^{03}}{\partial z}\right). \qquad (3.6.90)$$

Полные функции кинетических напряжений основного тензора таковы:

$$\Pi_1^{(0)} = (1/2)\left(1+\cos\bar{r}\right) F_{11} + (1/2)\left(1+\cos\bar{z}\right) F_{13} +$$
$$+ (1/2)\left(1+\cos\overline{x^0}\right) F_{10} + (1/2)\int\limits_0^{x^0}\left(1+\cos\overline{x^0}\right) dx^0\, \Psi_{10},$$

$$\Pi_2^{(0)} = \frac{1}{2}\left(1+\cos\bar{r}\right) F_{21} + \frac{1}{2}\left(1+\cos\bar{z}\right) F_{23} + \frac{1}{2}\int\limits_0^{x^0}\left(1+\cos\overline{x^0}\right) dx^0\, \Psi_{20},$$

$$\Pi_3^{(0)} = \frac{1}{2}\left(1+\cos\bar{r}\right) F_{31} + \frac{1}{2}\left(1+\cos\bar{z}\right) F_{33} + \frac{1}{2}\int\limits_0^{x^0}\left(1+\cos\overline{x^0}\right) dx^0\, \Psi_{30}.$$

(3.6.91)

Подставляя эти функции в общее решение (2.5.2), определим компоненты тензора $(T_0^{(1)})$ для самоуравновешенных частей функций нагрузок $\tilde{Q}_{(\gamma)}^{\alpha\beta}$.

Несамоуравновешенным частям функций нагрузок $\overline{Q}_{(\gamma)}^{\alpha\beta}$ соответствует тензор $(T_0^{(2)})$ с компонентами:

$$
\begin{aligned}
&T_{(0)}^{11} = (1/2)\left(1+\cos\bar{r}\right)\overline{Q}_{(2)}^{11},\ T_{(0)}^{33} = (1/2)\left(1+\cos\bar{z}\right)\overline{Q}_{(1)}^{33},\\
&T_{(0)}^{12} = (1/2)\left(1+\cos\bar{r}\right)\overline{Q}_{(2)}^{12},\ T_{(0)}^{32} = (1/2)\left(1+\cos\bar{z}\right)\overline{Q}_{(1)}^{32},\\
&T_{(0)}^{13} = (1/2)\left(1+\cos\bar{r}\right)\overline{Q}_{(2)}^{13} + (1/2)\left(1+\cos\bar{z}\right)\overline{Q}_{(1)}^{31},\\
&T_{(0)}^{00} = (1/2)\left(1+\cos\overline{x^0}\right)\overline{Q}_{(1)}^{00},\ T_{(0)}^{20} = (1/2)\left(1+\cos\overline{x^0}\right)\overline{Q}_{(1)}^{02},\\
&T_{(0)}^{10} = (1/2)\left(1+\cos\bar{r}\right)\overline{Q}_{(2)}^{10} + (1/2)\left(1+\cos\overline{x^0}\right)\overline{Q}_{(1)}^{01},\\
&T_0^{30} = (1/2)\left(1+\cos\bar{z}\right)\overline{Q}_{(1)}^{30} + (1/2)\left(1+\cos\overline{x^0}\right)\overline{Q}_{(1)}^{03}.
\end{aligned}
\tag{3.6.92}
$$

Основной тензор

$$(T_0) = (T_0^{(1)}) + (T_0^{(2)}). \tag{3.6.93}$$

Корректирующий тензор $(T_\text{к})$ имеет компоненты

$$T_{(\text{к})}^{\alpha\beta} = \sum_{mnpl}\left(A_{mnpl}f_{(1)}^{\alpha\beta} + B_{mnpl}f_{(2)}^{\alpha\beta} + C_{mnpl}f_{(3)}^{\alpha\beta} + D_{mnpl}f_{(0)}^{\alpha\beta}\right). \tag{3.6.94}$$

Функции $f_{(\gamma)}^{\alpha\beta}(mnpl)$ известны [19], параметры $A_{mnpl}, \ldots, D_{mnpl}$ определяются в результате решения системы уравнений

$$\sum_{mnpl}\left(A_{mnpl}F_{1\beta} + B_{mnpl}F_{2\beta} + C_{mnpl}F_{3\beta} + D_{mnpl}F_{0\beta}\right) + L_\beta = 0. \tag{3.6.95}$$

Коэффициенты $F_{\gamma\beta}$ $(mnplijkq)$ и свободные члены L_β $(ijkq)$ находим по известным формулам; функции состояния выбирают в зависимости от физико-механических свойств и состояния материала в области возмущений нагрузки. Интегралы $F_{\gamma\beta}^{(k)}$ $(mnplijkq)$ вычисляют по формулам

$$F_{\gamma\beta}^{(k)} = -2\,\frac{x_2^0}{\pi}\iiiint_0^\pi \frac{z_\text{н}}{\pi}\,\frac{r_2-r_\text{н}}{\pi}\left(r_2-\frac{r_2-r_\text{н}}{\pi}\,\bar{r}\right)A_{\gamma\beta}^{(k)}\,d\bar{r}\,d\bar{\theta}\,d\bar{z}\,d\bar{x}^0, \tag{3.6.96}$$

их подынтегральные выражения определены во второй части книги; интегралы $L_\beta^{(\gamma)}$ $(ijkq)$ вычисляют по формулам

$$L_\beta^{(\lambda)} = -2\,\frac{x_2^0}{\pi}\iiiint_0^\pi \frac{z_\text{н}}{\pi}\,\frac{r_2-r_\text{н}}{\pi}\left(r_2-\frac{r_2-r_\text{н}}{\pi}\,\bar{r}\right)B_\beta^{(\lambda)}\,d\bar{r}\,d\bar{\theta}\,d\bar{z}\,d\bar{x}^0; \tag{3.6.97}$$

их подынтегральные выражения определены во второй части книги, $T_{(0)}^{\alpha\beta}$ — компоненты тензора (3.6.93).

Решение уравнений (3.6.95) строится с помощью процедуры последовательных приближений, рассмотренной в § 3 гл. 1. В результате находим параметры $A_{mnpl}, \ldots, D_{mnpl}$, следовательно, и компоненты корректирующего тензора $(T_\text{к})$. Таким образом, тензор кинетических напряжений $(T)_\text{нагр}$ для области возмущений нагрузки построен.

В момент времени t_p, как было отмечено ранее, начинается разгрузка. В этот момент торцовые $p^{3j}_{(1)}$ и внешние боковые $p^{1j}_{(2)}$ давления достигают максимальных значений и начинают уменьшаться. На загруженной части поверхности конуса зарождается волна разгрузки, распространяющаяся со скоростью b в направлениях распространения волны нагрузки. Образуется область возмущений разгрузки, ограниченная

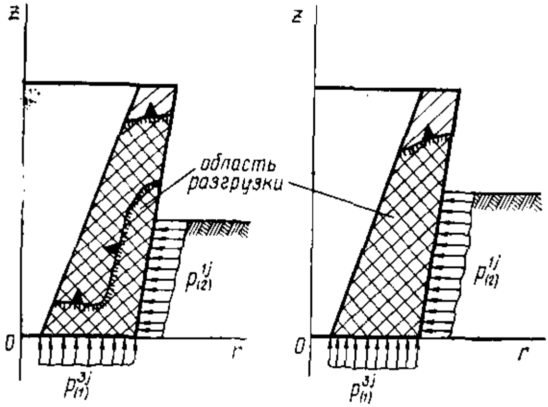

Рис. 105

ниченная поверхностью конуса и поверхностью переднего фронта волны разгрузки (рис. 105), уравнение которой имеет вид

$$r_p = r_2 - bx^0/v^0_{(r)} \quad \text{при } 0 \leqslant x^0 \leqslant v^0_{(r)}\,(r_2 - r_1)/b,$$
$$z_p = bx^0/v^0_{(r)} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant z \leqslant h; \tag{3.6.98}$$
$$r_p = r_1,\ z_p = h + bx^0/v^0_r \quad \text{при } v^0_{(r)}\,(r_2 - r_1)/b \leqslant x^0 \leqslant v^0_{(r)} l/b.$$

Область возмущений разгрузки характеризуется тензором кинетических напряжений

$$(T)_{\text{разгр}} = (T)_{\text{нагр}} - \Delta\,(T), \tag{3.6.99}$$

причем тензор $(T)_{\text{нагр}}$ известен, тензор $\Delta\,(T)$ требуется построить в форме общего решения (2.5.2) уравнений равновесия фиктивного тела, используя при этом, что

$$\Delta\,(T) = \Delta\,(T_0) + \Delta\,(T_{\text{к}}). \tag{3.6.100}$$

Должны выполняться следующие граничные условия:

$$\Delta T^{3\beta} = \Delta Q^{3\beta}_{(1)} \text{ при } z = 0,\ \Delta w_\alpha = 0 \text{ при } z = z_p \text{ и } r = r_p, \tag{3.6.101}$$
$$\Delta T^{1\beta} = \Delta Q^{1\beta}_{(2)} \text{ при } r = r_2,\ \Delta T^{0\beta} = 0 \text{ при } x^0 = 0$$

и вариационное уравнение (см. § 3 гл. 1), соответствующее состоянию материала в области возмущений разгрузки.

Компоненты основного тензора $\Delta\ (T_0)$, взятые в форме общего решения (3.5.2), выражаются через функции кинетических напряжений:

$$\Delta\Pi_{\alpha}^{(0)} = \Delta\Pi_{\alpha 1}^{(0)} + \Delta\Pi_{\alpha 3}^{(0)}, \tag{3.6.102}$$

которые определяются следующими граничными условиями:

$$\begin{gathered}\Delta T^{1\beta} = \Delta Q^{1\beta}_{(2)} \text{ при } r = r_2,\ \Delta T^{3\beta} = \Delta Q^{3\beta}_{(1)} \text{ при } z = 0,\\ \Delta T^{0\beta} = 0 \text{ при } x^0 = 0,\end{gathered} \tag{3.6.103}$$

где $\Delta Q^{1j}_{(2)} = (\Delta\rho\Delta v^1\Delta v^j)_{r_2} - \Delta p^{1j}_{(2)}$, $\Delta Q^{10}_{(2)} = (\Delta\rho\Delta v^1 v^0_{(r)})_{r_2}$, $\Delta Q^{3j}_{(1)} = (\Delta\rho\Delta v^3 v^j)_{z=0} - \Delta p^{3j}_{(1)}$, $\Delta Q^{30}_{(1)} = (\Delta\rho\Delta v^3 v^0_{(r)})_{z=0}$ — изменения функций нагрузок при разгрузке, причем $\Delta p^{1j}_{(2)} = p^{1j}_{(2)}(t_p) - p^{1j}_{(2)}(t)$, $\Delta p^{3j}_{(1)} = p^{3j}_{(1)}(t_p) - p^{3j}_{(1)}(t)$, $\Delta v^j = v^j(t_p) - v^j(t)$ при $t \geqslant t_p$.

Координате r соответствуют функции кинетических напряжений

$$\Delta\Pi_{\alpha 1}^{(0)} = (1/2)(1 + \cos\bar{r})\ \Delta F_{\alpha 1}, \tag{3.6.104}$$

где $\bar{r} = \pi(r_2 - r)/(r_2 - r_p)$ — безразмерная координата.

Функции $\Delta F_{\alpha 1}$ имеют вид:

$$\Delta F_{01} = 0,\ \Delta F_{31} = \int_0^{\theta}\int_0^{z} r_2\left(r_2\,\Delta Q^{11}_{(2)} - \frac{\partial}{\partial z}\Delta F_{21}\right)dz\,d\theta,$$

$$\Delta F_{21} = \sum_{mn}\frac{1}{\lambda_{mn}}\int_0^{x^0}(\Delta A^{(1)}_{mn}(\xi)\,V^{(1)}_{mn} + \Delta A^{(2)}_{mn}(\xi)\,V^{(2)}_{mn})\sin\lambda_{mn}(\xi - x^0)\,d\xi,$$

$$\tag{3.6.105}$$

$$\Delta F_{11} = \sum_{m}\frac{z_p}{m\pi}\int_0^{x^0}\Delta B_m(y^0)\,\mathrm{sh}\frac{m\pi(x^0 - y^0)}{z_p}\,dy^0\sin m\bar{z},$$

где $\bar{z} = \pi z/z_p$ — безразмерная координата. В (3.6.105) входят коэффициенты Фурье

$$\Delta A^{(i)}_{mn}(x^0) = \int_0^{2\pi}\int_0^{h}\frac{1}{r_2^2}\,\Delta A V^{(i)}_{mn}\,dz\,d\theta \Bigg/ \int_0^{2\pi}\int_0^{h}(V^{(i)}_{mn})^2\,dz\,d\theta$$

функции

$$\Delta A = r_2^2\,\Delta Q^{13}_{(2)} + \frac{\partial}{\partial z}\left(r_2^2\int_0^{x^0}\Delta Q^{10}_{(2)}\,dx^0\right),$$

а также коэффициенты Фурье

$$\Delta B_m = \frac{2\pi}{z_p}\int_0^{h}\Delta B\sin m\bar{z}\,dz$$

функции

$$\Delta B = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\,\Delta F_{21} + 2\int_0^\theta \Delta F_{21}\,d\theta\right) - 2r_2\left(r_2\,\Delta Q^{12}_{(2)} + \int_0^\theta \Delta Q^{11}_{(2)}\,d\theta\right).$$

Координате z соответствуют функции кинетических напряжений

$$\Delta\Pi^{(0)}_{\alpha 3} = (1/2)\,(1 + \cos\bar{z})\,\Delta F_{\alpha 3}. \qquad (3.6.106)$$

Функции $\Delta F_{\alpha 3}$ таковы:

$$\Delta F_{03} = 0,\ \Delta F_{13} = \int_0^\theta\int_{r_2}^r r^2\,\Delta Q^{33}_{(1)}\,dr d\theta,$$

$$\Delta F_{23} = \sum_{pm}\frac{1}{\varkappa_{pm}}\int_0^{x^0}(\Delta A^{(1)}_{pm}(\xi)\cos m\theta +$$

$$+ \Delta A^{(2)}_{pm}(\xi)\sin m\theta)\sin\varkappa_{pm}(\xi - x^0)\,d\xi R^{(1)}_{pm}(r), \qquad (3.6.107)$$

$$\Delta F_{33} = \sum_{pm}\frac{1}{\omega_{pm}}\int_0^{x^0}(\Delta B^{(1)}_{pm}(\xi)\cos m\theta +$$

$$+ \Delta B^{(2)}_{pm}(\xi)\sin m\theta)\sin\omega_{pm}(\xi - x^0)\,d\xi R^{(2)}_{pm}(r).$$

Здесь

$$\Delta A^{(l)}_{pm} = \int_0^{2\pi}\int_{r_2}^{r_p}\frac{1}{r^2}\,\Delta A V^{(l)}_{pm}\,dr d\theta \Bigg/ \int_0^{2\pi}\int_{r_2}^{r_p}\left(V^{(l)}_{pm}\right)^2 dr d\theta$$

— коэффициенты Фурье функции

$$\Delta A = 2\left(r^2\,\Delta Q^{31}_{(1)} + \frac{\partial}{\partial z}\left(r^2\int_0^{x^0}\Delta Q^{30}_{(1)}\,dx^0\right)\right);$$

$$\Delta B^{(l)}_{pm} = \int_0^{2\pi}\int_{r_2}^{r_p}\Delta B U^{(l)}_{pm}\,dr d\theta \Bigg/ \int_0^{2\pi}\int_{r_2}^{r_p}\left(U^{(l)}_{pm}\right)^2 dr d\theta$$

— коэффициенты Фурье функции

$$\Delta B = 2\left(r^2\Delta Q^{32}_{(1)} + \frac{\partial}{\partial\theta}\int_0^{x^0}\Delta Q^{30}_{(1)}\,dx^0\right).$$

Полные функции кинетических напряжений основного тензора имеют вид:

$$\Delta\Pi^{(0)}_1 = (1/2)\,(1 + \cos\bar{r})\,\Delta F_{11} + (1/2)\,(1 + \cos\bar{z})\,\Delta F_{13},$$

$$\Delta\Pi^{(0)}_2 = (1/2)\,(1 + \cos\bar{r})\,\Delta F_{21} + (1/2)\,(1 + \cos\bar{z})\,\Delta F_{23}, \qquad (3.6.108)$$

$$\Delta\Pi^{(0)}_3 = (1/2)\,(1 + \cos\bar{r})\,\Delta F_{31} + (1/2)\,(1 + \cos\bar{z})\,\Delta F_{33}.$$

Подставляя эти функции в общее решение (2.5.2), получим компоненты тензора $\Delta(T_0^{(1)})$ для самоуравновешенных частей функций нагрузок $\Delta\tilde{Q}^{1\beta}_{(2)}$ в $\Delta\tilde{Q}^{3\beta}_{(1)}$. Несамоуравновешенным частям функций нагрузок $\Delta\overline{Q}^{1\beta}_{(2)} = \Delta Q^{1\beta}_{(2)} - \Delta\tilde{Q}^{1\beta}_{(2)}$, $\Delta\overline{Q}^{3\beta}_{(1)} = \Delta Q^{3\beta}_{(1)} - \Delta\tilde{Q}^{3\beta}_{(1)}$ соответствует тензор $\Delta(T_0^{(2)})$, компоненты которого имеют вид:

$$\Delta T^{11}_{(0)} = (1/2)\left(1+\cos\bar{r}\right)\Delta\overline{Q}^{11}_{(2)},\ \Delta T^{33}_{(0)} = (1/2)\left(1+\cos\bar{z}\right)\Delta\overline{Q}^{33}_{(1)},$$
$$\Delta T^{12}_{(0)} = (1/2)\left(1+\cos\bar{r}\right)\Delta\overline{Q}^{12}_{(2)},\ \Delta T^{32}_{(0)} = (1/2)\left(1+\cos\bar{z}\right)\Delta\overline{Q}^{32}_{(1)}, \quad (3.6.109)$$
$$\Delta T^{13}_{(0)} = (1/2)\left(1+\cos\bar{r}\right)\Delta\overline{Q}^{13}_{(2)} + (1/2)\left(1+\cos\bar{z}\right)\Delta\overline{Q}^{31}_{(1)}.$$

Основной тензор

$$\Delta(T_0) = \Delta(T_0^{(1)}) + \Delta(T_0^{(2)}). \quad (3.6.110)$$

Компоненты корректирующего тензора таковы:

$$\Delta T^{\alpha\beta}_{(\kappa)} = \sum_{mnpl}\left(\Delta A_{mnpl} f^{\alpha\beta}_{(1)} + \Delta B_{mnpl} f^{\alpha\beta}_{(2)} + \Delta C_{mnpl} f^{\alpha\beta}_{(3)} + \Delta D_{mnpl} f^{\alpha\beta}_{(0)}\right). \quad (3.6.111)$$

Параметры $\Delta A_{mnpl}, \ldots, \Delta D_{mnpl}$ подчинены уравнениям

$$\sum_{mnpl}\left(\Delta A_{mnpl} F_{1\beta} + \Delta B_{mnpl} F_{2\beta} + \Delta C_{mnpl} F_{3\beta} + \Delta D_{mnpl} F_{0\beta}\right) + \Delta L_\beta = 0. \quad (3.6.112)$$

Коэффициенты $F_{\gamma\beta}$ $(mnplijkq)$ и свободные члены ΔL_β $(ijkq)$ уравнений определяются по известным формулам; функции состояния выбираются в зависимости от физико-механических свойств и состояния материала в области возмущений разгрузки. Интегралы $F^{(k)}_{\gamma\beta}$ $(mnplijkq)$ имеют вид

$$F^{(k)}_{\gamma\beta} = -2\frac{x_2^0}{\pi}\iiiint_0^\pi \frac{z_p}{\pi}\frac{r_2-r_p}{\pi}\left(r_2 - \frac{r_2-r_p}{\pi}\bar{r}\right) A^{(k)}_{\gamma\beta}\, d\bar{r}\, d\theta\, d\bar{z}\, d\bar{x}^0, \quad (3.6.113)$$

их подынтегральные выражения приведены во второй части книги; интегралы $\Delta L^{(\lambda)}_\beta$ $(ijkq)$ таковы:

$$\Delta L^{(\lambda)}_\beta = -2\frac{x_2^0}{\pi}\iiiint_0^\pi \frac{z_p}{\pi}\frac{r_2-r_p}{\pi}\left(r_2 - \frac{r_2-r_p}{\pi}\bar{r}\right)\Delta B^{(\lambda)}_\beta\, d\bar{r}\, d\bar{\theta}\, d\bar{z}\, d\bar{x}^0, \quad (3.6.114)$$

их подынтегральные выражения приведены во второй части книги; $T^{\alpha\beta}_{(0)}$ — компоненты тензора (3.6.110).

Решение уравнений (3.6.112) строится с помощью процедуры последовательных приближений, изложенной в § 3 гл. 1. В результате решения указанных уравнений находим параметры $\Delta A_{mnpl}, \ldots$ $\ldots, \Delta D_{mnpl}$, следовательно, и компоненты тензора $\Delta(T_\kappa)$.

Таким образом, тензор кинетических напряжений $(T)_{разгр}$ для области возмущений разгрузки построен.

Перейдем теперь к рассмотрению явлений отражения и взаимодействия волн напряжений при их распространении. В момент времени $t_{от} = (r_2 - r_1)_0 \cos \delta_1/a$, соответствующий значению $x^0_{от} = a_{cg}(r_2 - r_1)_0 \cos \delta_1/a$, волна нагрузки достигает внутренней поверхности $r = r_1$ конуса в точке K, координаты которой $\{r_{10} + (r_2 - r_1)_0 \sin^2 \delta_1, (r_2 - r_1)_0 \cos \delta_1 \sin \delta_1\}$, и отражается. При этом зарождается отраженная волна нагрузки, которая распространяется со скоростью a в обратном направлении, образуя область возмущений

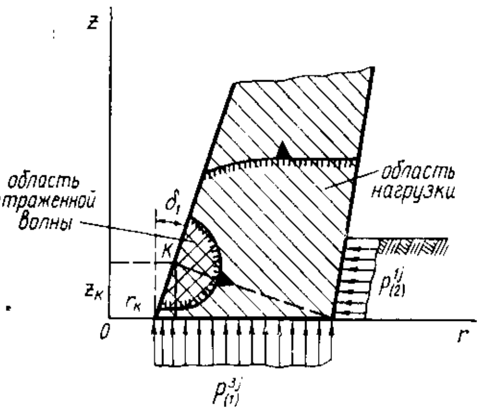

Рис. 106

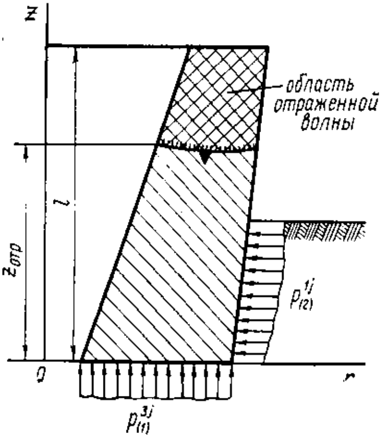

Рис. 107

отраженной волны нагрузки, ограниченную внутренней поверхностью конуса и поверхностью переднего фронта отраженной волны нагрузки (рис. 106). Область возмущений сферическая, расположена вблизи переднего торцового сечения, примыкает к внутренней поверхности конуса и носит очаговый характер. Здесь возможны откольные явления. Последние наблюдаются, если в точке K имеет место неравенство

$$T_i^{нагр}\big|_{r_1} > T_i^B/2. \tag{3.6.115}$$

Построение тензора кинетических напряжений $(T)_{отр}$ для этой области возмущений было рассмотрено ранее, и повторять ход построения нет необходимости.

При своем распространении отраженная волна нагрузки взаимодействует с торцовыми $p^{3j}_{(1)}$ и внешними боковыми $p^{1j}_{(2)}$ давлениями, что может привести к дополнительным откольным явлениям, т. е. в этой области тело будет разрушаться.

Волна нагрузки, достигнув торцового сечения ($z = l$), отражается и в виде отраженной волны нагрузки движется в обратном направлении со скоростью a, образуя при этом область возмущений отраженной волны нагрузки (рис. 107), которая ограничена поверхностью конуса и поверхностью переднего фронта отраженной волны нагрузки. Этой области соответствует тензор кинетических напряжений $(T)_{\text{отр}}$, построение которого выполняется аналогично изложенному ранее при рассмотрении *задачи о напряженном состоянии конуса при соударении*.

В зависимости от значения интенсивности кинетических напряжений $(T_i^{\text{нагр}})|_{z=l}$ на торцовом сечении при $z = l$ может иметь место откольное явление, если

$$T_i^{\text{нагр}}|_{z=l} > T_i^B/2, \tag{3.6.116}$$

т. е. *и в этой части тела происходит разрушение.*

Взаимодействие волны разгрузки и отраженной волны нагрузки оценивается, как и в ранее рассмотренных случаях.

Итак, выполняя последовательно построения тензоров кинетических напряжений для различных областей возмущений и используя ранее полученные критерии оценки откольных явлений и взаимодействия волн напряжений друг с другом, можно в любой момент времени и в любом сечении конуса описать его напряженное состояние и движение частиц в период неустановившегося процесса распространения волн напряжений в конусе при ударе.

Глава 4
ДИНАМИКА ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

В этой главе изложено решение динамических задач о расчете напряжений в оболочках вращения нулевой гауссовой кривизны (цилиндрической и конической) при сжатии осевыми нагрузками и при действии внутреннего и внешнего давлений. Рассмотрены динамические задачи о распределении напряжений в оболочках вращения ненулевой гауссовой кривизны (сферической и оживальной) при действии внешнего и внутреннего давлений.

§ 1. Тензор кинетических напряжений оболочки нулевой гауссовой кривизны

Рассмотрим построение тензора кинетических напряжений для оболочки вращения нулевой гауссовой кривизны, находящейся в условиях динамического нагружения.

Оболочка вращения, для которой

$$K = 1/(R_1R_2) = 0, \tag{4.1.1}$$

где R_i ($i = 1, 2$) — радиусы кривизны срединной поверхности, называется оболочкой вращения нулевой гауссовой кривизны; срединная поверхность такой оболочки является линейчатой поверхностью вращения. К этому классу оболочек вращения относятся цилиндрические, конические и другие, им подобные.

Отнесем оболочку к ортогональной криволинейной системе координат $x^1 = \alpha$, $x^2 = \beta$, $x^3 = z$, x^0. Первые две координаты (α, β) системы представляют собой криволинейные координаты на срединной поверхности; соответствующие им координатные линии являются линиями главных кривизн. Третья координатная линия — кривая, касательная к которой направлена по нормали к поверхности, параллельной срединной, и в совокупности с двумя первыми образует ортогональную систему криволинейных координат. Однако при решении инженерных задач

$$\delta = \sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\beta} - 1, \tag{4.1.2}$$

где β — угол между нормальными направлениями к третьей координатной линии, будем считать третью координатную линию прямой, направленной по нормали к срединной поверхности в рассматриваемой точке. Четвертая координатная линия, соответствующая координате

$x^0 = v^0 t$ (v^0 — скорость распространения возмущений), — прямая, ортогональная трем первым координатным линиям. Следовательно, система координат является ортогональной и криволинейной.

Для оболочки вращения нулевой гауссовой кривизны (рис. 108) параметры Ляме A_i и радиусы кривизны R_i срединной поверхности соответственно равны:

$$A_1 = 1,\ A_2 = r_0 - \alpha \sin\theta;$$
$$R_1 = \infty,\ R_2 = A_2/\cos\theta, \tag{4.1.3}$$

здесь $\theta = \theta(\beta)$ — угол конусности; $r_0 = r_0(\beta)$ — радиус параллельного круга при $\alpha = 0$.

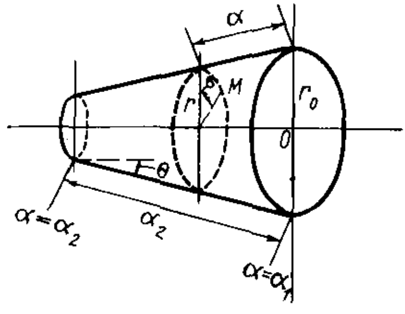

Рис. 108

Компоненты метрического тензора системы координат следующие:

$$g_{11} = 1,\ g_{22} = (A_2 + z\cos\theta)^2,$$
$$g_{33} = 1,\ g_{00} = -1,\ g_{\alpha\beta} = 0\ (\alpha \neq \beta). \tag{4.1.4}$$

Символы Кристоффеля, отличные от нуля, таковы: первого рода

$$\Gamma_{1.22} = -(A_2 + z\cos\theta)^2 \sin\theta,\ \Gamma_{2.21} = (A_2 + z\cos\theta)\sin\theta,$$
$$\Gamma_{3.22} = -(A_2 + z\cos\theta)\cos\theta,\ \Gamma_{2.23} = (A_2 + z\cos\theta)\cos\theta, \tag{4.1.5}$$
$$\Gamma_{2.22} = (A_2 + z\cos\theta)\left[\frac{\partial r_0}{\partial\beta} + (\alpha\cos\theta - z\sin\theta)\frac{\partial\theta}{\partial\beta}\right];$$

второго рода

$$\Gamma_{22}^{1} = -(A_2 + z\cos\theta)\sin\theta,\ \Gamma_{22}^{3} = -(A_2 + z\cos\theta)\cos\theta, \tag{4.1.5'}$$
$$\Gamma_{21}^{2} = \sin\theta/(A_2 + z\cos\theta);\ \Gamma_{23}^{2} = \cos\theta/(A_2 + z\cos\theta),$$
$$\Gamma_{22}^{2} = \left(\frac{\partial r_0}{\partial\beta} + (\alpha\cos\theta - z\sin\theta)\frac{\partial\theta}{\partial\beta}\right) \Big/ (A_2 + z\cos\theta).$$

Текущие координаты изменяются в следующих пределах: $\alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2$, $\beta_1 \leqslant \beta \leqslant \beta_2$; $-h/2 \leqslant z \leqslant h/2$, $x_1^0 \leqslant x^0 \leqslant x_2^0$, где α_γ, β_γ, h — габаритные размеры оболочки, x_1^0, x_2^0 — значения координаты x^0, соответствующие началу и концу процесса деформации оболочки.

Тензор кинетических напряжений (T) строим в форме суммы

$$(T) = (T_о) + (T_к), \tag{4.1.6}$$

где $(T_о)$ — основной, $(T_к)$ — корректирующий тензоры оболочки вращения нулевой гауссовой кривизны. Для построения указанных тензоров необходимо знать общее решение уравнений равновесия фиктивного тела, которое в выбранной системе координат имеет вид:

$$T^{11} = 2[\widetilde{e^{11}}(p) - (\nabla_\delta p^\delta + \varphi)] + \frac{1}{2g_{22}}[-(\widetilde{R}_{3223} + 2N_{3223}) +$$
$$+ \widetilde{R}_{0220} + g_{22}\widetilde{R}_{0330}],$$
$$T^{22} = 2\left[e^{22}(p) - \frac{\nabla_\delta p^\delta + \varphi}{g_{22}}\right] + \frac{1}{2g_{22}}[-(\widetilde{R}_{3113} + 2N_{3113}) + \widetilde{R}_{0110} + \widetilde{R}_{0330}],$$
$$T^{33} = 2[\widetilde{e^{33}}(p) - (\nabla_\delta p^\delta + \varphi)] + \frac{1}{2g_{22}}[-(\widetilde{R}_{2112} + 2N_{2112}) +$$
$$+ g_{22}\widetilde{R}_{0110} + \widetilde{R}_{0220}],$$
$$T^{00} = 2(\nabla_\delta p^\delta + \varphi) + [\widetilde{R}_{2112} + 2N_{2112} + g_{22}(\widetilde{R}_{3113} + 2N_{3113}) +$$
$$+ \widetilde{R}_{3223} + 2N_{3223}]/(2g_{22}),$$
$$T^{12} = 2\widetilde{e}^{12}(p) - (\widetilde{R}_{1323} + 2N_{1323} + \widetilde{R}_{0210})/(2g_{22}),$$
$$T^{13} = 2\widetilde{e}^{13}(p) - (\widetilde{R}_{2321} + 2N_{2321} + g_{22}\widetilde{R}_{0310})/(2g_{22}),$$
$$T^{23} = 2\widetilde{e}^{23}(p) + (\widetilde{R}_{1231} + 2N_{1231} - \widetilde{R}_{0320})/(2g_{22}),$$
$$T^{10} = 2\widetilde{e}^{10}(p) + (\widetilde{R}_{0212} + g_{22}\widetilde{R}_{0313})/(2g_{22}), \tag{4.1.7}$$
$$T^{20} = 2\widetilde{e}^{20}(p) - (\widetilde{R}_{0112} - \widetilde{R}_{0323})/(2g_{22}),$$
$$T^{30} = 2\widetilde{e}^{30}(p) - (g_{22}\widetilde{R}_{0113} + \widetilde{R}_{0223})/(2g_{22}).$$

Функции $\widetilde{R}_{\lambda\nu\mu\alpha}$ и $N_{\lambda\nu\mu\alpha}$ в форме Морера таковы:

$$\widetilde{R}_{1221} = -2\left(\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial\alpha\partial\beta} - \Gamma^3_{22}\frac{\partial\Pi_2}{\partial\alpha}\right), \quad \widetilde{R}_{3113} = -2\frac{\partial^2\Pi_2}{\partial\alpha\partial z},$$
$$\widetilde{R}_{3223} = -2\left(\frac{\partial^2 \Pi_3}{\partial\beta\partial z} - \Gamma^1_{22}\frac{\partial\Pi_2}{\partial z} + \Gamma^2_{22}\frac{\partial\Pi_3}{\partial z}\right), \quad \widetilde{R}_{0110} = \frac{\partial^2\Pi_0}{\partial\alpha^2},$$
$$\widetilde{R}_{0220} = \frac{\partial^2\Pi_0}{\partial\beta^2} - \Gamma^1_{22}\frac{\partial\Pi_0}{\partial\alpha} - \Gamma^2_{22}\frac{\partial\Pi_0}{\partial\beta} - \Gamma^3_{22}\frac{\partial\Pi_0}{\partial z}, \quad \widetilde{R}_{0330} = \frac{\partial^2\Pi_0}{\partial z^2},$$
$$\widetilde{R}_{3112} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial\Pi_3}{\partial\alpha} - \frac{\partial\Pi_2}{\partial\beta} - \frac{\partial\Pi_1}{\partial z}\right) + 2\Gamma^2_{23}\frac{\partial\Pi_1}{\partial\alpha} - \Gamma^2_{21}\left(\frac{\partial\Pi_3}{\partial\alpha} -\right.$$
$$\left. - \frac{\partial\Pi_2}{\partial\beta} + \frac{\partial\Pi_1}{\partial z}\right),$$
$$\widetilde{R}_{3212} = \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial\Pi_3}{\partial\alpha} - \frac{\partial\Pi_2}{\partial\beta} + \frac{\partial\Pi_1}{\partial z}\right) - \Gamma^{2}_{22}\left(\frac{\partial\Pi_3}{\partial\alpha} - \frac{\partial\Pi_2}{\partial\beta} + \frac{\partial\Pi_1}{\partial z}\right),$$
$$\widetilde{R}_{0113} = -\frac{\partial^2\Pi_2}{\partial x^0\,\partial\alpha}, \tag{4.1.8}$$
$$\widetilde{R}_{3213} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\Pi_1}{\partial z} - \frac{\partial\Pi_2}{\partial\beta} - \frac{\partial\Pi_3}{\partial\alpha}\right) + 2\Gamma^2_{21}\frac{\partial\Pi_3}{\partial z} -$$
$$- \Gamma^2_{32}\left(\frac{\partial\Pi_1}{\partial z} - \frac{\partial\Pi_2}{\partial\beta} + \frac{\partial\Pi_3}{\partial\alpha}\right),$$

$$\widetilde{R}_{0112}=-\left(\frac{\partial^2\Pi_1}{\partial x^0\,\partial\alpha}+\Gamma^2_{21}\frac{\partial\Pi_1}{\partial x^0}\right),\quad \widetilde{R}_{0212}=\frac{\partial^2\Pi_1}{\partial x^0\,\partial\beta}-\Gamma^2_{22}\frac{\partial\Pi_1}{\partial x^0}-\Gamma^3_{22}\frac{\partial\Pi_2}{\partial x^0},$$

$$\widetilde{R}_{0313}=\frac{\partial^2\Pi_2}{\partial x^0\,\partial z},\ \widetilde{R}_{0223}=-\frac{\partial^2\Pi_3}{\partial\beta\partial x^0}+\Gamma^1_{22}\frac{\partial\Pi_2}{\partial x^0}+\Gamma^2_{22}\frac{\partial\Pi_3}{\partial x^0},$$

$$\widetilde{R}_{0323}=\frac{\partial^2\Pi_3}{\partial z\partial x^0}+\Gamma^2_{32}\frac{\partial\Pi_3}{\partial x^0},\quad \widetilde{R}_{0210}=\frac{\partial^2\Pi_0}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\partial^2\Pi_1}{\partial x^0\,\partial x^0}-\Gamma^2_{12}\frac{\partial\Pi_0}{\partial\beta},$$

$$\widetilde{R}_{0310}=\frac{\partial^2\Pi_0}{\partial\alpha\partial z}+\frac{\partial^2\Pi_2}{\partial x^0\,\partial x^0},\ \widetilde{R}_{0320}=\frac{\partial^2\Pi_0}{\partial\beta\partial z}+\frac{\partial^2\Pi_3}{\partial x^0\,\partial x^0}-\Gamma^3_{32}\frac{\partial\Pi_0}{\partial\beta},$$

$$N_{1221}=\frac{\Gamma_{221}\,\Gamma_{221}}{g_{22}}\Pi_0,\quad N_{3223}=\frac{\Gamma_{2\cdot23}\,\Gamma_{2\cdot23}}{g_{22}}\Pi_0,\quad N_{3212}=-\frac{\Gamma_{2\cdot21}\,\Gamma_{2\cdot23}}{g_{22}}\Pi_0. \tag{4.1.9}$$

Построение основного тензора сводится к решению систем дифференциальных уравнений (1.3.65) с учетом граничных условий (1.3.66).

Для координаты α функции нагрузок $Q^{1\beta}_{(\gamma)}$ определяются по формулам:

$$Q^{11}_{(\gamma)}=p^{11}_{(\gamma)}-2\,[\widetilde{e}^{11}(p)-(\nabla_\delta\,p^\delta+\varphi)]_{(\gamma)};\ Q^{12}_{(\gamma)}=p^{12}_{(\gamma)}-2\widetilde{e}^{12}(p)_{(\gamma)}; \tag{4.1.10}$$

$$Q^{13}_{(\gamma)}=p^{13}_{(\gamma)}-2\widetilde{e}^{13}(p)_{(\gamma)};\ Q^{10}_{(\gamma)}=p^{10}_{(\gamma)}-2\widetilde{e}^{10}(p)_{(\gamma)}.$$

Функции кинетических напряжений, соответствующие координате α, берем в форме

$$\Pi^{\alpha1}_{(0)}=(1+\cos\overline{\alpha})\,F_{\alpha1}/2+(1-\cos\overline{\alpha})\Phi_{\alpha1}/2\ (\alpha=1,2,3,0), \tag{4.1.11}$$

причем $\overline{\alpha}=\pi\,(\alpha-\alpha_1)/(\alpha-\alpha_1)$ — безразмерная координата.

Уравнения (1.3.65) в этом случае принимают вид:

$$\frac{\partial^2F_{31}}{\partial\beta\partial z}-\Gamma^1_{22}\frac{\partial F_{21}}{\partial z}-\Gamma^2_{22}\frac{\partial F_{31}}{\partial z}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2F_{01}}{\partial\beta^2}+g_{22}\frac{\partial^2F_{01}}{\partial z^2}-\right.$$
$$\left.-\Gamma^2_{22}\frac{\partial F_{01}}{\partial\beta}-\Gamma^3_{22}\frac{\partial F_{01}}{\partial z}-2\,\frac{\Gamma_{223}\,\Gamma_{223}}{g_{22}}F_{01}\right)=g_{22}\,Q^{11}_{(1)},$$

(4.1.12)

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_{11}}{\partial z}-\frac{\partial F_{21}}{\partial\beta}\right)+2\Gamma^2_{21}\frac{\partial F_{31}}{\partial z}-\Gamma^2_{23}\left(\frac{\partial F_{11}}{\partial z}-\frac{\partial F_{21}}{\partial\beta}\right)-\frac{\partial^2F_{11}}{\partial x^{02}}+$$
$$+\Gamma^2_{12}\frac{\partial F_{01}}{\partial\beta}=2g_{22}\,Q^{12}_{(1)},$$

$$-\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial F_{11}}{\partial z}-\frac{\partial F_{21}}{\partial\beta}\right)+\Gamma^2_{22}\left(\frac{\partial F_{11}}{\partial z}-\frac{\partial F_{21}}{\partial\beta}\right)-g_{22}\frac{\partial^2F_{01}}{\partial x^{02}}+$$
$$+2\,\frac{\Gamma_{221}\,\Gamma_{223}}{g_{22}}F_{01}=2g_{22}\,Q^{13}_{(1)},$$

$$\frac{\partial^2F_{11}}{\partial\beta\partial x^0}-\Gamma^2_{22}\frac{\partial F_{11}}{\partial x^0}-\Gamma^3_{22}\frac{\partial F_{21}}{\partial x^0}+g_{22}\frac{\partial^2F_{21}}{\partial z\partial x^0}=2g_{22}\,Q^{10}_{(1)},$$

а соответствующие им граничные условия (1.3.66) — следующий вид:

при $\beta=\beta_\gamma$ $F_{01}=0,\ F_{21}=0,\ F_{31}=0,\ F_{11}=0;$

$$\text{при } z=z_\gamma\ F_{01}=0,\ F_{21}=0,\ F_{31}=0;\ F_{11}=0,\ \frac{\partial F_{11}}{\partial z}=0; \tag{4.1.13}$$

$$\text{при } x^0=x^0_1\ F_{01}=0,\ F_{21}=0,\ \frac{\partial F_{21}}{\partial x^0}=0;\ \frac{\partial^2 F_{21}}{\partial x^{02}}=0,$$

$$F_{11}=0,\ \frac{\partial F_{11}}{\partial x^0}=0.$$

Учитывая произвольность искомых функций $F_{\alpha 1}$, подчиним функцию F_{01} условию

$$\frac{\partial^2 F_{01}}{\partial\beta^2}+g_{22}\frac{\partial^2 F_{01}}{\partial z^2}-\Gamma^2_{22}\frac{\partial F_{01}}{\partial\beta}-\Gamma^3_{22}\frac{\partial F_{01}}{\partial z}-2\,\frac{\Gamma_{223}\Gamma_{223}}{g_{22}}F_{01}=0, \tag{4.1.14}$$

которое вместе с условиями (4.1.13) определяют функцию F_{01}:

$$F_{01}=0. \tag{4.1.15}$$

Уравнения (4.1.12) упрощаются:

$$\frac{\partial^2 F_{31}}{\partial\beta\partial z}-\Gamma^1_{22}\frac{\partial F_{21}}{\partial z}-\Gamma^2_{22}\frac{\partial F_{31}}{\partial z}=g_{22}Q^{11}_{(1)},$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_{11}}{\partial z}-\frac{\partial F_{21}}{\partial\beta}\right)+2\Gamma^2_{21}\frac{\partial F_{31}}{\partial z}-\Gamma^2_{23}\left(\frac{\partial F_{11}}{\partial z}-\frac{\partial F_{21}}{\partial\beta}\right)-$$

$$-\frac{\partial^2 F_{11}}{\partial x^{02}}=2g_{22}Q^{12}_{(1)}, \tag{4.1.12'}$$

$$-\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial F_{11}}{\partial z}-\frac{\partial F_{21}}{\partial\beta}\right)+\Gamma^2_{22}\left(\frac{\partial F_{11}}{\partial z}-\frac{\partial F_{21}}{\partial\beta}\right)-g_{22}\frac{\partial^2 F_{21}}{\partial x^{02}}=2g_{22}Q^{13}_{(1)},$$

$$\frac{\partial^2 F_{11}}{\partial\beta\partial x^0}-\Gamma^2_{22}\frac{\partial F_{11}}{\partial x^0}-\Gamma^3_{22}\frac{\partial F_{21}}{\partial x^0}+g_{22}\frac{\partial^2 F_{21}}{\partial z\partial x^0}=2g_{22}Q^{10}_{(1)}.$$

Рассмотрим третье и четвертое из уравнения (4.1.12′), записав их через дифференциальные операторы

$$\begin{gathered}-L_{11}\frac{\partial F_{11}}{\partial z}+L_{12}F_{21}=2g_{22}Q^{13}_{(1)},\\ L_{21}\frac{\partial F_{11}}{\partial x^0}+L_{22}\frac{\partial F_{21}}{\partial x^0}=2g_{22}Q^{0}_{(1)},\end{gathered} \tag{4.1.16}$$

где

$$L_{11}=L_{21}=\frac{\partial}{\partial\beta}-\Gamma^2_{22},\ L_{12}=\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-\Gamma^2_{22}\frac{\partial}{\partial\beta}-g_{22}\frac{\partial^2}{\partial x^{02}}, \tag{4.1.17}$$

$$L_{22}=g_{22}\frac{\partial}{\partial z}-\Gamma^3_{22}.$$

Исключая из (4.1.16) функцию F_{11}, получим уравнение для F_{21}:

$$\int_{\beta_1}^{\beta}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x^0}+A_2\int_{\beta_1}^{\beta}\frac{\partial\Gamma^2_{22}}{\partial z}\,d\beta-\frac{\partial A_2}{\partial z}\right)e^{-\int\Gamma^2_{22}\,d\beta}\,d\beta=$$

$$=\int_{\beta_1}^{\beta}\frac{\partial\Gamma^2_{22}}{\partial z}\,d\beta\int_{\beta_1}^{\beta}A_2\,e^{-\int\Gamma^2_{22}\,d\beta}\,d\beta, \tag{4.1.18}$$

где

$$A_1=L_{12}F_{21}-2g_{22}Q^{(13)}_{(1)},\quad A_2=2g_{22}Q^{(10)}_{(1)}-L_{22}\frac{\partial F_{21}}{\partial x^0}. \tag{4.1.19}$$

Решение уравнения (4.1.18) с учетом граничных условий (4.1.3), хотя и определяет функцию F_{21}, однако связано с большими трудностями. Для упрощения (4.1.18) выполним следующие преобразования: продифференцируем первое из уравнений (4.1.16) по x^0, второе из уравнений — по z и вычтем одно из другого. В результате имеем соотношение

$$\frac{\partial}{\partial x^0}L_{11}\frac{\partial F_{11}}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}L_{21}\frac{\partial F_{11}}{\partial x^0}=\frac{\partial A_1}{\partial x^0}-\frac{\partial A_2}{\partial z},$$

левая часть которого обращается в нуль при условии $\frac{\partial\Gamma^2_{22}}{\partial z}\frac{\partial F_{11}}{\partial x^0}=0$, что может быть выполнено в случаях: а) если оболочка с круговым контуром $\Gamma^2_{22}=0$; б) если на функцию F_{11}, пользуясь ее произвольностью, наложить условие $\partial F_{11}/\partial x^0=0$.

В этих случаях уравнение (4.1.18) упрощается:

$$\frac{\partial A_1}{\partial x^0}=\frac{\partial A_2}{\partial z};$$

в развернутом виде его можно записать так:

$$L_{12}f+\frac{\partial}{\partial z}L_{22}f=2P, \tag{4.1.20}$$

или

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\beta^2}+g_{22}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}+\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial z}-\Gamma^3_{22}\right)\frac{\partial f}{\partial z}-\Gamma^2_{22}\frac{\partial f}{\partial\beta}-\frac{\partial\Gamma^3_{22}}{\partial z}f-g_{22}\frac{\partial^2 f}{\partial x^{02}}=2P, \tag{4.1.20$'$}$$

где

$$f=\frac{\partial F_{21}}{\partial x^0},\quad P=\frac{\partial}{\partial z}\left(g_{22}Q^{(10)}_{(1)}\right)+g_{22}\frac{\partial Q^{(13)}_{(1)}}{\partial x^0}.$$

Уравнению (4.1.20) соответствуют следующие граничные условия:

$$f=0 \text{ при } \beta=\beta_\gamma;\; f=0 \text{ при } z=z_\gamma; \tag{4.1.21}$$
$$f=0,\; \partial f/\partial x^0=0 \text{ при } x^0=x^0_1.$$

Интегрируя уравнение (4.1.20) с учетом граничных условий (4.1.21), определим функцию $f(\beta, z, x^0)$. Проинтегрировав ее по координате x^0, находим

$$F_{21} = \int_{x_1^0}^{x^0} f(\beta,\ z,\ x^0)\, dx^0. \tag{4.1.22}$$

В результате подстановки (4.1.22) в первое из уравнений (4.1.12) получим уравнение для функции F_{31}:

$$\frac{\partial^2 F_{31}}{\partial\beta\partial z} - \Gamma_{22}^2 \frac{\partial F_{31}}{\partial z} = g_{22} Q_{(1)}^{11} + \Gamma_{22}^1 \int_{x_1^0}^{x^0} \frac{\partial f}{\partial z} dx^0,$$

которому удовлетворяет функция

$$F_{31} = \int_{z_1}^{z} \exp\left(\int_{\beta_1}^{\beta} \Gamma_{22}^2\, d\beta\right) \int_{\beta_1}^{\beta} \left(g_{22} Q_{(1)}^{11} + \Gamma_{22}^1 \int_{x_1^0}^{x^0} \frac{\partial f}{\partial z} dx^0\right) \times$$
$$\times \exp\left(-\int \Gamma_{22}^2\, d\beta\right) d\beta dz. \tag{4.1.23}$$

Для функции F_{11} имеем уравнение

$$\frac{\partial^2 F_{11}}{\partial z^2} - \Gamma_{23}^2 \frac{\partial F_{11}}{\partial z} - \frac{\partial^2 F_{11}}{\partial x^{0\,2}} = B, \tag{4.1.24}$$

где

$$B(\beta,\ z,\ x^0) = 2g_{22} Q_{(1)}^{12} - 2\Gamma_{21}^2 \left[e^{\int_{\beta_1}^{\beta} \Gamma_{22}^2\, d\beta} \int_{\beta_1}^{\beta} \left(g_{22} Q_{(1)}^{11} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \Gamma_{22}^1 \int_{x_1^0}^{x^0} \frac{\partial f}{\partial z} dx^0 \right) e^{-\int \Gamma_{22}^2\, d\beta} d\beta \right] + \int_{x_1^0}^{x^0} \frac{\partial^2 f}{\partial\beta\partial z} dx^0 - \Gamma_{23}^2 \int_{x_1^0}^{x^0} \frac{\partial f}{\partial\beta} dx^0. \tag{4.1.25}$$

Учитывая условие, наложенное на функцию F_{11}, уравнение можно записать так:

$$\frac{\partial^2 F_{11}}{\partial z^2} - \Gamma_{23}^2 \frac{\partial F_{11}}{\partial z} = B, \tag{4.1.24$'$}$$

его решением является функция

$$F_{11} = \int_{z_1}^{z} e^{\int \Gamma_{23}^2\, dz} \int_{z_1}^{z} B e^{-\int \Gamma_{23}^2\, dz} dz dz. \tag{4.1.26}$$

Итак, определение функций $F_{\alpha 1}$ сводится к решению краевой задачи для функции f и выполнению условий самоуравновешенности функциями нагрузок Q_γ^β. Функции $\Phi_{\alpha 1}$ строятся так же, как $F_{\alpha 1}$, однако необходима замена индекса $\gamma = 1$ на индекс $\gamma = 2$ у функций нагрузок $Q^{1\beta}_{(\gamma)}$ и граничных значений координаты α.

Для координаты β имеют место функции нагрузок

$$Q^{22}_{(\gamma)} = p^{22}_{(\gamma)} - 2\,[e^{\widetilde{22}}(p) - (\nabla_\delta p^\delta + \varphi)\, g^{22}]_\gamma; \quad Q^{21}_{(\gamma)} = p^{21}_{(\gamma)} - 2\widetilde{e}^{21}(p)_{(\gamma)}; \tag{4.1.27}$$

$$Q^{23}_{(\gamma)} = p^{23}_{(\gamma)} - 2\widetilde{e}^{23}(p)_{(\gamma)}; \quad Q^{20}_{(\gamma)} = p^{20}_{(\gamma)} - 2\widetilde{e}^{20}(p)_{(\gamma)}.$$

Функции кинетических напряжений $\Pi^{(0)}_{\alpha 2}$, соответствующие координате β, берем в виде

$$\Pi^{(0)}_{\alpha 2} = \frac{1}{2}(1 + \cos\bar{\beta})\, F_{\alpha 2} + \frac{1}{2}(1 - \cos\bar{\beta})\, \Phi_{\alpha 2} \quad (\alpha = 1,\ 2,\ 3,\ 0), \tag{4.1.28}$$

здесь $\bar{\beta} = \pi(\beta - \beta_1)/(\beta_2 - \beta_1)$ — безразмерная координата.

Уравнения (1.3.65) при $\beta = \beta_1$ принимают следующий вид:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 F_{22}}{\partial\alpha\partial z} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F_{02}}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 F_{02}}{\partial z^2}\right) = g_{22}\, Q^{22}_{(1)},\\
\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_{12}}{\partial z} - \frac{\partial F_{32}}{\partial\alpha}\right) + 2\Gamma^2_{12}\frac{\partial F_{32}}{\partial z} - \Gamma^2_{23}\left(\frac{\partial F_{12}}{\partial z} + \frac{\partial F_{32}}{\partial\alpha}\right) -\\
- \frac{\partial^2 F_{12}}{\partial x^{0 2}} = 2g_{22}\, Q^{21}_{(1)},\\
-\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial F_{12}}{\partial z} - \frac{\partial F_{32}}{\partial\alpha}\right) + 2\Gamma^2_{23}\frac{\partial F_{12}}{\partial\alpha} - \Gamma^2_{12}\left(\frac{\partial F_{12}}{\partial z} + \frac{\partial F_{32}}{\partial\alpha}\right) -\\
- \frac{\partial^2 F_{32}}{\partial x^{0 2}} = 2g_{22}\, Q^{23}_{(1)},\\
\frac{\partial^2 F_{12}}{\partial x^0\,\partial\alpha} + \Gamma^2_{12}\frac{\partial F_{12}}{\partial x^0} + \frac{\partial^2 F_{32}}{\partial z\partial x^0} + \Gamma^2_{23}\frac{\partial F_{32}}{\partial x^0} = 2g_{22}\, Q^{20}_{(1)}.
\end{gathered} \tag{4.1.29}$$

Уравнениям (4.1.29) соответствуют граничные условия:

$$\begin{gathered}
\text{при } \alpha = \alpha_\gamma \ \ F_{02} = 0,\ F_{22} = 0,\ F_{12} = 0,\ F_{32} = 0,\ \frac{\partial F_{32}}{\partial\alpha} = 0;\\
\text{при } z = z_\gamma \ \ F_{02} = 0,\ F_{22} = 0,\ F_{12} = 0,\ \frac{\partial F_{12}}{\partial z} = 0;\\
\text{при } x^0 = x^0_1 \ \ F_{02} = 0,\ F_{12} = 0,\ \frac{\partial F_{12}}{\partial x^0} = 0,\ \frac{\partial^2 F_{12}}{\partial x^{0 2}} = 0.
\end{gathered} \tag{4.1.30}$$

Первое из уравнений (4.1.29) содержит функции F_{22} и F_{02}, которые не входят в другие уравнения системы. Используя произвольность искомых функций, подчиним F_{02} уравнению

$$\frac{\partial^2 F_{02}}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 F_{02}}{\partial z^2} = 0,$$

которое вместе с граничными условиями (4.1.30) показывает, что

$$F_{02} = 0. \tag{4.1.31}$$

Для функции F_{22} имеем уравнение

$$\frac{\partial^2 F_{22}}{\partial\alpha\partial z}=g_{22}Q^{22}_{(1)},$$

решая его, учитывая при этом (4.1.30), получаем

$$F_{22}=\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha}\int\limits_{z_1}^{z}g_{22}Q^{22}_{(1)}\,d\alpha dz. \tag{4.1.32}$$

Рассмотрим совместно второе и четвертое из уравнений (4.1.29), записав их предварительно в виде

$$L_{11}(F_{12})+L_{12}(F_{32})=2g_{22}Q^{21}_{(1)}, \tag{4.1.33}$$
$$L_{22}(F_{12})+L_{21}(F_{32})=2g_{22}Q^{20}_{(1)},$$

где

$$L_{11}=\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\Gamma^2_{23}\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial^2}{\partial x^{0^2}},\quad L_{12}=-\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial z}+2\Gamma^2_{12}\frac{\partial}{\partial z}-\Gamma^2_{23}\frac{\partial}{\partial\alpha},$$

$$L_{22}=\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial x^0}+\Gamma^2_{12}\frac{\partial}{\partial x^0},\quad L_{21}=\frac{\partial^2}{\partial z\partial x^0}+\Gamma^2_{23}\frac{\partial}{\partial x^0}.$$

Воздействуем оператором L_{21} на первое уравнение, оператором L_{12} — на второе и вычтем из первого уравнения второе, в результате получим

$$(L_{21}L_{11}(F_{12})-L_{12}L_{22}(F_{12}))+(L_{21}L_{12}(F_{32})-L_{12}L_{21}(F_{32}))=$$
$$=2\,(L_{21}\,(g_{22}Q^{21}_{(1)})-L_{12}\,(g_{22}Q^{20}_{(1)})).$$

Учитывая произвольность функций $F_{\alpha 2}$, наложим на F_{32} ограничение $-L_{12}L_{21}(F_{32})+L_{21}L_{12}(F_{32})=0$, или в развернутом виде

$$\left(2\frac{\partial\Gamma^2_{12}}{\partial z}+\frac{\partial\Gamma^2_{23}}{\partial\alpha}\right)\frac{\partial^2 F_{32}}{\partial z\partial x^0}+$$
$$+\left(-2\Gamma^2_{12}\frac{\partial\Gamma^2_{23}}{\partial z}+\Gamma^2_{23}\frac{\partial\Gamma^2_{23}}{\partial\alpha}+\frac{\partial^2\Gamma^2_{23}}{\partial\alpha\partial z}\right)\frac{\partial F_{32}}{\partial x_0}=0,$$

отсюда следует, что

$$\frac{\partial F_{32}}{\partial x_0}=0. \tag{4.1.34}$$

Уравнение для функции F_{12} следующее:

$$L_{21}L_{11}(F_{12})-L_{12}L_{22}(F_{12})=2\,(L_{21}(g_{22}Q^{21}_{(1)})-L_{12}(g_{22}Q^{20}_{(1)})), \tag{4.1.35}$$

или в развернутом виде

$$\frac{\partial^3 f}{\partial z^3}-\frac{\partial^3 f}{\partial z\partial x^{0^2}}+\frac{\partial^3 f}{\partial\alpha^2\partial z}-\Gamma^2_{23}\frac{\partial^2 f}{\partial x^{0^2}}-\Gamma^2_{12}\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial z}+$$
$$+\Gamma^2_{23}\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}-\left(\frac{\partial\Gamma^2_{23}}{\partial z}+\Gamma^2_{23}\Gamma^2_{23}+2\Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12}-\frac{\partial\Gamma^2_{12}}{\partial\alpha}\right)\frac{\partial f}{\partial z}+$$
$$+\left(\frac{\partial\Gamma^2_{12}}{\partial z}+\Gamma^2_{23}\Gamma^2_{12}\right)\frac{\partial f}{\partial\alpha}+\left(-2\Gamma^2_{12}\frac{\partial\Gamma^2_{12}}{\partial z}+\Gamma^2_{23}\frac{\partial\Gamma^2_{12}}{\partial\alpha}+\frac{\partial^2\Gamma^2_{12}}{\partial\alpha\partial z}\right)f=A, \tag{4.1.36}$$

где

$$f = \frac{\partial F_{12}}{\partial x^0}.$$

$$A = 2\left(L_{21}\left(g_{22}Q^{21}_{(1)}\right) - L_{12}\left(g_{22}Q^{20}_{(1)}\right)\right). \tag{4.1.37}$$

Ему соответствуют граничные условия:

$$\begin{gathered} f = 0 \text{ при } \alpha = \alpha_\gamma;\ f = 0,\ \partial f/\partial z = 0 \text{ при } z = z_\gamma; \\ f = 0,\ \partial f/\partial x^0 = 0 \text{ при } x^0 = x^0_1. \end{gathered} \tag{4.1.38}$$

Итак, решение уравнения (4.1.36) с учетом граничных условий (4.1.38) определяет функцию f; интегрируя (4.1.37), получим

$$F_{12} = \int\limits_{x^0_1}^{x^0} f dx^0, \tag{4.1.39}$$

третье из уравнений (4.1.29) запишем в виде

$$\frac{\partial^2 F_{32}}{\partial \alpha^2} - \Gamma^2_{12}\frac{\partial F_{32}}{\partial \alpha} - \frac{\partial^2 F_{32}}{\partial x^{0^2}} = B,$$

где

$$B(\alpha,\ z,\ x^0) = 2g_{22}Q^{23}_{(1)} + \int\limits_{x^0_1}^{x^0}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial z} - 2\Gamma^2_{23}\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \Gamma^2_{12}\frac{\partial f}{\partial z}\right)dx^0. \tag{4.1.40}$$

Учитывая (4.1.34), получим уравнение для функции F_{32}

$$\frac{\partial^2 F_{32}}{\partial \alpha^2} - \Gamma^2_{12}\frac{\partial F_{32}}{\partial \alpha} = B,$$

которому удовлетворяет функция

$$F_{32} = \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha} e^{\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha}\Gamma^2_{12}\,d\alpha} \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha} B e^{-\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha}\Gamma^2_{12}\,d\alpha} d\alpha d\alpha. \tag{4.1.41}$$

Таким образом, определение функций $F_{\alpha 2}$ сводится к решению краевой задачи для функции f.

Функции $\Phi_{\alpha 2}$ строятся так же, как и $F_{\alpha 2}$, однако следует заменить индекс $\gamma = 1$ на индекс $\gamma = 2$ у функций нагрузок $Q^{2\beta}_{(\gamma)}$ и граничных значений координаты β.

Функции нагрузок $Q^{2\beta}_{(\gamma)}$ должны быть самоуравновешенными. Для координаты z имеют место функции нагрузок

$$\begin{gathered} Q^{33}_{(\gamma)} = p^{33}_{(\gamma)} - 2\left[\tilde{e}^{33}_{(p)} - (\Lambda_\delta p^\delta + \varphi)\right]_{(\gamma)}, \\ Q^{32}_{(\gamma)} = p^{32}_{(\gamma)} - 2\tilde{e}^{32}_{(p)(\gamma)},\quad Q^{31}_{(\gamma)} = p^{31}_{(\gamma)} - 2\tilde{e}^{31}_{(p)(\gamma)}, \\ Q^{30}_{(\gamma)} = p^{30}_{(\gamma)} - 2\tilde{e}^{30}_{(p)(\gamma)}. \end{gathered} \tag{4.1.42}$$

Функции кинетических напряжений таковы:

$$\Pi_{\alpha 3}^{(0)} = (1/2)(1+\cos\bar{z})\, F_{\alpha 3} + (1/2)(1-\cos\bar{z})\,\Phi_{\alpha 3}, \qquad (4.1.43)$$

где $\bar{z} = \pi(z+h/2)/h$ — безразмерная координата. Уравнения (1.3.65), соответствующие этим функциям кинетических напряжений, при $z_1 = h/2$ принимают вид

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial F_{33}}{\partial\alpha} - \frac{\partial F_{23}}{\partial\beta}\right) - \Gamma_{22}^{2}\left(\frac{\partial F_{33}}{\partial\alpha} - \frac{\partial F_{23}}{\partial\beta}\right) + \\
+ g_{22}\frac{\partial^2 F_{23}}{\partial x^{0^2}} - 2\,\frac{\Gamma_{221}\Gamma_{223}}{g_{22}}\, F_{03} = -2g_{22}\, Q_{(1)}^{31}, \\
\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial F_{33}}{\partial\alpha} - \frac{\partial F_{23}}{\partial\beta}\right) + 2\Gamma_{23}^{2}\frac{\partial F_{13}}{\partial\alpha} - \Gamma_{12}^{2}\left(\frac{\partial F_{33}}{\partial\alpha} - \frac{\partial F_{23}}{\partial\beta}\right) - \frac{\partial^2 F_{33}}{\partial x^{0^2}} + \\
+ \Gamma_{23}^{2}\frac{\partial F_{03}}{\partial\beta} = 2g_{22}\, Q_{(1)}^{32}, \qquad (4.1.44) \\
\frac{\partial^2 F_{13}}{\partial\alpha\partial\beta} - \Gamma_{22}^{3}\frac{\partial F_{23}}{\partial\alpha} + \frac{1}{2}\left(g_{22}\frac{\partial^2 F_{03}}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 F_{03}}{\partial\beta^2} - \Gamma_{22}^{1}\frac{\partial F_{03}}{\partial\alpha} - \right. \\
\left. - \Gamma_{22}^{2}\frac{\partial F_{03}}{\partial\beta} - 2\,\frac{\Gamma_{221}\Gamma_{221}}{g_{22}}\, F_{03}\right) = 2g_{22}\, Q_{(1)}^{33}, \\
g_{22}\frac{\partial^2 F_{23}}{\partial\alpha\partial x^0} - \Gamma_{22}^{1}\frac{\partial F_{23}}{\partial x^0} + \frac{\partial^2 F_{33}}{\partial\beta\partial x^0} - \Gamma_{22}^{2}\frac{\partial F_{33}}{\partial x^0} = 2g_{22}\, Q_{(1)}^{30},
\end{gathered}$$

а граничные условия (1.3.66) — следующий вид:

$$\begin{gathered}
\text{при } \alpha = \alpha_\gamma\ F_{03} = 0,\ F_{23} = 0,\ F_{13} = 0,\ F_{33} = 0; \\
\text{при } \beta = \beta_\gamma\ F_{03} = 0,\ F_{23} = 0,\ \frac{\partial F_{23}}{\partial\beta} = 0,\ F_{13} = 0; \qquad (4.1.45) \\
\text{при } x^0 = x_1^0 \\
F_{03} = 0,\ \frac{\partial F_{03}}{\partial x^0} = 0,\ \frac{\partial F_{33}}{\partial x^0} = 0,\ \frac{\partial^2 F_{23}}{\partial x^{0^2}} = 0,\ \frac{\partial F_{23}}{\partial x^0} = 0,\ F_{23} = 0.
\end{gathered}$$

Произвольность выбора функций $F_{\alpha 3}$ позволяет функцию F_{03} подчинить условию

$$g_{22}\frac{\partial^2 F_{03}}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 F_{03}}{\partial\beta^2} - \Gamma_{22}^{1}\frac{\partial F_{03}}{\partial\alpha} - \Gamma_{22}^{2}\frac{\partial F_{03}}{\partial\beta} - 2\,\frac{\Gamma_{221}\Gamma_{221}}{g_{22}} F_{03} = 0,$$

которое вместе с граничными условиями (4.1.45) определяет функцию F_{03}:

$$F_{03} = 0. \qquad (4.1.46)$$

Запишем первое и четвертое из уравнений (4.1.44) в операторной форме

$$\begin{gathered}
L_{11}(F_{23}) + L_{12}(F_{33}) = -2g_{22}Q_{(1)}^{31}, \\
L_{22}(F_{23}) + L_{21}(F_{33}) = 2g_{22}Q_{(1)}^{30},
\end{gathered}$$

здесь

$$L_{11}=-\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+\Gamma_{22}^2\frac{\partial}{\partial\beta}+g_{22}\frac{\partial^2}{\partial x^{0^2}},\quad L_{12}=\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}-\Gamma_{22}^2\frac{\partial}{\partial\alpha},$$

$$L_{22}=g_{22}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial x^0}-\Gamma_{22}^1\frac{\partial}{\partial x^0},\quad L_{21}=\frac{\partial^2}{\partial\beta\partial x^0}-\Gamma_{22}^2\frac{\partial}{\partial x^0}. \tag{4.1.47}$$

Воздействуем оператором L_{21} на первое, оператором L_{12} — на второе из уравнений (4.1.47) и вычтем одно из другого, в результате получим

$$[L_{21}L_{11}(F_{23})-L_{12}L_{22}(F_{23})]+[L_{21}L_{12}(F_{33})-L_{12}L_{21}(F_{33})]=$$
$$=-2[L_{21}(g_{22}Q^{31}_{(1)})-L_{12}(g_{22}Q^{30}_{(1)})].$$

Пользуясь произвольностью выбора искомых функций, подчиним F_{33} условию $L_{21}L_{12}(F_{33})-L_{12}L_{21}(F_{33})=0$, которое можно записать в виде

$$\frac{\partial\Gamma_{22}^2}{\partial\alpha}\frac{\partial^2F_{33}}{\partial\beta\partial x^0}+\left(\frac{\partial^2\Gamma_{22}^2}{\partial\alpha\partial\beta}-\Gamma_{22}^2\frac{\partial\Gamma_{22}^2}{\partial\alpha}\right)\frac{\partial F_{33}}{\partial x^0}=0.$$

Отсюда следует

$$\frac{\partial F_{33}}{\partial x^0}=0. \tag{4.1.48}$$

Функция F_{23} удовлетворяет уравнению

$$L_{21}L_{11}(F_{23})-L_{12}L_{22}(F_{23})=-2A, \tag{4.1.49}$$

где

$$A=[L_{21}(g_{22}Q^{31}_{(1)})-L_{12}(g_{22}Q^{30}_{(1)})], \tag{4.1.50}$$

или развернутому уравнению

$$\frac{\partial^3f}{\partial\beta^3}+g_{22}\frac{\partial^3f}{\partial\alpha^2\partial\beta}-g_{22}\frac{\partial^3f}{\partial\beta\partial x^{0^2}}-2\Gamma_{22}^2\frac{\partial^2f}{\partial\beta^2}-\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial\beta}-g_{22}\Gamma_{22}^2\right)\frac{\partial^2f}{\partial x^{0^2}}+$$
$$+\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial\beta}-g_{22}\Gamma_{22}^2\right)\frac{\partial^2f}{\partial\alpha^2}+\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial\alpha}-\Gamma_{22}^1\right)\frac{\partial^2f}{\partial\alpha\partial\beta}-$$
$$-\left(\frac{\partial\Gamma_{22}^2}{\partial\beta}+\frac{\partial\Gamma_{22}^1}{\partial\alpha}-\Gamma_{22}^2\Gamma_{22}^2\right)\frac{\partial f}{\partial\beta}+\left(\Gamma_{22}^2\Gamma_{22}^2+\frac{\partial^2g_{22}}{\partial\alpha\partial\beta}-\right.$$
$$\left.-\Gamma_{22}^2\frac{\partial g_{22}}{\partial\alpha}-\frac{\partial\Gamma_{22}^1}{\partial\beta}\right)\frac{\partial f}{\partial\alpha}+\left(\Gamma_{22}^2\frac{\partial\Gamma_{22}^1}{\partial\alpha}-\frac{\partial^2\Gamma_{22}^1}{\partial\alpha\partial\beta}\right)f=2A, \tag{4.1.49'}$$

где

$$f=\frac{\partial F_{23}}{\partial x^0}, \tag{4.1.51}$$

а также следующим граничным условиям:

$$f=0 \text{ при } \alpha=\alpha_\gamma;\ f=0,\ \partial f/\partial\beta=0 \text{ при } \beta=\beta_\gamma;$$
$$f=0,\ \partial f/\partial x^0=0 \text{ при } x^0=x^0_1. \tag{4.1.52}$$

Итак, функция f определяется в результате решения сформулированной краевой задачи для f.

Интегрируя (4.1.51), находим

$$F_{23}=\int\limits_{x_1^0}^{x^0} f dx^0. \tag{4.1.53}$$

В результате подстановки (4.1.53) в третье из уравнений (4.1.44) получим уравнение для функции F_{13}

$$\frac{\partial^2 F_{13}}{\partial\alpha\partial\beta}=2g_{22}Q_{(1)}^{33}+\Gamma_{22}^3\int\limits_{x_1^0}^{x^0}\frac{\partial f}{\partial\alpha}dx^0,$$

решение которого с учетом граничных условий (4.1.45) имеет вид

$$F_{13}=\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha}\int\limits_{\beta_1}^{\beta}\left(2g_{22}Q_{(1)}^{33}+\Gamma_{22}^3\int\limits_{x_1^0}^{x^0}\frac{\partial f}{\partial\alpha}dx^0\right)d\alpha\, d\beta. \tag{4.1.54}$$

Второе из уравнений (4.1.44) запишем относительно F_{33}

$$\frac{\partial^2 F_{33}}{\partial\alpha^2}-\Gamma_{12}^2\frac{\partial F_{33}}{\partial\alpha}-\frac{\partial^2 F_{33}}{\partial {x^0}^2}=B,$$

где

$$B(\alpha,\ \beta,\ x^0)=2g_{22}Q_{(1)}^{32}+\int\limits_{x_1^0}^{x^0}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta}-\Gamma_{12}^2\frac{\partial f}{\partial\beta}\right)dx^0-$$

$$-2\Gamma_{23}^2\int\limits_{\beta_1}^{\beta}\left(2g_{22}Q_{(1)}^{33}+\Gamma_{22}^3\int\limits_{x_1^0}^{x^0}\frac{\partial f}{\partial\alpha}dx^0\right)d\beta. \tag{4.1.55}$$

Учитывая (4.1.48), уравнение для F_{33} запишем так:

$$\frac{\partial^2 F_{33}}{\partial\alpha^2}-\Gamma_{12}^2\frac{\partial F_{33}}{\partial\alpha}=B,$$

а его решение в виде

$$F_{33}=\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha}e^{\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha}\Gamma_{12}^2 d\alpha}\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha}Be^{-\int\Gamma_{12}^2 d\alpha}d\alpha d\alpha. \tag{4.1.56}$$

Таким образом, определение функций $F_{\alpha3}$ сводится к решению краевой задачи для функции f.

Функции $\Phi_{\alpha3}$ строятся так же, как и $F_{\alpha3}$, однако индекс $\gamma=1$ необходимо заменить на индекс $\gamma=2$ у функций нагрузок $Q_{(\gamma)}^{3\beta}$ и граничных значений координаты z; функции нагрузок $Q_{(\gamma)}^{3\beta}$ должны быть самоуравновешенными.

Для координаты x^0 функции нагрузок $Q^{0\beta}_{(1)}$ таковы:

$$Q^{00}_{(1)}=p^{00}_{(1)}-2(\nabla_\delta p^\delta+\varphi)_{(1)},\quad Q^{01}_{(1)}=p^{01}_{(1)}=2\tilde{e}^{01}(p)_{(1)},$$
$$Q^{02}_{(1)}=p^{02}_{(1)}-2\tilde{e}^{02}(p)_{(1)},\quad Q^{03}_{(1)}=p^{03}_{(1)}-2\tilde{e}^{03}(p)_{(1)}. \tag{4.1.57}$$

Функции кинетических напряжений, соответствующие координате x^0, следующие:

$$\Pi_{00}=(1/2)(1+\cos\bar{x}^0)\Psi_{00},$$
$$\Pi_{i0}=\frac{1}{2}\int\limits_{x_1^0}^{x^0}(1+\cos\bar{x}^0)\,dx^0\,F_{i0}\quad(i=1,\ 2,\ 3). \tag{4.1.58}$$

Уравнения (1.3.65) в этом случае принимают вид

$$\left(\frac{\partial F_{10}}{\partial\beta}-\Gamma^3_{22}F_{10}\right)+\left(g_{22}\frac{\partial F_{20}}{\partial z}-\Gamma^3_{22}F_{20}\right)=2g_{22}Q^{01}_{(1)},$$
$$\left(\frac{\partial F_{10}}{\partial\alpha}+\Gamma^2_{12}F_{10}\right)+\left(\frac{\partial F_{30}}{\partial z}+\Gamma^2_{23}F_{30}\right)=2g_{22}Q^{02}_{(1)}.$$
$$\left(g_{22}\frac{\partial F_{20}}{\partial\alpha}-\Gamma^1_{22}F_{20}\right)+\left(\frac{\partial F_{30}}{\partial\beta}-\Gamma^2_{22}F_{30}\right)=2g_{22}Q^{03}_{(1)},$$
$$(\Gamma_{221}\Gamma_{221}+\Gamma_{223}\Gamma_{223})\Psi_{00}/g_{22}=g_{22}Q^{00}_{(1)}, \tag{4.1.59}$$

а соответствующие им граничные условия (1.3.66) — следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\text{при } \alpha=\alpha_\gamma\quad F_{10}=0,\ F_{20}=0,\ F_{30}=0;\\
&\text{при } \beta=\beta_\gamma\quad F_{10}=0,\ F_{30}=0;\\
&\text{при } z=z_\gamma\quad F_{10}=0,\ F_{20}=0\ ,\ F_{30}=0.
\end{aligned} \tag{4.1.60}$$

Исключая из первых трех уравнений (4.1.59) функции F_{10} и F_{30}, получим уравнение для F_{20}

$$2g_{22}\frac{\partial^2F_{20}}{\partial\alpha\partial z}+\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial z}+g_{22}\Gamma^2_{23}-\Gamma^3_{22}\right)\frac{\partial F_{20}}{\partial\alpha}+\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial\alpha}+g_{22}\Gamma^2_{12}-\right.$$
$$\left.-\Gamma^1_{22}\right)\frac{\partial F_{20}}{\partial z}+\left(-\frac{\partial\Gamma^3_{22}}{\partial\alpha}-\frac{\partial\Gamma^1_{22}}{\partial z}-\Gamma^2_{12}\Gamma^3_{22}-\Gamma^2_{23}\Gamma^1_{22}\right)F_{20}=2A, \tag{4.1.61}$$

здесь

$$A=\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}+\Gamma^2_{12}\right)(g_{22}Q^{01}_{(1)})-\left(\frac{\partial}{\partial\beta}-\Gamma^2_{22}\right)(g_{22}Q^{02}_{(1)})+\left(\frac{\partial}{\partial z}+\Gamma^2_{23}\right)(g_{22}Q^{03}_{(1)}); \tag{4.1.62}$$

на функции F_{10} и F_{30} наложены условия

$$\left(\frac{\partial\Gamma^2_{22}}{\partial\alpha}+\frac{\partial\Gamma^2_{12}}{\partial\beta}\right)F_{10}=0;\quad\left(\frac{\partial\Gamma^2_{22}}{\partial z}+\frac{\partial\Gamma^2_{23}}{\partial\beta}\right)F_{30}=0. \tag{4.1.63}$$

отсюда следует

$$F_{10} = 0, F_{30} = 0. \qquad (4.1.64)$$

Итак, функцию F_{20} можно определить из решения уравнения (4.1.61) и граничных условий (4.1.60).

Четвертое из уравнений (4.1.59) определяет функцию

$$\Psi_{00} = g_{22}g_{22}Q^{00}_{(1)}/(\Gamma_{221}\Gamma_{221} + \Gamma_{223}\Gamma_{223}). \qquad (4.1.65)$$

Таким образом, функции F_{i0} и Ψ_{00} найдены. Полные функции кинетических напряжений

$$\Pi^{(0)}_{\alpha} = \sum_{\beta=0}^{3} \Pi^{(0)}_{\alpha\beta}; \qquad (4.1.66)$$

подставляя последнее выражение в (4.1.8), (4.1.9), а полученный результат — в (4.1.7), определим компоненты основного тензора $(T_{о})$ для самоуравновешенных функций нагрузок $\tilde{Q}^{\alpha\beta}_{(\gamma)}$.

Если функции нагрузок $Q^{\alpha\beta}_{(\gamma)}$ не самоуравновешены, то

$$(T_{о}) = (T^{(1)}_{о}) + (T^{(2)}), \qquad (4.1.67)$$

здесь $(T^{(1)}_{о})$ — основной тензор для самоуравновешенных частей $\tilde{Q}^{\alpha\beta}_{(\gamma)}$ функций нагрузок; $(T^{(2)}_{о})$ — основной тензор для несамоуравновешенных частей $\overline{Q}^{\alpha\beta}_{(\gamma)}$ функций нагрузок. Компоненты тензора вычисляются по формулам (3.1.96), приведенным во второй части книги.

Построение корректирующего тензора $(T_{к})$ для оболочки вращения нулевой гауссовой кривизны основано на общих соображениях, приведенных в § 4—7 гл. 1 второй части книги.

Принимаем следующую систему фундаментальных функций:

$$\xi_m(\alpha) = (1/m!)\sin m\bar{\alpha},\ \eta_n(\beta) = (1/n!)\sin n\bar{\beta},$$
$$\zeta_p(z) = (1/p!)\,J(\bar{z})\sin p\bar{z}. \qquad (4.1.68)$$

Компоненты корректирующего тензора $(T_{к})$ берем в форме Морера

$$T^{\alpha\beta}_{к} = \sum_{mnpl}\left(A_{mnpl}f^{\alpha\beta}_{(1)} + B_{mnpl}f^{\alpha\beta}_{(2)} + C_{mnpl}f^{\alpha\beta}_{(3)} + D_{mnpl}f^{\alpha\beta}_{(0)}\right). \qquad (4.1.69)$$

Функции $f^{\alpha\beta}$ вычисляем по формулам (1.4.14) второй части книги, учитывая выражения компонент метрического тензора (4.1.4), символы Кристоффеля (4.1.5) и фундаментальные функции (4.1.68).

Параметры A_{mnpl}, ..., D_{mnpl} определяем методом, изложенным в § 1 гл. 4, 5 второй части книги.

Для малых деформаций упругопластической оболочки имеем систему уравнений (1.3.70); коэффициенты $F_{\gamma\beta}$ и свободные члены L_{β} уравнений в n-м приближении вычисляем по формулам (4.1.99), (4.1.100) и (4.1.101) второй части книги, подынтегральные выражения таковы:

$$A^{(1)}_{\gamma\beta} = 2\,[f^{11}_{(\gamma)} f^{11}_{(\beta)} + g_{22}\, g_{22} f^{22}_{(\gamma)} f^{22}_{(\beta)} + f^{33}_{(\gamma)} f^{33}_{(\beta)} + f^{00}_{(\gamma)} f^{00}_{(\gamma)} +$$
$$+ 2\,(g_{22} f^{12}_{(\gamma)} f^{12}_{(\beta)} + f^{13}_{(\gamma)} f^{13}_{(\beta)} + g_{22} f^{23}_{(\gamma)} f^{23}_{(\beta)} - f^{10}_{(\gamma)} f^{10}_{(\beta)} -$$
$$- g_{22} f^{20}_{(\gamma)} f^{20}_{(\beta)} - f^{30}_{(\gamma)} f^{30}_{(\beta)})], \tag{4.1.70}$$

$$A^{(2)}_{\gamma\beta} = (f^{11}_{(\gamma)} + g_{22} f^{22}_{(\gamma)} + f^{33}_{(\gamma)} - f^{00}_{(\gamma)})\,(f^{11}_{(\beta)} + g_{22} f^{22}_{(\beta)} + f^{33}_{(\beta)} - f^{00}_{(\beta)});$$

$$B^{(1)}_{\beta} = w_{as}\,(n_1 f^{\alpha 1}_{(\beta)} + n_2\, g_{22} f^{\alpha 2}_{(\beta)} + n_3 f^{\alpha 3}_{(\beta)} - n_0 f^{\alpha 0}_{(\beta)}),$$

$$B^{(2)}_{\beta} = \alpha T^0\,(f^{11}_{(\beta)} + g_{22} f^{22}_{(\beta)} + f^{33}_{(\beta)} - f^{00}_{(\beta)}), \tag{4.1.71}$$

$$B^{(3)}_{\beta} = 2\,[T^{11}_{(0)} f^{11}_{(\beta)} + g_{22} T^{22}_{(0)}\, g_{22} f^{22}_{(\beta)} + T^{33}_{(0)} f^{33}_{(\beta)} + T^{00}_{(0)} f^{00}_{(\beta)} +$$
$$+ 2\,(T^{13}_{(0)} f^{13}_{(\beta)} + T^{12}_{(0)}\, g_{22} f^{12}_{(\beta)} + T^{23}_{(0)}\, g_{22} f^{23}_{(\beta)} - T^{10}_{(0)} f^{10}_{(\beta)} -$$
$$- T^{20}_{(0)}\, g_{22} f^{20}_{(\beta)} - T^{30}_{(\beta)} f^{30}_{(\beta)})],$$

$$B^{(4)}_{\beta} = (T^{11}_{(0)} + g_{22} T^{22}_{(0)} + T^{33}_{(0)} - T^{00}_{(0)})\,(f^{11}_{(\beta)} + g_{22} f^{22}_{(\beta)} + f^{33}_{(\beta)} - f^{00}_{(\beta)}).$$

Для малых деформаций вязкоупругой оболочки справедлива система уравнений (1.3.70); коэффициенты $F_{\gamma\beta}$ и свободные члены L_β уравнений находим по формулам (4.1.102) второй части книги, где

$$A_\gamma = f^{11}_{(\gamma)} + g_{22} f^{22}_{(\gamma)} + f^{33}_{(\gamma)} - f^{00}_{(\gamma)}. \tag{4.1.72}$$

Выполнив указанные вычисления, находим компоненты корректирующего тензора оболочки вращения нулевой гауссовой кривизны.

§ 2. Сжатие цилиндрической и конической оболочек осевыми нагрузками при тепловом воздействии

Перейдем к исследованию напряженно-деформированного состояния оболочки вращения [15]. Рассмотрим простейшую с точки зрения геометрии оболочку вращения нулевой гауссовой кривизны — цилиндрическую. Для такой оболочки

$$\theta = 0, \quad \alpha = x, \quad \beta = \varphi. \tag{4.2.1}$$

Пределы изменения текущих координат следующие:

$$0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\,\pi, \quad 0 \leqslant x^0 \leqslant x^0_2, \quad -h/2 \leqslant z \leqslant h/2, \tag{4.2.2}$$

здесь l — длина, h — толщина оболочки.

Параметры Ляме (A_i) и радиусы кривизны (R_i) срединной поверхности соответственно равны

$$A_1 = 1, \quad A_2 = r_0; \quad R_1 = \infty, \quad R_2 = r_0, \tag{4.2.3}$$

где r_0 — радиус срединной поверхности.

Компоненты метрического тензора

$$g_{11} = 1, \; g_{22} = (r_0 + z)^2, \; g_{33} = 1, \; g_{00} = -1; \tag{4.2.4}$$

символы Кристоффеля, отличные от нуля, таковы:

$$\Gamma_{3.22} = -(r_0 + z), \quad \Gamma_{2.23} = (r_0 + z), \quad \Gamma^3_{22} = -(r_0 + z), \quad \Gamma^2_{23} = \frac{1}{r_0 + z}. \tag{4.2.5}$$

Пусть цилиндрическая оболочка сжата торцовыми нагрузками (рис. 109). Нагрузки, действующие на оболочку, динамические:

$$p^{1i}_{(\gamma)} = p^{1i}_{(\gamma)}\,(\varphi,\ z,\ t)\ (i = 1,\ 2,\ 3). \tag{4.2.6}$$

Тепловое воздействие на оболочку характеризуется нестационарным температурным полем

$$T^0 = T^0\,(x,\ \varphi,\ z,\ t). \tag{4.2.7}$$

Нагруженное состояние оболочки характеризуется тензором напряжений (σ), построение которого осуществляется методом, изложенным в гл. 1, через тензор кинетических напряжений:

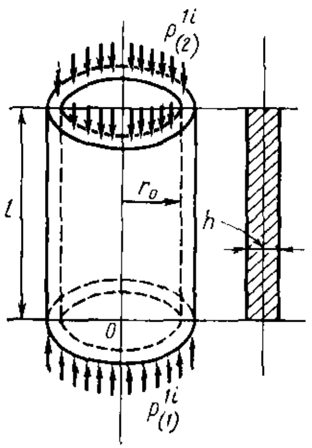

Рис. 109

$$(T) = (T_0) + (T_к). \tag{4.2.8}$$

Функции нагрузок $Q^{1\beta}_{(\gamma)}$ согласно (4.1.10) имеют следующий вид:

для координаты x

$$\begin{aligned} Q^{11}_{(\gamma)} &= (\rho v^1 v^1)_{(\gamma)} - p^{11}_{(\gamma)} + 2\varphi_{(\gamma)},\\ Q^{10}_{(\gamma)} &= (\rho v^1 v^0)_{(\gamma)},\\ Q^{12}_{(\gamma)} &= (\rho v^1 v^2)_{(\gamma)} - p^{12}_{(\gamma)},\\ Q^{13}_{(\gamma)} &= (\rho v^1 v^3)_{(\gamma)} - p^{13}_{(\gamma)}; \end{aligned} \tag{4.2.9}$$

для координаты z

$$Q^{33}_{(\gamma)} = 2\varphi_{(\gamma)};$$

для координаты x^0

$$Q^{00}_{(1)} = (\rho v^0 v^0)_{(1)} - 2\varphi_{(1)},\ Q^{01}_{(1)} = (\rho v^0 v^1)_{(1)},$$

где $\varphi = n\gamma\,(l - x)$ — потенциал силы тяжести.

Функции кинетических напряжений, соответствующие координате x, берем в форме

$$П^{\alpha 1}_{(0)} = (1/2)\,(1 + \cos\bar{x})\,F_{\alpha 1} + (1/2)\,(1 - \cos\bar{x})\,\Phi_{\alpha 1}\ (\alpha = 1,\ 2,\ 3,\ 0), \tag{4.2.10}$$

причем $\bar{x} = \pi x/l$ — безразмерная координата.

Определение функций $F_{\alpha 1}$, $\Phi_{\alpha 1}$, входящих в выражение (4.2.10), как показано в § 1 настоящей главы, сводится к решению уравнения (4.1.20) совместно с граничными условиями (4.1.21). Для цилиндрической оболочки указанное уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 f_\gamma}{\partial\varphi^2} + (r_0 + z)^2\,\frac{\partial^2 f_\gamma}{\partial z^2} + 3\,(r_0 + z)\,\frac{\partial f_\gamma}{\partial z} + f_\gamma - (r_0 + z)^2\,\frac{\partial^2 f_\gamma}{\partial {x^0}^2} = 2P_\gamma, \tag{4.2.11}$$

где

$$P_\gamma = \frac{\partial}{\partial z}\left((r_0 + z)^2\,\widetilde{Q}^{10}_{(\gamma)}\right) + (r_0 + z)^2\,\frac{\partial \widetilde{Q}^{13}_{(\gamma)}}{\partial x^0}. \tag{4.2.12}$$

Рассматриваемая оболочка замкнутая, поэтому по координате φ искомая функция f периодическая (период 2π), и ее можно представить так:

$$f_{(\gamma)} = \sum_m \left(V^{(1)}_{\gamma m}(zx^0)\cos m\varphi + V^{(2)}_{\gamma m}(zx^0)\sin m\varphi \right), \tag{4.2.13}$$

полагая, что правую часть P_γ уравнения (4.2.11) можно разложить в ряд Фурье

$$P_{(\gamma)} = \sum_m \left(P^{(1)}_{\gamma(m)}(zx^0)\cos m\varphi + P^{(2)}_{\gamma(m)}(zx^0)\sin m\varphi \right), \tag{4.2.14}$$

где

$$P^{(1)}_{\gamma(m)} = \frac{\int\limits_0^{2\pi} P_\gamma \cos m\varphi d\varphi}{\int\limits_0^{2\pi} \cos^2 m\varphi d\varphi}; \quad P^{(2)}_{\gamma(m)} = \frac{\int\limits_0^{2\pi} P_\gamma \sin m\varphi d\varphi}{\int\limits_0^{2\pi} \sin^2 m\varphi d\varphi}. \tag{4.2.15}$$

Подставляя (4.2.13) и (4.2.14) в уравнение (4.2.11), получим уравнение

$$(r_0+z)^2 \frac{\partial^2 V^{(j)}_{\gamma(m)}}{\partial z^2} + 3(r_0+z)\frac{\partial V^{(j)}_{\gamma(m)}}{\partial z} +$$

$$+(1-m^2)V^{(j)}_{\gamma(m)} - (r_0+z)^2 \frac{\partial^2 V^{(j)}_{\gamma(m)}}{\partial x^{0\,2}} = 2P^{(j)}_{\gamma(m)},$$

решение которого запишем в виде

$$V^{(j)}_{\gamma(m)} = \sum_n X^{(j)}_{\gamma(mn)}(x^0) Z_n(z), \tag{4.2.16}$$

полагая функцию $P^{(j)}_{\gamma(m)} \dfrac{1}{(r_0+z)^2}$ — разложимой в ряде Фурье

$$\frac{1}{(r_0+z)^2} P^{(j)}_{\gamma(m)} = \sum_n P^{(j)}_{\gamma(mn)}(x^0) Z_n(z), \tag{4.2.17}$$

$$P^{(j)}_{\gamma(mn)}(x^0) = \frac{\int\limits_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{(r_0+z)^2} P^{(j)}_{\gamma(m)}(zx^0) Z_n(z)\,dz}{\int\limits_{-h/2}^{h/2} Z_n^2(z)\,dz}. \tag{4.2.18}$$

Подставляя (4.2.16) и (4.2.17) в рассматриваемое уравнение, получим уравнения для искомых функций

$$\ddot{X}^{(j)}_{\gamma(mn)}(x^0) + \omega_n^2 X^{(j)}_{\gamma(mn)}(x^0) = -2P^{(j)}_{\gamma(mn)}(x^0), \tag{4.2.19}$$

$$Z''_n(z) + \frac{3}{r_0+z} Z'_n(z) + \left(\omega_n^2 + \frac{1-m^2}{(r_0+z)^2}\right) Z_n(z) = 0. \tag{4.2.20}$$

Решение уравнения (4.2.20) с учетом нулевых граничных условий ($Z_n = 0$ при $z = \pm h/2$) определяет собственные функции $Z_n(z)$ и собственные знечения ω_n для функции f. Так,

$$Z_n(z) = \frac{1}{r_0+z}\left[J_m(\omega_n(r_0+z)) - \frac{J_m(\omega_n(r_0+h/2))}{Y_m(\omega_n(r_0+h/2))}Y_m(\omega_n(r_0+z))\right] \tag{4.2.21}$$

$$(n = 0,\ 1,\ 2,\ldots),$$

где ω_n — корни характеристического уравнения

$$J_m(\omega(r_0-h/2))\,Y_m(\omega(r_0+h/2)) = \\ = J_m(\omega(r_0+h/2)).\ Y_m(\omega(r_0-h/2)). \tag{4.2.22}$$

Решением уравнения (4.2.19) являются функции

$$X^{(i)}_{\gamma(mn)}(x^0) = -\frac{2}{\omega_n}\int\limits_0^{x^0} P^{(i)}_{\gamma(mn)}(\xi)\sin\omega_n(x^0-\xi)\,d\xi. \tag{4.2.23}$$

Таким образом, на основании изложенного, имеем

$$f_\gamma = \sum_m\sum_n\left(X^{(1)}_{\gamma(mn)}(x^0)\cos m\varphi + X^{(2)}_{\gamma(mn)}(x^0)\sin m\varphi\right)Z_n(z). \tag{4.2.24}$$

Зная функции f_γ ($\gamma = 1,\ 2$), на основании (4.1.22), легко получить функции

$$F_{21} = \int\limits_0^{x^0} f_1(\varphi,\ z,\ x^0)\,dx^0;\qquad \Phi_{21} = \int\limits_0^{x^0} f_2(\varphi,\ z,\ x^0)\,dx^0. \tag{4.2.25}$$

По формуле (4.1.23) имеем

$$F_{31} = \int\limits_{-h/2}^{z}\int\limits_0^{\varphi}(r_0+z)^2\widetilde{Q}^{11}_{(1)}\,d\varphi dz;\qquad \Phi_{31} = \int\limits_0^{\varphi}\int\limits_{-h/2}^{z}(r_0+z)^2\widetilde{Q}^{11}_{(2)}\,dzd\varphi. \tag{4.2.26}$$

Функции $B_\gamma(\varphi,\ z,\ x^0)$ для уравнений (4.1.24) таковы:

$$B_\gamma = 2(r_0+z)^2\widetilde{Q}^{12}_{(\gamma)} + \int\limits_0^{x^0}\frac{\partial f_\gamma}{\partial\varphi\partial z}\,dx^0 - \frac{1}{r_0+z}\int\limits_0^{x^0}\frac{\partial f_\gamma}{\partial\varphi}\,dx^0. \tag{4.2.27}$$

Уравнение (4.1.24) для функции F_{11} запишем так:

$$\frac{\partial^2 F_{11}}{\partial z^2} - \frac{1}{r_0+z}\frac{\partial F_{11}}{\partial z} - \frac{\partial^2 F_{11}}{\partial {x^0}^2} = B_1; \tag{4.2.24$'$}$$

решение этого уравнения представим в виде

$$F_{11} = \sum_n X_n(x^0)\,Z_n(z), \tag{4.2.28}$$

полагая, что правую часть B_1 $(z,\ x^0)$ можно разложить в ряд Фурье

$$B_1(zx^0) = \sum_n B_{1(n)}(x^0)\,Z_n(z),$$

где

$$B_{1(n)}(x^0) = \int\limits_{-h/2}^{h/2} B_1(z,\ x^0)\, Z_n(z)\, dz \Big/ \int\limits_{-h/2}^{h/2} Z_n^2(z)\, dz. \qquad (4.2.29)$$

Подставляя в (4.2.24′) выражения для F_{11} и B_1, получим: для функций $X_n\ (x^0)$ уравнение

$$\ddot{X}_n\ (x^0) + \varkappa_n^2\ X_n\ (x^0) = -\ B_{1(n)}\ (x^0),$$

для функций $Z_n\ (z)$ уравнение

$$Z_n''(z) - \frac{1}{r_0+z}\, Z_n'(z) + \varkappa_n^2\, Z_n(z) = 0.$$

Решением этих уравнений, с учетом нулевых граничных условий являются функции

$$X_n(x^0) = -\frac{1}{\varkappa_n}\int\limits_0^{x^0} B_{1\ (n)}(\xi)\sin\varkappa_n(x^0 - \xi)\, d\xi, \qquad (4.2.30)$$

$$Z_n(z) = (r_0 + z)\times$$

$$\times\left[J_1(-\varkappa_n(r_0+z)) - \frac{J_1(-\varkappa_n^-(r_0+h/2))}{Y_1(-\varkappa_n^-(r_0+h/2))}\, Y_1(-\varkappa_n(r_0+z))\right], \qquad (4.2.31)$$

соответствующие им собственные значения $\varkappa_n$ суть корни характеристического уравнения

$$J_1\ (-\varkappa\ (r_0\ -\ h/2))Y_1\ (-\varkappa\ (r_0\ +\ h/2)) =$$
$$= J_1\ (-\varkappa\ (r_0\ +\ h/2))Y_1\ (-\varkappa\ (r_0\ -\ h/2)). \qquad (4.2.32)$$

Объединяя полученное, имеем

$$F_{11} = -\sum_n \frac{1}{\varkappa_n}\int\limits_0^{x^0} B_{1\ (n)}(\xi)\sin\varkappa_n(x^0 - \xi)\, d\xi\, Z_n(z). \qquad (4.2.33)$$

Аналогично изложенному находим

$$\Phi_{11} = -\sum_n \frac{1}{\varkappa_n}\int\limits_0^{x^0} B_{2\ (n)}(\xi)\sin\varkappa_n(x^0 - \xi)\, d\xi\, Z_n(z), \qquad (4.2.34)$$

где

$$B_{2\ (n)} = \int\limits_{-h/2}^{h/2} B_2(zx^0)\, Z_n'(z)\ dz \Big/ \int\limits_{-h/2}^{h/2} Z_n^2(z)\, dz.$$

Самоуравновешенные части функций нагрузок

$$\tilde{\eth}_{(\gamma)}^{1\beta} = \frac{1}{2\pi h}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-h/2}^{h/2} Q_{(\gamma)}^{1\beta}\, dz\, d\varphi\ \sum_m\sum_n \cos m\bar{\varphi}\cos n\bar{z}. \qquad (4.2.35)$$

Самоуравновешенные части остальных функций нагрузок равны нулю: $\widetilde{Q}^{00}_{(1)}=0$, $\widetilde{Q}^{33}_{(\nu)}=0$, $\widetilde{Q}^{01}_{(1)}=0$, поэтому соответствующие им функции кинетических напряжений также равны нулю.

Итак, согласно (4.1.66), функции кинетических напряжений основного тензора имеют вид

$$\Pi^{(0)}_{\alpha}=(1/2)\,(1+\cos\bar{x})\,F_{\alpha 1}+(1/2)\,(1-\cos\bar{x})\,\Phi_{\alpha 1}\ (\alpha=1,2,3,0). \quad (4.2.36)$$

В результате подстановки (4.2.36) в (4.1.8), а полученного результата в (4.1.7), учитывая (4.2.4) и (4.2.5), получим компоненты тензора $(T^{(1)}_{0})$; компоненты тензора $(T^{(2)}_{0})$ определяем по формулам (4.1.96) второй части книги. Суммируя компоненты этих тензоров, находим компоненты основного тензора

$$T^{11}_{(0)}=-2\varphi+\frac{1}{2}\left(1+\cos\bar{x}\right)Q^{11}_{(1)}+\frac{1}{2}\left(1-\cos\bar{x}\right)Q^{11}_{(2)},$$

$$T^{22}_{(0)}=\frac{1}{(r_0+z)^2}\left[-2\varphi+\frac{\pi}{2l}\sin x\frac{\partial}{\partial z}\left(\Phi_{21}-F_{21}\right)\right],$$

$$T^{33}_{(0)}=-2\varphi+\frac{\pi}{2l\,(r_0+z)^2}\sin\bar{x}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\Phi_{11}-F_{11}\right)+(r_0+z)\left(\Phi_{21}-F_{21}\right)\right]+$$
$$+\frac{1}{2}\left(1+\cos\bar{z}\right)Q^{33}_{(1)}+\frac{1}{2}\left(1-\cos\bar{z}\right)Q^{33}_{(2)},$$

$$T^{00}_{(0)}=2\varphi+\frac{1}{2}\left(1+\cos\overline{x^0}\right)Q^{00}_{(1)}-\frac{1}{2}\left(1+\cos\bar{x}\right)\widetilde{Q}^{11}_{(1)}-$$
$$-\frac{1}{2}\left(1-\cos\bar{x}\right)\widetilde{Q}^{11}_{(2)}-\frac{\pi\sin\bar{x}}{2l\,(r_0+z)^2}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\Phi_{11}-F_{11}\right)+(r_0+z)\times\right.$$
$$\left.\times\left(\left(\Phi_{21}-F_{21}\right)+(r_0+z)\frac{\partial}{\partial z}\left(\Phi_{21}-F_{21}\right)\right)\right],$$

$$T^{13}_{(0)}=\frac{1}{2}\left(1+\cos\bar{x}\right)Q^{13}_{(1)}+\frac{1}{2}\left(1-\cos\overline{x^0}\right)Q^{13}_{(2)}-$$
$$-\frac{\pi\sin\bar{x}}{4l\,(r_0+z)^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\Phi_{31}-F_{31}\right),$$

$$T^{23}_{(0)}=\frac{1}{2\,(r_0+z)^2}\left\{\frac{\pi^2}{2l^2}\cos\bar{x}\left(\Phi_{31}-F_{31}\right)+\frac{\pi}{2l}\sin\bar{x}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(F_{21}-\Phi_{21}\right)+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial z}\left(F_{11}-\Phi_{11}\right)-2\frac{F_{11}-\Phi_{11}}{r_0+z}\right]-\frac{1}{2}\left(1+\cos\bar{x}\right)\frac{\partial^2F_{31}}{\partial x^{0^2}}-$$
$$\left.-\frac{1}{2}\left(1-\cos\bar{x}\right)\frac{\partial^2\Phi_{31}}{\partial x^{0^2}}\right\},$$

$$T^{10}_{(0)}=\frac{1}{2}\left(1+\cos\bar{x}\right)Q^{10}_{(1)}+\frac{1}{2}\left(1-\cos\bar{x}\right)Q^{10}_{(2)}+$$
$$+\frac{1}{2}\left(1+\cos\overline{x^0}\right)Q^{01}_{(1)},$$

$$T^{20}_{(0)} = \frac{1}{2(r_0+z)^2}\left[\frac{\pi}{2l}\sin\bar{x}\,\frac{\partial}{\partial x^0}(\Phi_{11}-F_{11})+\right.$$

$$+\frac{1}{2}(1+\cos\bar{x})\,\frac{\partial}{\partial x^0}\left(\frac{\partial F_{31}}{\partial z}+(r_0+z)^{-1}F_{31}\right)+$$

$$\left.+\frac{1}{2}(1-\cos\bar{x})\,\frac{\partial}{\partial x^0}\left(\frac{\partial\Phi_{31}}{\partial z}+\frac{1}{r_0+z}\Phi_{31}\right)\right],$$

$$T^{30}_{(0)} = \frac{1}{2(r_0+z)^2}\left[\frac{1}{2}(1+\cos\bar{x})\frac{\partial^2 F_{31}}{\partial\varphi\partial x^0}+\frac{1}{2}(1-\cos\bar{x})\frac{\partial^2\Phi_{31}}{\partial\varphi\partial x^0}\right]+$$

$$+\frac{\pi}{4l}\sin\bar{x}\,\frac{\partial}{\partial x^0}(\Phi_{21}-F_{21}). \qquad (4.2.37)$$

$$T^{13}_{(0)} = \frac{1}{2}(1+\cos\bar{x})\,Q^{13}_{(1)}+\frac{1}{2}(1-\cos\bar{x})\,Q^{13}_{(2)}+$$

$$+\frac{\pi\sin\bar{x}}{4l(r_0+z)^2}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}(\Phi_{31}-F_{31}).$$

Построение корректирующего тензора ($T_к$) для цилиндрической оболочки при сжатии ее в условиях теплового воздействия основано на общих соображениях, изложенных в гл. 1 второй части книги, и выполнено для произвольной оболочки вращения в § 1 настоящей главы. Поэтому воспользуемся в данном случае результатами указанного параграфа. Компоненты корректирующего тензора в форме Морера имеют вид

$$T^{\alpha\beta}_{(к)} = \sum_{mnpl}\left(A_{mnpl}f^{\alpha\beta}_{(1)}+B_{mnpl}f^{\alpha\beta}_{(2)}+C_{mnpl}f^{\alpha\beta}_{(3)}+D_{mnpl}f^{\alpha\beta}_{(0)}\right). \qquad (4.2.38)$$

Функции $f_{\alpha\beta}$ вычисляем по формулам (1.4.14) второй части книги, учитывая выражения (4.2.4), (4.2.5) и (4.1.68).

Параметры A_{mnpl}, ..., D_{mnpl} компонент корректирующего тензора при малых деформациях находятся в результате решения уравнений (1.3.70) для упругопластической оболочки и для вязкоупругой оболочки.

Для упругопластической оболочки коэффициенты $F_{\alpha\beta}$ и свободные члены L_β уравнений определяются по формулам

$$F_{\gamma\beta} = \alpha_1 F^{(1)}_{\gamma\beta} - \alpha_2 F^{(2)}_{\gamma\beta};$$

$$L_\beta = 2G\,(L^{(1)}_\beta - L^{(2)}_\beta) - \alpha_1 L^{(3)}_{\gamma\beta} + \alpha_2 L^{(4)}_\beta; \qquad (4.2.39)$$

интегралы $F^{(1)}_{\gamma\beta}$, $F^{(2)}_{\gamma\beta}$, входящие в (4.2.39), — по формулам

$$F^{(1)}_{\gamma\beta} = \frac{2lr_0hx^0_2}{\pi^3}\int_{\bar{V}} A^{(1)}_{\gamma\beta}\,d\bar{V},\quad F^{(2)}_{\gamma\beta} = \frac{2lr_0hx^0_2}{\pi^3}\int_{\bar{V}} A^{(2)}_{\gamma\beta}\,d\bar{V}, \qquad (4.2.40)$$

их подынтегральные выражения имеют вид (4.1.70).

Интегралы $L_\beta^{(l)}$ $(l = 1, 2, 3, 4)$ вычисляются по формулам

$$L_\beta^{(1)} = \int\limits_S B_\beta^{(1)}\, dS,\quad L_\beta^{(2)} = \frac{2lr_0 h x_2^0}{\pi^3} \int\limits_V B_\beta^2\, d\bar{V}, \tag{4.2.41}$$

$$L_\beta^{(3)} = \frac{2lr_0 h x_2^0}{\pi^3} \int\limits_{\bar{V}} B_\beta^{(3)}\, d\bar{V},\quad L_\beta^{(4)} = \frac{2lr_0 h x_2^0}{\pi^3} \int\limits_{\bar{S}} B_\beta^{(4)}\, d\bar{V};$$

их подынтегральные выражения имеют вид (4.1.71),

Функции состояния α_1 и α_2 определяются по формулам второй части книги, диаграмма $\sigma_i \div e_i$ материала оболочки предполагается известной.

Коэффициенты $F_{\gamma\beta}$ и свободные члены L_β уравнений для вязкоупругой оболочки таковы:

$$F_{\gamma\beta} = \alpha_1 F_{\gamma\beta}^{(1)} + \alpha_2 F_{\gamma\beta}^{(2)} - (1/v^0)\,(F_{\gamma\beta}^{(3)}/3 - F_{\gamma\beta}^{(4)});$$

$$L_\beta = L_\beta^{(1)} + L_\beta^{(2)} + \alpha_1 L_\beta^{(3)} + \alpha_2 L_\beta^{(4)} - (1/v^0)\,(L_\beta^{(5)}/3 - L_\beta^{(6)}). \tag{4.2.42}$$

Интегралы $F_{\gamma\beta}^{(1)}$ и $F_{\gamma\beta}^{(2)}$ имеют вид (4.2.40):

$$F_{\gamma\beta}^{(3)} = \frac{2lr_0 h x_2^0}{\pi^3} \int\limits_{\bar{V}} \int\limits_0^{x_0} \Gamma_k (x^0 - y^0)\,(A_\gamma (y^0)\, A_\beta (x^0) + A_\gamma (x^0)\, A_\beta (y^0))\, dy^0\, d\bar{V},$$

$$F_{\gamma\beta}^{(4)} = \frac{2lr_0 h x_2^0}{\pi^3} \int\limits_{\bar{V}} \int\limits_0^{x^0} \Gamma_k (x^0 - y^0)\, A_{\gamma\beta}^{(1)} (y^0)\, dy^0\, d\bar{V}, \tag{4.2.43}$$

где A_γ определяется по формуле (4.1.72).

Интегралы $L_\beta^{(l)}$ вычисляются по формулам (4.2.41), а также по формулам

$$L_\beta^{(5)} = \frac{2lr_0 h x_2^0}{\pi^3} \int\limits_{\bar{V}} \int\limits_0^{x^0} \Gamma_k (x^0 - y^0)\,(A_\beta (x^0)\, T_1 (T_0 y^0) + A_\beta (y^0)\, T_1 (T_0 x^0))\, dy^0\, d\bar{V}, \tag{4.2.44}$$

$$L_\beta^{(6)} = \frac{2lr_0 h x_2^0}{\pi^3} \int\limits_{\bar{V}} \int\limits_0^{x^0} \Gamma_k (x^0 - y^0) B_\beta^{(3)} (y^0)\, dy^0\, d\bar{V}.$$

Функция ползучести $\Gamma_k (x^0 - y^0)$ материала тела предполагается известной, в противном случае ее можно задать экспериментальными кривыми и воспользоваться при вычислении интегралов (4.2.44) способом А. А. Ильюшина.

Функции состояния имеют вид

$$\alpha_1 = \frac{1}{2G}, \ \alpha_2 = \frac{1}{3G}\left(\frac{2G}{3K} - 1\right). \tag{4.2.45}$$

Решение указанных систем уравнений строится с помощью процедуры последовательных приближений, изложенной в § 5 гл. 1 второй части книги.

В первом приближении полагаем $m = n = p = l = 1$. Компоненты корректирующего тензора

$$T^{\alpha.\beta}_{(\kappa)} = (1/\Delta)\,(\Delta_1 f^{\alpha\beta}_{(1)} + \Delta_2 f^{\alpha\beta}_{(2)} + \Delta_3 f^{\alpha\beta}_{(3)} + \Delta_0 f^{\alpha\beta}_{(0)}). \tag{4.2.46}$$

Определители Δ, Δ_α вычисляются по известным значениям коэффициентов $F_{\gamma\beta}$ и свободных членов L_β уравнений. Сумма тензоров (4.2.37) и (4.2.46) является тензором кинетических напряжений (T) цилиндрической оболочки при сжатии в первом приближении.

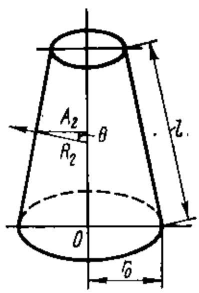

Рис. 110

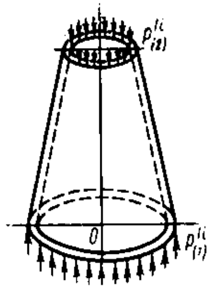

Рис. 111

Второе и последующие приближения строят аналогично изложенному.

Коническая оболочка, геометрия срединной поверхности которой показана на рис. 110, — также оболочка вращения нулевой гауссовой кривизны. Приняты следующие координаты: $\alpha = x$, $\beta = \varphi$; пределы их изменения $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

Геометрия оболочки характеризуется: параметрами Ляме $A_1 = 1$, $A_2 = r_0 - x\sin\theta$; радиусами кривизны

$$R_1 = \infty, \ R_2 = A_2/\cos\theta. \tag{4.2.47}$$

Компоненты метрического тензора

$$g_{11} = 1, \ g_{22} = (A_2 + z\cos\theta)^2, \ g_{33} = 1, \ g_{00} = -1;$$

символы Кристоффеля, отличные от нуля, таковы:

$$\Gamma_{1.22} = -(A_2 + z\cos\theta)\sin\theta, \ \ \Gamma_{2.21} = (A_2 + z\cos\theta)\sin\theta,$$

$$\Gamma_{3.22} = -(A_2 + z\cos\theta)\cos\theta, \ \ \Gamma_{2.23} = (A_2 + z\cos\theta)\cos\theta,$$

$$\Gamma^1_{22} = -(A_2 + z\cos\theta)\sin\theta, \ \ \Gamma^3_{22} = -(A_2 + z\cos\theta)\cos\theta,$$

$$\Gamma^2_{21} = \sin\theta/(A_2 + z\cos\theta), \ \ \Gamma^2_{23} = \cos\theta/(A_2 + z\cos\theta).$$

Пусть оболочка сжата торцовыми нагрузками (рис. 111)

$$p^{1l}_{(\gamma)} = p^{1l}_{(\gamma)}(\varphi, z, t) \tag{4.2.48}$$

в поле силы тяжести с потенциалом

$$\varphi = \rho g\,(l - x)/\cos\theta \tag{4.2.49}$$

при наличии теплового воздействия, характеризуемого распределением температуры

$$T^0 = T^0 (x, \varphi, z, t). \tag{4.2.50}$$

При динамическом нагружении оболочки основной искомой величиной является тензор кинетических напряжений

$$(T) = (T_0) + (T_\text{к}). \tag{4.2.51}$$

Построение основного и корректирующего тензоров осуществляется методом, изложенным в гл. 1. Компоненты тензора напряжений (σ) вектора скорости $\mathbf{v}$ и плотность ρ определяются по формулам (1.3.49) через компоненты тензора (T) оболочки.

Поверхностным силам (4.2.48) соответствуют следующие функции нагрузок: для координаты x

$$\left.\begin{aligned}
&Q^{11}_{(\gamma)} = (\rho v^1 v^1)_{(\gamma)} - p^{11}_{(\gamma)} + 2\varphi_{(\gamma)},\ Q^{12}_{(\gamma)} = (\rho v^1 v^2)_\gamma - p^{12}_{(\gamma)},\\
&Q^{13}_{(\gamma)} = (\rho v^1 v^3)_{(\gamma)} - p^{13}_{(\gamma)},\ Q^{10}_{(\gamma)} = (\rho v^0 v^1)_{(\gamma)};\\
&\text{для координаты } z\\
&Q^{30}_{(\gamma)} = (\rho v^0 v^3)_{(\gamma)},\ Q^{33}_{(\gamma)} = 2\varphi_{(\gamma)} + (\rho v^3 v^3)_{(\gamma)}.\\
&\text{для координаты } x^0\\
&Q^{00}_{(1)} = (\rho v^0 v^0)_{(1)} - 2\varphi,\ Q^{01}_{(1)} = (\rho v^0 v^1)_{(1)},\\
&Q^{02}_{(1)} = (\rho v^0 v^2)_{(1)},\ Q^{03}_{(1)} = (\rho v^0 v^3)_{(1)}.
\end{aligned}\right\} \tag{4.2.52}$$

Самоуравновешенные части $\widetilde{Q}^{\alpha\beta}_{(\gamma)}$ функций нагрузок, отличные от нуля, таковы:

$$\widetilde{Q}^{1\beta}_{(\gamma)} = \frac{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-h/2}^{h/2} Q^{1\beta}_{(\gamma)} (A_2^{(\gamma)} + z\cos 0)\, d\varphi dz}{2\pi h A_2^{(\gamma)}} \sum_m \sum_p \cos m\bar{\varphi} \cos p\bar{z}, \tag{4.2.53}$$

$$\widetilde{Q}^{33}_{(\gamma)} = 0,\ \widetilde{Q}^{0\beta}_{(\gamma)} = 0.$$

Функции кинетических напряжений $\Pi^{(0)}_{\alpha 1}$ для координаты x берем в форме (4.1.11):

$$\pi^{(0)}_{\alpha 1} = (1/2)(1 + \cos\bar{x}) F_{\alpha 1} + (1/2)(1 - \cos\bar{x}) \Phi_{\alpha 1}. \tag{4.2.54}$$

Функции $F_{\alpha 1}$ и $\Phi_{\alpha 1}$ подчинены уравнениям (4.1.12) и граничным условиям (4.1.13). Определение этих функций, как показано в § 1 настоящей главы, сводится к интегрированию уравнения (4.1.20):

$$\frac{\partial^2 f_{(\gamma)}}{\partial\varphi^2} + (A_2^{(\gamma)} + z\cos 0)^2 \frac{\partial^2 f_{(\gamma)}}{\partial z^2} + 3\cos\theta\,(A_2^{(\gamma)} + z\cos\theta) \frac{\partial f_{(\gamma)}}{\partial z} +$$

$$+ \cos^2\theta f_{(\gamma)} - (A_2^{(\gamma)} + z\cos\theta)^2 \frac{\partial^2 f_{(\gamma)}}{\partial {x^0}^2} = 2P_{(\gamma)}, \tag{4.2.55}$$

где

$$P_{(\gamma)}=(A_2^{(\gamma)}+z\cos\theta)\left[(A_2^{(\gamma)}+z\cos\theta)\left(\frac{\partial\widetilde{Q}^{10}_{(\gamma)}}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{Q}^{13}_{(\gamma)}}{\partial x^0}\right)+\right.$$
$$\left.+2\cos\theta\widetilde{Q}^{10}_{(\gamma)}\right],$$

совместно с граничными условиями (4.1.21), которые принимают вид: по координате φ функция $f_{(\gamma)}$ периодическая (период 2π); $f_{(\gamma)}=0$ при $z=z_{(\gamma)}$; $f_{(\gamma)}=0$, $\partial f_{(\gamma)}/\partial x^0=0$ при $x^0=x^0_{(1)}$.

Решение уравнения (4.2.55) представим в виде ряда

$$f_{(\gamma)}=\sum_m(V^{(1)}_{\gamma(m)}(z,x^0)\cos m\varphi+V^{(2)}_{\gamma(m)}(z,x^0)\sin m\varphi),\qquad(4.2.56)$$

полагая, что правую часть $P_{(\gamma)}$ можно разложить в ряд Фурье:

$$P_{(\gamma)}=\sum_m(P^{(1)}_{\gamma(m)}(z,x^0)\cos m\varphi+P^{(2)}_{\gamma(m)}(z,x^0)\sin m\varphi).\qquad(4.2.57)$$

Подставляя (4.2.56) и (4.2.57) в уравнение (4.2.55), получим для функций $V^{(j)}_{\gamma(m)}(z,x^0)$ уравнения

$$\frac{\partial^2V^{(j)}_{\gamma(m)}}{\partial z^2}-\frac{\partial^2V^{(j)}_{\gamma(m)}}{\partial x^{02}}+\frac{3\cos\theta}{A_2^{(\gamma)}+z\cos\theta}\frac{\partial V^{(j)}_{\gamma(m)}}{\partial z}+$$
$$+\frac{\cos^2\theta-m^2}{(A_2^{(\gamma)}+z\cos\theta)^2}V^{(j)}_{\gamma(m)}=\frac{2}{(A_2^{(\gamma)}+z\cos\theta)^2}P^{(j)}_{\gamma(m)},\qquad(4.2.58)$$

причем

$$P^{(1)}_{\gamma(m)}=\frac{\int\limits_0^{2\pi}P_{(\gamma)}\cos m\varphi d\varphi}{\int\limits_0^{2\pi}\cos^2m\varphi d\varphi},\quad P^{(2)}_{\gamma(m)}=\frac{\int\limits_0^{2\pi}P_{(\gamma)}\sin m\varphi d\varphi}{\int\limits_0^{2\pi}\sin^2m\varphi d\varphi}.$$

Решение уравнения (4.2.58) запишем в виде

$$V^{(j)}_{\gamma(m)}=\sum_pX^{(j)}_{\gamma(mp)}(x^0)Z_p(x),\qquad(4.2.59)$$

полагая, что $P^{(j)}_{\gamma(m)}$ можно разложить в ряд Фурье:

$$\frac{1}{(A_2^{(\gamma)}+z\cos\theta)^2}P^{(j)}_{\gamma(m)}=\sum_pP^{(j)}_{\gamma(mp)}(x^0)Z_p(z).\qquad(4.2.60)$$

В результате подстановок (4.2.59) и (4.2.60) в уравнение получим для функций $X^{(j)}_{\gamma(mp)}(x^0)$ уравнение

$$\ddot X^{(j)}_{\gamma(mp)}+\omega^2_{mp}X^{(j)}_{\gamma(mp)}=-2P^{(j)}_{\gamma(mp)},$$

решение которого имеет вид

$$X^{(j)}_{\gamma(mp)}(x^0)=-\frac{2}{\omega_{mp}}\int\limits_0^{x^0}P^{(j)}_{\gamma(mp)}(\xi)\sin\omega_{mp}(x^0-\xi)\,d\xi,\qquad(4.2.61)$$

где

$$P^{(j)}_{\gamma(mp)}(x^0) = \int\limits_{-h/2}^{h/2} P^{(j)}_{\gamma(m)} Z_p(z)\,dz \Bigg/ \int\limits_{-h/2}^{h/2} Z_p^2(z)\,dz.$$

Собственные функции Z_p (z) должны удовлетворять уравнению

$$Z_p'' + \frac{3\cos\theta}{A_2^{(\gamma)} + z\cos\theta} Z_p' + \left[\frac{\cos^2\theta - m^2}{(A_2^{(\gamma)} + z\cos\theta)^2} + \omega_{mp}^2\right] Z_p = 0 \quad (4.2.62)$$

и граничным условиям: $Z_p = 0$ при $z = z_\gamma$.

Такими функциями являются:

$$Z_p(z) = Z^{(1)}(\omega_p z) - \frac{Z^{(1)}(\omega_p h/2)}{Z^{(2)}(\omega_p h/2)} Z^{(2)}(\omega_p z)\ (p = 0, 1, 2, \ldots,),$$

где

$$Z^{(1)}(\omega_p z) = \frac{1}{(A_2^{(\gamma)} + z\cos\theta)} J_\nu\left(\frac{\omega_p}{\cos\theta}(A_2^{(\gamma)} + z\cos\theta)\right),$$

$$Z^{(2)}(\omega_p z) = \frac{1}{(A_2^{(\gamma)} + z\cos\theta)} Y_\nu\left(\frac{\omega_p}{\cos\theta}(A_2^{(\gamma)} + z\cos\theta)\right),$$

причем $\nu = m/\cos\theta$; собственные значения ω_{mp} являются корнями характеристического уравнения

$$Z^{(1)}(-\omega_p h/2)\, Z^{(2)}(\omega_p h/2) = Z^{(1)}(\omega_p h/2)\, Z^{(2)}(-\omega_p h/2),$$

число которых образует счетное множество.

Таким образом, имеем

$$f_\gamma = \sum_m \sum_p (X^{(1)}_{\gamma(mp)}(x^0)\cos m\varphi + X^{(2)}_{\gamma(mp)}(x^0)\sin m\varphi)\, Z_p(z). \quad (4.2.63)$$

Согласно (4.1.22), получим

$$F_{21} = \int\limits_0^{x^0} f_{(1)}(\varphi, z, x^0)\,dx^0,\quad \Phi_{21} = \int\limits_0^{x^0} f_{(2)}(\varphi, z, x^0)\,dx^0. \quad (4.2.64)$$

Пользуясь формулами (4.1.3), находим

$$F_{31} = \int\limits_{-h/2}^{z}\int\limits_0^{\varphi} (A_2^{(1)} + z\cos\theta)\left[(A_2^{(1)} + z\cos\theta)\,\tilde{Q}^{11}_{(1)} - \sin\theta \int\limits_0^{x^0} \frac{\partial f_{(1)}}{\partial z}\,dx^0\right] d\varphi dz, \quad (4.2.65)$$

$$\Phi_{31} = \int\limits_{-h/2}^{z}\int\limits_0^{\varphi} (A_2^{(2)} + z\cos\theta)\left[(A_2^{(2)} + z\cos\theta)\,\tilde{Q}^{11}_{(2)} - \sin\theta \int\limits_0^{x^0} \frac{\partial f_{(2)}}{\partial z}\,dx^0\right] d\varphi dz.$$

Функции F_{11} и Φ_{11} удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}-\frac{\cos\theta}{A_2+z\cos\theta}\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{\partial^2 f}{\partial x^{02}}=B, \qquad (4.2.66)$$

где

$$B_\gamma=2\left(A_2^{(\gamma)}+z\cos\theta\right)^2\widetilde{Q}^{12}_{(\gamma)}-$$

$$-\frac{2\cos\theta}{A_2^{(\gamma)}+z\cos\theta}\left[\int_0^{\varphi}\left(A_2^{(\gamma)}+z\cos\theta\right)^2\widetilde{Q}^{11}_{(\gamma)}\,d\varphi-\left(A_2^{(\gamma)}+z\cos\right)\times\right.$$

$$\left.\times\sin\theta\int_0^{x^0}\frac{\partial f_{(\gamma)}}{\partial z}\,dx^0\right]+\int_0^{x^0}\frac{\partial^2 f_{(\gamma)}}{\partial\varphi\partial z}\,dx^0-\frac{\cos\theta}{A_2^{(\gamma)}+z\cos\theta}\int_0^{x^0}\frac{\partial f_{(\gamma)}}{\partial\varphi}\,dx^0.$$

Решение уравнения (4.2.66) представим в виде

$$f=\sum_p X^{(j)}_{\gamma(p)}(x^0)\,Z_p(z), \qquad (4.2.67)$$

полагая, что правую часть B можно разложить в ряд Фурье по собственным функциям $Z_p(z)$:

$$B=\sum_p B_{\gamma(p)}(x^0)\,Z_p(z), \qquad (4.2.68)$$

где

$$B_{\gamma(p)}(x^0)=\int_{-h/2}^{h/2}BZ_p(z)\,dz\Bigg/\int_{-h/2}^{h/2}Z_p^2(z)dz.$$

Подставляя (4.2.67) и (4.2.68) в (4.2.66), получим для функций $X_{\gamma(p)}(x^0)$ уравнение

$$\ddot{X}_{\gamma(p)}+\varkappa_p^2X_{\gamma(p)}=-B_{\gamma(p)},$$

решением которого являются функции

$$X_{\gamma(p)}(x^0)=-\frac{1}{\varkappa_p}\int_0^{x^0}B_{\gamma(p)}(\xi)\sin\varkappa_p(x^0-\xi)d\xi. \qquad (4.2.69)$$

Собственные функции $Z_p(z)$ удовлетворяют уравнениям

$$Z''-\frac{\cos\theta}{A_2+z\cos\theta}Z'+\varkappa_p^2Z=0$$

и нулевым граничным условиям: $Z_p=0$ при $z=z_\gamma$. Отсюда следует вид собственных функций:

$$Z_p(z)=Z^{(1)}(\varkappa_p z)-\frac{Z^{(1)}(\varkappa_p h/2)}{Z^{(2)}(\varkappa_p h/2)}Z^{(2)}(\varkappa_p,z), \qquad (4.2.70)$$

где

$$Z^{(1)}=(A_2+z\cos\theta)\,J_1\left(i\,\frac{\varkappa_p}{\cos\theta}(A_2+z\cos\theta)\right),$$

$$Z^{(2)}=(A_2+z\cos\theta)\,Y_1\left(i\,\frac{\varkappa_p}{\cos\theta}(A_2+z\cos\theta)\right).$$

Собственные значения $\varkappa_p$ являются корнями характеристического уравнения

$$J_1\left(i\frac{\varkappa}{\cos\theta}\left(A_2-\frac{h}{2}\cos\theta\right)\right)Y_1\left(i\frac{\varkappa}{\cos\theta}\left(A_2+\frac{h}{2}\cos\theta\right)\right)=$$
$$=J_1\left(i\frac{\varkappa}{\cos\theta}\left(A_2+\frac{h}{2}\cos\theta\right)\right)Y_1\left(i\frac{\varkappa}{\cos\theta}\left(A_2-\frac{h}{2}\cos\theta\right)\right).$$

На основании изложенного имеем

$$F_{11}=-\sum_p\frac{1}{\varkappa_p}\int_0^{x^0}B_{1\,(p)}(\xi)\sin\varkappa_p(x^0-\xi)\,d\xi Z_p(z),$$
$$\Phi_{11}=-\sum_p\frac{1}{\varkappa_p}\int_0^{x^0}B_{2\,(p)}(\xi)\sin\varkappa_p(x^0-\xi)\,d\xi Z_p(z). \tag{4.2.71}$$

Функции кинетических напряжений для координат z и x^0 равны нулю, так как равны нулю самоуравновешенные части $\widetilde{Q}^{33}_{(\gamma)}$ и $\widetilde{Q}^{0\beta}_{(1)}$ функций нагрузок.

Полные функции кинетических напряжений основного тензора $\Pi^{(0)}_\alpha$, на основании (4.1.66), таковы:

$$\Pi^0_\alpha=(1/2)(1+\cos\bar{x})F_{\alpha 1}+(1/2)(1-\cos\bar{x})\Phi_{\alpha 1}. \tag{4.2.72}$$

Компоненты основного тензора (T_0) имеют следующий вид:

$$T^{11}_{(0)}=-2\varphi+(1/2)\left(1+\cos\bar{x}\right)Q^{11}_{(1)}+(1/2)\left(1-\cos\bar{x}\right)Q^{11}_{(2)};$$
$$T^{22}_{(0)}=-2\varphi+\frac{\pi\sin\bar{x}}{2l(A_2+z\cos\theta)^2}\frac{\partial}{\partial z}(\Phi_{21}-F_{21});$$
$$T^{33}_{(0)}=2\varphi+(1/2)\left(1+\cos\bar{z}\right)Q^{33}_{(1)}+(1/2)\left(1-\cos\bar{z}\right)Q^{33}_{(2)}+$$
$$+\frac{\pi\sin\bar{x}}{2l(A_2+z\cos\theta)^2}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}(\Phi_{11}-F_{11})+(A_2+z\cos\theta)\cos\theta\,(\Phi_{21}-F_{21})\right];$$
$$T^{00}_{(0)}=+2\varphi+\frac{1}{2}\left(1+\cos\bar{x^0}\right)Q^{00}_{(1)}-\frac{1}{2}\left(1+\cos\bar{x}\right)\frac{1}{(A_2+z\cos\theta)^2}\times$$
$$\times\left(\frac{\partial F_{31}}{\partial\varphi\partial x}+(A_2+z\cos\theta)\sin\theta\frac{\partial F_{21}}{\partial z}\right)-\frac{1}{2}\left(1-\cos\bar{x}\right)\frac{1}{(A_2+z\cos\theta)^2}\times$$
$$\times\left(\frac{\partial^2\Phi_{31}}{\partial\varphi\partial z}+(A_2+z\cos\theta)\sin\theta\frac{\partial\Phi_{21}}{\partial z}\right)+\frac{\pi\sin\bar{x}}{2l(A_2+z\cos\theta)^2}\times$$
$$\times\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}(F_{11}-\Phi_{11})+(A_2+z\cos\theta)\cos\theta\,(F_{21}-\Phi_{21})+\right.$$
$$\left.+(A_2+z\cos\theta)^2\frac{\partial}{\partial z}(\Phi_{21}-F_{21})\right]; \tag{4.2.73}$$
$$T^{12}_{(0)}=(1/2)\left(1+\cos\bar{x}\right)Q^{12}_{(1)}+(1/2)\left(1-\cos\bar{x}\right)Q^{12}_{(2)}+$$
$$+\frac{\pi\sin\bar{x}}{4l(A_2+z\cos\theta)^2}\left[\frac{\partial}{\partial z}(F_{31}-\Phi_{31})+\frac{\cos\theta}{A_2+z\cos\theta}(F_{31}-\Phi_{31})\right];$$

$$T^{13}_{(0)} = (1/2)\left(1+\cos\bar{x}\right) Q^{13}_{(1)} + (1/2)\left(1-\cos\bar{x}\right) Q^{13}_{(2)} + \\ + \frac{\pi \sin\bar{x}}{4l\,(A_2+z\cos\theta)^2}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\,(F_{31}-\Phi_{31});$$

$$T^{23}_{(0)} = \frac{1}{2}\left(1+\cos\bar{x}\right)\frac{\sin\theta}{2\,(A_2+z\cos\theta)^3}\left(\frac{\partial F_{21}}{\partial\varphi}-\frac{\partial F_{11}}{\partial z}\right) + \\ + \frac{1}{2}\left(1-\cos\bar{x}\right)\frac{\sin\theta}{2\,(A_2+z\cos\theta)^3}\left(\frac{\partial \Phi_{21}}{\partial\varphi}-\frac{\partial \Phi_{11}}{\partial z}\right) + \frac{\pi\sin\bar{x}}{4l\,(A_2+z\cos\theta)^2}\times \\ \times\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}(F_{21}-\Phi_{21}) + \frac{\partial}{\partial z}(F_{11}-\Phi_{11}) - \frac{2\cos\theta}{(A_2+z\cos\theta)}(F_{11}-\Phi_{11}) + \right. \\ \left. + \frac{\sin\theta}{A_2+z\cos\theta}(F_{31}-\Phi_{31})\right] + \frac{\pi^2\cos\bar{x}}{4l^2\,(A_2+z\cos\theta)^2}(\Phi_{31}-F_{31});$$

$$T^{10}_{(0)} = \frac{1}{2}\left(1+\cos\overline{x^0}\right) Q^{01}_{(1)} + \frac{1}{2}\left(1+\cos\bar{x}\right) Q^{10}_{(1)} + \frac{1}{2}\left(1-\cos\bar{x}\right) Q^{10}_{(2)};$$

$$T^{20}_{(0)} = \frac{1}{2}\left(1+\cos\overline{x^0}\right) Q^{02}_{(1)} + \frac{1}{2}\left(1+\cos\bar{x}\right)\frac{1}{2\,(A_2+z\cos\theta)^2}\,\frac{\partial}{\partial x^0}\times \\ \times\left[\frac{\partial F_{31}}{\partial z} + \frac{1}{A_2+z\cos\theta}(\sin\theta F_{11}+\cos\theta F_{31})\right] + \frac{1}{2}\left(1-\cos\bar{x}\right)\times \\ \times\frac{1}{2\,(A_2+z\cos\theta)^2}\cdot\frac{\partial}{\partial x^0}\left[\frac{\partial\Phi_{31}}{\partial z} + \frac{1}{A_2+z\cos\theta}(\sin\theta\Phi_{11}+\cos\theta\Phi_{31})\right] + \\ + \frac{\pi\sin\bar{x}}{4l\,(A_2+z\cos\theta)^2}\,\frac{\partial}{\partial x_0}\,(\Phi_{11}-F_{11});$$

$$T^{30}_{(0)} = \frac{1}{2}\left(1+\cos\bar{x}\right) Q^{03}_{(1)} + \frac{1}{2}\left(1+\cos\bar{x}\right)\frac{1}{2\,(A_2+z\cos\theta)^2}\,\frac{\partial}{\partial x^0}\times \\ \times\left(\frac{\partial F_{31}}{\partial\varphi} + (A_2+z\cos\theta)\sin\theta F_{21}\right) + \frac{1}{2}\left(1-\cos\bar{x}\right)\frac{1}{2\,(A_2+z\cos\theta)^2}\times \\ \times\frac{\partial}{\partial x^0}\left(\frac{\partial\Phi_{31}}{\partial\varphi} + (A_2+z\cos\theta)\sin\theta\Phi_{21}\right) + \frac{\pi\sin\bar{x}}{4l}\,\frac{\partial}{\partial x^0}\,(\Phi_{21}-F_{21}).$$

Компоненты корректирующего тензора в форме Морера таковы:

$$T^{\alpha\beta}_{(\text{к})} = \sum_{mnpl}\left(A_{mnpl}\,f^{\alpha\beta}_{(1)} + B_{mnpl}\,f^{\alpha\beta}_{(2)} + C_{mnpl}\,f^{\alpha\beta}_{(3)} + D_{mnpl}\,f^{\alpha\beta}_{(0)}\right). \tag{4.2.74}$$

Функции $f^{\alpha\beta}_{(\gamma)}$ $(mnpl)$ определяем по формулам (1.4.14) второй части книги.

Параметры A_{mnpl}, ..., D_{mnpl} компонент корректирующего тензора для упругопластической оболочки при малых деформациях находим в результате решения системы уравнений (1.3.70).

Коэффициенты $F_{\gamma\beta}$ и свободные члены L_β уравнений имеют вид

$$F_{\gamma\beta} = \alpha_1 F^{(1)}_{\gamma\beta} - \alpha_2 F^{(2)}_{\gamma\beta}, \qquad (4.2.75)$$

$$L_\beta = 2G(L^{(1)}_\beta - L^{(2)}_\beta) - \alpha_1 L^{(3)}_\beta + \alpha_2 L^{(4)}_\beta.$$

Интегралы $F^{(1)}_{\gamma\beta}$ и $F^{(2)}_{\gamma\beta}$ вычисляем по формулам

$$F^{(1)}_{\gamma\beta} = \frac{2lr_0 hx_2^0}{\pi^3} \int\limits_{\bar V} A^{(1)}_{\gamma\beta} \left(1 - \frac{x}{r_0} \sin\theta\right) d\bar V,$$

$$F^{(2)}_{\gamma\beta} = \frac{2lr_0 hx_0^2}{\pi^3} \int\limits_{\bar V} A^{(2)}_{\gamma\beta} \left(1 - \frac{x}{r_0} \sin\theta\right) d\bar V, \qquad (4.2.76)$$

а их подынтегральные выражения — по формулам

$$A^{(1)}_{\gamma\beta} = 2\,[f^{11}_{(\gamma)} f^{11}_{(\beta)} + (A_2 + z\cos\theta)^4 f^{22}_{(\gamma)} f^{22}_{(\beta)} + f^{33}_{(\gamma)} f^{33}_{(\beta)} + f^{00}_{(\gamma)} f^{00}_{(\beta)} +$$
$$+ 2\,((A_2 + z\cos\theta)^2 f^{12}_{(\gamma)} f^{12}_{(\beta)} + f^{13}_{(\gamma)} f^{13}_{(\beta)} + (A_2 + z\cos\theta)^2 f^{23}_{(\gamma)} f^{23}_{(\beta)} -$$
$$- f^{10}_{(\gamma)} f^{10}_{(\beta)} - (A_2 + z\cos\theta)^2 f^{20}_{(\gamma)} f^{20}_{(\beta)} - f^{30}_{(\gamma)} f^{30}_{(\beta)})], \qquad (4.2.76')$$

$$A^{(2)}_{\gamma\beta} = (f^{11}_{(\gamma)} + (A_2 + z\cos\theta)^2 f^{22}_{(\gamma)} + f^{33}_{(\gamma)} - f^{00}_{(\gamma)}) \times$$
$$\times (f^{11}_{(\beta)} + (A_2 + z\cos\theta)^2 f^{22}_{(\beta)} + f^{33}_{(\beta)} - f^{00}_{(\beta)}).$$

Интегралы $L^{(l)}_\beta$ в данном случае вычисляем по формулам

$$L^{(1)}_\beta = 0,\ L^{(2)}_\beta = \frac{2lr_0 hx_2^0}{\pi^3} \int\limits_{\bar V} B^{(2)}_\beta \left(1 - \frac{x}{r_0} \sin\theta\right) d\bar V,$$

$$L^{(3)}_\beta = \frac{2lhr_0 x_2^0}{\pi^3} \int\limits_{\bar V} B^{(3)}_\beta \left(1 - \frac{x}{r_0} \sin\theta\right) d\bar V,$$

$$L^{(4)}_\beta = \frac{2lr_0 hx_2^0}{\pi^3} \int\limits_{\bar V} B^{(4)}_\beta \left(1 - \frac{x}{r_0} \sin\theta\right) d\bar V; \qquad (4.2.77)$$

их подынтегральные выражения

$$B^{(2)}_\beta = \alpha T^0 (f^{11}_{(\beta)} + (A_2 + z\cos\theta)^2 f^{22}_{(\beta)} + f^{33}_{(\beta)} - f^{00}_{(\beta)}),$$

$$B^{(3)}_\beta = 2\,[T^{11}_{(0)} f^{11}_{(\beta)} + T^{22}_{(0)} (A_2 + z\cos\theta)^4 f^{22}_{(\beta)} + T^{33}_{(0)} f^{33}_{(\beta)} +$$
$$+ T^{00}_{(0)} f^{00}_{(\beta)} + 2\,(T^{13}_{(0)} f^{13}_{(\beta)} + T^{12}_{(0)} (A_2 + z\cos\theta)^2 f^{12}_{(\beta)} + \qquad (4.2.77')$$
$$+ T^{23}_{(0)} (A_2 + z\cos\theta)^2 f^{23}_{(\beta)} - T^{10}_{(0)} f^{10}_{(\beta)} - T^{20}_{(0)} (A_2 + z\cos\theta)^2 f^{20}_{(\beta)} -$$
$$- T^{30}_{(0)} f^{30}_{(\beta)})],$$

$$B^{(4)} = (T^{11}_{(0)} + (A_2 + z\cos\theta)^2 T^{22}_{(0)} + T^{33}_{(0)} - T^{00}_{(0)}) \times$$
$$\times (f^{11}_{(\beta)} + (A_2 + z\cos\theta)^2 f^{22}_{(\beta)} + f^{33}_{(\beta)} - f^{00}_{(\beta)}).$$

Функции состояния α_1 и α_2 определяем по формулам (1.3.72), полагая известной диаграмму $\sigma_i \div e_i$ материала оболочки.

Параметры A_{mnpl}, ..., D_{mnpl} компонент корректирующего тензора для вязкоупругой оболочки при малых деформациях находим в результате решения системы уравнений (1.3.70). Коэффициенты $F_{\gamma\beta}$ и свободные члены L_β уравнений имеют вид

$$F_{\gamma\beta} = \alpha_1 F_{\gamma\beta}^{(1)} + \alpha_2 F_{\gamma\beta}^{(2)} - (1/v^0)(F_{\gamma\beta}^{(3)}/3 - F_{\gamma\beta}^{(4)}), \tag{4.2.78}$$

$$L_\beta = L_\beta^{(1)} + L_\beta^{(2)} + \alpha_1 L_\beta^{(3)} + \alpha_2 L_\beta^{(4)} - (1/v_0)(L_\beta^{(5)}/3 - L_\beta^{(6)}).$$

Интегралы $F_{\gamma\beta}^{(1)}, \ldots, F_{\gamma\beta}^{(4)}$ вычисляем по формулам (4.2.76), а также по формулам.

$$F_{\gamma\beta}^{(3)} = \frac{2lr_0 hx_2^0}{\pi^3} \int_{\overline{V}} \int_0^{x_0} \Gamma_k (x^0 - y^0)(A_\gamma(y^0) A_\beta(x^0) +$$

$$+ A_\gamma(x^0) A_\beta(y^0))\, dy^0 (1 - (x/r_0)\sin\theta)\, d\overline{V}, \tag{4.2.79}$$

$$F_{\gamma\beta}^{(4)} = \frac{2lr_0 hx_2^0}{\pi^3} \int_{\overline{V}} \int_0^{x^0} \Gamma_k (x^0 - y^0) A_{\gamma\beta}^{(1)}(y^0)\, dy^0 \left(1 - \frac{x}{r^0}\sin\theta\right) d\overline{V},$$

где

$$A_\gamma = f_\gamma^{11} + (A_2 + z\cos\theta)^2 f_\gamma^{22} + f_\gamma^{33} - f_\gamma^{00}. \tag{4.2.79'}$$

Интегралы $L_\beta^{(1)}, \ldots, L_\beta^{(6)}$ вычисляем по формулам (4.2.77), а также по формулам

$$L_\beta^{(5)} = \frac{2lr_0 hx_2^0}{\pi^3} \int_{\overline{V}} \int_0^{x^0} \Gamma_k (x^0 - y^0)(A_\beta(x^0) T_1(T^0 y^0) +$$

$$+ A_\beta(y^0) T_1(T_0 x^0))\, dy^0 (1 - (x/r_0)\sin\theta)\, d\overline{V}, \tag{4.2.80}$$

$$L_\beta^{(6)} = \frac{2lr_0 hx_2^0}{\pi^3} \int_{\overline{V}} \int_0^{x^0} \Gamma_k (x^0 - y^0) B_\beta^{(3)}(y_0)\, dy^0 \left(1 - \frac{x}{r_0}\sin\theta\right) d\overline{V},$$

функцию ползучести $\Gamma_к\,(x^0 - y^0)$ материала оболочки предполагаем известной.

Функции состояния α_1 и α_2 имеют вид (1.3.74). Решение указанных систем уравнений строим с помощью процедуры последовательных приближений. В первом приближении полагаем $m = n = p = l = 1$, тогда компоненты корректирующего тензора равны:

$$T_{(к)}^{\alpha\beta} = (\Delta_1 f_{(1)}^{\alpha\beta} + \Delta_2 f_{(2)}^{\alpha\beta} + \Delta_3 f_{(3)}^{\alpha\beta} + \Delta_0 f_{(0)}^{\alpha\beta})/\Delta. \tag{4.2.81}$$

Определители Δ, Δ_α ($\alpha = 1, 2, 3, 0$) вычисляются по известным значениям коэффициентов $F_{\gamma\beta}$ и свободных членов L_β уравнений.

Второе и последующие приближения строят аналогично изложенному.

Сумма тензоров (T_0) и $(T_к)$ является тензором кинетических напряжений (T) конической оболочки.

§ 3. Цилиндрическая и коническая оболочки под действием внутреннего и внешнего давлений

Рассмотрим напряженное состояние цилиндрической оболочки, находящейся под действием динамически приложенных внутреннего и внешнего давлений (рис. 112):

$$p_{(\gamma)}^{3i} = p_{(\gamma)}^{3i}\ (x,\ \varphi,\ t) \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ \gamma = 1,\ 2). \tag{4.3.1}$$

При динамическом нагружении тензор напряжений (σ), характеризующий напряженное состояние оболочки, определяется через тензор кинетических напряжений (T). Построение тензора (T) выполняется на основе результатов, полученных в § 1 настоящей главы, с учетом особенностей геометрии цилиндрической оболочки.

Внешнему и внутреннему давлениям (4.3.1), действующим на оболочку, соответствуют следующие функции нагрузок: для координаты z $(z = z_\gamma)$

$$\left.\begin{aligned} Q_{(\gamma)}^{33} &= (\rho v^3 v^3)_{(\gamma)} - p_{(\gamma)}^{33},\ Q_{(\gamma)}^{31} = (\rho v^3 v^1)_{(\gamma)} - p_{(\gamma)}^{31}, \\ Q_{(\gamma)}^{32} &= (\rho v^3 v^2)_{(\gamma)} - p_{(\gamma)}^{32},\ Q_{(\gamma)}^{30} = (\rho v^3 v_0)_{(\gamma)}; \\ &\text{для координаты } x^0 \\ Q_{(1)}^{00} &= (\rho v^0 v^0)_{(1)},\ Q_{(1)}^{01} = (\rho v^0 v^1)_{(1)}, \\ Q_{(1)}^{02} &= (\rho v^0 v^2)_{(1)},\ Q_{(1)}^{03} = (\rho v^0 v^3)_{(1)}. \end{aligned}\right\} \tag{4.3.2}$$

Самоуравновешенные части функций нагрузок таковы:

$$\widetilde{Q}_{(\gamma)}^{3\beta} = \frac{1}{2\pi l}\int_0^{2\pi}\int_0^{l} Q_{(\gamma)}^{3\beta}\, d\varphi dx \sum_m \sum_p \cos m\,\overline{\varphi} \cos p\,\overline{x}; \tag{4.3.3}$$

$$\widetilde{Q}_{(1)}^{0\beta} = 0 .$$

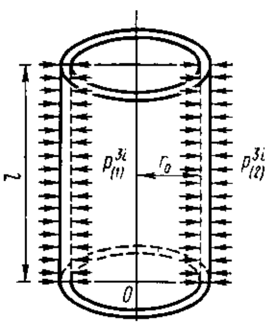

Рис. 112

Функции кинетических напряжений $\Pi_{\alpha 3}^{(0)}$ берем в виде

$$\Pi_{\alpha 3}^{(0)} = (1/2)\left(1 + \cos \overline{z}\right) F_{\alpha 3} + + (1/2)\left(1 - \cos \overline{z}\right) \Phi_{\alpha 3}. \tag{4.3.4}$$

Функции $F_{\alpha 3}$ и $\Phi_{\alpha 3}$, входящие в последнее выражение, для произвольной оболочки вращения, построены в § 1 настоящей главы. Воспользуемся результатами этого параграфа.

Уравнение (4.1.49) для цилиндрической оболочки принимает вид

$$\frac{\partial^2 f_\gamma}{\partial \varphi^2} + (r_0 + z_\gamma)^2 \frac{\partial^2 f_\gamma}{\partial x^2} - (r_0 + z_\gamma)^2 \frac{\partial^2 f_\gamma}{\partial x^{02}} = 2A_\gamma, \tag{4.3.5}$$

где

$$f_{(1)}=\frac{\partial^2 F_{23}}{\partial\varphi\partial x^0},\ f_2=\frac{\partial^2 \Phi_{23}}{\partial\varphi\partial x^0};$$

$$A_\gamma=(r_0+z_\gamma)^2\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial\tilde{Q}^{31}_{(\gamma)}}{\partial x^0}-\frac{\partial\tilde{Q}^{30}_{(\gamma)}}{\partial x}\right)\quad(\gamma=1,2).$$

Учитывая периодичность функций f_γ для замкнутой цилиндрической оболочки, решение уравнения (6.3.18) запишем так:

$$f_\gamma=\sum_m (V^{(1)}_{\gamma(m)}\cos m\varphi+V^{(2)}_{\gamma(m)}\sin m\varphi),\tag{4.3.6}$$

считая, что правую часть A_γ уравнения (6.5.18) можно разложить в ряд

$$A_\gamma=\sum_m (A^{(1)}_{\gamma(m)}\cos m\varphi+A^{(2)}_{\gamma(m)}\sin m\varphi),\tag{4.3.7}$$

где

$$A^{(1)}_{\gamma(m)}=\frac{\int\limits_0^{2\pi} A_\gamma\cos m\varphi d\varphi}{\int\limits_0^{2\pi}\cos^2 m\varphi d\varphi};\ A^{(2)}_{\gamma(m)}=\frac{\int\limits_0^{2\pi} A_\gamma\sin m\varphi d\varphi}{\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 m\varphi d\varphi}\quad(m=0,1,2,\ldots).$$

Подставляя (4.3.6), (4.3.7) в уравнение (4.3.5), получим уравнение для функций $V^{(j)}_{\gamma(m)}$ $(x,\ x^0$ $(j=1,2)$

$$\frac{\partial^2 V^{(j)}_{\gamma(m)}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 V^{(j)}_{\gamma(m)}}{\partial x^{02}}-\frac{m^2}{(r_0+z_\gamma)^2}V^{(j)}_{\gamma(m)}=\frac{2}{(r_0+z_\gamma)^2}A^{(j)}_{\gamma(m)}.\tag{4.3.8}$$

Решение уравнения (4.3.8) представим в виде

$$V^{(j)}_{\gamma(m)}=\sum_p X^{(j)}_{\gamma(mp)}(x^0)Z_p(x),\tag{4.3.9}$$

предполагая, что $A^{(j)}_{\gamma(m)}$ можно разложить в ряд Фурье по собственным функциям Z_p (x):

$$A^{(j)}_{\gamma(m)}(x,x^0)=\sum_p A^{(j)}_{\gamma(mp)}(x^0)Z_p(x),\tag{4.3.10}$$

где

$$A^{(j)}_{\gamma(mp)}(x^0)=\int\limits_0^l A^{(j)}_{\gamma(mp)}Z_p(x)dx\Big/\int\limits_0^l Z_p^2(x)dx.$$

Подставляя (4.3.9) и (4.3.10) в уравнение (4.3.8), получим для функций $X^{(j)}_{\gamma(mp)}$ (x^0) уравнение

$$\ddot{X}^{(j)}_{\gamma(mp)}+\varkappa_p^2X^{(j)}_{\gamma(mp)}=-\frac{2}{(r_0+z_\gamma)^2}A^{(j)}_{\gamma(mp)},$$

решение которого имеет вид

$$X^{(j)}_{\gamma(mp)}(x^0) = -\frac{2}{\varkappa_p (r_0+z_\gamma)^2}\int\limits_0^{x^0} A^{(j)}_{\gamma(mp)}(\xi)\sin\varkappa_p(x^0-\xi)\,d\xi. \quad (4.3.11)$$

Собственные функции $Z_p(x)$ и их собственные значения $\varkappa_p$ находятся в результате интегрирования уравнения

$$Z_p''(x)+\left(\varkappa_p^2-\frac{m^2}{(r_0+z_\gamma)^2}\right)Z_p(x)=0$$

с учетом следующих условий: $Z_p(x) = 0$ при $x = 0$, $x = l$. Отсюда находим:

$$Z_p(x)=\sin(p\pi x/l)\ (p=1, 2, \ldots);$$

$$\varkappa_p = \sqrt{p^2\pi^2/l^2+m^2/(r_0+z_\gamma)^2}.$$

Объединяя полученное в единое выражение, имеем

$$f_\gamma=\sum_m\sum_p \left(X^{(1)}_{\gamma(mp)}(x^0)\cos m\varphi+X^{(2)}_{\gamma(mp)}(x^0)\sin m\varphi\right)\sin\frac{p\pi x}{l}, \quad (4.3.12)$$

причем

$$X^{(j)}_{\gamma(mp)}(x^0)=\frac{2}{r_0+z_\gamma}\left[p^2\pi^2\left(\frac{r_0+z_\gamma}{l}\right)^2+m^2\right]^{-1/2}\times$$

$$\times\int\limits_0^{x^0} A^{(j)}_{\gamma(mp)}(\xi)\sin\varkappa_p(x^0-\xi)\,d\xi. \quad (4.3.13)$$

Интегрируя с учетом граничных условий (4.1.45), получим

$$F_{23}=\int\limits_0^{\varphi}\int\limits_0^{x^0} f_{(1)}\,d\varphi dx^0;\ \Phi_{23}=\int\limits_0^{\varphi}\int\limits_0^{x_0} f_{(2)}\,d\varphi dx^0. \quad (4.3.14)$$

Функции F_{13} и Φ_{13} определяем по формулам (4.1.54)

$$F_{13}=\left(r_0-\frac{h}{2}\right)\int\limits_0^x\int\limits_0^{\varphi}\left[2\left(r_0-\frac{h}{2}\right)\widetilde{Q}^{33}_{(1)}-\int\limits_0^{x^0}\frac{\partial f_{(1)}}{\partial x}dx^0\right]dxd\varphi,$$

$$\Phi_{13}=\left(r_0+\frac{h}{2}\right)\int\limits_0^x\int\limits_0^{\varphi}\left[2\left(r_0+\frac{h}{2}\right)\widetilde{Q}^{33}_{(2)}-\int\limits_0^{x^0}\frac{\partial f_{(2)}}{\partial x}dx^0\right]dxd\varphi. \quad (4.3.15)$$

На основании формулы (4.1.56) функции F_{33} и Φ_{33} имеют вид:

$$F_{33}=\int\limits_0^x\int\limits_0^x B_1\,dxdx-\frac{x}{l}\int\limits_0^l\int\limits_0^x B_1\,dxdx;$$

$$\Phi_{33}=\int\limits_0^x\int\limits_0^x B_2\,dxdx-\frac{x}{l}\int\limits_0^l\int\limits_0^x B_2\,dxdx, \quad (4.3.16)$$

где

$$B_\gamma = 2(r_0 + z_\gamma)^2 \widetilde{Q}^{32}_{(\gamma)} + \int\limits_0^{x^0} \frac{\partial^2 f_\gamma}{\partial x \partial \varphi} dx^0 - \frac{2}{r_0 + z_\gamma} \times$$

$$\times \int\limits_0^{\varphi} \left(2(r_0 + z_\gamma)^2 \widetilde{Q}^{33}_{(\gamma)} - (r_0 + z_\gamma) \int\limits_0^{x_0} \frac{\partial f_\gamma}{\partial x} dx^0 \right) d\varphi .$$

Для координаты x^0 функции кинетических напряжений равны нулю, так как $\widetilde{Q}^{0\beta}_{(\gamma)} = 0$.

Полные функции кинетических напряжений основного тензора

$$\Pi^{(0)}_\alpha = (1/2)(1 + \cos \bar{z}) F_{\alpha 3} + (1/2)(1 - \cos \bar{z}) \Phi_{\alpha 3}. \qquad (4.3.17)$$

Компоненты основного тензора (T_0) оболочки таковы:

$$T^{11}_{(0)} = \frac{\pi \sin \bar{z}}{2h(r_0 + z)^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\Phi_{33} - F_{33}),$$

$$T^{22}_{(0)} = \frac{\pi \sin \bar{z}}{2h(r_0 + z)^2} \frac{\partial}{\partial x} (\Phi_{23} - F_{23}),$$

$$T^{33}_{(0)} = \frac{1}{2} (1 + \cos \bar{z}) Q^{33}_{(1)} + \frac{1}{2} (1 - \cos \bar{z}) Q^{33}_{(2)},$$

$$T^{00}_{(0)} = \frac{1}{2} (1 + \cos \bar{x}^0) Q^{00}_{(1)} - \frac{1}{2} (1 + \cos \bar{z}) \frac{1}{(r_0 + z)^2} \frac{\partial}{\partial x} \times$$

$$\times \left(\frac{\partial F_{13}}{\partial \varphi} + (r_0 + z) F_{23} \right) - \frac{1}{2} (1 - \cos \bar{z}) \frac{1}{(r_0 + z)^2} \frac{\partial}{\partial x} \times$$

$$\times \left(\frac{\partial \Phi_{13}}{\partial \varphi} + (r_0 + z) \Phi_{23} \right) - \frac{\pi \sin \bar{z}}{h(r_0 + z)^2} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\Phi_{23} - F_{23}) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial \varphi} (\Phi_{33} - F_{33}) \right],$$

$$T^{12}_{(0)} = \frac{1}{2} (1 + \cos \bar{z}) \frac{1}{2(r_0 + z)^3} \left(\frac{\partial F_{23}}{\partial \varphi} - \frac{\partial F_{13}}{\partial x} + \frac{\partial^2 F_{13}}{\partial x^{0^2}} (r_0 + z) \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} (1 - \cos \bar{z}) \frac{1}{2(r_0 + z)^3} \left(\frac{\partial \Phi_{23}}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Phi_{33}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Phi_{13}}{\partial x^{0^2}} (r_0 + z) \right) +$$

$$+ \frac{\pi \sin \bar{z}}{4h(r_0 + z)^2} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} (F_{23} - \Phi_{23}) + \frac{\partial}{\partial x} (F_{33} - \Phi_{33}) + \frac{F_{13} - \Phi_{13}}{r_0 + z} \right] +$$

$$+ \frac{\pi^2 \cos \bar{z}}{4h^2 (r_0 + z)^2} (\Phi_{13} - F_{13}), \qquad (4.3.18)$$

$$T^{13}_{(0)} = (1/2)(1 + \cos \bar{z}) Q^{31}_{(1)} + (1/2)(1 - \cos \bar{z}) Q^{31}_{(2)} +$$

$$+ \frac{\pi \sin \bar{z}}{4h(r_0 + z)^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} (F_{13} - \Phi_{13}),$$

$$T^{23}_{(0)} = (1/2)(1+\cos\bar z)\,Q^{32}_{(1)} + (1/2)(1-\cos\bar z)\,Q^{32}_{(2)} + $$
$$+ \frac{\pi \sin \bar z}{4h(r_0+z)^2}\frac{\partial}{\partial x}(F_{13} - \Phi_{13}),$$

$$T^{10}_{(0)} = \frac{1}{2}(1+\cos\bar z)\frac{1}{2(r_0+z)^2}\frac{\partial}{\partial x^0}\times$$
$$\times\left(\frac{\partial F_{13}}{\partial\varphi} + (r_0+z)F_{23}\right) + \frac{1}{2}(1-\cos\bar z)\frac{1}{2(r_0+z)^2}\times$$
$$\times\frac{\partial}{\partial x^0}\left(\frac{\partial \Phi_{13}}{\partial\varphi} + (r_0+z)\Phi_{23}\right) + \frac{\pi}{4h}\sin\bar z\frac{\partial}{\partial x^0}(\Phi_{23} - F_{23}),$$

$$T^{20}_{(0)} = \frac{1}{2}(1+\cos\bar z)\frac{1}{2(r_0+z)^2}\frac{\partial}{\partial x^0}\left(\frac{\partial F_{13}}{\partial x} + (r_0+z)^{-1}F_{33}\right) +$$
$$+\frac{1}{2}(1-\cos\bar z)\frac{1}{2(r_0+z)^2}\frac{\partial}{\partial x^0}\left(\frac{\partial \Phi_{13}}{\partial x} + (r_0+z)^{-1}\Phi_{33}\right) +$$
$$+\frac{\pi\sin\bar z}{4h(r_0+z)^2}\frac{\partial}{\partial x^0}(\Phi_{33} - F_{33}),$$

$$T^{30}_{(0)} = \frac{1}{2}(1+\cos\bar x^0)\,Q^{03}_{(1)} + \frac{1}{2}(1+\cos\bar z)\,Q^{30}_{(1)} + \frac{1}{2}(1-\cos\bar z)\,Q^{30}_{(2)}.$$

Построение корректирующего тензора для цилиндрической оболочки подробно изложено в § 2 настоящей главы. Для рассматриваемого случая необходимо в формулах для интегралов $L^{(l)}_{\beta}$ свободных членов уравнений вместо $T^{\alpha\beta}_{(0)}$ подставить всюду выражения (4.3.18).

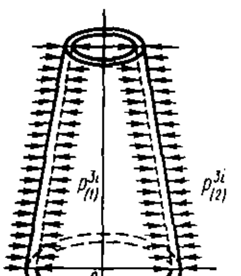

Рис. 113

Сумма основного и корректирующего тензоров является тензором кинетических напряжений (T) цилиндрической оболочки, находящейся под действием внешнего и внутреннего давлений.

Пусть коническая оболочка находится под действием внутреннего и внешнего давлений (рис. 113). Если нагружение динамическое, то $p^{3l}_{(\gamma)} = p^{3l}_{(\gamma)}(x, \varphi, t)$, $T^0 = T^0(x, \varphi, z, t)$ и тензор напряжений (σ)определяется по формулам (1.3.49) через тензор кинетических напряжений (T), который строится с помощью метода, рассмотренного в гл. 1.

Функции нагрузок $Q^{\alpha\beta}_{(\gamma)}$ следующие: для координаты z

$$\left.\begin{aligned}
&Q^{33}_{(\gamma)} = (\rho v^3 v^3)_{(\gamma)} - p^{33}_{(\gamma)},\quad Q^{31}_{(\gamma)} = (\rho v^3 v^1)_{\gamma} - p^{31}_{(\gamma)},\\
&Q^{32}_{(\gamma)} = (\rho v^3 v^2)_{(\gamma)} - p^{32}_{(\gamma)},\quad Q^{30}_{(\gamma)} = (\rho v^3 v^0)_{(\gamma)};\\
&\text{для координаты } x^0\\
&Q^{00}_{(1)} = (\rho v^0 v^0)_{(1)},\quad Q^{02}_{(1)} = (\rho v^0 v^2)_{(1)},\\
&Q^{01}_{(1)} = (\rho v^0 v^1)_{(1)},\quad Q^{03}_{(1)} = (\rho v^0 v^3)_{(1)}.
\end{aligned}\right\} \qquad (4.3.19)$$

Их самоуравновешенные части

$$\widetilde{Q}^{3\beta}_{(\gamma)}=\frac{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{l}Q^{3\beta}_{(\gamma)}A_2\,d\varphi dx}{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{l}A_2\,d\varphi dx}\sum_m\sum_n\cos m\bar{\varphi}\cos n\bar{x},$$

$$\widetilde{Q}^{0\beta}_{(\gamma)}=0\ \ (\beta=1,\ 2,\ 3,\ 0). \tag{4.3.20}$$

Функции кинетических напряжений $\Pi^{(0)}_{\alpha 3}$ для координаты z, в соответствии с (4.1.43), следующие

$$\Pi^{(0)}_{\alpha 3}=(1/2)\,(1+\cos\bar{z})\,F_{\alpha 3}+(1/2)\,(1-\cos\bar{z})\,\Phi_{\alpha 3}, \tag{4.3.21}$$

причем функции $F_{\alpha 3}$ подчинены уравнениям (4.1.44) и граничным условиям (4.1.45); таким же уравнениям и граничным условиям удовлетворяют функции $\Phi_{\alpha 3}$.

Для конической оболочки уравнение (4.1.49) принимает вид

$$\frac{\partial^2 f_{(1)}}{\partial\varphi^2}+g_{22}\frac{\partial^2 f_{(1)}}{\partial x^2}-g_{22}\frac{\partial^2 f_{(1)}}{\partial x^{0^2}}+\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^{0^2}}-\Gamma^1_{22}\right)\frac{\partial f_{(1)}}{\partial x}-$$

$$-\frac{\partial\Gamma^1_{22}}{\partial x}f_{(1)}=2A_{(1)};\ f_1=\frac{\partial^2 F_{23}}{\partial\varphi\partial x^0}, \tag{4.3.22}$$

где

$$A_{(1)}=\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(g_{22}\widetilde{Q}^{31}_{(1)}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(g_{22}\widetilde{Q}^{30}_{(1)}\right)\right],$$

а граничные условия (4.1.52)—следующий вид: $f_{(1)}=0$ при $x=0$, $x=l$; по координате φ, так как оболочка замкнутая, функция $f_{(1)}$ периодическая (период 2π); $f_{(1)}=0$, $\partial f_{(1)}/\partial x^0=0$ при $x^0=x^0_1$.

Решение уравнения (4.3.22) представим в виде ряда

$$f_{(1)}=\sum_m\left(V^{(1)}_{(m)}(xx^0)\cos m\varphi+V^{(2)}_{(m)}(xx^0)\sin m\varphi\right)(m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,), \tag{4.3.23}$$

полагая, что правую часть $A_{(1)}$ уравнения можно разложить в ряд Фурье

$$A_1=\sum_m\left(A^{(1)}_{1m}(xx^0)\cos m\varphi+A^{(2)}_{1(m)}(xx)\sin m\varphi\right), \tag{4.3.24}$$

где

$$A^{(1)}_{1(m)}=\frac{\int\limits_0^{2\pi}A_1\cos m\varphi d\varphi}{\int\limits_0^{2\pi}\cos^2 m\varphi d\varphi};\ A^{(2)}_{1(m)}=\frac{\int\limits_0^{2\pi}A_1\sin m\varphi d\varphi}{\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 m\varphi d\varphi}.$$

Подставляя (4.3.23) и (4.3.24) в (4.3.22), получим уравнение для функций $V_{1(m)}^{(l)}$

$$\frac{\partial^2 V_{1(m)}^{(l)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V_{1(m)}^{(l)}}{\partial x^{0^2}} + \frac{1}{g_{22}}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x} - \Gamma_{22}^1\right)\frac{\partial V_{1(m)}^{(l)}}{\partial x} -$$

$$- \frac{1}{g_{22}}\left(\frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial x} + m^2\right) V_{1(m)}^{(l)} = \frac{2}{g_{22}} A_{1(m)}^{(l)}, \qquad (4.3.25)$$

решение которого также представим в форме ряда

$$V_{1(m)}^{(l)} = \sum_n X_{1(mn)}^{(l)}(x^0)\, Z_n(x), \qquad (4.3.26)$$

предполагая, что правую часть уравнения (4.3.25) можно разложить в ряд Фурье

$$\frac{1}{g_{22}} A_{1(m)}^{(l)} = \sum_n A_{1(mn)}^{(l)}(x^0)\, Z_n(x), \qquad (4.3.27)$$

где

$$A_{1(mn)}^{(l)} = \int_0^l \frac{1}{g_{22}} A_{1(m)}^{(l)} Z_n(x)\, dx \Big/ \int_0^l Z_n^2(x)\, dx.$$

Для функций $X_{1(mn)}^{(l)}(x^0)$ имеет место уравнение

$$\ddot{X}_{1(mn)}^{(l)} + \omega_{mn}^2 X_{1(mn)}^{(l)} = -2A_{1(mn)}^{(l)}(x^0),$$

решением которого являются функции

$$X_{1(mn)}^{(l)} = -\frac{2}{\omega_{mn}}\int_0^{x^0} A_{1(mn)}^{(l)}(\xi)\sin\omega_{mn}(x^0 - \xi)\, d\xi. \qquad (4.3.28)$$

Собственные функции $Z_n(x)$ удовлетворяют уравнению

$$Z'' - \frac{\sin\theta}{A_2 - (h/2)\cos\theta} Z' + \left[\omega^2 - \frac{m^2\sin^2\theta}{(A_2 - (h/2)\cos\theta)^2}\right] Z = 0$$

и нулевым граничным условиям: $Z(x) = 0$ при $x = 0$, $x = l$.

Этим же требованиям удовлетворяют и функции

$$Z_n(x) = Z_n^{(1)}(x) - \frac{Z_n^{(1)}(0)}{Z_n^{(2)}(0)} Z_n^{(2)}(x) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \qquad (4.3.29)$$

где

$$Z_n^{(1)}(x) = J_m\left(\frac{\omega_n}{\sin\theta}\left(A_2 - \frac{h}{2}\cos\theta\right)\right),$$

$$Z_n^{(2)}(x) = Y_m\left(\frac{\omega_n}{\sin\theta}\left(A_2 - \frac{h}{2}\cos\theta\right)\right).$$

Собственные значения ω_n являются корнями характеристического уравнения

$$Z^{(1)}(0)Z^{(2)}(l) - Z^{(1)}(l)Z^{(2)}(0) = 0.$$

На основании полученных результатов имеем

$$f_1 = \sum_m \sum_n (X_{1(mn)}^{(1)}(x^0) \cos m\varphi + X_{1(mn)}^{(2)}(x^0) \sin m\varphi) Z_n(x). \quad (4.3.30)$$

Интегрируя второе из уравнений (4.3.22) с учетом граничных условий (4.1.45), получим

$$F_{23} = \int_0^{\varphi} \int_0^{x^0} f_{(1)}(x, \varphi, x^0)\, d\varphi dx^0. \quad (4.3.31)$$

Функцию F_{13} находим по формуле (4.1.54):

$$F_{13} = \int_0^x \int_0^{\varphi} \left(A_2 - \frac{h}{2} \cos\theta \right) \times$$

$$\times \left[2 \left(A_2 - \frac{h}{2} \cos\theta \right) \widetilde{Q}_{(1)}^{33} - \cos \int_0^{x^0} \frac{\partial f_{(1)}}{\partial x}\, dx^0 \right] dx d\varphi. \quad (4.3.32)$$

Формула (4.1.56) для F_{33} в рассматриваемом случае принимает вид

$$F_{33} = \int_0^x \left[\exp \int_0^x \frac{\sin\theta}{A_2 - \frac{h}{2}\cos\theta}\, dx \int_0^x B_1(\xi) \exp \times \right.$$

$$\left. \times \left(- \int \frac{\sin\theta}{A_2 - \frac{h}{2}\cos\theta}\, d\xi \right) d\xi \right] dx, \quad (4.3.33)$$

где

$$B_1 = 2\left(A_2 - \frac{h}{2}\cos\theta \right)^2 \widetilde{Q}_{(1)}^{33} + \int_0^{x^0} \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\frac{\partial f_{(1)}}{\partial x} - \frac{\sin\theta}{A_2 - \frac{h}{2}\cos\theta} f_{(1)} \right) dx^0 -$$

$$- 2\cos\theta \int_0^{\varphi} \left(2\left(A_2 - \frac{h}{2}\cos\theta \right) \widetilde{Q}_{(1)}^{33} - \int_0^{x_0} \frac{\partial f_{(1)}}{\partial x}\, dx^0 \right) d\varphi.$$

Функции $\Phi_{\alpha 3}$ определяются аналогично и соответственно равны:

$$\Phi_{23}=\int_0^{\varphi}\int_0^{x^0} f_{(2)}(x,\varphi,x^0)\,d\varphi dx^0,$$

$$\Phi_{13}=\int_0^{x}\int_0^{\varphi}\left(A_2+\frac{h}{2}\cos\theta\right)\Bigg[2\left(A_2+\frac{h}{2}\cos\theta\right)\times$$

$$\times\widetilde{Q}^{33}_{(2)}-\cos\theta\int_0^{x^0}\frac{\partial f_{(2)}}{\partial x}\,dx^0\Bigg]dxd\varphi, \qquad (4.3.34)$$

$$\Phi_{33}=\int_0^{x}\Bigg[\exp\int_0^{x}\frac{\sin\theta}{A_2+\frac{h}{2}\cos\theta}\,dx\int_0^{x}B_{(2)}(\xi)\times$$

$$\times\exp\left(-\int\frac{\sin\theta}{A_2+\frac{h}{2}\cos\theta}\,d\xi\right)d\xi\Bigg]dx.$$

Здесь

$$f_{(2)}=\sum_m\sum_n\left(X^{(1)}_{2(mn)}(x^0)\cos m\varphi+X^{(2)}_{2(mn)}(x^0)\sin m\varphi\right)Y_n(x), \qquad (4.3.35)$$

причем

$$X^{(j)}_{2(mn)}=-\frac{2}{\omega_{mn}}\int_0^{x^0}A^{(j)}_{2(mn)}(\xi)\sin\omega_{mn}(x^0-\xi)\,d\xi, \qquad (4.3.36)$$

$$A^{(j)}_{2(mn)}=\frac{\int_0^{l}\left(A_2+\frac{h}{2}\cos\theta\right)^{-2}A^{(j)}_{2(m)}Y_n(x)\,dx}{\int_0^{l}Y_n^2(x)\,dx},$$

$$A^{(1)}_{2(m)}=\frac{\int_0^{2\pi}A_2\cos m\varphi d\varphi}{\int_0^{2\pi}\cos^2 m\varphi d\varphi},\quad A^{(2)}_{2(m)}=\frac{\int_0^{2\pi}A_2\sin m\varphi d\varphi}{\int_0^{2\pi}\sin^2 m\varphi d\varphi},$$

$$A_2=\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial x^0}\left(\left(A_2+\frac{h}{2}\cos\theta\right)^2\widetilde{Q}^{31}_{(2)}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(A_2+\frac{h}{2}\cos\theta\right)^2\widetilde{Q}^{30}_{(2)}\right)\right].$$

Собственные функции $Y_n(x)$ имеют вид

$$Y_n(x)=Y_n^{(1)}(x)-\frac{Y_n^{(1)}(0)}{Y_n^{(2)}(0)}Y_n^{(2)}(x),$$

где

$$Y_n^{(1)}(x) = J_m\left(\frac{\omega_n}{\sin\theta}\left(A_2 + \frac{h}{2}\cos\theta\right)\right),$$

$$Y_n^{(2)}(x) = Y_m\left(\frac{\omega_n}{\sin\theta}\left(A_2 + \frac{h}{2}\cos\theta\right)\right).$$

Собственные значения ω_n являются корнями характеристического уравнения

$$Y_n^{(1)}(0)\ Y_n^{(2)}(l) - Y_n^{(1)}(l)\ Y_n^{(2)}(0).$$

Функция

$$B_2 = 2\left(A_2 + \frac{h}{2}\cos\theta\right)^2 \widetilde{Q}^{33}_{(2)} + \int_0^{x^0} \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial f_{(2)}}{\partial x} - \frac{\sin\theta}{A_2 + \frac{h}{2}\cos\theta} f_{(2)}\right) dx^0 -$$

$$-2\cos\theta \int_0^{\varphi}\left(2\left(A_2 + \frac{h}{2}\cos\theta\right)\widetilde{Q}^{33}_{(2)} - \int_0^{x^0} \frac{\partial f_{(2)}}{\partial x} dx^0\right) d\varphi. \qquad (4.3.37)$$

Функции кинетических напряжений $\Pi^{(0)}_{\alpha 0}$ для координаты x^0 равны нулю, так как $\widetilde{Q}^{0\beta}_{(\gamma)} = 0$.

Полные функции кинетических напряжений основного тензора

$$\Pi^{(0)}_{\alpha} = (1/2)(1 + \cos\bar{z}) F_{\alpha 3} + (1/2)(1 - \cos\bar{z})\ \Phi_{\alpha 3}.$$

Компоненты основного тензора (T_0) имеют следующий вид:

$$T^{11}_{(0)} = \frac{\pi \sin\bar{z}}{2h(A_2 + z\cos\theta)^2}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}(\Phi_{33} - F_{33}) + (A_2 + z\cos\theta)(\Phi_{23} - F_{23})\right],$$

$$T^{22}_{(0)} = \frac{\pi\sin\bar{z}}{2h(A_2 + z\cos\theta)^2}\ \frac{\partial}{\partial x}(\Phi_{23} - F_{23}),$$

$$T^{33}_{(0)} = (1/2)(1 + \cos\bar{z})\, Q^{33}_{(1)} + (1/2)(1 - \cos\bar{z})\, Q^{33}_{(2)},$$

$$T^{00}_{(0)} = \frac{1}{2}(1 + \cos\bar{x}^0)\, Q^{00}_{(1)} - \frac{1}{(A_2 + z\cos\theta)^2} \times$$

$$\times \left\{\frac{1}{2}(1 + \cos\bar{z})\left(\frac{\partial^2 F_{13}}{\partial x\partial\varphi} + (A_2 + z\cos\theta)\frac{\partial F_{23}}{\partial x}\right) + \right.$$

$$+ \frac{1}{2}(1 - \cos\bar{z})\left(\frac{\partial^2 \Phi_{13}}{\partial x\partial\varphi} + (A_2 + z\cos\theta)\frac{\partial\Phi_{23}}{\partial x}\right) +$$

$$+ \frac{\pi}{2h}\sin\bar{z}\left[(A_2 + z\cos\theta)^2 \frac{\partial}{\partial x}(\Phi_{23} - F_{23}) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(\Phi_{33} - F_{33}) + \right.$$

$$\left.\left. + (A_2 + z\cos\theta)\sin\theta\,(\Phi_{23} - F_{23})\right]\right\}.$$

$$T^{12}_{(0)}=\frac{1}{2\,(A_2+z\cos\theta)^2}\ \left\{\frac{1}{2}\,(1+\cos\bar z)\ \frac{\cos\theta}{A_2+z\cos\theta}\left(\frac{\partial F_{23}}{\partial\varphi}-\frac{\partial F_{33}}{\partial x}-\frac{\partial^2 F_{13}}{\partial x^{0^2}}\right)+\right.$$

$$+\frac{1}{2}(1-\cos\bar z)\ \frac{\cos\theta}{A_2+z\cos\theta}\left(\frac{\partial\Phi_{23}}{\partial\varphi}-\frac{\partial^2\Phi_{13}}{\partial x^{0^2}}-\frac{\partial\Phi_{33}}{\partial x}\right)+$$

$$+\frac{\pi^2}{2h^2}\cos\bar z\,(\Phi_{13}-F_{13})+\ \frac{\pi}{2h}\sin\bar z\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}(F_{23}-\Phi_{23})+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial}{\partial x}\,(F_{33}-\Phi_{33})-\frac{2\sin\theta}{A_2+z\cos\theta}\,(F_{33}-\Phi_{33})+\frac{\cos\theta}{A_2+z\cos\theta}\,(F_{13}-\Phi_{13})\ \right]\right\},$$

$$T^{13}_{(0)}=(1/2)\,(1+\cos\bar z)\,Q^{31}_{(1)}+(1/2)\,(1-\cos\bar z)\,Q^{31}_{(2)}+ \qquad (4.3.38)$$

$$+\frac{\pi\sin\bar z}{4h\,(A_2+z\cos\theta)^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\,(F_{13}-\Phi_{13}),$$

$$T^{23}_{(0)}=\frac{1}{2}\,(1+\cos\bar z)\,Q^{32}_{(1)}+\frac{1}{2}(1-\cos\bar z)\,Q^{32}_{(2)}+$$

$$+\frac{\pi\sin\bar z}{4h\,(A_2+z\cos\theta)^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\,(F_{13}-\Phi_{13})+\frac{\sin\theta}{A_2+z\cos\theta}\,(F_{13}-\Phi_{13})\ \right],$$

$$T^{10}_{(0)}=\frac{1}{2}(1+\cos\bar x^0)\,Q^{01}_{(1)}+\frac{1}{2}\,(1+\cos\bar z)\,\frac{1}{2\,(A_2+z\cos\theta)^2}\,\frac{\partial}{\partial x^0}\times$$

$$\times\left(\frac{\partial F_{13}}{\partial\varphi}+(A_2+z\cos\theta)\cos\theta F_{23}+\right.$$

$$+\frac{1}{2}\,(1-\cos\bar z)\,\frac{1}{2\,(A_2+z\cos\theta)^2}\,\frac{\partial}{\partial x^0}\left(\frac{\partial\Phi_{13}}{\partial\varphi}+(A_2+z\cos\theta)\cos\theta\Phi_{23}\right)+$$

$$+\frac{\pi}{4h}\sin\bar z\,\frac{\partial}{\partial x}\,(\Phi_{23}-F_{23}),$$

$$T^{20}_{(0)}=\frac{1}{2}\,(1+\cos x^0)\,Q^{02}_{(1)}+\frac{1}{2}\,(1+\cos\bar z)\,\frac{1}{2\,(A_2+z\cos\theta)^2}\times$$

$$\times\left(\frac{\partial^2 F_{13}}{\partial x\partial x^0}+\frac{1}{A_2+z\cos\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial F_{13}}{\partial x^0}+\cos\theta\,\frac{\partial F_{33}}{\partial x^0}\right)\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\,(1-\cos\bar z)\,\frac{1}{2\,(A_2+z\cos\theta)^2}\times$$

$$\times\left(\frac{\partial^2\Phi_{13}}{\partial x\partial x^0}+\frac{1}{A_2+z\cos\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial\Phi_{13}}{\partial x^0}+\cos\theta\,\frac{\partial\Phi_{33}}{\partial x^0}\right)\right)+$$

$$+\frac{\pi\sin\bar z}{4h\,(A_2+z\cos\theta)^2}\,\frac{\partial}{\partial x^0}\,(\Phi_{33}-F_{33}),$$

$$T^{30}_{(0)}=\frac{1}{2}\,(1+\cos\bar x^0)\,Q^{03}_{(1)}+\frac{1}{2}\,(1+\cos\bar z)\,Q^{30}_{(1)}+\frac{1}{2}(1-\cos\bar z)\,Q^{30}_{(2)}.$$

Корректирующий тензор ($T_к$) для конической оболочки построен в § 2 настоящей главы. Формулы, приведенные для коэффициентов $F_{\gamma\beta}$ и свободных членов L_β, справедливы и в данном случае, однако вместо компонент $T^{\alpha\beta}_{(0)}$ необходимо подставить выражения (4.3.38). Все остальные вычисления производятся так же, как указано в § 2. Итак, считаем тензоры ($T_к$) и (T) известными.

§ 4. Тензор кинетических напряжений оболочки ненулевой гауссовой кривизны

Пусть оболочка вращения ненулевой гауссовой кривизны находится в условиях динамического нагружения. Напряженно-деформированное состояние оболочки характеризуется тензором кинетических напряжений (T), построение которого рассмотрим в настоящем параграфе.

Оболочка вращения, для которой

$$K = 1/(R_1 R_2) \neq 0, \tag{4.4.1}$$

где R_i ($i = 1, 2$) — радиусы кривизны срединной поверхности, называется оболочкой вращения ненулевой гауссовой кривизны. Если $K > 0$, то имеем *оболочку вращения положительной гауссовой кривизны*. К этому классу относятся сферические, оживальные, эллиптические и другие оболочки. Если $K < 0$, то имеем оболочку вращения отрицательной гауссовой кривизны, к ним относятся гиперболические и другие оболочки.

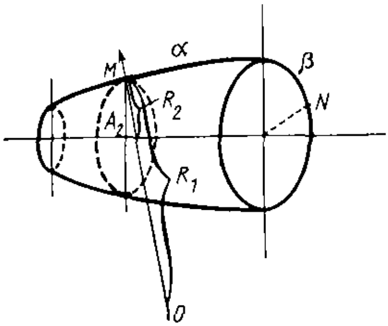

Рис. 114

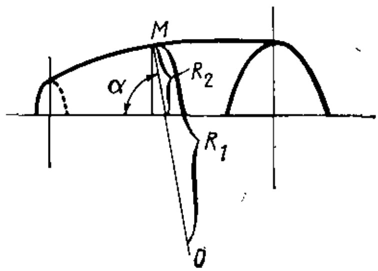

Рис. 115

Отнесем оболочку к ортогональной, криволинейной системе координат (α, β, z, x^0).

Для оболочек вращения ненулевой гауссовой кривизны (рис. 114) параметры Ляме A_i и радиусы кривизны R_i — функции координаты α. Метрический тензор системы координат имеет компоненты:

$$g_{ii} = A_i^2 (1 + z/R_i)^2;\ g_{33} = 1;\ g_{00} = -1;\ g_{\alpha\beta} = 0\ (\alpha \neq \beta). \tag{4.4.2}$$

Если α — угол между осью вращения оболочки и нормалью к срединной поверхности в рассматриваемой точке M (рис. 115), то

$$A_1 = R_1,\ A_2 = R_2 \sin\alpha,\ R_i = R_i(\alpha), \tag{4.4.3}$$

а компоненты метрического тензора таковы:

$$g_{11} = (R_1 + z)^2;\ g_{22} = (R_2 + z)^2 \sin^2\alpha;\ g_{33} = 1;\ g_{00} = -1. \tag{4.4.4}$$

Символы Кристоффеля, отличные от нуля, следующие: первого рода

$$\begin{gathered}
\Gamma_{1.11}=(R_1+z)\frac{\partial R_1}{\partial\alpha},\ \Gamma_{3.11}=-(R_1+z),\ \Gamma_{1.13}=(R_1+z),\\
\Gamma_{3.22}=-(R_2+z)\sin^2\alpha,\quad \Gamma_{2.23}=(R_2+z)\sin^2\alpha,\\
\Gamma_{1.22}=-(R_2+z)\sin\alpha\left[\frac{\partial R_2}{\partial\alpha}\sin\alpha+(R_2+z)\cos\alpha\right],\\
\Gamma_{2.21}=(R_2+z)\sin\alpha\left[\frac{\partial R_2}{\partial\alpha}\sin\alpha+(R_2+z)\cos\alpha\right];
\end{gathered}\tag{4.4.5}$$

второго рода

$$\begin{gathered}
\Gamma^1_{11}=\frac{1}{R_1+z}\,\frac{\partial R_1}{\partial\alpha},\quad \Gamma^3_{11}=-(R_1+z),\quad \Gamma^1_{13}=\frac{1}{R_1+z},\\
\Gamma^3_{22}=-(R_2+z)\sin^2\alpha,\quad \Gamma^2_{23}=\frac{1}{R_2+z},\\
\Gamma^1_{22}=-\frac{(R_2+z)\sin\alpha}{(R_1+z)^2}\left[\frac{\partial R_2}{\partial\alpha}\sin\alpha+(R_2+z)\cos\alpha\right],\\
\Gamma^2_{21}=\frac{\dfrac{\partial R_2}{\partial\alpha}\sin\alpha+(R_2+z)\cos\alpha}{(R_2+z)\sin\alpha}.
\end{gathered}$$

Текущие координаты изменяются в следующих пределах: $\alpha_1\leqslant\alpha\leqslant\leqslant\alpha_2$; $\beta_1\leqslant\beta\leqslant\beta_2$; $-h/2\leqslant z\leqslant h/2$; $x_1^0\leqslant x^0\leqslant x_2^0$, здесь α_γ; β_γ, h — габаритные размеры оболочки.

Тензор кинетических напряжений (T) представим в виде суммы основного и корректирующего тензоров:

$$(T)=(T_0)+(T_\text{к}).\tag{4.4.6}$$

Для построения указанных тензоров, необходимо знать общее решение уравнений равновесия фиктивного тела, которое для данного класса оболочек имеет вид:

$$\begin{gathered}
T^{11}=2\tilde{e}^{11}(p)-\frac{2}{g_{11}}(\nabla_\delta p^\delta+\varphi)-\frac{1}{2g_{11}g_{22}}[(\tilde{R}_{3223}+2N_{3223})-\\
-\tilde{R}_{0220}-g_{22}\tilde{R}_{0330}],\\
T^{22}=2\tilde{e}^{22}(p)-\frac{2}{g_{22}}(\nabla_\delta p^\delta+\varphi)-\frac{1}{2g_{11}g_{22}}\times\\
\times\left[\tilde{R}_{3113}+2N_{3113}-\tilde{R}_{0110}-g_{11}\tilde{R}_{0330}\right],\\
T^{33}=2\tilde{e}^{33}(p)-2(\nabla_\delta p^\delta+\varphi)-\\
-\frac{1}{2g_{11}g_{22}}\left[\tilde{R}_{2112}+2N_{2112}-g_{22}\tilde{R}_{0110}-g_{11}\tilde{R}_{0220}\right],\\
T^{00}=2(\nabla_\delta p^\delta+\varphi)+\frac{1}{2g_{11}g_{22}}\left[(\tilde{R}_{2112}+2N_{2112})+\right.\\
\left.+g_{22}(\tilde{R}_{3113}+2N_{3113})+g_{11}(\tilde{R}_{3223}+2N_{3223})\right],
\end{gathered}$$

$$T^{12} = -\frac{1}{2g_{11}\,g_{22}}\left[\widetilde{R}_{1323} + 2N_{1323} + \widetilde{R}_{0210}\right],$$

$$T^{30} = -\frac{1}{2g_{11}\,g_{22}}\left[g_{22}\,\widetilde{R}_{0113} + g_{11}\,R_{0223}\right],$$

$$T^{13} = -\frac{1}{2g_{11}\,g_{22}}\left[\widetilde{R}_{2321} + 2N_{2321} + g_{22}\,\widetilde{R}_{0310}\right],$$

$$T^{23} = \frac{1}{2g_{11}\,g_{22}}\left[\widetilde{R}_{1231} + 2N_{1231} - g_{11}\,\widetilde{R}_{0320}\right], \tag{4.4.7}$$

$$T^{10} = \frac{1}{2g_{11}\,g_{22}}\left[\widetilde{R}_{0212} + g_{22}\,\widetilde{R}_{0313}\right], \quad T^{20} = -\frac{1}{2g_{11}\,g_{22}}\left[\widetilde{R}_{0112} - g_{11}\,\widetilde{R}_{0323}\right].$$

Функции $\widetilde{R}_{\lambda\nu\mu\alpha}$ в форме Морера таковы:

$$\widetilde{R}_{1221} = 2\left(-\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial\alpha\partial\beta} + \Gamma^1_{11}\frac{\partial\Pi_1}{\partial\beta} + \Gamma^3_{11}\frac{\partial\Pi_3}{\partial\beta} + \Gamma^3_{22}\frac{\partial\Pi_2}{\partial\alpha}\right),$$

$$\widetilde{R}_{0330} = \frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial z^2}, \quad \widetilde{R}_{3113} = 2\left(-\frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial\alpha\partial z} + \Gamma^1_{11}\frac{\partial\Pi_2}{\partial z}\right),$$

$$\widetilde{R}_{3223} = 2\left(-\frac{\partial^2 \Pi_3}{\partial\beta\partial z} + \Gamma^1_{22}\frac{\partial\Pi_2}{\partial z}\right),$$

$$\widetilde{R}_{0110} = \frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial\alpha^2} - \Gamma^1_{11}\frac{\partial\Pi_0}{\partial\alpha} - \Gamma^3_{11}\frac{\partial\Pi_0}{\partial z},$$

$$\widetilde{R}_{0220} = \frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial\beta^2} - \Gamma^1_{22}\frac{\partial\Pi_0}{\partial\alpha} - \Gamma^3_{22}\frac{\partial\Pi_0}{\partial z},$$

$$\widetilde{R}_{3112} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial\Pi_3}{\partial\alpha} - \frac{\partial\Pi_2}{\partial\beta} - \frac{\partial\Pi_1}{\partial z}\right) + 2\Gamma^2_{23}\frac{\partial\Pi_1}{\partial\alpha} -$$

$$-\Gamma^1_{11}\left(\frac{\partial\Pi_3}{\partial\alpha} - \frac{\partial\Pi_2}{\partial\beta} - \frac{\partial\Pi_1}{\partial z}\right) - \Gamma^2_{21}\left(\frac{\partial\Pi_3}{\partial\alpha} - \frac{\partial\Pi_2}{\partial\beta} + \frac{\partial\Pi_1}{\partial z}\right), \tag{4.4.8}$$

$$\widetilde{R}_{3212} = \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial\Pi_3}{\partial\alpha} - \frac{\partial\Pi_2}{\partial\beta} + \frac{\partial\Pi_1}{\partial z}\right) - 2\Gamma^1_{13}\frac{\partial\Pi_1}{\partial\beta},$$

$$\widetilde{R}_{0112} = -\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial\alpha\partial x^0} + (\Gamma^1_{11} - \Gamma^2_{21})\frac{\partial\Pi_1}{\partial x^0} + \Gamma^3_{11}\frac{\partial\Pi_3}{\partial x^0},$$

$$\widetilde{R}_{0113} = -\frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial\alpha\partial x^0} + \Gamma^1_{11}\frac{\partial\Pi_2}{\partial x^0} - \Gamma^1_{31}\frac{\partial\Pi_1}{\partial x^0}. \quad \widetilde{R}_{0212} = \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial\beta\partial x^0} - \Gamma^3_{22}\frac{\partial\Pi_2}{\partial x^0},$$

$$\widetilde{R}_{0313} = \frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial z\partial x^0} + \Gamma^1_{31}\frac{\partial\Pi_2}{\partial x^0}, \quad \widetilde{R}_{0223} = \frac{\partial^2 \Pi_3}{\partial\beta\partial x^0} + \Gamma^1_{22}\frac{\partial\Pi_2}{\partial x^0},$$

$$\widetilde{R}_{0323} = \frac{\partial^2 \Pi_3}{\partial z\partial x^0} + \Gamma^2_{32}\frac{\partial\Pi_3}{\partial x^0}, \quad \widetilde{R}_{0210} = \frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial x^0\,\partial x^0} - \Gamma^2_{12}\frac{\partial\Pi_0}{\partial\beta},$$

$$\widetilde{R}_{3213} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\Pi_3}{\partial\alpha} + \frac{\partial\Pi_2}{\partial\beta} - \frac{\partial\Pi_1}{\partial z}\right) +$$

$$+2\Gamma^2_{21}\frac{\partial\Pi_3}{\partial z} - \Gamma^2_{32}\left(\frac{\partial\Pi_3}{\partial\alpha} - \frac{\partial\Pi_2}{\partial\beta} + \frac{\partial\Pi_1}{\partial z}\right) + \Gamma^1_{31}\left(\frac{\partial\Pi_3}{\partial\alpha} - \frac{\partial\Pi_2}{\partial\beta} - \frac{\partial\Pi_1}{\partial z}\right),$$

$$\tilde{R}_{0310} \quad \frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial\alpha\partial z} + \frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial x^0 \partial x^0} - \Gamma^1_{13} \frac{\partial \Pi_0}{\partial \alpha},$$

$$\tilde{R}_{0320} = \frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial\beta\partial z} + \frac{\partial^2 \Pi_3}{\partial x^0 \partial x^0} - \Gamma^2_{32} \frac{\partial \Pi_0}{\partial \beta}.$$

Функции $N_{\lambda\nu\mu\alpha}$ имеют вид:

$$N_{1221} = -\frac{1}{g_{22}g_{11}} [\Pi_0(-g_{11}\Gamma_{212}\Gamma_{212} + g_{22}\Gamma_{122}\Gamma_{111} + g_{11}g_{22}\Gamma_{322}\Gamma_{311}) - \\ - \Pi_2 g_{22}(\Gamma_{122}\Gamma_{311} + \Gamma_{322}\Gamma_{111})],$$

$$N_{3113} = \Gamma_{113}\Gamma_{113}\Pi_0/g_{11}, \quad N_{3223} = \Gamma_{223}\Gamma_{223}\Pi_0/g_{22},$$

$$N_{3112} = -\frac{1}{g_{11}g_{22}} [(\Gamma_{111}\Gamma_{223} - \Gamma_{113}\Gamma_{221})\Pi_1 + g_{11}\Gamma_{311}\Gamma_{223}\Pi_3],$$

$$N_{3212} = -\frac{1}{g_{11}g_{22}} [\Pi_0(-g_{22}\Gamma_{113}\Gamma_{122} + g_{11}\Gamma_{221}\Gamma_{223}) + \Pi_2 g_{22}\Gamma_{113}\Gamma_{322}],$$

$$N_{3213} = \Gamma_{113}\Gamma_{223}\Pi_1/g_{11}g_{22}. \tag{4.4.9}$$

Построение основного тензора (T_0) сводится к решению систем дифференциальных уравнений (1.3.18) с учетом граничных условий (1.3.19) второй части книги.

Для координаты α имеем следующие функции нагрузок $Q^{1\beta}_{(\gamma)}$:

$$Q^{11}_{(\gamma)} = p^{11}_{(\gamma)} - 2[\tilde{e}^{11}(p) - (\nabla_\delta p^\delta + \varphi)(1/g_{11})]_{(\gamma)}, \quad Q^{12}_{(\gamma)} = p^{12}_{(\gamma)} - 2\tilde{e}^{12}(p)_{(\gamma)},$$

$$Q^{13}_{(\gamma)} = p^{13}_{(\gamma)} - 2\tilde{e}^{13}(p)_{(\gamma)}, \quad Q^{10}_{(\gamma)} = p^{10}_{(\gamma)} - 2\tilde{e}^{10}(p)_{(\gamma)}. \tag{4.4.10}$$

Функции кинетических напряжений $\Pi^{(0)}_{\alpha 1}$ для координаты α берем в форме:

$$\Pi^{(0)}_{\alpha 1} = \frac{1}{2}(1 + \cos\bar{\alpha}) F_{\alpha 1} + \frac{1}{2}(1 - \cos\bar{\alpha})\Phi_{\alpha 1} \quad (\alpha = 1, 2, 3, 0), \tag{4.4.11}$$

где $\bar{\alpha} = \pi(\alpha - \alpha_1)/(\alpha_2 - \alpha_1)$ — безразмерная координата.

Уравнения (1.3.18) второй части книги при $\alpha = \alpha_1$ принимают вид:

$$\frac{\partial^2 F_{31}}{\partial\beta\partial z} - \Gamma^1_{22}\frac{\partial F_{21}}{\partial z} + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F_{01}}{\partial\beta^2} + g_{22}\frac{\partial^2 F_{01}}{\partial z^2} - \Gamma^3_{22}\frac{\partial F_{01}}{\partial z} - 2\frac{\Gamma_{223}\Gamma_{223}}{g_{22}}F_{01}\right) = g_{11}g_{22}Q^{11}_{(1)},$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_{11}}{\partial z} - \frac{\partial F_{21}}{\partial\beta}\right) + 2F^2_{12}\frac{\partial F_{31}}{\partial z} - \Gamma^2_{23}\left(\frac{\partial F_{11}}{\partial z} - \frac{\partial F_{21}}{\partial\beta}\right) - \\ - \Gamma^1_{13}\left(\frac{\partial F_{11}}{\partial z} + \frac{\partial F_{21}}{\partial\beta}\right) + 2\frac{\Gamma_{113}\Gamma_{223}}{g_{11}g_{22}}F_{11} - \\ - \frac{\partial^2 F_{11}}{\partial x^{0^2}} + \Gamma^2_{12}\frac{\partial F_{01}}{\partial\beta} = 2g_{11}g_{22}Q^{12}_{(1)},$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial F_{21}}{\partial\beta}-\frac{\partial F_{11}}{\partial z}\right)-2\Gamma^1_{13}\frac{\partial F_{11}}{\partial\beta}+\frac{2}{g_{11}}\Gamma_{113}\Gamma_{322}F_{21}-g_{22}\frac{\partial^2 F_{21}}{\partial x^{0^2}}+$$
$$+\frac{2}{g_{11}g_{22}}(g_{11}\Gamma_{221}\Gamma_{223}-g_{22}\Gamma_{113}\Gamma_{122})F_{01}=2g_{11}g_{22}Q^{13}_{(1)},$$
$$\frac{\partial^2 F_{11}}{\partial\beta\partial x^0}-\Gamma^3_{22}\frac{\partial F_{31}}{\partial x^0}+g_{22}\frac{\partial^2 F_{21}}{\partial z\partial x^0}+g_{22}\Gamma^1_{13}\frac{\partial F_{21}}{\partial x^0}=2g_{11}g_{22}Q^{10}_{(1)}, \quad (4.4.12)$$

а граничные условия, соответствующие этим уравнениям, — следующий вид:

$$\text{при } \beta=\beta_\gamma\ F_{01}=0,\ F_{21}=0,\ F_{31}=0,\ F_{11}=0;$$
$$\text{при } z=z_\gamma\ F_{01}=0,\ F_{21}=0,\ F_{31}=0,\ F_{11}=0; \quad (4.4.13)$$
$$\text{при } x^0=x^0_1\ F_{01}=0,\ F_{21}=0,\ \frac{\partial F_{21}}{\partial x^0}=0,\quad F_{11}=0,\ \frac{\partial F_{11}}{\partial x^0}=0.$$

Искомые функции произвольны, поэтому функцию F_{01} можно подчинить уравнению

$$\frac{\partial^2 F_{01}}{\partial\beta^2}+g_{22}\frac{\partial^2 F_{01}}{\partial z^2}-\Gamma^3_{22}\frac{\partial F_{01}}{\partial z}-2\frac{\Gamma_{223}\Gamma_{223}}{g_{22}}F_{01}=0,$$

решение которого с учетом граничных условий (4.4.13) таково:

$$F_{01}=0. \quad (4.4.14)$$

В этом случае уравнения (4.4.12) принимают вид

$$\frac{\partial^2 F_{31}}{\partial\beta\partial z}-\Gamma^1_{22}\frac{\partial F_{21}}{\partial z}=g_{11}g_{22}Q^{11}_{(1)},$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_{11}}{\partial z}-\frac{\partial F_{21}}{\partial\beta}\right)+2\Gamma^2_{21}\frac{\partial F_{31}}{\partial z}-\Gamma^2_{23}\left(\frac{\partial F_{11}}{\partial z}-\frac{\partial F_{21}}{\partial\beta}\right)-$$
$$-\Gamma^1_{13}\left(\frac{\partial F_{11}}{\partial z}+\frac{\partial F_{21}}{\partial\beta}\right)+2\frac{\Gamma_{113}\Gamma_{223}}{g_{11}g_{22}}F_{11}-\frac{\partial^2 F_{11}}{\partial x^{0^2}}=2g_{11}g_{22}Q^{12}_{(1)},$$
$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial F_{21}}{\partial\beta}-\frac{\partial F_{11}}{\partial z}\right)+2\Gamma^1_{13}\frac{\partial F_{11}}{\partial\beta}+$$
$$+\frac{2}{g_{11}}\Gamma_{113}\Gamma_{322}\Gamma_{21}-g_{22}\frac{\partial^2 F_{21}}{\partial x^{0^2}}=2g_{11}g_{22}Q^{13}_{(1)}, \quad (4.4.12')$$
$$\frac{\partial^2 F_{11}}{\partial\beta\partial x^0}-\Gamma^3_{22}\frac{\partial F_{21}}{\partial x^0}+g_{22}\frac{\partial^2 F_{21}}{\partial z\partial x^0}+g_{22}\Gamma^1_{13}\frac{\partial F_{21}}{\partial x^0}=2g_{11}g_{22}Q^{10}_{(1)}.$$

Рассматривая совместно третье и четвертое из уравнений (4.4.12′), приходим к уравнению относительно функции

$$\frac{\partial^2 F_{21}}{\partial\beta^2}+g_{22}\frac{\partial F_{21}}{\partial z^2}+\left[\frac{\partial g_{22}}{\partial z}-g_{22}\Gamma^1_{13}-\Gamma^3_{22}\right]\frac{\partial F_{21}}{\partial z}+\left[\frac{2}{g_{11}}\Gamma_{113}\Gamma_{322}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial z}g_{22}(\Gamma^1_{13}-\Gamma^3_{22})-2\Gamma^1_{13}(g_{22}\Gamma^1_{13}-\Gamma^3_{22})\right]F_{21}-g_{22}\frac{\partial^2 F_{21}}{\partial x^{0^2}}=2A, \quad (4.4.15)$$

где

$$A=g_{11}g_{22}Q^{13}_{(1)}+\frac{\partial}{\partial z}\left(g_{11}g_{22}\int\limits_{x^0_1}^{x^0}Q^{10}_{(1)}\,dx^0\right)-$$

$$-2\Gamma^1_{13}g_{11}g_{22}\int\limits_{x^0_1}^{x^0}Q^{10}_{(1)}\,dx^0. \tag{4.4.16}$$

Решение уравнения (4.4.15) с учетом граничных условий (4.4.13) определяет функцию F_{21}.

В результате интегрирования первого из уравнений (4.4.12'), учитывая граничные условия (4.4.13), находим

$$F_{31}=\int\limits_{\beta_1}^{\beta}\int\limits_{z_1}^{z}\left(g_{11}g_{22}Q^{11}_{(1)}+\Gamma^1_{22}\frac{\partial F_{21}}{\partial z}\right)dz\,d\beta. \tag{4.4.17}$$

Подставляя выражения функций F_{21} и F_{31} во второе из уравнений (4.4.12), получим уравнение для функции F_{11}:

$$\frac{\partial^2 F_{11}}{\partial z^2}-(\Gamma^1_{13}+\Gamma^2_{23})\frac{\partial F_{11}}{\partial z}+2\frac{\Gamma_{113}\Gamma_{223}}{g_{11}g_{22}}F_{11}-\frac{\partial^2 F_{11}}{\partial x^{0^2}}=B, \tag{4.4.18}$$

где

$$B=2\left(g_{11}g_{22}Q^{12}_{(1)}-\Gamma^2_{12}\int\limits_{\beta_1}^{\beta}g_{11}g_{22}Q^{11}_{(1)}\,d\beta\right)-2\Gamma^2_{12}\int\limits_{\beta_1}^{\beta}\Gamma^1_{22}\frac{\partial F_{21}}{\partial z}\,d\beta+$$

$$+\left(\frac{\partial^2 F_{21}}{\partial\beta\partial z}+(\Gamma^1_{13}-\Gamma^2_{23})\frac{\partial F_{21}}{\partial\beta}\right). \tag{4.4.19}$$

Решение уравнения (4.4.18) с учетом граничных условий (4.4.13) определяет функцию F_{11}.

Итак, искомые функции $F_{\alpha 1}$ найдены в полном соответствии с уравнениями (4.4.12) и граничными условиями (4.4.13).

Функции $\Phi_{\alpha 1}$ строим так же, как и $F_{\alpha 1}$, заменяя индекс $\gamma=1$ на индекс $\gamma=2$ у функций нагрузок $Q^{1\beta}_{(\gamma)}$ и граничных значений координаты α. Функции нагрузок $Q^{1\beta}_{(\gamma)}$ должны удовлетворять условиям самоуравновешенности.

Для координаты β функции нагрузок $Q^{2\beta}_{(\gamma)}$ определяем по формулам

$$Q^{21}_{(\gamma)}=p^{21}_{(\gamma)}-2\tilde{e}^{21}(p)_{(\gamma)},\quad Q^{22}_{(\gamma)}=p^{22}_{(\gamma)}-2\left(\tilde{e}^{22}(p)-(\nabla_\delta p^\delta+\varphi)\frac{1}{g_{22}}\right)_{(\gamma)}, \tag{4.4.20}$$

$$Q^{23}_{(\gamma)}=p^{23}_{(\gamma)}-2\tilde{e}^{23}(p)_{(\gamma)},\quad Q^{20}_{(\gamma)}=p^{20}_{(\gamma)}-2\tilde{e}^{20}(p)_{(\gamma)}.$$

Функции кинетических напряжений $\Pi_{\alpha 2}^{(0)}$ для координаты β берем в форме

$$\Pi_{\alpha 2}^{(0)} = \frac{1}{2}(1+\cos\bar{\beta}) F_{\alpha 2} + \frac{1}{2}(1-\cos\bar{\beta})\Phi_{\alpha 2} \quad (\alpha = 1, 2, 3, 0), \qquad (4.4.21)$$

здесь $\bar{\beta} = \pi(\beta - \beta_1)/(\beta_2 - \beta_1)$ — безразмерная координата.

Уравнения (1.3.18) второй части книги при $\beta = \beta_1$ принимают вид:

$$\frac{\partial^2 F_{22}}{\partial\alpha\partial z} - \Gamma_{11}^1 \frac{\partial F_{22}}{\partial z} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F_{02}}{\partial\alpha^2} + g_{11}\frac{\partial^2 F_{02}}{\partial z^2} - \Gamma_{11}^1 \frac{\partial F_{02}}{\partial\alpha} - \Gamma_{11}^3 \frac{\partial F_{02}}{\partial z} + \right.$$
$$\left. + 2\frac{\Gamma_{113}\Gamma_{113}}{g_{11}} F_{02}\right) = g_{11} g_{22} Q_{(1)}^{22}, \qquad (4.4.22)$$

$$\left(\frac{\partial^2 F_{12}}{\partial z^2} - (\Gamma_{13}^1 + \Gamma_{23}^2)\frac{\partial F_{12}}{\partial z} + 2\frac{\Gamma_{113}\Gamma_{223}}{g_{11} g_{22}} F_{12} - \frac{\partial^2 F_{12}}{\partial x^{0^2}}\right) -$$
$$-\left(\frac{\partial^2 F_{32}}{\partial\alpha\partial z} - 2\Gamma_{12}^2 \frac{\partial F_{32}}{\partial z} + (\Gamma_{32}^2 - \Gamma_{31}^1)\frac{\partial F_{32}}{\partial\alpha}\right) = 2g_{11} g_{22} Q_{(1)}^{21},$$

$$\left(\frac{\partial^2 F_{32}}{\partial\alpha^2} - (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2)\frac{\partial F_{32}}{\partial\alpha} - \frac{2\Gamma_{311}\Gamma_{223}}{g_{22}} F_{32} - g_{11}\frac{\partial^2 F_{32}}{\partial x^{0^2}}\right) +$$
$$+\left(-\frac{\partial^2 F_{12}}{\partial\alpha\partial z} + 2\Gamma_{23}^2 \frac{\partial F_{12}}{\partial\alpha} + (\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2)\frac{\partial F_{12}}{\partial z} - \right.$$
$$\left. - \frac{2(\Gamma_{111}\Gamma_{223} - \Gamma_{113}\Gamma_{221})}{g_{11} g_{22}} F_{12}\right) = 2g_{11} g_{22} Q_{(1)}^{23},$$

$$\left(\frac{\partial^2 F_{12}}{\partial\alpha\partial x^0} + (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1)\frac{\partial F_{12}}{\partial x^0}\right) +$$
$$+\left(g_{11}\frac{\partial^2 F_{32}}{\partial z\partial x^0} + (g_{11}\Gamma_{23}^2 - \Gamma_{11}^3)\frac{\partial F_{32}}{\partial x^0}\right) = 2g_{11} g_{22} Q_{(1)}^{20},$$

а соответствующие им граничные условия — следующий вид:

$$\text{при } \alpha = \alpha_\gamma \;\; F_{02} = 0, \;\; F_{22} = 0, \;\; F_{32} = 0, \;\; \frac{\partial F_{32}}{\partial\alpha} = 0, \;\; F_{12} = 0;$$

$$\text{при } z = z_\gamma \;\; F_{02} = 0, \;\; F_{22} = 0, \;\; F_{32} = 0, \;\; F_{12} = 0; \qquad (4.4.23)$$

$$\text{при } x^0 = x_1^0 \;\; F_{02} = 0, \;\; \frac{\partial F_{12}}{\partial x^0} = 0, \;\; F_{32} = 0, \;\; \frac{\partial F_{32}}{\partial x^0} = 0, \;\; \frac{\partial^2 F_{32}}{\partial x^{0^2}} = 0, \;\; F_{12} = 0.$$

Подчиним функцию F_{02} уравнению

$$\frac{\partial^2 F_{02}}{\partial\alpha^2} + g_{11}\frac{\partial^2 F_{02}}{\partial z^2} - \Gamma_{11}^1 \frac{\partial F_{02}}{\partial\alpha} - \Gamma_{11}^3 \frac{\partial F_{02}}{\partial z} + 2\frac{\Gamma_{113}\Gamma_{113}}{g_{11}} F_{02} = 0,$$

решением которого с учетом граничных условий (4.4.23) является функция

$$F_{02} = 0. \qquad (4.4.24)$$

В этом случае первое из уравнений (4.4.2) упрощается:

$$\frac{\partial^2 F_{22}}{\partial \alpha \partial z} - \Gamma_{11}^1 \frac{\partial F_{22}}{\partial z} = g_{11} g_{22} Q_{(1)}^{22}$$

и имеет решение

$$F_{22} = \int\limits_{z_1}^{z} e^{\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha} \Gamma_{11}^1 \, d\alpha} \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha} g_{11} g_{22} Q_{(1)}^{22} e^{-\int \Gamma_{11}^1 \, d\alpha} \, d\alpha dz, \qquad (4.4.25)$$

которое удовлетворяет граничным условиям (4.4.23) в том случае, если $Q_{(1)}^{22}$ — самоуравновешенная функция нагрузок.

Рассматривая совместно третье и четвертое из уравнений (4.4.22), приходим к уравнению для функции F_{32}:

$$L_{21} L_{11} (F_{32}) - L_{12} L_{22} (F_{32}) = 2A, \qquad (4.4.26)$$

где

$$A = L_{21} (g_{11} g_{22} Q_{(1)}^{23}) - L_{12} (g_{11} g_{22} Q_{(1)}^{20});$$

$$L_{11} = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2) \frac{\partial}{\partial \alpha} - 2 \frac{\Gamma_{311} \Gamma_{223}}{g_{22}} - g_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^{0^2}},$$

$$L_{12} = -\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial z} + 2\Gamma_{23}^2 \frac{\partial}{\partial \alpha} + (\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2) \frac{\partial}{\partial z} - 2 \frac{\Gamma_{111} \Gamma_{223} - \Gamma_{113} \Gamma_{221}}{g_{11} g_{22}},$$

$$L_{21} = \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial x^0} + (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) \frac{\partial}{\partial x^0}, \qquad (4.4.27)$$

$$L_{22} = g_{11} \frac{\partial^2}{\partial z \partial x^0} + (g_{11} \Gamma_{23}^2 - \Gamma_{11}^3) \frac{\partial}{\partial x^0},$$

и соотношению для функции F_{12}

$$\left(2 \frac{\partial \Gamma_{23}^2}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial z} (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1)\right) \frac{\partial^2 F_{12}}{\partial \alpha \partial x^0} +$$
$$+ \left(-2 \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\Gamma_{111} \Gamma_{223} - \Gamma_{113} \Gamma_{221}}{g_{11} g_{22}} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial z} (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) + \right.$$
$$\left. + 2\Gamma_{23}^2 \frac{\partial}{\partial \alpha} (\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2) + (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) \frac{\partial}{\partial z} (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1)\right) \frac{\partial F_{12}}{\partial x^0} = 0,$$

которое показывает, что

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x^0} = 0. \qquad (4.4.28)$$

Запишем уравнение (4.4.26) в развернутом виде:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial \alpha^3} - g_{11} \frac{\partial^3 f}{\partial \alpha \partial x^{0^2}} + g_{11} \frac{\partial^3 f}{\partial \alpha \partial z^2} - 2\Gamma_{11}^1 \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} -$$
$$- \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial \alpha} + g_{11} (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1)\right) \frac{\partial^2 f}{\partial x^{0^2}} + \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial \alpha} + g_{11} (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1)\right) \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \qquad (4.4.29)$$
$$+ \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial z} - (g_{11} \Gamma_{23}^2 + \Gamma_{11}^3)\right) \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial z} - \left(\frac{\partial (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2)}{\partial \alpha} + 2 \frac{\Gamma_{311} \Gamma_{223}}{g_{22}} + \right.$$

$$+(\Gamma_{12}^{2}-\Gamma_{11}^{1})(\Gamma_{12}^{2}+\Gamma_{11}^{1})-\frac{\partial}{\partial z}(g_{11}\Gamma_{23}^{2}-\Gamma_{11}^{3})+$$

$$+2\Gamma_{23}^{2}(g_{11}\Gamma_{23}^{2}-\Gamma_{11}^{3})\Big)\frac{\partial f}{\partial \alpha}+\Big(\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial\alpha\partial z}+\frac{\partial}{\partial\alpha}(g_{11}\Gamma_{23}^{2}-\Gamma_{11}^{3})-$$

$$-2\Gamma_{23}^{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial\alpha}+(\Gamma_{12}^{2}-\Gamma_{11}^{1})\frac{\partial g_{11}}{\partial z}+(\Gamma_{12}^{2}-\Gamma_{11}^{1})(g_{11}\Gamma_{23}^{2}-\Gamma_{11}^{3})+ \qquad (4.4.29)$$

$$+2\frac{\Gamma_{111}\Gamma_{223}-\Gamma_{113}\Gamma_{221}}{g_{22}}\Big)\frac{\partial f}{\partial z}-\Big(2\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\Gamma_{311}\Gamma_{223}}{g_{22}}+2(\Gamma_{12}^{2}-\Gamma_{11}^{1})\frac{\Gamma_{311}\Gamma_{223}}{g_{22}}-$$

$$-\frac{\partial^2(g_{11}\Gamma_{23}^{2}-\Gamma_{11}^{3})}{\partial\alpha\partial z}+2\Gamma_{23}^{2}\frac{\partial}{\partial\alpha}(g_{11}\Gamma_{23}^{2}-\Gamma_{11}^{3})-$$

$$-(\Gamma_{12}^{2}-\Gamma_{11}^{1})\frac{\partial(\Gamma_{23}^{2}g_{11}-\Gamma_{11}^{3})}{\partial z}-2\frac{\Gamma_{111}\Gamma_{223}-\Gamma_{113}\Gamma_{221}}{g_{11}g_{22}}(g_{11}\Gamma_{23}^{2}-\Gamma_{11}^{3})\Big)f=2A,$$

где

$$f=\frac{\partial F_{32}}{\partial x^0}. \qquad (4.4.30)$$

Решая уравнение (4.4.29) с учетом следующих граничных условий

$$\text{при } \alpha=\alpha_\gamma \quad f=0,\ \frac{\partial f}{\partial\alpha}=0; \quad \text{при } z=z_\gamma \quad f=0; \qquad (4.4.31)$$

$$\text{при } x^0=x_1^0\ \frac{\partial f}{\partial x^0}=0,\ f=0,$$

определим функцию $f(\alpha, z, x^0)$; интегрируя (4.4.30), получим

$$F_{32}=\int_{x_1^0}^{x^0} f\,dx^0. \qquad (4.4.32)$$

Второе из уравнений (4.4.22) запишем так:

$$\frac{\partial^2 F_{12}}{\partial z^2}-(\Gamma_{13}^{1}+\Gamma_{23}^{2})\frac{\partial F_{12}}{\partial z}+2\frac{\Gamma_{113}\Gamma_{223}}{g_{11}g_{22}}F_{12}-\frac{\partial^2 F_{12}}{\partial x^{0^2}}=B,$$

здесь

$$B=2g_{11}g_{22}Q_{(1)}^{21}+\int_{x_1^0}^{x^0}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial z}-2\Gamma_{12}^{2}\frac{\partial f}{\partial z}+(\Gamma_{23}^{2}-\Gamma_{13}^{1})\frac{\partial f}{\partial\alpha}\Big)dx^0, \qquad (4.4.33)$$

учитывая выражение (4.4.28), получим для функции F_{12} уравнение

$$\frac{\partial^2 F_{21}}{\partial z^2}-(\Gamma_{13}^{1}+\Gamma_{23}^{2})\frac{\partial F_{12}}{\partial z}+2\frac{\Gamma_{113}\Gamma_{223}}{g_{11}g_{22}}F_{12}=B, \qquad (4.4.34)$$

в результате решения которого с учетом граничных условий (4.4.23) находим функцию F_{12}.

Итак, построение функций $F_{\alpha 1}$ сводится к решению уравнений (4.4.29) и (4.4.34) с учетом соответствующих граничных условий.

Функции $\Phi_{\alpha 2}$ определяются так же, как и функции $F_{\alpha 2}$, однако у функций нагрузок $Q_{(\gamma)}^{2\beta}$ и граничных значений координаты β следует индекс $\gamma = 1$ заменить на индекс $\gamma = 2$. Функции нагрузок $Q^{2\beta}_{(\gamma)}$ должны быть самоуравновешенными.

Для координаты z имеем следующие функции нагрузок:

$$Q^{31}_{(\gamma)} = p^{31}_{(\gamma)} - 2\tilde{e}^{31}(p)_{(\gamma)}, \quad Q^{32}_{(\gamma)} = p^{32}_{(\gamma)} - 2\tilde{e}^{32}(p)_{(\gamma)},$$

$$Q^{33}_{(\gamma)} = p^{33}_{(\gamma)} - 2\left[\tilde{e}^{33}(p) - (\nabla_\delta p^\delta + \varphi)\right], \quad Q^{30}_{(\gamma)} = p^{30}_{(\gamma)} - 2\tilde{e}^{30}(p)_{(\gamma)}. \tag{4.4.35}$$

Функции кинетических напряжений $\Pi^{(0)}_{\alpha 3}$ для координаты z таковы:

$$\Pi^{(0)}_{\alpha 3} = \frac{1}{2}(1 + \cos\bar{z})\, F_{\alpha 3} + \frac{1}{2}(1 - \cos\bar{z})\,\Phi_{\alpha 3} \quad (\alpha = 1, 2, 3, 0), \tag{4.4.36}$$

здесь $\bar{z} = \pi(z + h/2)/h$ — безразмерная координата.

Уравнения (1.3.18) второй части книги при $z = z_1 = -h/2$ принимают вид:

$$\frac{\partial^2 F_{13}}{\partial\alpha\partial\beta} - \Gamma^1_{11}\frac{\partial F_{13}}{\partial\beta} - \Gamma^3_{11}\frac{\partial F_{33}}{\partial\beta} - \Gamma^3_{22}\frac{\partial F_{23}}{\partial\alpha} - \frac{1}{g_{11}}(\Gamma_{122}\Gamma_{311} + \Gamma_{322}\Gamma_{111})F_{23} +$$
$$+ \frac{1}{2}\left[g_{22}\frac{\partial^2 F_{03}}{\partial\alpha^2} + g_{11}\frac{\partial^2 F_{03}}{\partial\beta^2} - (g_{22}\Gamma^1_{11} + g_{11}\Gamma^1_{22})\frac{\partial F_{03}}{\partial\alpha} + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{g_{11}g_{22}}(-g_{11}\Gamma_{212}\Gamma_{212} + g_{22}\Gamma_{122}\Gamma_{111} + g_{11}g_{22}\Gamma_{322}\Gamma_{311})F_{03}\right] =$$
$$= g_{11}g_{22}Q^{33}_{(1)},$$

$$\left(\frac{\partial^2 F_{23}}{\partial\beta^2} + \frac{2g_{22}}{g_{11}g_{22}}\Gamma_{113}\Gamma_{322}F_{23} - g_{22}\frac{\partial^2 F_{23}}{\partial x^{0^2}}\right) + 2\Gamma^1_{13}\frac{\partial F_{13}}{\partial\beta} - \frac{\partial^2 F_{33}}{\partial\alpha\partial\beta} +$$
$$+ \left(g_{22}\Gamma^1_{13}\frac{\partial F_{03}}{\partial\alpha} + \frac{2}{g_{11}g_{22}}(g_{11}\Gamma_{221}\Gamma_{223} - g_{22}\Gamma_{113}\Gamma_{122})F_{03}\right) =$$
$$= 2g_{11}g_{22}Q^{31}_{(1)}, \tag{4.4.37}$$

$$\left(\frac{\partial^2 F_{33}}{\partial\alpha^2} - (\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12})\frac{\partial F_{33}}{\partial\alpha} - \frac{2\Gamma_{311}\Gamma_{223}}{g_{22}}F_{33} - g_{11}\frac{\partial^2 F_{33}}{\partial x^{0^2}}\right) +$$
$$+ \left(-\frac{\partial^2 F_{23}}{\partial\alpha\partial\beta} + (\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12})\frac{\partial F_{23}}{\partial\beta}\right) +$$
$$+ \left(2\Gamma^2_{23}\frac{\partial F_{13}}{\partial\alpha} - \frac{2}{g_{11}g_{22}}(\Gamma_{111}\Gamma_{223} - \Gamma_{113}\Gamma_{221})F_{13}\right) +$$
$$+ g_{11}\Gamma^2_{32}\frac{\partial F_{03}}{\partial\beta} = 2g_{11}g_{22}Q^{32}_{(1)},$$

$$\left(g_{22}\frac{\partial^2 F_{23}}{\partial\alpha\partial x^0} - g_{22}\Gamma^1_{11}\frac{\partial F_{23}}{\partial x^0} - g_{11}\Gamma^1_{22}\frac{\partial F_{23}}{\partial x^0}\right) +$$
$$+ g_{11}\frac{\partial^2 F_{33}}{\partial\beta\partial x^0} + g_{22}\Gamma^1_{13}\frac{\partial F_{13}}{\partial x^0} = 2g_{11}g_{22}Q^{30}_{(1)}.$$

Уравнениям (4.4.37) соответствуют следующие граничные условия:

$$
\begin{aligned}
&\text{при } \alpha=\alpha_\gamma\ F_{03}=0,\ F_{13}=0,\ F_{23}=0,\ F_{33}=0; \\
&\text{при } \beta=\beta_\gamma\ F_{03}=0,\ F_{13}=0,\ F_{23}=0; \\
&\text{при } x^0=x^0_1\ F_{03}=0,\ F_{23}=0,\ \frac{\partial F_{23}}{\partial x^0}=0,\ F_{33}=0,\ \frac{\partial F_{33}}{\partial x^0}=0.
\end{aligned}
\tag{4.4.38}
$$

Принимая во внимание произвольность функций $F_{\alpha 3}$, подчиним F_{03} уравнению

$$
g_{22}\frac{\partial^2 F_{03}}{\partial\alpha^2}+g_{11}\frac{\partial^2 F_{03}}{\partial\beta^2}-(g_{11}\Gamma^1_{22}+g_{22}\Gamma^1_{11})\frac{\partial F_{03}}{\partial\alpha}+
$$

$$
+\frac{2}{g_{11}g_{22}}(-g_{11}\Gamma_{221}\Gamma_{221}+g_{22}\Gamma_{122}\Gamma_{111}+g_{11}g_{22}\Gamma_{322}\Gamma_{311})F_{03}=0,
$$

решение которого с учетом граничных условий (4.4.38) имеет вид

$$
F_{03}=0. \tag{4.4.39}
$$

Рассмотрим совместно первое, второе и четвертое из уравнений (4.4.37), предварительно записав их так:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 F_{13}}{\partial\alpha\partial\beta}-\Gamma^1_{11}\frac{\partial F_{13}}{\partial\beta}-\Gamma^3_{11}\frac{\partial F_{33}}{\partial\beta}-L_{31}(F_{23})=g_{11}g_{22}Q^{33}_{(1)}, \\
&2\Gamma^1_{13}\frac{\partial F_{13}}{\partial\beta}-\frac{\partial^2 F_{33}}{\partial\alpha\partial\beta}+L_{11}(F_{23})=2g_{11}g_{22}Q^{31}_{(1)}, \\
&g_{22}\Gamma^1_{13}\frac{\partial F_{13}}{\partial x^0}+g_{11}\frac{\partial^2 F_{33}}{\partial\beta\partial x^0}+L_{01}\left(\frac{\partial F_{23}}{\partial x^0}\right)=2g_{11}g_{22}Q^{30}_{(1)},
\end{aligned}
\tag{4.4.40}
$$

здесь

$$
L_{31}=\Gamma^3_{22}\frac{\partial}{\partial\alpha}-\frac{\Gamma_{122}\Gamma_{311}+\Gamma_{322}\Gamma_{111}}{g_{11}},
$$

$$
L_{11}=\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+2\frac{\Gamma_{113}\Gamma_{322}}{g_{11}}-g_{22}\frac{\partial^2}{\partial x^{0^2}},
$$

$$
L_{01}=g_{22}\frac{\partial}{\partial\alpha}-(g_{22}\Gamma^1_{11}+g_{11}\Gamma^1_{22}).
$$

В результате интегрирования третьего из уравнений (4.4.40) находим

$$
\frac{\partial F_{33}}{\partial\beta}=2g_{22}\int_{x^0_1}^{x^0}Q^{30}_{(1)}\,dx^0-\frac{g_{22}}{g_{11}}\Gamma^1_{13}F_{13}-\frac{1}{g_{11}}L_{01}(F_{23}),
$$

$$
\frac{\partial^2 F_{33}}{\partial\alpha\partial\beta}=2\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(g_{22}\int_{x^0_1}^{x^0}Q^{30}_{(1)}\,dx^0\right)-\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{g_{22}}{g_{11}}\Gamma^1_{13}F_{13}\right)-
$$

$$
-\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{g_{11}}L_{21}(F_{23})\right).
$$

Подставляя последние выражения в первое и второе из уравнений (4.4.40), получим следующие уравнения:

$$N_1(F_{13})+\left(\frac{\Gamma^3_{11}}{g_{11}}L_{01}(F_{23})-L_{31}(F_{23})\right)=A_1, \qquad (4.4.41)$$

$$N_2(F_{13})+\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{g_{11}}L_{01}(F_{23})\right)+L_{11}(F_{23})\right)=A_2,$$

где

$$N_1=\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}-\Gamma^1_{11}\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{g_{22}}{g_{11}}\Gamma^3_{11}\Gamma^1_{13},$$

$$N_2=2\Gamma^1_{13}\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{g_{22}}{g_{11}}\Gamma^1_{13}\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{g_{22}}{g_{11}}\Gamma^1_{13}\right),$$

$$A_1=g_{11}g_{22}Q^{33}_{(1)}+2g_{22}\Gamma^3_{11}\int\limits_{x^0_1}^{x^0}Q^{30}_{(1)}\,dx^0,$$

$$A_2=2\left[g_{11}g_{22}Q^{31}_{(1)}+\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(g_{22}\int\limits_{x^0_1}^{x^0}Q^{30}_{(1)}\,dx^0\right)\right].$$

Действуя дифференциальными операторами на уравнения (4.4.41), приходим к соотношению

$$N_2N_1(F_{13})-N_1N_2(F_{13})+N_2\left(\frac{\Gamma^3_{11}}{g_{11}}L_{01}(F_{23})-L_{31}(F_{23})\right)-$$
$$-N_1\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{g_{11}}L_{01}(F_{23})\right)+L_{11}(F_{23})\right)=N_2(A_1)-N_1(A_2). \qquad (4.4.42)$$

Искомые функции $(F_{\alpha 3})$ произвольны, поэтому F_{13} можно подчинить уравнению

$$N_2N_1(F_{13})-N_1N_2(F_{13})=0 \qquad (4.4.43)$$

и граничным условиям (4.4.38), тогда из (4.4.42) для функции F_{23} имеем уравнение

$$N_2\left(\frac{\Gamma^3_{11}}{g_{11}}L_{01}(F_{23})-L_{31}(F_{23})\right)-N_1\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{g_{11}}L_{01}(F_{23})\right)+\right.$$
$$\left.+L_{11}(F_{23})\right)=N_2(A_1)-N_1(A_2). \qquad (4.4.44)$$

В развернутом виде уравнение (4.4.43) таково:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{g_{22}}{g_{11}}\Gamma^1_{13}\right)\frac{\partial^2 F_{13}}{\partial\alpha\partial\beta}+2\frac{\partial\Gamma^1_{13}}{\partial\alpha}\frac{\partial^2 F_{13}}{\partial\beta^2}+$$
$$+\left[\frac{g_{22}}{g_{11}}\Gamma^1_{13}\frac{\partial\Gamma^1_{11}}{\partial\alpha}+\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\left(\frac{g_{22}}{g_{11}}\Gamma^1_{13}\right)\right]\frac{\partial F_{13}}{\partial\beta}-$$
$$-\frac{g_{22}}{g_{11}}\Gamma^1_{13}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{g_{22}}{g_{11}}\Gamma^3_{11}\Gamma^1_{13}\right)F_{13}=0; \qquad (4.4.43')$$

решением этого уравнения с учетом граничных условий (4.4.38) является функция

$$F_{13} = 0. \tag{4.4.45}$$

В результате интегрирования уравнения (4.4.44) с учетом граничных условий (4.4.38) определим функцию F_{23}.

Считая F_{23} известной, для функции F_{33} имеем уравнение

$$\frac{\partial^2 F_{33}}{\partial\alpha^2} - (\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12}) \frac{\partial F_{33}}{\partial\alpha} - \frac{2\Gamma_{311}\Gamma_{223}}{g_{22}} F_{33} - g_{11} \frac{\partial^2 F_{33}}{\partial x^{0^2}} = B, \tag{4.4.46}$$

где

$$B = 2g_{11} g_{22} Q^{32}_{(1)} + \frac{\partial_2 F_{23}}{\partial\alpha\partial\beta} - (\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12}) \frac{\partial F_{23}}{\partial\beta}. \tag{4.4.47}$$

Решение последнего уравнения представим в виде ряда Фурье

$$F_{33} = \sum_n V_n(\alpha) \ddot{T}_n(x^0, \beta), \tag{4.4.48}$$

здесь $V_n(\alpha)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — собственные функции, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{\partial^2 V_n}{\partial\alpha^2} - (\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12}) \frac{\partial V_n}{\partial\alpha} - \frac{2\Gamma_{311}\Gamma_{223}}{g_{22}} V_n + \omega_n^2 g_{11} V_n = 0 \tag{4.4.49}$$

и граничным условиям

$$V_n = 0 \text{ при } \alpha = \alpha_\gamma. \tag{4.4.50}$$

Подставляя (4.4.48) в уравнение (4.4.46) и полагая, что функцию B/g_{11} можно представить в виде ряда Фурье

$$\frac{1}{g_{11}} B = \sum_n B_n V_n(\alpha),$$

где

$$B_n = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{1}{g_{11}} B V_n \, d\alpha \Bigg/ \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} V_n^2 \, d\alpha, \tag{4.4.51}$$

для функций $T_n(x^0, \beta)$ получим уравнение $\ddot{T}_n + \omega_n^2 T_n = -B_n(x^0, \beta)$, решением которого является функция

$$T_n = \frac{1}{\omega_n} \int_{x_1^0}^{x^0} B_n(\tau\beta) \sin\omega_n(\tau - x^0)\, d\tau. \tag{4.4.52}$$

В результате подстановки (4.4.52) в (4.4.48) определяем функцию F_{33}:

$$F_{33} = \sum_n \frac{1}{\omega_n} \int_{x_1^0}^{x^0} B_n(\tau, \beta) \sin\omega_n(\tau - x^0)\, d\tau V_n(\alpha). \tag{4.4.48$'$}$$

Итак, функции $F_{\alpha 3}$ найдены, полное их определение сводится к интегрированию уравнений (4.4.44) и (4.4.49) с учетом соответствующих граничных условий.

Функции $\Phi_{\alpha 3}$ строятся так же, как и функции $F_{\alpha 3}$, однако у функций нагрузок $Q^{3\beta}_{(\gamma)}$ и граничных значений координаты x^3 необходимо заменить индекс $\gamma = 1$ на индекс $\gamma = 2$. Функции нагрузок $Q^{3\beta}_{(\gamma)}$ должны быть самоуравновешенными. Для координаты x^0 имеют место следующие функции нагрузок:

$$Q^{00}_{(1)} = p^{00}_{(1)} - 2(\nabla_\delta p^\delta + \varphi)_{(1)}, \quad Q^{01}_{(1)} = p^{01}_{(1)} - 2\tilde{e}^{01}(p)_{(1)},$$
$$Q^{02}_{(1)} = p^{02}_{(1)} - 2\tilde{e}^{02}(p)_{(1)}, \quad Q^{03}_{(1)} = p^{03}_{(1)} - 2\tilde{e}^{03}(p)_{(1)}; \tag{4.4.53}$$

функции кинетических напряжений $\Pi^{(0)}_{\alpha 0}$, соответствующие этой координате, таковы:

$$\Pi_{00} = (1/2)(1 + \cos \bar{x}^0)\,\Psi_{00},$$
$$\Pi_{i0} = \frac{1}{2}\int\limits_{x^0_1}^{x^0} (1 + \cos \bar{x}^0)\, dx^0 F_{i0} \quad (i = 1, 2, 3). \tag{4.4.54}$$

Уравнения (1.3.18) второй части книги в этом случае имеют вид

$$\frac{\partial F_{10}}{\partial \beta} - \Gamma^3_{22} F_{20} + g_{22}\left(\frac{\partial F_{20}}{\partial z} + \Gamma^1_{13} F_{20}\right) = 2 g_{11} g_{22} Q^{01}_{(1)},$$
$$-\frac{\partial F_{10}}{\partial \alpha} + (\Gamma^1_{11} - \Gamma^2_{12}) F_{10} + \Gamma^3_{11} F_{30} - g_{11}\left(\frac{\partial F_{30}}{\partial z} + \Gamma^2_{23} F_{30}\right) =$$
$$= -2 g_{11} g_{22} Q^{02}_{(1)}, \tag{4.4.55}$$
$$g_{22}\left(-\frac{\partial F_{20}}{\partial \alpha} + \Gamma^1_{11} F_{20} - \Gamma^1_{13} F_{10}\right) +$$
$$+ g_{11}\left(-\frac{\partial F_{30}}{\partial \beta} + \Gamma^1_{22} F_{20}\right) = -2 g_{11} g_{22} Q^{03}_{(1)},$$
$$\Delta \Psi_{00} = g_{11} g_{22} Q^{00}_{(1)},$$

где

$$\Delta = \left(\frac{g_{22}}{g_{11}} \Gamma_{113}\Gamma_{113} + \frac{g_{11}}{g_{22}} \Gamma_{223}\Gamma_{223}\right) -$$
$$- \frac{1}{g_{11} g_{22}}(-g_{11}\Gamma_{221}\Gamma_{221} + g_{22}\Gamma_{211}\Gamma_{122} + g_{11} g_{22}\Gamma_{322}\Gamma_{311}). \tag{4.4.56}$$

Из уравнения (4.4.55) следует, что

$$\Psi_{00} = g_{11} g_{22} Q^{00}_{(1)}/\Delta. \tag{4.4.57}$$

Исключая функции F_{10} и F_{30} из первых трех уравнений (4.4.56), получим уравнение для F_{20}:

$$2g_{22}\frac{\partial^3 F_{20}}{\partial\alpha\partial\beta\partial z}+a_{12}\frac{\partial^2 F_{20}}{\partial\alpha\partial\beta}+a_{23}\frac{\partial^2 F_{20}}{\partial\beta\partial z}+$$
$$+a_{33}\frac{\partial^2 F_{20}}{\partial z^2}+a_2\frac{\partial F_{20}}{\partial\beta}+a_3\frac{\partial F_{20}}{\partial z}+aF_{20}=A, \qquad (4.4.58)$$

здесь

$$a_{12}=g_{11}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{g_{22}}{g_{11}}\right)+g_{22}(\Gamma_{13}^1+\Gamma_{23}^2)-\left(\Gamma_{22}^3+\frac{g_{22}}{g_{11}}\Gamma_{11}^3\right), \qquad (4.4.59)$$
$$a_{23}=\frac{\partial g_{22}}{\partial z}-g_{11}\Gamma_{22}^1+g_{22}(\Gamma_{12}^2-2\Gamma_{11}^1),\quad a_{33}=-g_{22}g_{22}\Gamma_{13}^1,$$
$$a_2=\frac{\partial}{\partial\alpha}(g_{22}\Gamma_{13}^1-\Gamma_{22}^3)-g_{11}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{g_{22}}{g_{11}}\Gamma_{11}^1+\Gamma_{22}^1\right)-$$
$$-g_{11}\Gamma_{23}^2\Gamma_{22}^1-g_{22}(\Gamma_{13}^1\Gamma_{11}^1-\Gamma_{13}^1\Gamma_{12}^2+\Gamma_{23}^2\Gamma_{11}^1)+$$
$$+\left(\Gamma_{22}^3\Gamma_{11}^1+\Gamma_{11}^3\Gamma_{22}^1+\frac{g_{22}}{g_{11}}\Gamma_{11}^3\Gamma_{11}^1\right),$$
$$a_3=-g_{11}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{g_{22}g_{22}}{g_{11}}\Gamma_{13}^1\right)+g_{22}\Gamma_{13}^1\left(\left(\Gamma_{22}^3+\frac{g_{22}}{g_{11}}\Gamma_{11}^3\right)-g_{22}(\Gamma_{23}^2+\Gamma_{13}^1)\right),$$
$$a=g_{11}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{g_{22}}{g_{11}}\Gamma_{13}^1(\Gamma_{22}^3-g_{22}\Gamma_{13}^1)\right)-(\Gamma_{11}^3-g_{11}\Gamma_{23}^2)\frac{g_{22}}{g_{11}}\Gamma_{13}^1(\Gamma_{22}^3-g_{22}\Gamma_{13}^1),$$
$$A=2\left[g_{11}g_{22}\frac{\partial^2 Q_{(1)}^{01}}{\partial\alpha\partial\beta}-g_{11}g_{22}\frac{\partial^2 Q_{(1)}^{02}}{\partial\beta^2}+g_{11}g_{22}\frac{\partial_2 Q_{(1)}^{03}}{\partial\beta\partial z}+\right.$$
$$+\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}(g_{11}g_{22})-g_{11}g_{22}(\Gamma_{11}^1-\Gamma_{12}^2)\right)\frac{\partial Q_{(1)}^{01}}{\partial\beta}+$$
$$+\left(g_{11}\frac{\partial}{\partial z}(g_{11}g_{22})-g_{11}g_{22}(\Gamma_{11}^3-g_{11}\Gamma_{23}^2)\right)\frac{\partial Q_{(1)}^{03}}{\partial\beta}-$$
$$-g_{11}g_{22}g_{22}\Gamma_{13}^1\frac{\partial Q_{(1)}^{01}}{\partial z}-$$
$$\left.-\left(g_{11}\frac{\partial}{\partial z}(g_{22}g_{22}\Gamma_{13}^1)-g_{22}g_{22}\Gamma_{13}^1(\Gamma_{11}^3-g_{11}\Gamma_{23}^2)\right)Q_{(1)}^{01}\right]. \qquad (4.4.60)$$

Уравнениям (4.4.55) соответствуют следующие граничные условия:

$$\text{при } \alpha=\alpha_\gamma\ F_{20}=0;$$
$$\text{при } \beta=\beta_\gamma\ F_{20}=0,\ F_{10}=0,\ F_{30}=0; \qquad (4.4.61)$$
$$\text{при } z=z_\gamma\ F_{20}=0.$$

В результате интегрирования уравнения (4.4.58) с учетом граничных условий (4.4.61) определим функцию F_{20}, а проинтегрировав первое из уравнений (4.4.55), — функцию F_{10}:

$$F_{10}=2g_{11}g_{22}\int_{\beta_1}^{\beta}Q_{(1)}^{01}\,d\beta-\int_{\beta_1}^{\beta}L_1(F_{20})\,d\beta, \qquad (4.4.62)$$

где

$$L_1(F_{20}) = g_{22}\frac{\partial F_{20}}{\partial z} + (g_{22}\Gamma^1_{13} - \Gamma^3_{22})F_{20}.$$

Интегрируя третье из уравнений (4.4.55), находим функцию

$$F_{30} = \int_{\beta_1}^{\beta}\left(Q^{03}_{(1)} - g_{22}\Gamma^1_{13}\int_{\beta_1}^{\beta} Q^{01}_{(1)}\,d\beta\right)d\beta +$$

$$+\int_{\beta_1}^{\beta}\left[\frac{g_{22}}{g_{11}}\Gamma^1_{13}\int_{\beta_1}^{\beta} L_1(F_{20})\,d\beta - L_3(F_{20})\right]d\beta, \qquad (4.4.63)$$

где

$$L_3(F_{20}) = \frac{g_{22}}{g_{11}}\frac{\partial F_{20}}{\partial \alpha} - \left(\frac{g_{22}}{g_{11}}\Gamma^1_{11} + \Gamma^1_{22}\right)F_{20}.$$

Для того чтобы граничные условия (4.4.61) выполнялись полностью, функции нагрузок $Q^{0\beta}_{(\gamma)}$ должны быть самоуравновешенными.

Итак, функции F_{i0} и Ψ_{00} построены в полном соответствии с условиями, наложенными на компоненты основного тензора.

Полные функции кинетических напряжений $\Pi^{(0)}_{\alpha}$ основного тензора таковы:

$$\Pi^{(0)}_{\alpha} = \sum_{\beta=0}^{3}\Pi^{(0)}_{\alpha\beta}\ (\alpha = 1, 2, 3, 0); \qquad (4.4.64)$$

подставляя их последовательно в (4.4.8), (4.4.9) и (4.4.7), определим компоненты основного тензора (T_0) для самоуравновешенных функций нагрузок.

Если функции нагрузок $Q^{\alpha\beta}_{(\gamma)}$ не самоуравновешены, то

$$(T_0) = (T_0^{(1)}) + (T_0^{(2)}), \qquad (4.4.65)$$

где $(T_0^{(1)})$ — основной тензор для самоуравновешенных частей $\tilde{Q}^{\alpha\beta}_{(\gamma)}$ функций нагрузок; $(T_0^{(2)})$ — основной тензор для несамоуравновешенных частей $\bar{Q}^{\alpha\beta}_{(\gamma)}$ функций нагрузок. Компоненты тензора $(T_0^{(2)})$ вычисляем по формулам (4.1.96) второй части книги.

Корректирующий тензор $(T_к)$ для оболочки вращения ненулевой гауссовой кривизны строим, используя результаты, полученные в § 4—7 гл. 1 второй части книги. Системы фундаментальных функций принимаем следующими:

$$\begin{aligned} \xi_m(\alpha) &= (1/m!)\,Q_m(\bar{\alpha})\sin m\bar{\alpha}, \\ \eta_n(\beta) &= (1/n!)\sin n\bar{\beta}, \\ \zeta_p(z) &= (1/p!)\,J_p(\bar{z})\sin p\bar{z}. \end{aligned} \qquad (4.4.66)$$

Компоненты тензора $(T_к)$ берем в форме Морера:

$$T^{\alpha\beta}_{(к)} = \sum_{mnpl}(A_{mnpl}f^{\alpha\beta}_{(1)} + B_{mnpl}f^{\alpha\beta}_{(2)} + C_{mnpl}f^{\alpha\beta}_{(3)} + D_{mnpl}f^{\alpha\beta}_{(0)}). \qquad (4.4.67)$$

Функции $f^{\alpha\beta}(mnpl)$ вычисляем по формулам (1.4.14) второй части книги, учитывая выражения компонент метрического тензора (4.4.2), символов Кристоффеля (4.4.5) и фундаментальных функций (4.4.66).

Параметры $A_{mnpl}, \ldots, D_{mnpl}$ компонент корректирующего тензора определяются по методике, изложенной в § 1 гл. 4 второй части книги.

Для малых деформаций упругопластической оболочки справедлива система уравнений (1.3.70), коэффициенты $F_{\gamma\beta}$ и свободные члены L_β которой в n-м приближении вычисляются по формулам (4.1.99), (4.1.100) и (4.1.101) второй части книги, а подынтегральные выражения имеют вид:

$$A^{(1)}_{\gamma\beta} = 2\left[g_{11} f^{11}_{(\gamma)} g_{11} f^{11}_{(\beta)} + g_{22} f^{22}_{(\gamma)} g_{22} f^{22}_{(\beta)} + f^{33}_{(\gamma)} f^{33}_{(\beta)} + f^{00}_{(\gamma)} f^{00}_{(\beta)} + \right.$$
$$+ 2\left(g_{11} g_{22} f^{12}_{(\gamma)} f^{12}_{(\beta)} + g_{11} f^{13}_{(\gamma)} f^{13}_{(\beta)} + g_{22} f^{23}_{(\gamma)} f^{23}_{(\beta)} - g_{11} f^{10}_{(\gamma)} f^{10}_{(\beta)} - \right.$$
$$\left.\left. - g_{22} f^{20}_{(\gamma)} f^{20}_{(\beta)} - f^{30}_{(\gamma)} f^{30}_{(\beta)}\right)\right], \tag{4.4.68}$$

$$A^{(2)}_{\gamma\beta} = \left(g_{11} f^{11}_{(\gamma)} + g_{22} f^{22}_{(\gamma)} + f^{33}_{(\gamma)} - f^{00}_{(\gamma)}\right)\left(g_{11} f^{11}_{(\beta)} + g_{22} f^{22}_{(\beta)} + f^{33}_{(\beta)} - f^{00}_{(\beta)}\right);$$

$$B^{(1)}_{\beta} = w_{\alpha 3}\left(n_1 g_{11} f^{\alpha 1}_{(\beta)} + n_2 g_{22} f^{\alpha 2}_{(\beta)} + n_3 f^{\alpha 3}_{(\beta)} - n_0 f^{\alpha 0}_{(\beta)}\right),$$
$$B^{(2)}_{\beta} = \alpha T^0\left(g_{11} f^{11}_{(\beta)} + g_{22} f^{22}_{(\beta)} + f^{33}_{(\beta)} - f^{00}_{(\beta)}\right),$$
$$B^{(3)}_{\beta} = 2\left[g_{11} T^{11}_{(0)} g_{11} f^{11}_{(\beta)} + g_{22} T^{22}_{(0)} g_{22} f^{22}_{(\beta)} + T^{33}_{(0)} f^{33}_{(\beta)} + T^{00}_{(0)} f^{00}_{(\beta)} + \right.$$
$$+ 2\left(T^{13}_{(0)} g_{11} f^{13}_{(\beta)} + T^{12}_{(0)} g_{11} g_{22} f^{12}_{(\beta)} + g_{22} T^{23}_{(0)} f^{23}_{(\beta)} - T^{10}_{(0)} g_{11} f^{10}_{(\beta)} - \right. \tag{4.4.69}$$
$$\left.\left. - T^{20}_{(0)} g_{22} f^{20}_{(\beta)} - T^{30}_{(0)} f^{30}_{(\beta)}\right)\right],$$
$$B^{(4)}_{\beta} = \left(g_{11} T^{11}_{(0)} + g_{22} T^{22}_{(0)} + T^{33}_{(0)} - T^{00}_{(0)}\right)\left(g_{11} f^{11}_{\beta} + g_{22} f^{22}_{(\beta)} + f^{33}_{(\beta)} - f^{00}_{(\beta)}\right).$$

Для малых деформаций вязкоупругой оболочки справедлива система уравнений (1.3.70); коэффициенты $F_{\gamma\beta}$ и свободные члены L_β уравнений вычисляются по формулам (4.1.102) второй части книги, где

$$A_\gamma = g_{11} f^{11}_{(\gamma)} + g_{22} f^{22}_{(\gamma)} + f^{33}_{(\gamma)} - f^{00}_{(\gamma)}. \tag{4.4.70}$$

В результате выполнения указанных операций компоненты корректирующего тензора оболочки вращения ненулевой гауссовой кривизны найдены.

§ 5. Сферическая и оживальная оболочки под действием внутреннего и внешнего давлений

Простейшим представителем оболочек вращения ненулевой гауссовой кривизны является сферическая оболочка. Координатами оболочки (срединной поверхности) являются $\alpha = \theta$, $\beta = \varphi$; пределы их изменения $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Согласно (4.4.3), параметры Ляме A_i $(i = 1, 2)$ таковы:

$$A_1 = R_1,\ A_2 = R_2 \sin\theta, \tag{4.5.1}$$

где $R_1 = R_2 = r_0$ — радиус срединной поверхности.

Компоненты метрического тензора сферической оболочки в соответствии с (4.4.4) имеют вид

$$g_{11} = r_0^2\,(1 + z/r_0)^2; g_{22} = r_0^2\,(1 + z/r_0)^2 \sin^2\theta; g_{33} = 1; g_{00} = -1. \tag{4.5.2}$$

Символы Кристоффеля, отличные от нуля, определяем по формулам (4.4.5):

$$\begin{gathered}
\Gamma_{3.11} = -r_0\,(1 + z/r_0); \quad \Gamma_{1.13} = r_0\,(1 + z/r_0);\\
\Gamma_{3.22} = -r_0\,(1 + z/r_0)\sin^2\theta; \quad \Gamma_{2.23} = r_0\,(1 + z/r_0)\sin^2\theta;\\
\Gamma_{1.22} = -r_0^2\,(1 + z/r_0)^2 \sin\theta\cos\theta; \quad \Gamma_{2.21} = r_0^2\,(1 + z/r_0)^2 \sin\theta\cos\theta;
\end{gathered} \tag{4.5.3}$$

$$\begin{gathered}
\Gamma^3_{11} = -r_0\,(1 + z/r_0); \quad \Gamma^1_{13} = \frac{1}{r_0}\,(1 + z/r_0)^{-1};\\
\Gamma^3_{22} = -r_0\,(1 + z/r_0)\sin^2\theta; \quad \Gamma^2_{23} = \frac{1}{r_0}\,(1 + z/r_0)^{-1};\\
\Gamma^1_{22} = -\sin\theta\cos\theta; \quad \Gamma^2_{21} = \operatorname{ctg}\theta.
\end{gathered}$$

Пусть на сферическую оболочку, находящуюся в поле силы тяжести с потенциалом $\varphi = n\varphi\,(\theta,\ \varphi,\ z,\ x^0)$, действуют внешние и внутренние давления и температурное поле.

Напряженно-деформированное состояние оболочки характеризуется тензором напряжений (σ), тензором деформации (e), которые и требуется построить [17].

При динамическом нагружении оболочки, когда

$$p^{3i}_{(\gamma)} = p^{3i}_{(\gamma)}\,(\theta,\ \varphi,\ t),\ T^0 = T^0\,(\theta,\ \varphi,\ z,\ t), \tag{4.5.4}$$

основной искомой величиной является тензор кинетических напряжений (T), построение которого для оболочки вращения ненулевой гауссовой кривизны изложено в § 4.

Функции нагрузок $Q^{\alpha\beta}_{(\gamma)}$ следующие: для координаты z

$$Q^{33}_{(\gamma)} = (\rho v^3 v^3)_{(\gamma)} - p^{33}_{(\gamma)} + 2\,\varphi_{(\gamma)},\ Q^{31}_{(\gamma)} = (\rho v^3 v^1)_{(\gamma)} - p^{31}_{(\gamma)}, \tag{4.5.5}$$

$$Q^{32}_{(\gamma)} = (\rho v^3 v^2)_{(\gamma)} - p^{32}_{(\gamma)},\ Q^{30}_{(\gamma)} = (\rho v^3 v^0)_{(\gamma)};$$

для координаты x^0

$$\begin{gathered}
Q^{00}_{(1)} = (\rho v^0 v^0)_{01} - 2\varphi_{(1)},\ Q^{01}_{(\gamma)} = (\rho v^0 v^1)_{(1)},\\
Q^{02}_{(1)} = (\rho v^0 v^2)_{(1)},\ Q^{03}_{(1)} = (\rho v^0 v^3)_{(1)}.
\end{gathered}$$

Самоуравновешенные части функций нагрузок

$$\widetilde{Q}^{3\beta}_{(1)} = \frac{\int\limits_0^{\theta_2}\int\limits_0^{2\pi} Q^{3\beta}_{(\gamma)} \sin\theta d\varphi d\theta}{2\pi\,(1-\cos\theta_2)} \sum_m \sum_n \cos m\bar{\varphi}\cos n\bar{\theta}, \tag{4.5.6}$$

$$\widetilde{Q}^{0\beta}_1 = 0.$$

Функции кинетических напряжений для координаты z приняты в виде:

$$\Pi_{\alpha 3}^{(0)} = (1/2)(1 + \cos \bar{z}) F_{\alpha 3} + (1/2)(1 - \cos \bar{z}) \Phi_{\alpha 3}. \tag{4.5.7}$$

В § 4 настоящей главы показано, что функции

$$F_{03} = 0, \ F_{13} = 0, \tag{4.5.8}$$

поэтому для функции F_{23} справедливо уравнение (4.4.44), которое для сферической оболочки запишем так:

$$\sin^2\theta \frac{\partial^4 F_{23}}{\partial\theta^3 \partial\varphi} + \frac{\partial^4 F_{23}}{\partial\theta\partial\varphi^3} + 5\sin\theta\cos\theta \frac{\partial^3 F_{23}}{\partial\theta^2 \partial\varphi} - \sin^4\theta \frac{\partial^2 F_{23}}{\partial\theta^2} -$$
$$- \sin^2\theta \frac{\partial^2 F_{23}}{\partial\varphi^2} + (4\cos^2\theta - 6\sin^2\theta) \frac{\partial^2 F_{23}}{\partial\theta\partial\varphi} +$$
$$+ \sin^3\theta\cos\theta \frac{\partial F_{23}}{\partial\theta} - 4\cos\theta\sin\theta \frac{\partial F_{23}}{\partial\varphi} +$$
$$+ (7\sin^2\theta\cos^2\theta - \sin^4\theta) F_{23} - r_0^2 \left(1 + \frac{z_1}{r_0}\right)^2 \times$$
$$\times \left(\sin^2\theta \frac{\partial^4 F_{23}}{\partial\theta\partial\varphi\partial x^{0^2}} + 2\sin\theta\cos\theta \frac{\partial^3 F_{23}}{\partial\varphi\,\partial x^{0^3}} - \sin^4\theta \frac{\partial^2 F_{23}}{\partial x^{0^2}}\right) = A_{(1)}, \tag{4.5.9}$$

где

$$A_1 = \frac{\partial^2 A_2}{\partial\theta\partial\varphi} - \sin^2\theta A_2 - \frac{2}{r_0}\left(1 + \frac{z_1}{r_0}\right)^{-1} \times$$
$$\times \left(\frac{\partial A_1}{\partial\varphi} + \sin^2\theta \frac{\partial A_1}{\partial\theta} + \cos\theta\sin\theta A_1\right). \tag{4.5.10}$$

Решение уравнения (4.5.9) представим в форме

$$F_{23} = \sum_m \sum_n X_{(1)(mn)}(x^0)\, V_{1(mn)}(\theta, \ \varphi) \tag{4.5.11}$$

и подставим (4.5.11) в (4.5.9); в результате для функций $X_{1(mn)}(x^0)$ получим уравнение

$$\frac{d^2 X_{1(mn)}(x^0)}{\partial x^{0^2}} + \frac{\omega_{mn}^2}{r_0^2}\left(1 + \frac{z_1}{r_0}\right)^{-2} X_{1(mn)}(x^0) = - A_{1(mn)}(x^0) \tag{4.5.12}$$

в предположении, что правую часть A_1 уравнения (4.5.9) можно разложить в ряд Фурье:

$$A_{(1)} = \sum_m \sum_n A_{1(mn)}^{(1)}(x^0)\, W_{mn}(\theta, \ \varphi), \tag{4.5.13}$$

где

$$W_{(mn)}(\theta, \ \varphi) = (\sin\theta)\left(\sin\theta \frac{\partial^2 V_{mn}}{\partial\theta\partial\varphi} + 2\cos\theta \frac{\partial V_{mn}}{\partial\varphi} - \sin^3\theta V_{mn}\right). \tag{4.5.14}$$

Коэффициенты Фурье

$$A_{1mn}^{(1)}(x^\theta) = \int_0^{\theta_2}\int_0^{2\pi} A_1 W_{mn}\, d\varphi d\theta \Bigg/ \int_0^{\theta}\int_0^{2\pi} W_{mn}^2\, d\varphi d\theta. \qquad (4.5.15)$$

Функции $V_{mn}(\theta, \varphi)$ удовлетворяют уравнению

$$\sin^2\theta \frac{\partial^4 V}{\partial\theta^3\, \partial\varphi} + \frac{\partial^4 V}{\partial\theta\partial\varphi^3} + 5\cos\theta\sin\theta \frac{\partial^3 V}{\partial\theta^2\,\partial\varphi} - \sin^4\theta \frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} -$$

$$- \sin^2\theta \frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} + (4\cos^2\theta - 6\sin^2\theta + \omega^2\sin^2\theta) \frac{\partial^2 V}{\partial\theta\partial\varphi} +$$

$$+ \sin^3\theta\cos\theta \frac{\partial V}{\partial\theta} - 2\cos\theta\sin\theta(2 - \omega^2)\frac{\partial V}{\partial\varphi} -$$

$$-(7\sin^2\theta\cos^2\theta - \sin^4\theta - \omega^2\sin^4\theta) V = 0 \qquad (4.5.16)$$

и граничным условиям: по координате $\theta = \theta_\gamma$

$$V_{23} = 0; \quad \frac{\partial V_{23}}{\partial\theta} = 0; \qquad (4.5.17)$$

по координате φ функции $V(\theta, \varphi)$ периодические (период 2π), являются собственными функциями для рассматриваемой задачи, им соответствуют собственные значения ω_{mn} ($m, n = 0, 1, 2, \ldots$).

Решение уравнения (4.5.16) представим в виде

$$V_{mn} = \sum_m \left(\Theta_m^{(1)}(\theta)\cos m\varphi + \Theta_m^{(2)}(\theta)\sin m\varphi\right) \qquad (4.5.18)$$

$$(m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Подставляя (4.5.18) в уравнение (4.5.16), получим для функции $\Theta_m^{(j)}(\theta)$ систему уравнений

$$mM_1(\Theta_m^{(2)}) + M_2(\Theta_m^{(1)}) = 0, \quad -mM_1(\Theta_m^{(1)}) + M_2(\Theta_m^{(2)}) = 0, \qquad (4.5.19)$$

где

$$M_1 = \sin^2\theta \frac{d^2}{d\theta^3} + 5\cos\theta\sin\theta \frac{d^2}{d\theta^2} + (4\cos^2\theta +$$

$$+ (\omega^2 - 6)\sin^2\theta - m^2)\frac{d}{d\theta} - 2\cos\theta\sin\theta(2 - \omega^2), \qquad (4.5.20)$$

$$M_2 = -\sin^4\theta \frac{d^2}{d\theta^2} + \sin^2\theta\cos\theta \frac{d}{d\theta} +$$

$$+ (\sin^4\theta(1 + \omega^2) + \sin^2\theta(m^2 - 7\cos^2\theta)).$$

Если в (4.5.18) сохранить только члены, содержащие $\cos m\varphi$, т. е.

$$V_{mn} = \sum_m \Theta_m^{(1)}(\theta)\cos m\varphi, \qquad (4.5.21)$$

считая $\Theta_m^{(2)}(0) = 0$, то уравнения (4.5.19) эквивалентны уравнению

$$\sin^3\theta \frac{d^3\Theta_m^{(1)}}{d\theta^3} + \sin\theta\,[9\cos^2\theta + (\omega^2 - 6)\sin^2\theta - m^2]\frac{d\Theta_m^{(1)}}{d\theta} +$$
$$+ \cos\theta\,[\sin^2\theta\,(7\omega^2 + 3) + 5\,(m^2 - 7\cos^2\theta)]\,\Theta_m^{(1)} = 0, \quad (4.5.22)$$

которому соответствуют следующие граничные условия: $\Theta_m^{(1)}(\theta) = 0$, $d\theta_m^{(1)}/d\theta = 0$ при $\theta = \theta_\gamma$.

Решение этой краевой задачи определяет собственные функции $\Theta_m^{(1)}(\theta)$ и собственные значения ω_{mn}.

Если же в (4.5.18) сохранить члены, содержащие $\sin m\varphi$, т. е.

$$V_{mn} = \sum_m \Theta_m^{(2)}(\theta)\sin m\varphi, \quad (4.5.23)$$

то для функции $\Theta_m^{(2)}(\theta)$ получим краевую задачу вида (4.5.22).

Таким образом, для уравнения (4.5.9) существуют две системы собственных функций:

$$V_{mn}^{(1)} = \Theta_{mn}^{(1)}(\theta)\cos m\varphi, \quad V_m^{(2)} = \Theta_{mn}^{(2)}(\theta)\sin m\varphi; \quad (4.5.24)$$

им соответствуют собственные значения ω_{mn}.

Функции $X_{1(mn)}(x^0)$, удовлетворяющие уравнению (4.5.12), таковы:

$$X_{1(mn)}(x^0) = -\frac{r_0}{\omega_{m\bar{n}}}\left(1 + \frac{z_1}{r_0}\right)\int_0^{x^0} A_{1(mn)}(\xi)\sin\omega_{mn}\times$$
$$\times\left(1 + \frac{z_1}{r_0}\right)\frac{x^0 - \xi}{r_0}\,d\xi. \quad (4.5.25)$$

Итак,

$$F_{23} = \sum_m \sum_n X_{1(mn)}(x^0)\,\Theta_{mn}^{(1)}(\theta)\cos m\varphi. \quad (4.5.26)$$

Аналогично определяется функция Φ_{23}:

$$\Phi_{23} = \sum_m \sum_n X_{2(mn)}(x^0)\,\Theta_{mn}^{(1)}(\theta)\cos m\varphi,$$

причем $X_{2(mn)}(x^0)$ имеет вид (4.5.25), где под интегралом стоит коэффициент Фурье $A_{2(mn)}(\xi)$, равный

$$A_{2(mn)} = \int_0^{\theta_2}\int_0^{2\pi} A_2 W_{m\bar{n}}\,d\varphi\,d\theta \Bigg/ \int_0^{\theta_2}\int_0^{2\pi} W_{mn}^2\,d\varphi\,d\theta.$$

Функции F_{33} и Φ_{33} вычисляем по формулам (4.4.48):

$$F_{33} = \sum_n \frac{1}{\omega_n}\int_0^{x_0} B_{1(n)}(\tau, \varphi)\sin\omega_n(\tau - x^0)\,d\tau V_n(\theta); \quad (4.5.27)$$

$$\Phi_{33} = \sum_n \frac{1}{\omega_n}\int_0^{x_0} B_{2(n)}(\tau, \varphi)\sin\omega_n(\tau - x^0)\,d\tau V_n(\theta).$$

Здесь

$$B_{\gamma(n)} = \int_0^{\theta_\gamma} B_\gamma V_n \, d\theta \Bigg/ r_0^2 (1 + z_\gamma/r_0)^2 \int_0^{\theta_\gamma} V_n^2 \, d\theta; \tag{4.5.28}$$

причем

$$B_\gamma = 2r_0^4 (1 + z_\gamma/r_0)^4 \sin^2\theta \, \widetilde{Q}_{(\gamma)}^{32} -$$
$$- \sum_m \sum_n m X_{\gamma(mn)} (x^0) (\Theta'_{mn} - \operatorname{ctg}\theta \Theta_{mn}) \sin m\varphi.$$

Собственные функции $V_n(\theta)$ подчинены уравнению (4.4.49), которое для сферической оболочки имеет вид

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} - \operatorname{ctg}\theta \frac{\partial V}{\partial\theta} + \left(2 + \omega_n^2 r_0^2 \left(1 + \frac{z_\gamma}{r_0}\right)^2\right) V_n = 0, \tag{4.5.29}$$

и граничным условиям $V = 0$ при $\theta = \theta_\gamma$.

Полные функции кинетических напряжений основного тензора таковы:

$$\Pi_\alpha^{(0)} = (1/2)(1 + \cos\bar{z}) F_{\alpha 3} + (1/2)(1 - \cos\bar{z}) \Phi_{\alpha 3}. \tag{4.5.30}$$

Компоненты основного тензора следующие:

$$T_{(0)}^{11} = -\frac{1}{r_0^2}\left(1 + \frac{z}{r_0}\right)^{-2} \left\{2\varphi - \frac{2(1+z/r_0)^{-2}}{2r_0^2 \sin^2\theta} \frac{\pi}{2h} \sin\bar{z} \times \right.$$
$$\left. \times \left[\frac{\partial}{\partial\varphi}(\Phi_{33} - F_{33}) + \sin\theta\cos\theta(\Phi_{23} - F_{23})\right]\right\};$$

$$T_{(0)}^{22} = -\frac{(1+z/r_0)^{-2}}{r_0^2 \sin^2\theta} \times$$
$$\times \left[2\varphi + \frac{1}{r_0^2}\left(1 + \frac{z}{r_0}\right)^{-2} \frac{\pi}{2h} \sin\bar{z} \frac{\partial}{\partial\theta}(F_{23} - \Phi_{23})\right];$$

$$T_{(0)}^{33} = -2\varphi + (1 + \cos\bar{z}) Q_{(1)}^{33}/2 + (1 - \cos\bar{z}) Q_{(2)}^{33}/2; \tag{4.5.31}$$

$$T_{(0)}^{00} = 2\varphi + \frac{1}{2}(1 + \cos\bar{x}^0) Q_{(1)}^{00} - \frac{(1+z/r_0)^{-3}}{r_0^3 \sin^2\theta} \times$$
$$\times \left[\frac{1}{2}(1 + \cos\bar{z})\left(\frac{\partial F_{33}}{\partial\varphi} + \sin^2\theta \frac{\partial F_{23}}{\partial\theta} - 2\cos\theta\sin\theta F_{23}\right) + \right.$$
$$+ \frac{1}{2}(1 - \cos\bar{z})\left(\frac{\partial\Phi_{33}}{\partial\varphi} + \sin^2\theta \frac{\partial\Phi_{23}}{\partial\theta} - 2\cos\theta\sin\theta\Phi_{23}\right) +$$
$$+ r_0\left(1 + \frac{z}{r_0}\right)\frac{\pi}{2h}\sin\bar{z}\left(\sin^2\theta\frac{\partial}{\partial\theta}(\Phi_{23} - F_{23}) + \right.$$
$$\left.\left. + \frac{\partial}{\partial\varphi}(\Phi_{33} - F_{33}) + \sin\theta\cos\theta(\Phi_{23} - F_{23})\right)\right];$$

$$T_{(0)}^{12} = \frac{\pi \sin\bar{z}}{4hr_0^4 \sin^2\theta}\left(1 + \frac{z}{r_0}\right)^{-4} \times$$
$$\times \left[\frac{\partial}{\partial\theta}(F_{33} - \Phi_{33}) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(F_{23} - \Phi_{23}) - 2\operatorname{ctg}\theta(F_{33} - \Phi_{33})\right];$$

$$T^{13}_{(0)} = (1/2)(1+\cos\bar z)\,Q^{31}_{(1)} + (1/2)(1-\cos\bar z)\,Q^{31}_{(2)};$$

$$T^{23}_{(0)} = (1/2)(1+\cos\bar z)\,Q^{32}_{(1)} + (1/2)(1-\cos\bar z)\,Q^{32}_{(2)};$$

$$T^{10}_{(0)} = \frac{1}{2}(1+\cos\bar x^0)\,Q^{01}_{(1)} + \frac{(1+z/r_0)^{-3}}{2r_0^3}\times$$

$$\times\left[(1+\cos\bar z)\frac{\partial F_{23}}{\partial x^0} + (1-\cos\bar z)\frac{\partial \Phi_{23}}{\partial x^0} +\right.$$

$$\left. + r_0\left(1+\frac{z}{r_0}\right)\frac{\pi}{2h}\sin\bar z\frac{\partial}{\partial x^0}(\Phi_{23} - F_{23})\right];$$

$$T^{20}_{(0)} = \frac{1}{2}(1+\cos\bar x^0)\,Q^{02}_{n} + \frac{(1+z/r_0)^{-3}}{2r_0^3\sin^2\theta}\times$$

$$\times\left[(1+\cos\bar z)\frac{\partial F_{33}}{\partial x^0} + (1-\cos\bar z)\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial x^0} +\right.$$

$$\left. + r_0\left(1+\frac{z}{r_0}\right)\frac{\pi}{2h}\sin\bar z\frac{\partial}{\partial x^0}(\Phi_{33} - F_{33})\right];$$

$$T^{30}_{(0)} = (1+\cos\bar x^0)\,Q^{03}_{(1)}/2 + (1+\cos\bar z)\,Q^{30}_{(1)}/2 + (1-\cos\bar z)\,Q^{30}_{(2)}/2.$$

Корректирующий тензор ($T_к$) для оболочки сферической строится на основе результатов § 4 настоящей главы. Компоненты тензора ($T_к$) в форме Морера таковы:

$$T^{\alpha\beta}_{(к)} = \sum_{mnpl}(A_{m\bar n pl}f^{\alpha\beta}_{(1)} + B_{m\bar n pl}f^{\alpha\beta}_{(2)} + C_{m\bar n pl}f^{\alpha\beta}_{(3)} + D_{m\bar n pl}f^{\alpha\beta}_{(0)}). \quad (4.5.32)$$

Функции $f^{\alpha\beta}_{(\gamma)}$ определяем по формулам (1.4.14) второй части книги, учитывая выражения (4.5.2) и (4.5.3), а также фундаментальные функции

$$\begin{aligned} \xi_m(\theta) &= (1/m!)\,\Theta_m(0)\sin m\theta,\\ \eta_n(\varphi) &= (1/n!)\sin n\varphi,\\ \zeta_p(z) &= (1/p!)\,J_p(\bar z)\sin p\bar z. \end{aligned} \quad (4.5.33)$$

Параметры A_{mnpl}, ..., D_{mnpl} компонент корректирующего тензора находим в результате решения системы уравнений (1.3.70) для упруго-пластической оболочки при малых деформациях.

Коэффициенты $F_{\gamma\beta}$ уравнений вычисляем по формуле

$$F_{\gamma\beta} = \alpha_1 F^{(1)}_{\gamma\beta} - \alpha_2 F^{(2)}_{\gamma\beta}; \quad (4.5.34)$$

интегралы $F^{(1)}_{\gamma\beta}$ и $F^{(2)}_{\gamma\beta}$ имеют вид

$$\begin{aligned} F^{(1)}_{\gamma\beta} &= \frac{2r_0^2 h\theta_2 x_2^0}{\pi^3}\int_{\bar V} A^{(1)}_{\gamma\beta}\left(1+\frac{z}{r_0}\right)^2\sin\theta\,d\bar V,\\ F^{(2)}_{\gamma\beta} &= \frac{2r_0^2 h\theta_2 x_2^0}{\pi^3}\int_{\bar V} A^{(2)}_{\gamma\beta}\left(1+\frac{z}{r_0}\right)d\bar V, \end{aligned} \quad (4.5.35)$$

а их подынтегральные выражения — вид (4.4.68), где следует учесть выражение (4.5.2) и функции $f^{\alpha\beta}_{(\gamma)}$ для сферической оболочки.

Свободные члены L_β уравнений находим по формулам

$$L_\beta = 2G\,(L_\beta^{(1)} - L_\beta^{(2)}) - \alpha_1 L_\beta^{(3)} + \alpha_2 L_\beta^{(4)}, \tag{4.5.36}$$

где

$$L_\beta^{(1)} = \int\limits_S B_\beta^{(1)}\,dS,\quad L_\beta^{(2)} = \frac{2hr_0^2\,\theta_2\,x_2^0}{\pi^3}\int\limits_{\overline{V}} B_\beta^{(2)}\left(1 + \frac{z}{r_0}\right)^2 \sin\theta d\,\overline{V},$$

$$L_\beta^{(3)} = \frac{2r_0^2\,h\theta_2\,x_2^0}{\pi^3}\int\limits_{\overline{V}} B_\beta^{(3)}\left(1 + \frac{z}{r_0}\right)^2 \sin\theta d\overline{V}, \tag{4.5.37}$$

$$L_\beta^{(4)} = \frac{2r_0^2\,h\theta_2\,x_2^0}{\pi^3}\int\limits_{\overline{V}} B_\beta^{(4)}\left(1 + \frac{z}{r_0}\right)^2 \sin\theta d\overline{V}.$$

Подынтегральные выражения интегралов $L_\beta^{(l)}$ определяем по формуле (4.4.69), где вместо $T^{\alpha\beta}_{(0)}$ следует подставить выражение (4.5.31).

Функции состояния α_1 и α_2 можно вычислить по формулам (1.3.72), если диаграмма $\sigma_i \div e_i$ материала оболочки известна.

Для вязкоупругой сферической оболочки параметры $A_{mnpl}, \ldots$ $\ldots, D_{mnpl}$ находим в результате решения системы уравнений (1.3.70), считая деформации малыми.

Коэффициенты $F_{\gamma\beta}$ и свободные члены α_β уравнений вычисляем по формулам

$$F_{\gamma\beta} = \alpha_1 F_{\gamma\beta}^{(1)} + \alpha_2 F_{\gamma\beta}^{(2)} - (1/v^0)\,(F_{\gamma\beta}^{(3)}/3 - F_{\gamma\beta}^{(4)}), \tag{4.5.38}$$

$$L_\beta = L_\beta^{(1)} + L_\beta^{(2)} + \alpha_1 L_\beta^{(3)} + \alpha_2 L_\beta^{(4)} - (1/v^0)(L_\beta^{5}/3 - L_\beta^{6});$$

интегралы $F_{\gamma\beta}^{(1)}$, $F_{\gamma\beta}^{(2)}$ имеют вид (4.5.35), интегралы $F_{\gamma\beta}^{(3)}$, $F_{\gamma\beta}^{(4)}$ — вид

$$F_{\gamma\beta}^{(3)} = \frac{2r_0^2\,h\theta_2\,x_2^0}{\pi^3}\int\limits_{\overline{V}}\int\limits_0^{x^0} \Gamma_k\,(x^0 - y^0)\,(A_\gamma(y^0)\,A_\beta(x^0) + {}$$

$$+ A_\gamma(x^0)\,A_\beta(y^0))\,dy^0\left(1 + \frac{z}{r_0}\right)^2 \sin\theta d\overline{V}; \tag{4.5.39}$$

$$F_{\gamma\beta}^{(4)} = \frac{2r_0^2\,h\theta_2\,x_2^0}{\pi^3}\int\limits_{\overline{V}}\int\limits_0^{x^0} \Gamma_k\,(x^0 - y^0)\,A_{\gamma\beta}^{(1)}(y^0)\,dy^0\left(1 + \frac{z}{r_0}\right)^2 \sin\theta d\overline{V},$$

где A_γ определяем по формулам (4.4.70), учитывая выражение (4.5.2).

Интегралы $L_\beta^{(1)}$, ..., $L_\beta^{(4)}$ вычисляем по формулам (4.5.37), интегралы $L_\beta^{(5)}$, $L_\beta^{(6)}$ таковы:

$$L_\beta^{(5)} = \frac{2r_0^2 h\theta_2 x_2^0}{\pi^3} \int\limits_{\overline{V}} \int\limits_0^{x^0} \Gamma_k (x^0 - y^0) (A_\beta (x^0) \mathrm{T}_1 (T_0 y^0) +$$

$$+ A_\beta (y^0) \mathrm{T}_1 (T_0 x^0)) \, dy^0 (1 + z/r_0)^2 \sin \theta d\overline{V}; \qquad (4.5.40)$$

$$L_\beta^{(6)} = \frac{2r_0^2 h\theta_2 x_2^0}{\pi^3} \int\limits_{\overline{V}} \int\limits_0^{x^0} \Gamma_k (x^0 - y^0) B_\beta^{(3)} (y^0) \, dy^0 \left(1 + \frac{z}{r_0}\right)^3 \sin \theta d\overline{V}$$

Функция ползучести $\Gamma_к (t - \tau)$ материала предполагается известной. Функции состояния α_1, α_2 имеют вид (1.3.74). Решение указанных систем уравнений строим с помощью процедуры последовательных *приближений*.

В первом приближении полагаем $m = n = p = l = 1$. Компоненты корректирующего тензора следующие:

$$T_{(к)}^{\alpha\beta} = (1/\Delta) (\Delta_1 f_{(1)}^{\alpha\beta} + \Delta_2 f_{(2)}^{\alpha\beta} + \Delta_3 f_{(3)}^{\alpha\beta} + \Delta_0 f_{(0)}^{\alpha\beta}). \qquad (4.5.41)$$

Определители Δ_1, Δ_α вычисляем по известным значениям коэффициентов $F_{\gamma\beta}$ и свободных членов L_β уравнений.

Второе и последующие приближения находим аналогично изложенному.

Сумма тензоров (T_0) и $(T_к)$ является тензором кинетических напряжений (T) сферической оболочки: $(T) = (T_0) + (T_к)$. Используя формулы (1.3.49), определяем компоненты тензора напряжений (σ), вектора скорости частиц $\mathbf{v}$ и плотность ρ материала.

К оболочкам вращения ненулевой гауссовой кривизны относится оживальная оболочка, срединная поверхность которой образована вращением дуги окружности вокруг оси вращения. Системой координат для оживальной оболочки является (θ, φ, z), следовательно, $\alpha = \theta$, $\beta = \varphi$. Пределы изменения координат следующие:

$$\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2, \; 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \; -h/2 \leqslant z \leqslant h/2. \qquad (4.5.42)$$

Геометрия срединной поверхности оживальной оболочки определяется радиусами кривизны R_1, R_2 и параметрами Ляме A_1, A_2. Из рис. 116 следует, что

$$R_1 = R_{ож}, \; R_2 = R_{ож} - b/\sin\theta;$$

$$A_1 = R_{ож}, \; -A_2 = R_{ож} \sin\theta - b. \qquad (4.5.43)$$

Предельные значения θ_0, θ_l угла θ таковы:

$$\theta_1 = \theta_0 = \operatorname{arctg} \frac{r_0 + b}{a} \Big), \; \theta_l = \operatorname{arctg} \frac{r_l + b}{a + l} = \theta_2. \qquad (4.5.44)$$

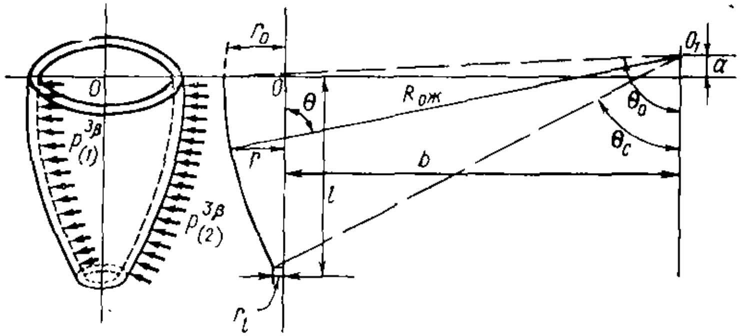

Рис. 116

Компоненты метрического тензора (4.4.4) оболочки:

$$g_{11} = R_{ож}^2 (1 + z/R_{ож})^2, \quad g_{22} = R_{ож}^2(1 - b/(R_{ож} \sin \theta) + z/R_{ож})^2 \sin^2\theta, \tag{4.5.45}$$

$$g_{33} = 1, \, g_{00} = -1.$$

Символы Кристоффеля определяем по формулам (4.4.5):

$$\Gamma_{3.11} = -R_{ож}\left(1 + \frac{z}{R_{ож}}\right); \quad \Gamma_{1.13} = R_{ож}\left(1 + \frac{z}{R_{ож}}\right);$$

$$\Gamma_{3.22} = -R_{ож}\left(1 - \frac{b}{R_{ож} \sin\theta} + \frac{z}{R_{ож}}\right) \sin^2\theta;$$

$$\Gamma_{2.23} = R_{ож}\left(1 - \frac{b}{R_{ож} \sin\theta} + \frac{z}{R_{ож}}\right) \sin^2\theta;$$

$$\Gamma_{1.22} = -R_{ож}^2\left(1 - \frac{b}{R_{ож} \sin\theta} + \frac{z}{R_{ож}}\right) \times$$

$$\times \left[\frac{b \cos\theta}{R_{ож} \sin\theta} + \left(1 - \frac{b}{R_{ож} \sin\theta} + \frac{z}{R_{ож}}\right)\cos\theta\right] \sin\theta;$$

$$\Gamma_{2.21} = R_{ож}^2\left(1 - \frac{b}{R_{ож} \sin\theta} + \frac{z}{R_{ож}}\right)[b \cos\theta/(R_{ож} \sin\theta) +$$

$$+ (1 - b/(R_{ож} \sin\theta) + z/R_{ож}) \cos\theta] \sin\theta;$$

$$\Gamma_{11}^3 = -R_{ож}(1 + z/R_{ож}); \quad \Gamma_{13}^1 = (1/R_{ож})(1 + z/R_{ож})^{-1};$$

$$\Gamma_{22}^3 = -R_{ож}(1 - b/(R_{ож} \sin\theta) + z/R_{ож}) \sin^2\theta;$$

$$\Gamma_{23}^2 = (1/R_{ож})(1 - b/(R_{ож} \sin\theta) + z/R_{ож})^{-1}; \tag{4.5.46}$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{1 - b/(R_{ож} \sin\theta) + z/R_{ож}}{\left(1 + \frac{z}{R_{ож}}\right)^2}[b \cos\theta / (R_{ож} \sin\theta) +$$

$$+ (1 - b/(R_{ож} \sin\theta) + z/R_{ож}) \cos\theta] \sin\theta;$$

$$\Gamma_{21}^2 = \frac{\frac{b \cos\theta}{R_{ож} \sin\theta} + \left(1 - \frac{b}{R_{ож} \sin\theta} + \frac{z}{R_{ож}}\right)\cos\theta}{(1 - b/(R_{ож} \sin\theta) + z/R_{ож}) \sin\theta}.$$

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние оживальной оболочки, находящейся под действием давления

$$p^{3j}_{(\gamma)}\ (\theta,\ \varphi,\ t), \tag{4.5.47}$$

в условиях теплового воздействия с температурным полем

$$T^0 = T^0\ (\theta,\ \varphi,\ z,\ t). \tag{4.5.48}$$

Основной искомой величиной является тензор кинетических напряжений (T), построение которого выполним методом, изложенным в гл. 1. Представим его в виде суммы:

$$(T) = (T_0) + (T_к), \tag{4.5.49}$$

а затем по известному тензору (T), пользуясь формулами (1.3.49), находим компоненты тензора напряжений (σ), вектора скорости частиц $\mathbf{v}$ и плотность ρ материала оболочки. При построении тензора кинетических напряжений (T) для оживальной оболочки воспользуемся результатами § 4 настоящей главы.

Функции нагрузок $Q^{\alpha\beta}_{(\gamma)}$, соответствующие нагрузкам (4.5.47), следующие: для координаты z

$$\left.\begin{aligned} &Q^{33}_{(\gamma)} = (\rho v^3 v^3)_{(\gamma)} - p^{33}_{(\gamma)},\ Q^{31}_{(\gamma)} = (\rho v^3 v^1)_{(\gamma)} - p^{31}_{(\gamma)},\\ &Q^{32}_{(\gamma)} = (\rho v^3 v^2)_{(\gamma)} - p^{32}_{(\gamma)},\ Q^{30}_{(\gamma)} = (\rho v^3 v^0)_{(\gamma)};\\ &\text{для координаты } x^0\\ &Q^{00}_{(1)} = (\rho v^0 v^0)_{(1)},\ Q^{01}_{(1)} = (\rho v^0 v^1)_{(1)},\\ &Q^{02}_{(1)} = (\rho v^0 v^2)_{(1)},\ Q^{03}_{(1)} = (\rho v^0 v^3)_{(1)}\ .\end{aligned}\right\} \tag{4.5.50}$$

Самоуравновешенные части функций нагрузок

$$\widetilde{Q}^{3\beta}_{(\gamma)} = \frac{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} Q^{3\beta}_{(\gamma)}\left(\sin\theta - \frac{b}{R_{ож}}\right)d\varphi d\theta}{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2}\left(\sin\theta - \frac{b}{R_{ож}}\right)d\varphi d\theta}\sum_m\sum_n \cos m\overline{\varphi}\cos n\overline{\theta}\ , \tag{4.5.51}$$

$$\widetilde{Q}^{0\beta}_{(1)} = 0.$$

Функции кинетических напряжений для координаты z таковы:

$$\Pi^{(\rho)'}_{\alpha 3} = (1/2)\,(1 + \cos\overline{z})\ F_{\alpha 3} + (1/2)\,(1 - \cos\overline{z})\,\Phi_{\alpha 3}. \tag{4.5.52}$$

Определение функций F_{23} и Φ_{23}, как показано в § 4, сводится к интегрированию уравнения (4.4.44), которое для оживальной оболочки имеет вид

$$\begin{aligned} &a_{1\gamma}\frac{\partial^4 f_\gamma}{d\theta^3\,d\varphi} + \frac{\partial^4 f_\gamma}{\partial\theta\partial\varphi^3} + a_{2\gamma}\frac{\partial^3 f_\gamma}{\partial\theta^2\,\partial\varphi} + a_{3\gamma}\frac{\partial^2 f_\gamma}{\partial\theta\partial\varphi} + \\ &+ a_{4\gamma}\frac{\partial^2 f_\gamma}{\partial\theta^2} - a_{5\gamma}\frac{\partial^2 f_\gamma}{\partial\varphi^2} + a_{6\gamma}\frac{\partial f_\gamma}{\partial\theta} - a_{7\gamma}\frac{\partial f_\gamma}{\partial\varphi} + \\ &+ a_{8\gamma} f_\gamma - R^2_{ож}\frac{\partial^2}{\partial x^{0^2}}\left(a_{9\gamma}\frac{\partial^2 f_\gamma}{\partial\theta\partial\varphi} + a_{10\gamma}\frac{\partial f_\gamma}{\partial\varphi} - a_{11\gamma} f_\gamma\right) = A_\gamma, \end{aligned} \tag{4.5.53}$$

где

$$f_1 = F_{23},\ f_2 = \Phi_{23},$$

$$A_\gamma = \frac{\partial^2 A_{2\gamma}}{\partial\theta\partial\varphi} + \left(\frac{\psi_{2\gamma}}{\psi_{1\gamma}} \sin\theta\right)^2 A_{2\gamma} - \frac{1}{R_{\text{ож}}}\left(\frac{2}{\psi_\gamma} \frac{\partial A_{1\gamma}}{\partial\varphi} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\psi_{1\gamma}}\left(\frac{\psi_{2\gamma}}{\psi_{1\gamma}} \sin\theta\right)\frac{\partial A_{1\gamma}}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\psi_{2\gamma}^2}{\psi_{1\gamma}^3} \sin^2\theta\right) A_{1\gamma}\right); \quad (4.5.54)$$

причем

$$A_{1\gamma} = R_{\text{ож}}^2\ \psi_{1\gamma}\psi_{2\gamma}^2 \sin^2\theta\left(R_{\text{ож}}\psi_{1\gamma}\widetilde{Q}_{(\gamma)}^{33} - 2\int_0^{x^0}\widetilde{Q}_{(\gamma)}^{30}\,dx^0\right);$$

(4.5.55

$$A_{2\gamma} = 2R_{\text{ож}}^2\left[R_{\text{ож}}^2\,(\psi_{1\gamma}\psi_{2\gamma}\sin\theta)^2\,\widetilde{Q}_{(\gamma)}^{31} + \frac{\partial}{\partial\theta}\left((\psi_{2\gamma}\sin\theta)^2\int_0^{x^0}\widetilde{Q}_{(\gamma)}^{30}\,dx^0\right)\right].$$

Коэффициенты $a_{\kappa\gamma}$ ($k = 1, 2, \ldots, 11$; $\gamma = 1, 2$) суть функции координаты θ находим по следующим формулам:

$$a_{1\gamma} = \left(\frac{\psi_2}{\psi_1} \sin\theta\right)^2;$$

$$a_{2\gamma} = 2\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\psi_2}{\psi_1} \sin\theta\right)^2 - \frac{\psi_2\psi_3}{\psi_1^2} \sin\theta;$$

$$a_{3\gamma} = 2\frac{\psi_2}{\psi_1}\left(\frac{\psi_2}{\psi_1} - 1\right)\sin^2\theta + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\psi_2}{\psi_1} \sin\theta\right)^2 - \frac{\psi_2\psi_3}{\psi_1^2} \sin\theta\right) -$$

$$- \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\psi_2\psi_3}{\psi_1^2} \sin\theta\right) - 2\frac{\psi_2}{\psi_1} \sin^2\theta;$$

$$a_{4\gamma} = \left(\frac{\psi_2}{\psi_1} \sin\theta\right)^2\left(\frac{\psi_2}{\psi_1} \sin^2\theta\left(\frac{\psi_2}{\psi_1} - 1\right) - \left(\frac{\psi_2}{\psi_1} \sin\theta\right)^2\right);$$

$$a_{5\gamma} = \left(\frac{\psi_2}{\psi_1} \sin\theta\right)^2; \quad (4.5.56)$$

$$a_{6\gamma} = \left(\frac{\psi_2}{\psi_1} \sin\theta\right)^2\left(\frac{1}{\psi_1}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\psi_2\sin^2\theta\left(\frac{\psi_2}{\psi_1} - 1\right)\right) - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\left(\frac{\psi_2}{\psi_1} \sin\theta\right)^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\psi_2\psi_3}{\psi_1^2} \sin\theta\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\psi_2^2}{\psi_1^3} \sin^2\theta\right)\psi_2\sin^2\theta\left(\frac{\psi_2}{\psi_1} - 1\right)\right);$$

$$a_{7\gamma} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\psi_2\psi_3}{\psi_1^2} \sin\theta\right) + 2\frac{\psi_2}{\psi_1} \sin^2\theta\right);$$

$$a_{8\gamma} = \left(\frac{\psi_2}{\psi_1} \sin\theta\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\psi_2\psi_3}{\psi_1^2} \sin\theta\right) + 2\frac{\psi_2}{\psi_1} \sin\theta\right);$$

$$a_{9\gamma} = \varphi_2^2\sin^2\theta;\ a_{10\gamma} = \frac{\partial}{\partial\theta}(\varphi_2^2\sin^2\theta);\ a_{11\gamma} = \left(\frac{\psi_2}{\psi_1} \sin\theta\right)^2\varphi_2^2\sin^2\theta,$$

здесь

$$\psi_{1\gamma} = (1 + z_\gamma/R_{\text{ож}}); \quad \psi_{2\gamma} = (1 - b/(R_{\text{ож}} \sin\theta) + z_\gamma/R_{\text{ож}});$$
$$\psi_{3\gamma} = b\cos\theta/(R_{\text{ож}} \sin\theta) + \psi_{2\gamma}\cos\theta.$$

Собственные функции $V_{mn}(\theta, \varphi)$ удовлетворяют уравнению

$$a_{1\gamma}\frac{\partial^4 V}{\partial\theta^3\partial\varphi} + \frac{\partial^4 V}{\partial\theta\partial\varphi^3} + a_{2\gamma}\frac{\partial^3 V}{\partial\theta^2\partial\varphi} + (a_{3\gamma} + a_{9\gamma}\omega^2)\frac{\partial^2 V}{\partial\theta\partial\varphi} + a_{4\gamma}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} -$$
$$- a_{5\gamma}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} + a_{6\gamma}\frac{\partial V}{\partial\theta} - (a_{7\gamma} - a_{10\gamma}\omega^2)\frac{\partial V}{\partial\varphi} + (a_{8\gamma} - a_{11\gamma}\omega^2)V = 0 \quad (4.5.57)$$

и следующим граничным условиям: $V = 0$, $\partial V/\partial\theta = 0$ при $\theta = \theta_\gamma$, $(\gamma = 1,2)$; по координате φ функция V периодическая (период 2π).

Решение уравнения (4.5.33) представим так:

$$f_\gamma = \sum_m \sum_n X_{\gamma(mn)}(x^0)\, V_{mn}(\theta, \varphi)$$

и подставим его в (4.5.53), тогда для функций $X_{\gamma(mn)}(x^0)$ получим уравнение

$$R^2_{\text{ож}}\ddot{X}_{\gamma(mn)}(x^0) + \omega^2_{(mn)} X_{\gamma(mn)}(x^0) = -A_{\gamma(mn)}(x^0)$$

и граничные условия: $X_{\gamma(mn)}(x^0) = 0$, $\dot{X}_{\gamma(mn)}(x^0) = 0$ при $x^0 = x^0_{(1)}$, причем

$$A_{\gamma(mn)}(x^0) = \int_0^{2\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2} A_{(\gamma)}\, W_{(mn)}\, d\theta d\varphi \Big/ \int_0^{2\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2} W^2_{(mn)}\, d\theta d\varphi,$$

где

$$W_{(mn)} = a_{9\gamma}\frac{\partial^2 V_{m\bar{n}}}{\partial\theta\partial\varphi} + a_{10\gamma}\frac{\partial V_{m\bar{n}}}{\partial\varphi} - a_{11\gamma}V_{m\bar{n}}.$$

Требованиям (4.8.21) удовлетворяют функции

$$X_{\gamma(mn)}(x^0) = -\frac{1}{R_{\text{ож}}\,\omega_{mn}}\int_0^{x^0} A_{\gamma(mn)}(\xi)\sin\omega_{mn}\frac{x^0 - \xi}{R_{\text{ож}}}\,d\xi. \quad (4.5.58)$$

Решение уравнения (4.5.57) запишем в виде

$$V = \sum_m \left(\Theta^{(1)}_{(m)}(\theta)\cos m\varphi + \Theta^{(2)}_{(m)}(\theta)\sin m\varphi\right) \quad (4.5.59)$$

и подставим его в само уравнение, в результате имеем уравнения для функций $\Theta^{(j)}_{(m)}(\theta)$ $(j = 1, 2)$:

$$mM_1(\Theta^{(2)}_m) + M_2(\Theta^{(1)}_m) = 0, \; -mM_1(\Theta^{(1)}_m) + M_2(\Theta^{(2)}_m) = 0, \quad (4.5.60)$$

где

$$M_1 = a_{1\gamma}\frac{d^3}{d\theta^3} + a_{2\gamma}\frac{d^2}{d\theta^2} + (a_{3\gamma} + a_{9\gamma}\omega^2 - m^2)\frac{d}{d\theta} - (a_{7\gamma} - a_{10\gamma}\omega^2),$$
$$M_2 = a_{4\gamma}\frac{d^2}{d\theta^2} + a_{6\gamma}\frac{d}{d\theta} + (a_{8\gamma} - a_{11\gamma}\omega^2 + a_{5\gamma}m^2).$$

Таким образом, для уравнения (4.5.57) существуют две системы собственных функций:

$$V_{(mn)}^{(1)} = \Theta_{(mn)}^{(1)}(\theta)\cos m\varphi;\ V_{(mn)}^{(2)} = \Theta_{(mn)}^{(2)}(\theta)\sin m\varphi.$$

Если использовать первую из систем

$$f_\gamma = \sum_m \sum_n X_{\gamma\,(mn)}^{1}(x^0)\,\Theta_{(mn)}^{(1)}(\theta)\cos m\varphi, \tag{4.5.61}$$

то уравнения (4.5.60) эквивалентны: $M_1(\Theta_m^{(1)}) = 0$; $M_2(\Theta_m^{(1)}) = 0$, что равносильно уравнению

$$a_{1\gamma}a_{4\gamma}\frac{d^3\Theta_m^{(1)}}{d\theta^3} + (a_{4\gamma}(a_{3\gamma} + a_{9\gamma}\omega^2 - m^2) - a_{6\gamma}a_{2\gamma})\frac{d\Theta_m^{(1)}}{d\theta} -$$

$$-(a_{4\gamma}(a_{7\gamma} - a_{10\gamma}\omega^2) - (a_{7\gamma} - a_{11\gamma}\omega^2 + a_{5\gamma}m^2)a_{2\gamma})\Theta_m^{(1)} = 0. \tag{4.5.62}$$

Если воспользоваться второй системой функций

$$f_\gamma = \sum_m \sum_n X_{\gamma\,(mn)}(x^0)\,\Theta_{(mn)}^{(2)}(\theta)\sin m\varphi, \tag{4.5.63}$$

то получим для функции $\Theta_{(mn)}^{(2)}(\theta)$ уравнение (4.5.62).

Итак, для построения функций F_{23} и Φ_{23} необходимо проинтегрировать уравнения (4.5.62) с учетом граничных условий: $\Theta_{(m)}(\theta) = 0$ при $\theta = \theta_\gamma$. Функции F_{33} и Φ_{33}, построенные в § 4 настоящей главы, принимают вид

$$F_{33} = \sum_n \frac{1}{\omega_n R_{\text{ож}}}\int_0^{x^0} B_{1\,(n)}(\xi)\sin\omega_n(\xi - x^0)\,d\xi V_n(\theta); \tag{4.5.64}$$

$$\Phi_{33} = \sum_n \frac{1}{\omega_n R_{\text{ож}}}\int_0^{x^0} B_{2\,(n)}(\xi)\sin\omega_n(\xi - x^0)\,d\xi V_n(\theta),$$

где

$$B_{\gamma\,(n)} = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\psi_1^{-2}\,B_\gamma V_n\,d\theta \Bigg/ \int_{\theta_1}^{\theta_2} V_n^2\,d\theta.$$

Функции $V_n(\theta, \varphi)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} - \frac{\psi_3}{\psi_2\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\theta} + \left(2\frac{\psi_1}{\psi_3} + R_{\text{ож}}^2\,\psi_1^2\,\omega_n^2\right)V = 0 \tag{4.5.65}$$

и граничным условиям: $V_n = 0$ при $\theta = \theta_\gamma$. Таким образом, построение функций F_{33} и Φ_{33} сводится к решению краевой задачи (4.5.65) по определению функций $V_n(\theta, \varphi)$.

Функции F_{13}, F_{03}; Φ_{13}, Φ_{03}, как показано в § 4, равны нулю:

$$F_{13} = 0,\ F_{03} = 0;\ \Phi_{13} = 0,\ \Phi_{03} = 0. \tag{4.5.66}$$

Полные функции кинетических напряжений основного тензора таковы:

$$\Pi_\alpha^0 = (1/2)(1 + \cos\bar{z})F_{\alpha 3} + (1/2)(1 - \cos\bar{z})\Phi_{\alpha 3}. \tag{4.5.67}$$

Компоненты основного тензора определяем по следующим формулам:

$$T^{11}_{(0)} = \frac{\pi}{2R_0^4 h} (\psi_1 \psi_2 \sin\theta)^{-2} \sin\bar{z} \left[\frac{\partial}{\partial\varphi}(\Phi_{33} - F_{33}) + \frac{\psi_2}{\psi_1} \sin\theta (\Phi_{23} - F_{23})\right];$$

$$T^{22}_{(0)} = \frac{\pi}{2R_0^4 h} (\psi_1 \psi_2 \sin\theta)^{-2} \sin\bar{z} \frac{\partial}{\partial\theta} (\Phi_{23} - F_{23});$$

$$T^{33}_{(0)} = (1/2)(1 + \cos\bar{z}) Q^{33}_{(1)} + (1/2)(1 - \cos\bar{z}) Q^{33}_{(2)};$$

$$T^{00}_{(0)} = \frac{1}{2}(1 + \cos\overline{x^0}) Q^{00}_{(1)} - \frac{1}{R_0^3} (\psi_1 \psi_2 \sin\theta)^{-2} \left\{\frac{1}{2}(1 + \cos\bar{z}) \times \right.$$
$$\times \left(\psi_1 \frac{\partial F_{33}}{\partial\varphi} + \psi_2 \sin^2\theta \frac{\partial F_{23}}{\partial\theta} - \frac{\psi_2 \psi_3}{\psi_1} \sin\theta F_{23}\right) + \frac{1}{2}(1 - \cos\bar{z}) \times$$
$$\times \left(\psi_1 \frac{\partial \Phi_{33}}{\partial\varphi} + \psi_2 \sin^2\theta \frac{\partial \Phi_{23}}{\partial\theta} - \frac{\psi_2 \psi_3}{\psi_1} \sin\theta \Phi_{23}\right) +$$
$$+ \frac{\pi R_0}{2h} \sin\bar{z} \left[\psi_2^2 \sin^2\theta \frac{\partial}{\partial\theta} (\Phi_{23} - F_{23}) + \right.$$
$$\left.\left. + \psi_1^2 \frac{\partial}{\partial\varphi} (\Phi_{33} - F_{33}) - \psi_2 \psi_3 \sin\theta (\Phi_{23} - F_{23})\right]\right\};$$

$$T^{12}_{(0)} = -\frac{1}{2R_0^4} (\psi_1 \psi_2 \sin\theta)^{-2} \left\{\frac{1}{R_0} \frac{\psi_1 - \psi_2}{\psi_1 \psi_2} \left[\frac{1}{2}(1 + \cos\bar{z}) \left(\frac{\partial F_{33}}{\partial\theta} - \right.\right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\partial F_{23}}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{2}(1 - \cos z)\left(\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial\theta} - \frac{\partial \Phi_{23}}{\partial\varphi}\right)\right] + \frac{\pi}{2h} \sin\bar{z} \left[\frac{\partial}{\partial\theta} (\Phi_{33} - F_{33}) + \right.$$
$$\left.\left. + \frac{\partial}{\partial\varphi} (\Phi_{23} - F_{23}) - \frac{2\psi_3}{\psi_2 \sin\theta} (\Phi_{33} - F_{33})\right]\right\}; \qquad (4.5.68)$$

$$T^{13}_{(0)} = (1/2)(1 + \cos\bar{z}) Q^{31}_{(1)} + (1/2)(1 - \cos\bar{z}) Q^{31}_{(2)};$$

$$T^{23}_{(0)} = (1/2)(1 + \cos\bar{z}) Q^{32}_{(1)} + (1/2)(1 - \cos\bar{z}) Q^{32}_{(2)};$$

$$T^{10}_{(0)} = \frac{1}{2}(1 + \cos\overline{x^0}) Q^{01}_{(1)} + \frac{1}{2R_0^3} \psi_1^{-2} \psi_2^{-1} \left[\left(1 + \frac{\psi_2}{\psi_1}\right) \times \right.$$
$$\times \left(\frac{1}{2}(1 + \cos\bar{z}) \frac{\partial F_{23}}{\partial x^0} + \frac{1}{2}(1 - \cos\bar{z}) \frac{\partial \Phi_{23}}{\partial x^0}\right) +$$
$$\left. + \frac{\pi R_0}{2h} \psi_2 \sin\bar{z} \frac{\partial}{\partial x^0} (\Phi_{23} - F_{23})\right];$$

$$T^{20}_{(0)} = \frac{1}{2}(1 + \cos\overline{x^0}) Q^{02}_{(1)} + \frac{1}{2R_0^3} \psi_1^{-1} \psi_2^{-2} \sin^{-2}\theta \left[\left(1 - \frac{\psi_1}{\psi_2}\right) \times \right.$$
$$\times \left(\frac{1}{2}(1 + \cos\bar{z}) \frac{\partial F_{33}}{\partial x^0} + \frac{1}{2}(1 - \cos\bar{z}) \frac{\partial \Phi_{33}}{\partial x^0}\right) +$$
$$\left. + \frac{\pi R_0}{2h} \psi_1 \sin\bar{z} \frac{\partial}{\partial x^0} (\Phi_{33} - F_{33})\right];$$

$$T^{30}_{(0)} = \frac{1}{2}(1 + \cos\overline{x^0}) Q^{03}_{(1)} + \frac{1}{2}(1 + \cos\bar{z}) Q^{30}_{(1)} + \frac{1}{2}(1 - \cos\bar{z}) Q^{30}_{(2)}.$$

Корректирующий тензор ($T_к$) для оживальной оболочки строится так же, как для сферической оболочки, на основании результатов § 4 настоящей главы.

Компоненты тензора ($T_к$) в форме Морера имеют вид

$$T_{(к)}^{\alpha\beta} = \sum_{mnpl} (A_{m\bar{n}pl} f_{(1)}^{\alpha\beta} + B_{m\bar{n}pl} f_{(2)}^{\alpha\beta} + C_{m\bar{n}pl} f_{(3)}^{\alpha\beta} + D_{m\bar{\bar{n}}pl} f_{(0)}^{\alpha\beta}). \tag{4.5.69}$$

Функции $f_{(\gamma)}^{\alpha\beta}$ определяем по формулам (1.4.14) второй части книги, учитывая выражения компонент метрического тензора:

$$g_{11} = R_0^2 \psi_1^2, \; g_{22} = R_0^2\psi_2^2 \sin^2 \theta, \; g_{33} = 1, \; g_{00} = 1, \tag{4.5.70}$$

символов Кристоффеля

$$\Gamma_{3.11} = -R_0\psi_1, \quad \Gamma_{3.22} = R_0 \psi, \Gamma_{3.22} = -R_0\psi_2 \sin^2 \theta, \Gamma_{1.13} = R_0 \psi_1,$$

$$\Gamma_{2.23} = R_0\psi_2 \sin^2\theta, \quad \Gamma_{1.22} = -R_0^2\psi_2\psi_3 \sin \theta; \quad \Gamma_{2.21} = R_0^2\psi_2\psi_3 \sin \theta,$$

$$\Gamma_{13}^1 = \frac{1}{R_0} \psi_1^{-1}, \; \Gamma_{11}^3 = -R_0 \psi_1; \; \Gamma_{22}^3 = -R_0 \psi_2 \sin \theta; \; \Gamma_{23}^2 = \frac{1}{R_0} \psi_2^{-1}, \tag{4.5.71}$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{\psi_2 \psi_3}{\psi_1^2} \sin\theta, \; \Gamma_{21}^2 = \frac{\psi_3}{\psi_2 \sin\theta}$$

и фундаментальных функций (4.5.33).

Параметры A_{mnpl}, ..., D_{mnpl} компонент корректирующего тензора находим в результате решения уравнений (1.3.70) для упругопластической оболочки, деформации считаем малыми. Коэффициенты $F_{\gamma\beta}$ и свободные члены L_β уравнений вычисляем по формулам

$$F_{\gamma\beta} = \alpha_1 F_{\gamma\beta}^{(1)} - \alpha_2 F_{\gamma\beta}^{(2)},$$

$$L_\beta = 2G\,(L_\beta^{(1)} - L_\beta^{(2)}) - \alpha_1 L_\beta^{(3)} + \alpha_2 L_\beta^{(4)}. \tag{4.5.72}$$

Интегралы $F_{\gamma\beta}^{(1)}$ и $F_{\gamma\beta}^{(2)}$ имеют вид:

$$F_{\gamma\beta}^{(1)} = \frac{2R_{ож}^2\, hx_2^0\, (\theta_2 - \theta_1)}{\pi^3} \int_V A_{\gamma\beta}^{(1)} \left(\sin\theta - \frac{b}{R_{ож}}\right) d\bar{V},$$

$$F_{\gamma\beta}^{(2)} = \frac{2R_{ож}^2\, hx_2^0\, (\theta_2 - \theta_1)}{\pi^3} \int_V A_{\gamma\beta}^{(2)} \left(\sin\theta - \frac{b}{R_{ож}}\right) d\bar{V}; \tag{4.5.73}$$

их подынтегральные выражения — вид (4.4.68).

Интегралы $L_\beta^{(1)}$, ..., $L_\beta^{(4)}$ таковы:

$$L_\beta^{(1)} = \int_S B_\beta^{(1)}\, dS\,, \; L_\beta^{(2)} = \frac{2R_{ож}^2\, hx_2^0\, (\theta_2 - \theta_1)}{\pi^3} \int_V B_\beta^{(2)} \left(\sin\theta - \frac{b}{R_{ож}}\right) d\bar{V},$$

$$L_\beta^{(3)} = \frac{2R_{ож}^2\, hx_2^0\, (\theta_2 - \theta_1)}{\pi^3} \int_V B_\beta^{(3)} \left(\sin\theta - \frac{b}{R_{ож}}\right) d\bar{V}, \tag{4.5.74}$$

$$L_\beta^{(4)} = \frac{2R_{ож}^2\, hx_2^0\, (\theta_2 - \theta_1)}{\pi^3} \int_V B_\beta^{(4)} \left(\sin\theta - \frac{b}{R_{ож}}\right) d\bar{V};$$

их подынтегральные выражения определяем по формулам (4.4.69), учитывая формулы (4.5.68). Функции состояния α_1 и α_2 находим по формулам (1.3.72) при известной диаграмме $\sigma_i \div e_i$ материала оболочки.

Для вязкоупругой оживальной оболочки параметры A_{mnpl}, ..., D_{mnpl} находим в результате решения уравнений (1.3.70) при малых деформациях. Коэффициенты $F_{\gamma\beta}$ и свободные члены L_β уравнений вычисляем по формулам

$$F_{\gamma\beta} = \alpha_1 F_{\gamma\beta}^{(1)} + \alpha_2 F_{\gamma\beta}^{(2)} - (1/v_0)\left(F_{\gamma\beta}^{(3)}/3 - F_{\gamma\beta}^{(4)}\right), \tag{4.5.75}$$

$$L_\beta = L_\beta^{(1)} + L_\beta^{(2)} + \alpha_1 L_\beta^{(3)} + \alpha_2 L_\beta^{(4)} - (1/v^0)\left(L_\beta^{(5)}/3 - L_\beta^{(6)}\right).$$

Интегралы $F_{\gamma\beta}^{(1)}$ и $F_{\gamma\beta}^{(2)}$ имеют вид (4.4.76), интегралы $F_{\gamma\beta}^{(3)}$, $F_{\gamma\beta}^{(4)}$ — следующий вид:

$$F_{\gamma\beta}^{(3)} = \frac{2R_{\text{ож}}^2 h x_2^0 (\theta_2 - \theta_1)}{\pi^3} \int\limits_{\overline{V}} \int\limits_0^{x^0} \Gamma_k (x^0 - y^0) \left(A_\gamma (y^0) A_\beta (x^0) + \right.$$

$$\left. + A_\gamma (x^0) A_\beta (y^0)\right) dy^0 (\sin\theta - b/R_{\text{ож}})\, d\overline{V}; \tag{4.5.76}$$

$$F_{\gamma\beta}^{(4)} = \frac{2R_{\text{ож}}^2 h x_2^0 (\theta_2 - \theta_1)}{\pi^3} \int\limits_{\overline{V}} \int\limits_0^{x^0} \Gamma_k (x^0 - y^0) A_{\gamma\beta}^{(1)} (y^0)\, dy^0 \left(\sin\theta - \frac{b}{R_{\text{ож}}}\right) d\overline{V}.$$

Интегралы $L_\beta^{(1)}$, ..., $L_\beta^{(4)}$ принимают вид (4.5.74), интегралы $L_\beta^{(5)}$, $L_\beta^{(6)}$ таковы:

$$L_\beta^{(5)} = \frac{2R_{\text{ож}}^2 h x_2^0 (\theta_2 - \theta_1)}{\pi^3} \int\limits_{\overline{V}} \int\limits_0^{x^0} \Gamma_k (x^0 - y^0) \left(A_\beta (x^0) T_1 (T_0 y^0) + \right.$$

$$\left. + A_\beta (y^0) T_1 (T_0 x^0)\right) dy^0 (\sin\theta - b/R_{\text{ож}})\, d\overline{V}, \tag{4.5.77}$$

$$L_\beta^{(6)} = \frac{2R_{\text{ож}}^2 h x_2^0 (\theta_2 - \theta_1)}{\pi^3} \int\limits_{\overline{V}} \int\limits_0^{x^0} \Gamma_k (x^0 - y^0) B_\beta^{(3)} (y^0)\, dy^0 \times$$

$$\times \left(\sin\theta - \frac{b}{R_{\text{ож}}}\right) d\overline{V},$$

функцию $\Gamma_k (x^0 - y^0)$ для материала оболочки предполагаем известной. Функции состояния α_1 и α_2 определяем по формулам (1.3.74).

Решение указанных систем уравнений строим с помощью процедуры последовательных приближений, изложенной в § 5 гл. 1 второй части книги так же, как было выполнено во всех ранее рассмотренных задачах. В результате можно получить корректирующий тензор ($T_\text{к}$) оживальной оболочки с любой степенью точности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Батуев Г. С., Голубков Ю. В., Ефремов А. К., Федосов А. А.* Инженерные методы исследования ударных процессов. М., 1969.

2. *Веклич Н. А., Малышев Б. М.* Продольный удар жесткого тела по закрепленному телу. — Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 6.

3. *Веклич Н. А., Кукуджанов В. М., Малышев Б. М.* Продолжительность удара упругопластического стержня. — Тезисы докладов на IV Всесоюзном симпозиуме по распространению упругих и упруго-пластических волн. Кишинев, 1968.

4. *Высокоскоростные ударные явления*: Монография. М., 1973.

5. *Галин М. П.* Поперечные колебания балок и плит за пределом упругости под действием взрывных и ударных нагрузок. — ПММ, 1953, т. XVII, вып. 4.

6. *Гольдсмит В.* Удар. М., 1965.

7. *Гопкинс Г.* Динамические неупругие деформации металлов. М., 1964.

8. *Дейвис Р. М.* Волны напряжений в твердых телах. М., 1961.

9. *Домбровский Г. А., Литвинов Г. В., Малышев Б. М.* Продольный растягивающий удар по натянутой нити. — Инженерный журнал. МТТ, 1968, № 2.

10. *Зельдович Я. Б., Компанеец А. С.* Теория детонации. М., 1955.

11. *Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., 1966.

12. *Златин Н. А.* К теории высокоскоростного соударения металлических тел. — Теоретическая физика, 1961, т. 31, вып. 3.

13. *Ильюшин А. А.* Пластичность. М., 1948.

14. *Ильюшин А. А., Огибалов П. М.* Упруго-пластические деформации полых цилиндров. М., 1960.

15. *Ионов В. Н.* Напряженно-деформированное состояние оболочек нулевой кривизны. — Инженерный сборник, 1960, т. XXIX.

16. *Ионов В. Н.* Напряжения в коническом теле при статическом нагружении. — Изв. вузов. Машиностроение, 1965, № 7.

17. *Ионов В. Н.* Расчет напряжений в оболочке вращения ненулевой гауссовой кривизны. — НДВШ. Машиностроение, 1959, № 2.

18. *Ионов В. Н.* Расчет напряжений в оживальной оболочке при проникании. — Изв. вузов. Машиностроение. 1961, № 7.

19. *Ионов В. Н., Огибалов П. М.* Прочность пространственных элементов конструкций. М., 1972.

20. *Ишлинский А. Ю.* Уравнение деформирования не вполне упругих и вязко-эластических тел. — Изв. АН СССР. ОТН, 1945, вып. 1—2.

21. *Ишлинский А. Ю.* Пространственное деформирование не вполне упругих и вязко-пластичных тел. — Изв. АН СССР. ОТН, 1945, вып. 3.

22. *Карлсоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. М., 1964.

23. *Кильчевский Н. А.* Теория соударения твердых тел. Киев, 1969.

24. *Кильчевский Н. А.* Основы тензорного исчисления с приложениями к механике. Киев, 1972.

25. *Кильчевский Н. А., Шальда Л. М.* К теории соударения упругих тел. — МТТ, 1973, № 6.

26. *Кольский Г.* Волны напряжений в твердых телах. М., 1955.

27. *Лаврентьев М. А.* Кумулятивный заряд и принципы его работы. — Успехи математических наук, 1957, т. XII, вып. 4.
28. *Ляв А.* Математическая теория упругости. — ОНТИ НКТП СССР, 1935.
29. *Малышев Б. М.* О влиянии волн напряжений на процесс соударения трехмерных упругих тел. — Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 6.
30. *Малышев Б. М.* Экспериментальное подтверждение теории Сен-Венана. Инженерный журнал. МТТ, 1967, № 5.
31. *Малышев Б. М.* Экспериментальное исследование распространения упруго-пластических волн. — ПМФТ, 1961, № 2.
32. *Огибалов П. М., Мирзаджанзаде А. Х.* Нестационарные движения вязко-пластических сред. М., 1970.
33. *Пучков В. М.* О вдавливании жесткого штампа в пластическую среду. — Диссертация. М., 1946.
34. Разрушение Т. I. М., 1973.
35. *Рахматулин Х. А., Демьянов Ю. А.* Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М., 1961.
36. *Рахматулин Х. А., Сагомонян А. Я.* Газовая динамика. М., 1965.
37. *Райнхарт Дж. С., Пирсон Дж.* Поведение металлов при импульсных нагрузках. М., 1958.
38. *Райнхарт Дж. С., Пирсон Дж.* Взрывная обработка металлов. М., 1966.
49. *Релей.* Теория звука. Т. I. М., 1955.
40. *Сагомонян А. Я.* Проникание. М., 1974.
41. *Сагомонян А. Я.* К задаче о взаимодействии тел с очень большими скоростями. — ДАН СССР, 1964, т. 156, № 5.
42. *Сагомонян А. Я.* Взаимодействие бойка и полубесконечной преграды при больших скоростях соударения. — Вестник МГУ, 1964, № 2.
43. *Сагомонян А. Я., Кутляров В. С.* Приближенный метод определения среднего диаметра отверстия, образованного в преграде бойком при больших скоростях соударения. — Вестник МГУ, 1964, № 2.
44. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М., 1972.
45. *Соколовский В. В.* Теория пластичности. М., 1969.
46. *Станюкович К. П.* Неустановившиеся движения сплошной среды. М., 1971.
47. Физика взрыва. М., 1975.
48. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М., 1956.
49. *Чедвик П., Кокс А., Гопкинс Г.* Механика глубинных подземных взрывов. М., 1966.
50. *Hopkinson I.* On the rupture of iron wire by a blow Pros. Man. Lit. Philos. Sos 11 1872; Turther, experiments on the rupture of iron wire, Proc Man. Lit Philos. Soc 11 1872.
51. *Hopkinson B.* The effects of momentary stressen in metals, Proc, Roy; Soc. Lond. A 74, 1904—1905. A. Method of Measuring the Pressure Produced in the Detonation of High Explosiver or by the Impact of Bullets, Frans, Roy, Soc (London) 213A 1914.
52. *Kaufmann S., Roever W. L.* Proceedings of the Third World Petroleum Congrese section 1, 1951.
53. *Winning C. H., Edgerton H. E.* Explosive Argon Flashlamp. I. Soc. of Motion Picture and Television Engrs 59, 1952.
54. *Walsh I. M., Rice M. H.*, Mc Qucen R. G., Jarger F. L. Phys. Rev. 1957, v. 108, p. 196.
55. *Jones H., Miller R.* Proc. Roy. Soc. A 194, 480 (1948).
56. *Allen W., Mayfield E. B., Morrison H. L.* Dynamics of a Projectile Penetrating Sand, J. Appel. Phys. 28, 1957.
57. *Timoshenko S. P.* Philosophical Magazine Serues 6, v. 41, v. 43.
58. *Saint—Venant B.* et *Flamant M.* Determination et representation graphigue des lois de choc longitudinal d'une tige on barre elastique prismatique, Compte rendus. Ac. Sic. p. p. 127, 214, 281, 353, 1883.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аэродинамическое внедрение 160

Бризантность 14

Взрыв 14
— в вязкоупругопластическом пространстве 86—108
— — полой сфере 279—288
— — полом цилиндре и конусе 307—333
—, плита при взрыве и ударе 251—278
Внедрение тела в деформируемую среду 158—198
Волна нагрузки 7
— разгрузки 8
Волны Лява 84
— напряжений 7
— Релея 82
— Римана 225
Вторичная область 7

Действие внутреннего и внешнего давлений на сферическую и оживальную оболочки 421—437
— — — — — — цилиндрическую и коническую оболочки 395—404

Задача о распространении волн напряжений 30—50

Контактная задача Герца 130—137
Копер 13
Кратерное внедрение 161

Линии скольжения 162

Мерный стержень Девиса 20
— — Гопкинсона 20—22
Методы измерения кинематических и динамических параметров волн напряжений 18—30

Напряжения в деформируемой среде при внедрении 198—220

Область аэродинамического внедрения 160
— внедрения 158
— возмущений нагрузки 50
— — отраженной волны 70
— — разгрузки 65
Оболочка вращения ненулевой гауссовой кривизны 405
— — нулевой гауссовой кривизны 362

Откол 79
Отражение и взаимодейтвие волн напряжений при их распространении 70—85

Первичная область 7
Плита 252
Пневмогазовая пушка 13
Пограничный слой 158
Поперечный удар 245
Построение тензора кинетических напряжений оболочки ненулевой гауссовой кривизны 405—421
— — — — — нулевой гауссовой кривизны 362—377
Преграда 158
— конечной толщины 137
Приемник 10
Принцип Гопкинсона 18
Продольный удар 221

Сжатие цилиндрической и конической оболочек осевыми нагрузками при тепловом воздействии 377—393
Способы возбуждения возмущений 10—17

Таблица собственных функций и уравнений частот для плит 277, 278
— — — — — — — стержней 249
— характеристик контактной области при соударении 12
Тело Ишлинского 172
Тонкий стержень 221

Удар в преграду конечной толщины 137—157
— по вязкоупругопластическому полупространству 109—137
— — тонкому стержню 221
— сферы о преграду 288—307
—, цилиндр и конус при ударе 333—361
Ударная волна 9, 38
Ударник 10
Ударное возмущение 10
Уравнение Релея 247
— Тимошенко 247

Фугасное действие 14

Характеристический импеданс 81