

УЗБ.
620
У-80

М.Т.ЎРЗОБОВ

Ақпарат

МАТЕРИАЛЛАР
КАРШИЎИ
АССОСИ
КУРСИ

А

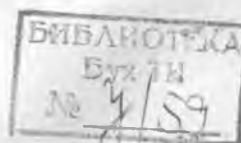
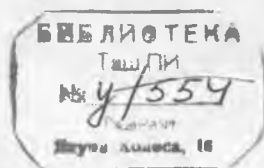
Проф.

М. Т. УРОЗБОЕВ

МАТЕРИАЛЛАР дАРШИЛИГИ

АСОСИЙ КУРСИ

ОЛИЙ ЁҚУВ ЮРТЛАРИ
УЧУН ДАРСЛИК



□

БИРИНЧИ НАШРИГА
СЎЗ БОШИ

W-1/12

Материаллар қаршилиги фани кейинги 25—30 йиллар ичида мазмун жиҳатидан ҳам баён этиш усули жиҳатидан ҳам бошқа умумтехника фанларига қараганда анча ўзгарди. Бу давр ичида яратилган ва мураккаб шароитларда ишлайдиган машиналар (реактив самолётлар, атом реакторлари ва шунга ўхшашлар), шунингдек, бу давр ичида вужудга келтирилган иншоотлар ажойиб физик-механик хоссаларга эга бўлган материаллар барпо этишни талаб қилиш билан бирга, бу машина ва иншоот элементларининг янги шароитда пухта ишлай олишини таъминлайдиган ҳисоб усуллари ни ишлаб чиқиш заруриятини ҳам туғдирди. Материаллар қаршилиги фани бундай шароитда ривожланмай қолмади, албатта.

Маълумки, олий техника ўқув юрлари учун материаллар қаршилиги фанидан ўзбек тилида бирорта дарслик ҳам ва бирорта қўлланма ҳам нашр этилган эмас. Бу ҳол авторни кўп йиллардан бери тараддудга солиб келди. Республикамиздаги олий техника ўқув юрлари ва университетларда ўзбек тилида ўқувчи студентлар учун дарслик яратиш керак эди. Қўлингиздаги дарслик учун материал сифатида авторнинг бир неча йиллар мобайнида Тошкентдаги олий техника ўқув юрларида ва В. И. Ленин номидаги Тошкент Давлат университетида ўқиган лекциялари асос бўлди.

Авторнинг фикрича, ҳар қандай дарслик қуйидаги иккита асосий талабни қаноатлантириши лозим.

1. Дарслик мазмунан бой, ҳажман қисқа бўлиши керак. Фақат шундагина студент дарсликни зерикмай ўқиб, унда баён этилган материалларни билиб олишга ҳаракат қилади.

2. Дарсликдаги материаллар маълум системада қатъий ва тушунарли тилда баён этилиши керак. Бу нуқтани назардан олганда, дарслик тегишли темаларга бевосида алоқаси бўлмаган изоҳ ва иловалар билан чўзиб юборилмаслиги лозим.

Автор бу икки шартни бажаришга ҳаракат қилди. Шу муносабат билан, материаллар қаршилиги асосий курсини программага имкони борича мослаб ёзишни кўзда тутиб, китобни икки қисмга бўлди. Дарсликнинг биринчи қисмида ҳар бир инженер учун зарур бўлган асосий материаллар баён этилди. Ҳар қайси бобдаги назарий тушунчаларни ойдинлатириш учун амалий масалалар келтирилди ва уларнинг ечилиши охиригача етказилди. Китобнинг биринчи қисми нормал программада утиладиган асосий материалларни ўз ичига ола-

ди. Аммо мураккаб қаршилик китобнинг иккинчи қисмида берилади. Шунинг билан бирга, китобнинг иккинчи қисмида материаллар қаршилигининг махсус масалалари ва юқорида айтиб ўтилган янги тур материалларнинг ҳисобига оид маълумотлар, шунингдек, кейинги давр ичида ривожланган усуллар ҳамда динамик кучлар таъсирини ўрганиш каби материаллар баён этилади.

Қўл ёзмани диққат билан ўқиб чиқиб, баъзи бир муҳим маслаҳатлар бергани учун академик Х. А. Раҳматуллин, техника фанлари кандидатлари В. Қ. Қобулов ва Қ. М. Мансуров, шунингдек, инженер В. Ғ. Ғаниев ўртоқларга автор ўз миннатдорлигини билдиради.

Китоб ҳақидаги фикр ва мулоҳазаларингизни қуйидаги адресга юборишингиз илтимос қилинади: Тошкент, Навоий кўчаси, 30. ЎзССР «Ўрта ва олий мактаб» давлат нашриёти.

Проф. М. Ўрозбоев

Тошкент, 1960 й.

ИККИНЧИ НАШРИГА СЎЗ БОШИ

Китобнинг бу нашрида «Материаллар қаршилиги» нинг биринчи ва иккинчи қисмлари бирлаштирилди, аммо иккинчи қисмидаги «Татбикий эластиклик назариясининг баъзи масалалари» деган бўлим бу нашрига киритилмади, уни махсус курс тарзида алоҳида китоб қилиб нашр этиш маъқул топилди.

Проф. М. Ўрозбоев.

Тошкент, 1970 й.

КИРИШ

1-§. Материаллар қаршилиги фанининг моҳияти

Бирор машина ёки иншоот қуришдан аввал, ундан қандай мақсадда фойдаланилишига қараб керак бўладиган материаллар танланади. Материаллар танлашда машина ёки иншоотнинг қисмлари қандай шароитда ишлашини ва улар қандай юкларга, яъни қандай ташқи кучларга бардош бериши кераклигини билиш лозим. Қўйилган кучлар таъсиридан машина ёки иншоотнинг қисмларида қандай зўриқишлар ҳосил бўлиши, бу зўриқишларга қандай тур материал бардош бериши, бу қисмлар кўндаланг кесими ўлчамларининг қандай танлаб олиниши ҳақидаги масала олдиндан ҳал қилиниши керак.

Маълумки, турли қурилиш материаллари ташқи кучлар таъсирига турлича қаршилиқ кўрсатади. Шунинг учун машина ёки иншоот қисмларининг қўйилган юклар таъсирига бардош бериб туриши уларнинг ўлчамларига боғлиқ бўлиши билан бирга, қандай турдаги материалдан ясалишига ҳам боғлиқдир.

Машина ёки иншоотларнинг қисмларида ташқи юк таъсиридан ҳосил бўладиган зўриқишларни ҳамма вақт ҳам статика тенгламалари ёрдами билан аниқлаш мумкин бўлавермайди. Бундай пайтларда зўриқишларни қабул қилувчи қисмларнинг деформацияларини, яъни геометрик ўзгаришларини ва бу ўзгаришлар билан зўриқишлар орасидаги муносабатларни олдиндан билмасдан туриб, қўйилган масалани охиригача ечиб бўлмайди. Демак, машина ёки иншоотлар қуриш учун зарур бўлган материалларнинг баъзи физик хоссаларини ифодаловчи параметрларни олдиндан билиш керак бўлар экан.

Материаллар қаршилиги машина ёки иншоотларнинг қисмларида (элементларида) ҳосил бўладиган зўриқиш ва деформацияларни аниқлаш усулларини ва материалларнинг баъзи физик (физикавий) хоссаларини эксперимент (тажриба) ёрдамида текшириш йўлларини ўргатувчи фандир.

Бу фанни тавсиф этишда, материаллар қаршилиги масалаларининг қўйилишига қараб, унинг ё конкрет экспериментал қисмига, ёки назарий қисмига кўпроқ мойиллик бериш мумкин бўлади. Лекин экспериментал қисми билан назарий қисмини би-бирига қарама-қарши қўйиб бўлмайди, чунки материаллар қаршилиги фанининг тараққиётида ва тузилишида бу икки қисм бир-бирига узлуксиз боғланган бўлиб, бир бутун ҳолда иншоотлар умумий назариясининг асосини ташкил этади.

Материаллар қаршилиги фанида механика фанининг қаттиқ жисмларга оид умумий натижаларидан кенг фойдаланилади. Материаллар қаршилиги механикада қабул қилинган қаттиқ жисм тушунчасини бир неча янги тушунчалар билан тўлдиради. Булардан энг муҳими кучланиш билан деформация тушунчасидир. Бирмунча оддий ҳолларда кучланишни деформациядан қатъи назар, абсолют қаттиқ жисм механикасининг усулларида фойдаланиб аниқлаш мумкин. Бундай масалалар *статик аниқ* масалалар дейилади. Умуман, кучланишни деформацияга боғламай аниқлаб бўлмайди. Кучланиш деформациясиз аниқлаш мумкин бўлмаган масала *статик аниқмас* масала дейилади. Бу тарздаги статик аниқмас масалалар материаллар қаршилиги фанининг махсус усулларида фойдаланиб ечилади.

Каттиқ жисмда ҳосил бўладиган кучланиш ва деформацияларни текшириш масалалари билан материаллар қаршилигига эмас, балки абсолют каттиқ бўлмаган жисмлар (деформацияланадиган жисмлар, механикаси ҳам шуғулланади. Бу фан каттиқ жисмнинг умумий эластиклик назариясини ва пластиклик назариясини ўз ичига олади. Деформацияланувчи каттиқ жисм механикаси ва материаллар қаршилиги қўйилган масалаларни ечиш усули билан бир-биридан фарқ қилади. Деформацияланувчи каттиқ жисм механикаси жисмдаги кучланиш ва деформацияларни аниқлашда каттиқ жисмларни бир жинсли ва ўзи ишқол этган ҳажмни тўла қопловчи туташ муҳит деб масалани математик нуқтаи назардан умумий ҳолда текширади. Шундай бўлса-да, масала бирмунча катъий түс олиши билан бирга, юқори даража аниқ натижалар беради.

Материаллар қаршилигида эса мураккаб математик формулалар билан қилинадиган ҳисобларни ихчамлаштириш мақсадида кучланиш ва деформацияларнинг характерини муайян амалий масалалар учун олдиндан бирмунча аниқлайдиган гипотезалар асосида иш қўрилади. Амалий масалалар бундай гипотезаларга суяниб ечилганда, етарли даражада аниқ ва осон ҳал қилинади. Албатта, бу гипотезаларнинг натижаси билан ҳақиқий ҳолат орасида ҳеч қандай қарама-қаршилик юз бермаслиги керак. Бироқ шундай ҳоллар ҳам борки, ҳеч қандай гипотеза билан масалани элементар ҳолга келтириб бўлмайди. Бундай ҳолларда материаллар қаршилиги ўз олдига қўйилган масалаларни ечишда деформацияланувчи каттиқ жисм механикасининг усуллари татбиқ этилиб чиқарилган натижалардан фойдаланади. Бундан кўрамизки, материаллар қаршилигида фақат маълум доирадаги масалалар ечилиб, жисмдаги зўриқиш ва деформацияларни аниқлаш масаласи, умумий ҳолда, деформацияланувчи каттиқ жисм механикасида тўла-тўқис ечилади.

Материаллар қаршилигида ечиладиган масалаларнинг юқорида айтилган доираси анча кенг бўлиб, жуда муҳим амалий масалаларни ўз ичига олади, шунинг билан бирга, ҳаётда ишлатиладиган машина ва иншоот қисмларининг асосий типларини ҳисоблаш учун етарли бўлган техник аппаратларни беради. Материаллар қаршилигининг баъзи мураккаб масалаларини бевосита эксперимент йўли билан ечиш мумкин. Экспериментал йўллардан энг ривож топгани ва катта самара бераётгани фотопластик, рентгеноскопик ва электроосциллографик усуллардир. Бу уч усулнинг ҳар қайсиси жисмларда ҳосил бўладиган кучланиш ва деформацияланиш процессларини кузатиш ва уларнинг максимал қийматларини ўлчашга асосланган.

Бу китобни ёзишда автор қўйидаги икки нарсани: биринчидан, ўқувчиларга машина ва иншоотларнинг қисмларини ҳисоблашда қўлланиладиган асосий усулларни тўла-тўқис ўргатиш ва иккинчидан, фаннинг бу соҳада эришган муваффақиятлари билан уларни таништиришни ўз олдига асосий мақсад қилиб қўйди.

Шуни эслатиб ўтиш керакки, иншоотлар ва машиналар қандай вазифаларни бажариш учун мўлжалланганидан ва қандай шароитларда ишлатилишидан катъи назар, уларнинг таркибдаги элементларнинг асосан түғри стерженлар, эгри стерженлар (арклар), филдирэклар, юпқа пластинкалар ва қобиклардан иборат бўлади. Иншоот ва машиналарни ҳисоблашда улар таркибдаги қисмларнинг мустаҳкамлиги ва устиворлиги таъмин этилса, шу билан иншоот ёки машинанинг мустаҳкамлиги бутунлай таъмин этилган бўлади.

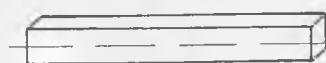
Материаллар қаршилигида ана шу түғри ва эгри призматик стерженлар, юпқа пластинкалар ва қобикларнинг мустаҳкамлигини ва устиворлигини ҳисоблаш йўл-йўриқлари берилади. Шунинг учун ҳам материаллар қаршилиги иншоот ва машиналарни ҳисоблаш назариясининг асоси ҳисобланади.

Материаллар қаршилиги ҳозирги замон татбикий техника фанлари билан чамбарчас боғлиқ бўлиб, улар су фан асосида ривожланади, материаллар қаршилиги ҳам мазкур техника фанлари асосида кенгая боради.

Маълумки, қадимги замонларда иншоотлар ҳеч қандай ҳисобсиз қурилган. Қурилиш материалларининг чидамлилиги ҳоссасига оид масалани даставвал XVII асрнинг биринчи ярмида (1638 йилда) машҳур итальян олими Галилео Галилей майдонга ташлаган эди. Жисмга қўйилган юк билан деформация орасидаги муносабатни энг аввал 1660 йилда Р. Гук деган олим тажриба йўли билан аниқлади. Материаллар қаршилигининг кейинги ривожланиши, XVIII асрдан бошлаб, Петербург Фанлар академиясининг ҳақиқий аъзолари Д. Бернулли ва Л. Эйлер ўтказган катта илмий текширишлар билан боғлиқдир. XIX асрда рус олимлари Д. Журавский, Ф. С. Ясинский ва француз олимлари Навье ва Сен-Венан ўтказган илмий текшириш ишлари материаллар қаршилигини мустақил фан қилиб қўйди. Бу фан, асосан XX асрдан бошлаб, хусусан рус олимлари ўтказган илмий текшириш ишлари натижасида такомиллашди. Бу соҳада И. Г. Бубнов, В. Л. Кирпичев, А. Н. Кривов, Б. Г. Галеркин, Н. И. Мухомелов, П. Ф. Попкович, Л. С. Лейбензон, Н. М. Беляев, А. А. Ильющин, Х. А. Раҳматуллин, В. З. Власов ва М. М. Филоненко-Бородич ҳаят катта иш қилдилар. Буларнинг деформацияланувчи қаттиқ жисм механикаси, иншоотлар назарияси ва материаллар қаршилиги соҳасида ўтказган илмий ишларининг бутун дунё миқёсида катта аҳамиятга эгалиги маълум.

2-§. Тўғри ва эгри стерженлар, юпка пластинкалар ва қобиқлар таърифи

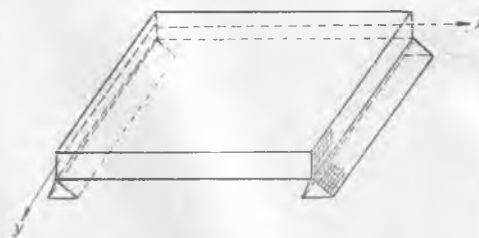
Призматик ёки цилиндрик шаклдаги жисмларнинг кўндаланг кесим ўлчамлари бўй ўлчамига қараганда бир неча марта кичик бўлса, улар *призматик стерженлар* дейилади. Геометрик ўқлари тўғри чизик бўлса, *тўғри стержень* деб, эгри чизик бўлса, *эгри стержень* деб аталади (1 ва 2-шаклл).



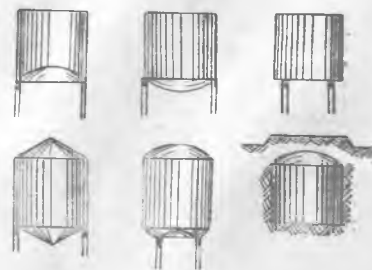
1-шакл.



2-шакл.



3-шакл.



4-шакл.

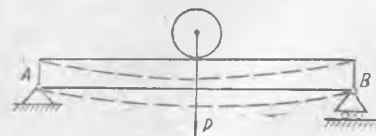
Қаттиқ жисмнинг битта ўлчами бошқа иккитасига қараганда жуда ҳам кичик бўлса, бундай ясси жисмлар *пластина* деб, юпқа деворли идишга ўхшаш жисмлар эса *қобиқ* деб аталади (3 ва 4-шакллар).

3-§. Иншоот ва машиналарга қўйиладиган кучлар ва уларнинг турлари

Иншоотлар ўз вазифасини ўташда уларнинг баъзи қисмлари ташқи кучлар таъсирига бевосита дуч келиб, ўз навбатида, бу кучларни маълум тарзда қушни элементларга узатади. Масалан сув тўғонини олсак, бу иншоот ўзининг оғирлиги ва сув босими таъсирида бўлиб, ўз навбатида, бу кучлар таъсирини тўғоннинг асосига узатади. Шунингдек, буг машинасининг поршени газ босимини қабул қилиб, уни шатун орқали кривошинга ва тирсакли валга узатади. Бунга ўхшаш мисолларни жуда кўп келтириш мумкин. Умуман, иншоотларнинг қисмлари ўзларининг хусусий оғирлиги, бу қисмларнинг бир-бирига қўрсатадиган таъсири ва уларга бевосита қўйиладиган юклар таъсирида бўлиши мумкин.

Иншоотларнинг қисмларига таъсир қиладиган кучлар икки турга: ҳажмий ва сиртки кучларга бўлинади. Куч жисм ҳажмининг барча нуқталарига қўйилган бўлса, бундай куч *ҳажмий куч* дейилади. Масалан, мустаҳкамлиги текшириладиган жисмнинг ўз оғирлиги мазкур жисм учун ҳажмий куч ҳисобланади; жисм ҳаракатда бўлса, инерция кучи ҳам ҳажмий кучлар каторига қиради, чунки инерция кучи жисмнинг массасига боғлиқдир, масса эса жисмнинг бутун ҳажмини қоплайди.

Бир-бирига тегиб турадиган икки жисмнинг ўзаро таъсири уларнинг уриниб турган нуқтасига қўйилган деб ҳисобланади. Ҳақиқатан эса, жисмларнинг тегилиб турган жойида деформация ҳосил бўлиб, уларнинг ўзаро таъсири уриниб турган нуқтага қўйилмай, бирор юзачага қўйилади. Бу юзачанинг сатҳи жуда кичик бўлса-да, чеклидир.



5-шакл.

Материаллар қаршилигида кучларнинг бир системасини унга эквивалент бўлган бошқа система

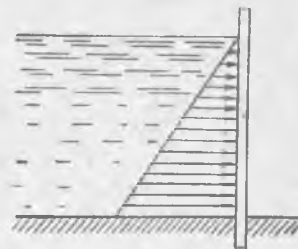
билан алмаштириш мумкин бўлмаганидан бир нуқтага қўйилган куч ўз маъносини йўқотади. Шунинг учун, масалани таърифлашда, кучнинг қандай берилишига ва унинг қулайлаштирувчи схемасига жиддий эътибор бериш зарур. Дарҳақиқат, иккита жисмнинг тегилиб турган юзачаси жисм ўлчамларига қараганда жуда ҳам кичкина бўлса, бу юзачани бир нуқта деб, у кучни эса нуқтага қўйилган *тўпланма куч* деб ҳисоблаймиз. Бу тўпланма куч, жисмларнинг тегилиб турган юзасидаги босимларнинг тенг таъсир этувчисидир. Масалан, икки учи билан таянч устида ётган балканинг бирор жойига қўйилган оғир жисмнинг балка сирти билан тегишган юзачаси жуда кичик бўлганида бу юзача бўйича таъсир қилувчи кучлар ўрнига уларнинг тенг таъсир этувчиси P ни оламиз (5-шакл).

Бу тарзда соддалаштирилган схемаларни қабул қилиш билан жисмларнинг тегилиб турган юзачаларидан узоқдаги нуқталарида ҳосил бўладиган деформацияларни етарли даражада аниқ топишимиз мумкин.

Иншоот қисмининг маълум юзаси ёки узунлиги бўйича қўйилган куч узлуксиз равишда таъсир қўрсатса, бундай куч *ёйилган куч* дейилади. Бун-

га тўғон деворга сувнинг таъсири мисол бўла олади (6-шакл); бу кучнинг тарқалиши учбурчак қонуни билан ифодаланади, чунки гидростатик босим сув юзасидан тўғон тагигача учбурчак қонуни билан ўзгариб боради. Бошқа бир мисол учун қўприк балкасини олсак, унинг устига ётқизилган шағал ва бетон балка бўйича тенг ёйилган юк бўлиб, шаклда (7-шакл) кўрсатилганча таъсир қилади.

Иншоот қисмларига қўйилган (ёйилган) юклар тенг тарқалган бўлмай, ихтиёрий равишда тарқалган бўлиши ҳам мумкин. Тупроқ, қум каби сочилувчи материаллар билан қўланган балка бунга мисол бўла олади (8-шакл). Тўпланма юк тонна ёки кг ҳисобида, ёйилган юк эса, юзага қўйилган бўлса, t/m^2 ёки kg/cm^2 ҳисобида, узунлик бўйича таъсир қилаётган бўлса, t/m ёки kg/cm ҳисобида ўлчанади.



6-шакл.



7-шакл.



8-шакл.

Бу юқорида баён қилинган ҳиллардаги кучлар иншоот қисмларига статик ва динамик характерда таъсир кўрсатиши мумкин. Иншоот қисмларига куч тадрижий (аста-секин) қўйилиб, оқибатда энг катта қийматига етказилса, бундай куч *статик куч* дейилади куч статик таъсир этса, иншоот қисмларида ҳеч қандай тезланиш ҳосил бўлмайди. Улар доимо мувозанатда бўлади. Қўпчилик бинолар, гидротехник иншоотлар статик кучлар таъсирида бўлади. Қўйилган кучлар таъсиридаги иншоот қисмларида тезланишлар ҳосил бўлиб, улар қисқа муддат ичида ўзгариб турса, бу тарздаги кучлар *динамик* характерда деб ҳисобланади. Масалан, иншоот қисмлари зарбали ёки бирданига қўйиладиган, ёхуд даврий ўзгариб турадиган кучлар таъсирида бўлиши мумкин.

Аввало, материалларнинг статик таъсир қилувчи кучларга кўрсатадиган қаршилигини текшираимиз. Сўнгра, динамик кучларнинг қандай шарт-шароитда ҳосил бўлишини ва материалларнинг бу кучлар таъсирига қандай қаршилиқ кўрсатишини текширишга ўтаимиз.

4- §. Деформация ва унинг турлари

Ҳар қандай каттиқ жисмга куч таъсир қилганда унинг геометрик шакли ва ўлчамлари бирмунча ўзгаради. Бу ўзгариш *деформация* дейилади. Масалан, вертикал стержень ёки цилиндрик пружина ўз ўқи бўйлаб йўналган кучлар таъсиридан чўзилади, икки таянчда ётувчи балка устидаги юк таъсиридан эгилади. Деформация соф геометрик фактор бўлиб, уни жисмларнинг физик хоссаларидан айрим ҳолда текшириш ҳам мумкин. Бундай текширишни деформациянинг геометрик назарияси дейиш мумкин. Бироқ куч таъсиридаги жисмнинг деформациясини текширганимизда, унинг геометрик назарияси ҳодисани тўла ифодалай олмайди, чунки деформациянинг микдори ва характери жисмга қўйилган кучга боғлиқ бўлиш билан бирга, жисм материалининг физик хоссаларига ва унинг геометрик тузилишига ҳам боғлиқдир. Масалан, қўндаланг кесим юзалари 1 см^2 , узунлиги 1 метр бўлган резина; ва пўлатдан ишланган призматик стерженларнинг учларига бўйлама ўқлари бўйлаб 1 кг дан юк қўйсак, резина стержень 20 мм, пўлат стержень эса 0,0005 мм чўзилади.

Қўпчилик қурилиш материаллари, одатда, уларга қўйиладиган юкларнинг таъсири остида ниҳоятда оз деформацияланади. Шунинг учун ҳам каттиқ жисмга оид қўпчилик масалаларни ечишда уларнинг деформациялари эътиборга олинмай, жисм абсолют каттиқ деб ҳисобланади.

Учлари икки таянчга қўйилган балкани олсак, унинг эгилиши таянч реакцияларининг йўналиши ва микдорига ортиқча таъсир кўрсатмайди (5- шакл). Шунинг учун ҳам таянч реакцияларини аниқлашда балка абсолют каттиқ жисм деб қаралади.

Шундай ҳоллар борки, иншоот қисмларида ҳосил бўладиган зўриқишларни ва боғланиш реакцияларини деформацияни эътиборга олмай аниқлаб бўлмайди. Масалан, юқорида келтирилган балканинг оралиғига яна битта таянч қўйилса, ёки бир учи кистириб маҳкамланган бўлса, бу ҳолда реакциялар сони учта бўлиб, масала статик аниқмас бўлади. Статиканинг бу ҳол учун тузилган иккита тенгламаси масалани ечиш учун қифоя қилмайди. Қўшимча тенглама балканинг деформацияланиш шартидан фойдаланиб тузилади. Умуман, деформациясиз материаллардаги зўриқишларни аниқлаб бўлмайди. Шундай бўлишига қарамай, материаллар қаршилиги масалаларини ечишда, энг аввал статика тенгламалари тузилади, сўнгра деформация шартидан фойдаланиб, қўшимча тенгламалар тузишга ўтилади.

Жисм қандай куч таъсирига дуч келмасин ва қандай геометрик шаклда бўлмасин, унинг деформацияси жуда кичик бўлганидан, ҳар қандай деформацияни икки асосий турга келтириш мумкин. Агар ихтиёрий шаклдаги жисм фикран чексиз кичик ҳажмли чексиз қўп микдордаги кубчалар йиғиндисидан тузилган деб қаралса, бундай жисмнинг деформацияси мазкур чексиз кичик ҳажмли кубчалар деформациялари билан тасвирланади. Бу чексиз кичик ҳажмли кубчаларнинг деформациялари уларнинг қирралари узунлигининг ўзгариши (қисқариши ёки чўзилиши) ва томонлари тузган тўғри бурчакларининг ўткир ёки ўтмас бурчакка айланиши билан ифодаланади. Бўй ва эн ўлчамларининг ўзгариши *чизиқли деформация* деб, тўғри бурчакнинг ўзгариши эса *бурчак ёки силжиш деформацияси* деб аталади. Жисмнинг ҳар қандай деформацияси ана шу икки асосий деформациядан иборатдир. Чизиқли деформация натижасида жисмнинг олдинги бўйи узайса, жисм чўзилади, қисқарса, жисм сиқилади. Ушбу икки бир-биридан фарқ қилиш учун, бирига мусбат, иккинчисига манфий ишора қўйилади.

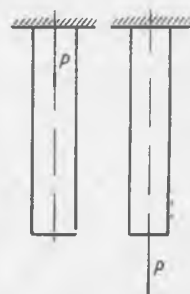
5-§. Қаттиқ жисм статикаси теоремаларининг материаллар қаршилигидаги татбиқи

Умуман, деформацияланувчи қаттиқ жисмга статиканинг абсолют қаттиқ жисм учун чиқарилган баъзи теоремаларини татбиқ этиш мумкин. Масалан, материаллар қаршилигида деформацияланувчи жисмни фикран абсолют қаттиқ жисм деб ва статиканинг боғланишлар ҳақидаги аксиомасини татбиқ этиб, боғланишларнинг реакцияларини аниқлаш учун мувозанат тенгламаларидан фойдаланиш мумкин.

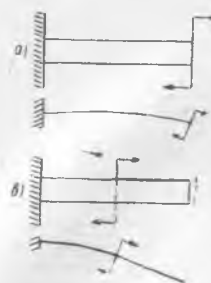
Аммо статиканинг кучларни ўз таъсир чизиги бўйлаб бир нуқтадан бошқа нуқтага келтириш ҳақидаги теоремасидан материаллар қаршилигида фойдаланиб бўлмайди. Масалан, 9-шаклда кўрсатилган призматик стерженинг маҳкамланган учига қўйилган ва ўқи бўйлаб йўналган куч таъсиридан стержень мутлақо чўзилмайди, ҳолбуки бу куч пастки учига келтирилса, стерженда чўзилиш деформацияси содир бўлади.

Жуфт кучни ўз текислигида бир жойдан бошқа жойга кўчириш мумкинлиги ҳақида абсолют қаттиқ жисм учун чиқарилган теоремани ҳам деформацияланувчи жисм учун татбиқ қилиб бўлмайди. Масалан, бир учи маҳкамланган балканинг бошқа учига қўйилган жуфт куч кўчирилиб, ўртасига келтирилса, балканинг эгилиш характери мутлақо ўзгаради. Ўртага қўйилган жуфт кучдан балканинг биринчи ярми эгилиб, эркин қисми эса қаттиқ жисм каби оғади (10-шаклдаги а ва в ҳоллар).

Қаттиқ жисм учун кучларнинг бирор системасини, унга эквивалент бўлган бошқа бир системаси билан алмаштириш мумкин. Лекин материаллар қаршилигида бу теоремадан боғланишлар реакцияларини топишда мувозанат тенгламаларини тузиш учунгина фойдаланиш мумкин, холос. Балкаларнинг мустаҳкамлигини текширишда ва эгилишни аниқлашда бу теоремадан фойдаланиш хато натижаларга олиб боради. Масалан, икки учи таянч устига эркин қўйилган балка ўз оғирлигидан эгилган вақтида унинг ўрта кесимининг силжиши шу оғирлик кучига тенг бўлган ва балканинг оғирлик марказига қўйилган тўпланма кучдан ҳосил бўладиган силжишининг 62,5 % ни ташкил этади. Бу мисол кучларининг эквивалент системалари ҳақидаги теоремани материаллар қаршилигида ҳамма вақт ҳам татбиқ этиб бўлавериб, натижаларини аниқ кўрсатади.



9-шакл.



10-шакл.

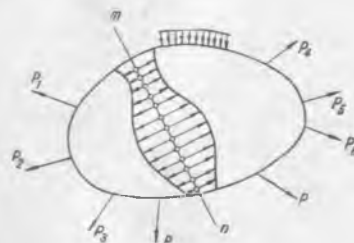
6-§. Ички кучлар ва уларни топиш

Мувозанатлашувчи ташқи кучлар таъсиридаги қаттиқ жисм зўриқиш ҳолатида туради. Бу зўриқиш жисмни ташкил қилувчи зарралар орасидаги ички кучлардан иборатдир. Қаттиқ жисмга ташқи куч қўйилмаганда ҳам, унда кучлар мавжуддир. Қаттиқ жисмда ички кучлар мавжуд бўлмаса, унинг зарралари маълум ҳажмни қопловчи бир бутун шаклни ҳосил қилмаган булар эди. Жисмни ҳосил қилувчи зарралар орасидаги ўзаро таъсир кучлари бошланғич ички кучлар дейилади.

Қаттиқ жисмга ташқи куч қўйилганда, унинг зарраларини ўзаро мувозанатда тутиб турувчи ички кучлар ўзгаради, бошқача қилиб айтганда, қўшимча ички кучлар ҳосил бўлади. Қаттиқ жисмларнинг қаршилиқ кўрсатиш қобилияти, асосан, ташқи кучлар таъсиридан ҳосил бўладиган ана шу қўшимча ички кучларга боғлиқ бўлганидан, улар бизни кўпроқ қизиқтиради. Қаттиқ жисмларда ҳосил бўладиган ички кучлар ва деформациялар XIX асрдан бўён жисмнинг молекуляр тузилиши назарияси асосида изоҳлаб келинмоқда. Ҳозирги замон физикаси атомларнинг тузилишини текширишда юзат катта муваффақиятларга эришди. Атомда жуда зўр ички кучлар борлиги тажриба йўли билан аниқланди. Ташқи кучлар таъсиридан ҳосил бўладиган деформацияларни молекулалар назарияси етарли даражада такомиллаштирди. Аммо бу назариянинг натижаларини амалий масалаларни ечишга татбиқ қилиш жуда ҳам мураккаб оқибатларга олиб борганидан, материаллар қаршилигида материалларнинг микротузилиши назарга олинмай, макротузилиши асосида фикр юргизилади. Қаттиқ жисм ишғол этган ҳажм моддалар билан зич тўлдирилган деб фараз қилинади.

Ҳақиқатан ҳам қурилишда ишлатиладиган материаллар асосан шу хусусиятга эга бўлгани учун, бу гипотеза асосида чиқарилган назарий ҳулосалар тажрибадан олинган маълумотларга жуда мос келади. Жисм ишғол қилган ҳажмни моддалар билан зич тўла деб ҳисобловчи гипотеза материаллар қаршилиги назариясини умумий механика назарияси асосида тузишга имкон беради.

Бирор физик жисмга қўйилган кучнинг манбаи бошқа физик жисмда эканлиги ва икки жисмнинг бир-бирига кўрсатадиган таъсири ўзаро тенг ва қарама-қарши йўналганлиги механиканинг асосий қонунларидандир. Механиканинг бу қонунларидан фойдаланиб қаттиқ жисмларда ҳосил бўладиган ички кучларни топиш усулларини аниқлаймиз. Ташқи кучлар таъсирида мувозанатда турган жисмни бирор сирт ёки текислик воситаси билан икки қисмга фикран ажратамиз. Масалан, *mn* текислик жисмни *A* ва *B* қисмларга ажратсин (11-шакл). Жисм *mn* текислик билан *A* ва



11-шакл

B қисмларга ажратилишидан олдин мувозанатда эди, яъни *B* қисмни *A* қисм, шунингдек, *A* қисмни *B* қисм мувозанатда тутиб турган эди. Фикран икки қисмга ажратилган бу жисмнинг ҳар қайси қисми мувозанатда бўлиши учун, уларнинг кесишдан ҳосил бўлган юзалари бўйича қисмларнинг ўзаро таъсирини алмаштирувчи кучларни қўйишимиз керак. Масалан, *A* қисмни олайлик. Агар унинг кесим юзаси бўйича *B* қисмнинг таъсирини алмаштирувчи кучларни қўймасак, у мувозанатда бўлмайди.

Шунингдек, *B* қисмнинг кесим юзаси бўйича *A* қисмнинг таъсирини алмаштирувчи кучлар қўйилиши зарур. Бу *A* ва *B* қисмларнинг кесим юзалари бўйича қўйилган кучлар, механиканинг учинчи қонунига мувофиқ тенг ва қарама-қарши йўналишда бўлиши керак. Ҳар қайси қисм, ажратиб ташланган қисм таъсирини алмаштирувчи ва кесим юзаси бўйича қўйилган кучлар билан мазкур қисмга таъсир этувчи ташқи кучлар таъсирида мувозанатда туради. Ҳар бир қисмнинг кесим юзаси бўйича таъсир этувчи кучлар ички ёки *эластик кучлар* дейилади. Бу ерда биз, биринчидан, жисмда мавжуд бўладиган ички кучларни топдик, иккинчидан, уларни ташқи куч-

лар каторига киритдик. Ички кучларни бу тарзда топиш *кесим* усули дейилади. Бу усул материаллар қаршилигида жуда катта аҳамиятга эга бўлиб, унинг воситаси билан ички кучлар топилади ва уларни аниқлаш йўли белгиланади: жисмнинг ажратилган ҳар қайси қисми учун мувозанат тенгламаларини тузиб, кесим юзаси бўйича қўйилган ички кучларнинг бош вектори билан бош моментини аниқлашимиз мумкин. Лекин ички кучларнинг кесим юзаси бўйича қандай қонун билан тарқалиши ҳақида, умумий ҳолда, бир нарса дейишга ҳеч қандай асос йўқ. Кесим юзаси бўйича ички кучларнинг қандай тарқалиши жисмнинг шаклига ва ташқи кучларнинг қўйилишига боғлиқдир.

Юқорида биз жисм ўзи ишғол қилган ҳажмни зич тўлдирувчи моддадан иборат, деб таърифлаган эдик. Ҳақиқатда эса ҳар қандай жисм майда заррачалардан, молекулалардан иборатдир. Жисмнинг ташқи кучлар таъсиридан деформацияланиши ундаги заррачалар оралиқларининг ўзгаришидан ҳосил бўлади. Молекулалар оралиқларининг ўзгариши ички кучларни туғдиради. Масалан, ташқи кучлар таъсиридан жисм молекулалари яқинлашса, улар орасида ҳосил бўладиган қаршилиқ кучи уларнинг яқинлашувига йўл қўймай, уларни узоқлаштиришга интилади. Шунингдек, жисмга қўйилган кучлар унинг молекулаларини узоқлаштиради, улар орасида ҳосил бўладиган қаршилиқ кучи молекулаларни яқинлаштиришга интилади.

Молекулаларнинг зичланиши ёки сийракланиши улар орасида ички кучларнинг вужудга келишига сабаб бўлиб, шу билан бирга, жисмнинг деформациясини ифодалайди. Жисмга қўйилган ташқи кучлар миқдори, ушбу жисм учун хос бўлган маълум бир чегарадан ошиб кетмаган бўлса, жисмдан бу кучлар таъсири олинганда, ундаги деформациялар йўқолиб, жисм ўзининг олдинги шаклига келади. Жисмда кучлар таъсири олинганда, жисмнинг олдинги ҳолатига қайтиш қобилияти унинг *эластиклиги* дейилади.

Деформация натижасида жисмнинг куч қўйилган нуқталари кўчиб ташқи кучлар иш бажаради. Умумий ҳолда, эластик жисмга қўйилган кучлар деформация натижасида иш бажаради, бу ишнинг бир қисми жисм зарраларига тезлик бериш учун сарфланади, яъни кинетик энергияга айланади. Кучнинг қолган қисми деформациянинг потенциал энергияси тарзида жисмда тўпланади. Энергия балансининг тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$A = T + U.$$

Аммо юк статик қўйилганда, деформациянинг тезлиги жуда кичик бўлганидан, уни эътиборга олмаса ҳам бўлади. У ҳолда кинетик энергия T нолга тенгдир; бунда:

$$A = U$$

бўлади, яъни ташқи кучларнинг бажарган иши жисмда деформациянинг потенциал энергияси тарзида тўпланди. Жисмдан ташқи кучлар таъсири олинганда, жисмда тўпланган деформациянинг потенциал энергияси жисмни олдинги ҳолатига келтириш учун сарфланади. Шунинг учун ҳам жисмнинг ўзида тўпланган энергияни қайтариш қобилияти унинг *эластиклиги* дейилади.

Жисмдаги деформация эластик бўлса, яъни жисмдан куч таъсири олинганда, жисмдаги деформация бутунлай йўқоладиган бўлса, бу деформацияга тегишли ички куч *эластик куч* дейилади. Иншоот ва машиналарнинг қисмларини ҳисоблашда, асосан, эластик деформацияларнинг мавжуд бўлиши кузда тутилганидан, ички кучлар ҳам фақат эластик кучлардан иборат деб ҳисобланади.

7-§. Кучланиш ва унинг турлари

Ташқи кучлар таъсирида мувозанатда турган жисмни бирон *лп* текислик билан фикран кесиб (11-шаклга қаранг), бир қисмининг мувозанатини текширамиз. Масалан, *A* қисмининг кесим юзаси бўйича бирор қонун билан ёйилган эластик кучлар таъсир қилади. Эластик кучнинг юза бирлигидаги миқдори *кучланиш* дейилади. Текшириладиган кесим юзасининг бирор *M* нуқтаси атрофида чексиз кичик ΔF юзача ажратамиз. Бу юзачадаги ички кучларнинг тенг таъсир этувчиси $\Delta \bar{P}$ бўлсин. $\Delta \bar{P}$ кучни ΔF юзачага бўламыз. Натижада ΔP билан бир йўналишда бўлган $\bar{p}^*$ векторни ҳосил қиламиз:

$$\bar{p}^* = \frac{\Delta \bar{P}}{\Delta F} \quad (7.1)$$

Бу $\bar{p}^*$ катталик ΔF юзачадаги (12-шакл) ўртача кучланиш дейилади. Энди, ΔF юзачани кичрайтира борамиз, натижада юзача *M* нуқтага яқинлаштириб, унинг қиймати нолга интилади. $\bar{p}^*$ ҳам миқдорини ва йўналишини ўзгартиб, маълум лимитга интилади. Биз унинг лимитдаги қийматини $\bar{p}$ билан белгиласак,

$$\bar{p} = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{P}}{\Delta F} = \frac{d\bar{P}}{dF} \quad (7.2)$$

бўлади. Бу катталик *M* нуқтадаги ҳақиқий кучланиш дейилади. $\bar{p}$ кучланиш юза бирлигидаги ички куч бўлганидан, кг/см^2 ёки кг/мм^2 ҳисобида ўлчанади.

Жисмнинг бирор *M* нуқтасидаги кучланишни топиш учун бу нуқтадан бирор текислик ўтказишимиз керак. Аммо бу *M* нуқта орқали чексиз кўп текислик ўтказиш мумкин. Ҳар қайси текисликка тегишли кесим юзларидаги кучланишларнинг турлича бўлиши табиийдир. Демак, жисмнинг бирор нуқтасидаги кучланишни аниқлашда, бу нуқтанинг қайси кесимдаги юзачага оид эканлигини олдиндан белгилаб қўйиш зарур.

Текшириладиган кесим юзаси бўйича $\bar{p}$ кучланишнинг қандай қонун билан ёйилгани маълум бўлса, (7.2) дан фойдаланиб, ички кучларнинг бош вектори $\bar{P}$ ни аниқлашимиз мумкин, у

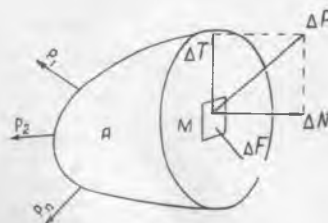
$$\bar{P} = \int_F \bar{p} dF \quad (7.3)$$

кўринишда ёзилади.

Элементар ΔF юзачадаги ички кучларнинг $\Delta \bar{P}$ тенг таъсир этувчиси-ни кесим юзасининг нормали бўйича ва юза бўйича йўналган тузувчиларга ажратиб, уларни мос равишда ΔN ва ΔT деб белгиласак (12-шакл), бу кучларга тегишли ўртача *нормал* ва *тангенциал* кучланишларни топган бўламиз:

$$\sigma^* = \frac{\Delta N}{\Delta F}, \quad \tau^* = \frac{\Delta T}{\Delta F}; \quad (7.4)$$

бунда σ^* — ўртача нормал кучланиш, τ^* — ўртача тангенциал кучланиш



12-шакл.

Буларнинг ҳақиқий қийматини топиш учун (7.4) тенгликларда лимитга ўтиш керак бўлади:

$$\sigma = \lim_{\Delta F} \frac{\Delta N}{\Delta F} = \frac{dN}{dF}, \quad \tau = \lim_{\Delta F} \frac{\Delta T}{\Delta F} = \frac{dT}{dF}. \quad (7.5)$$

Нормал ва тангенциал кучланишлар, кўпинча, чўзувчи ёки сиқувчи ва силжитувчи кучланишлар дейилади. 12-шаклдан қуйидаги муносабатни оламиз:

$$(\Delta P)^2 = (\Delta N)^2 + (\Delta T)^2.$$

Бу тенгликнинг иккала томонини $(\Delta F)^2$ га бўлиб, лимитга ўтсак, p тўла кучланиш билан σ нормал ва τ тангенциал кучланишлар орасидаги муносабатни чиқарамиз:

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}. \quad (7.6)$$

p тўла, σ нормал, τ тангенциал кучланишларнинг ΔP , ΔN , ΔT [каби вектор эканлигини эслатиб ўтамиз. Шунинг учун ҳам σ нормал ва τ тангенциал кучланишлар тўла p кучланишнинг кесим юзи нормалига ва кесим юзига туширилган проекцияларидир.

8-§. Материаллар қаршилиги масалаларини ечиш тартиби

Иншоот қисмлари учун материаллар ва қисмларнинг ўлчамлари шундай танланиши керакки, натижада иншоот қисмлари қўйиладиган кучлар таъсиридан емирилмай қолишгина эмас, балки уларда қолдиқ деформациялар ҳам ҳосил бўлмаслиги керак. Бунинг учун иншоот қисмларининг ўлчамларини танлашда, уларни мустаҳкамлик чегарасига мос қилиб олмаи, балки эҳтиёт чораларини ҳам бирмунча таъмин этадиган қилиб олиш лозим, яъни иншоотнинг ишлаш вақтида унинг қисмларида ҳосил бўладиган энг катта кучланиш қолдиқ деформациялар туғдирувчи кучланишлардан камроқ бўлиши керак.

Материални ишдан чиқарадиган хавфли кучланиш мустаҳкамлик чегараси дейилади. Мустаҳкамлик чегараси σ_b билан белгиланади. Иншоот қисмларини емирилиш хавфидан сақлаш учун, улардаги кучланишларнинг қиймати мустаҳкамлик чегарасининг шу қисм материали учун аниқланган маълум қисмидан ошмаслиги лозим. Иншоот қисмлари ясалган материалдаги зўриқиш мустаҳкамлик чегарасининг маълум қисмига тенг бўлиши керак; мустаҳкамликни таъминловчи бундай кучланиш рухсат этилган кучланиш дейилади. Рухсат этилган кучланиш $[\sigma]$ билан белгиланиб, қуйидагича аниқланади:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_b}{n}, \quad (8.1)$$

бундаги n — эҳтиётлик коэффициенти. Бу эса муайян материал учун рухсат этилган кучланиш ўша материалнинг мустаҳкамлик чегарасидан қанча марта кам бўлишини кўрсатади. У сон иншоот қисмларининг қандай шароитда ишлашига қараб, 2,5 — 10 орасида олинади. Бу ҳақда кейинча мукамалроқ маълумот берамиз. Лойиҳаланаётган иншоотнинг маълум бир қисмида ҳосил бўладиган энг катта кучланишни $\sigma_{\max}$ десак, мазкур қисм ўзининг материал ва ўлчамлари жиҳатидан қўйилган ташқи кучга бардош бериб туриши учун қуйидаги талабни қондириши зарур:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]. \quad (8.2)$$

Бу тенгсизлик мустаҳкамлик шарти дейилади. Иншоот қисмида ҳосил бўладиган максимал ҳақиқий кучланиш мазкур қисм материали учун рухсат этилган кучланишдан ошмаслиги керак. Энди, материаллар қаршилиги масалаларини ечиш панини мазкур мустаҳкамлик шарти асосида тузишимиз мумкин:

1. Лойиҳаланаётган иншоот қисмларига қўйиладиган барча актив ва пасив кучларнинг характерини ва миқдорини аниқлаш.

2. Иншоот қисмларининг бажарадиган вазифасига ва қўйиладиган кучларнинг характерига мос келадиган материалларни танлаш.

3. Иншоот қисмларининг кўндаланг кесими ўлчамлари маълум бўлган чоқларда, уларда ҳосил бўладиган максимал кучланишларни аниқлаш, ёки кўндаланг кесими ўлчамлари билан ҳосил бўладиган кучланишлар орасидаги муносабатни тузиш.

4. Иншоот қисмларида ҳосил бўлган ҳақиқий кучланишни рухсат этилган кучланиш билан солиштириб, мустаҳкамлик шартининг қондирилишига ишонини, ёки мустаҳкамлик шартидан фойдаланиб, иншоот қисмларининг кўндаланг кесими ўлчамларини аниқлаш.

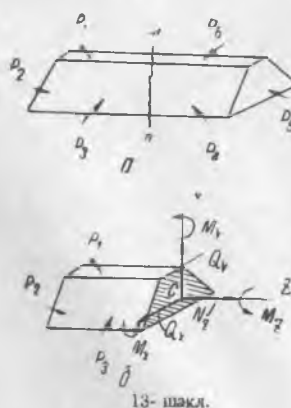
9- §. Иншоот қисмларига қўйиладиган ташқи кучлар таъсирининг асосий кўринишлари ва улар таъсиридан ҳосил бўладиган деформациялар

Ихтиёрий кучлар таъсири остида мувозанатда бўлган призматик стерженни олиб (13- шакл), унинг бирор mn кўндаланг кесимидаги зўриқишларни аниқлаймиз. Призматик стерженнинг ҳар қандай кесимида, шунингдек, биз текшираётган mn кўндаланг кесимида ҳам ички кучларнинг кесим юзи бўйича қандай қонун билан тарқалиши ҳақида ҳозирча ҳеч нарса деёлмаймиз.

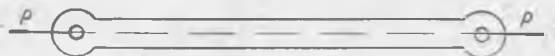
Аммо кесим юзаси бўйича таъсир қилувчи бу ички кучлар кесим марказига қўйилган бир бош вектор билан бир бош моментга келтирилиши мумкин (13- шакл). Бу кучларнинг бош вектори билан моменти текширилаётган қисмга қўйилган ташқи кучларнинг бош вектори билан моментига статик эквивалент бўлади.

Акс ҳолда, мувозанат шарти бажарилмайди. Ички кучлар бош моменти билан бош векторининг тегишли компонентларини аниқлаш мақсадида координата ўқларини қуйидагича танлаймиз: координаталар бошини текширилаётган кесим оғирлик марказида олиб, z ўқини призматик стерженнинг бўй ўқи бўйича йўналтирамиз; y ҳолда xy ўқлари кесим юзасида ётади. Уларни кесимнинг симметрия ўқлари бўйича йўналтирамиз (13- шакл).

P бош вектор ва M бош момент векторларини мазкур ўқлар бўйича тузувчиларга ажратамиз. P бош векторнинг компонентлари Q_x, Q_y, N_z, M ; бош моментнинг компонентлари эса M_x, M_y, M_z бўлсин. Бу олти компонентнинг призматик стерженда қандай деформациялар ҳосил қилишини



текширамыз. Бунинг учун ҳар қайсисининг таъсирини алоҳида текширамыз. Ички кучларнинг N дан бошқа бешта компоненти нолга тенг, деб фараз қилайлик. У ҳолда бу N куч mn кесимни призматик стержень ўқи бўйлаб қўчиришга интилади. Бунинг натижасида стержень чўзилади ёки сиқилади. N куч стержень кўндаланг кесимининг юзасига тик бўлгани учун у нормал куч ёки бўйлама куч дейилади. Иншоот ва машиналарда бўйлама куч таъсирига қаршилиқ кўрсатувчи қисмлар жуда кўп учрайди. Занжир,



14- шакл.

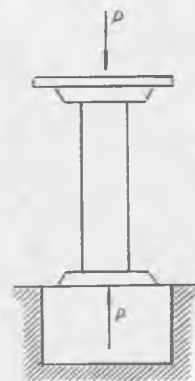
арқон, ферма, стерженьлари, устунлар ва шунга ўхшашлар бунга мисол бўла олади (14 ва 15- шакллар).

Худди шу каби мулоҳазалар билан Q_x ва Q_y тузувчилар кўрсатадиган таъсирни текширамыз. Бу кучлар mn кесим юзасини қўшни кесимга нисбатан стержень ўқида тик йўналишда силжитишга уринади.

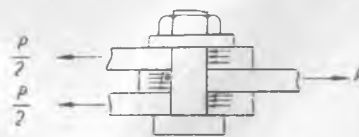
Улар таъсирига тегишли деформациялар силжиш ёки кесилиш деформацияси дейилади. Масалан, иншоот ё машиналарнинг болт ёки парчин мих (заклёпка) воситаси билан уланган қисмларини олсак, уларда болт ва парчин мих силжишга қаршилиқ кўрсатади (16- шакл).

Энди, M бош момент компонентларининг таъсирини текширишга ўтамиз. M_z момент mn кесим юзасини z ўқи атрофида айлантиришга интилади. Бу кесим қўшни кесимга параллел бўлганича, унга нисбатан маълум бурчакка айланади. Худди, шунингдек, стерженьнинг барча кесимлари қўшни кесимга нисбатан маълум бурчакка айланади. Бунинг натижасида стерженьда M_z таъсиридан буралиш деформацияси ҳосил бўлади. M_z момент бурувчи момент дейилади. Масалан, трансмиссия вали ва цилиндрлик пружина симлари буралишга қаршилиқ кўрсатади (17- шакл).

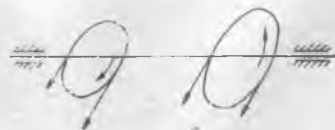
M_x ва M_y компонентлар ўзаро тик текисликларда ётади ва стерженьга бир хил характердаги деформация беради. Масалан, M_x таъсиридан mn кесим ўз юзасида олинган бирор ўқ (x ўқи) атрофида айланишга интилади. Бунинг натижасида, мазкур mn кесим қўшни кесимларга нисбатан оғиб, деформацияга қадар параллел бўлган кесимлар бир-



15- шакл.



16- шакл.



17- шакл.

бири билан маълум бурчак ҳосил қилади. Кўндаланг кесимларнинг оғиши натижасида стерженнинг тўғри чизикли ўқи эгилади. Шунинг учун бундай деформация *эгилиш* дейилади. Балка ва валлар эгилишга қаршилиқ кўрсатади. M_x ва M_y компонентлар *эгувчи моментлар* дейилади.

Ички кучларнинг ҳамма компонентлари кўрсатадиган таъсирларни текшириб чиқдик. Энди бу компонентлар таъсирининг бир-бирига боғлиқ эмаслиги ҳақида гапирамиз. Кучларнинг бир-бирига боғлиқ бўлмай мустақил таъсир этиши ҳақида қаттиқ жисмлар механикасида қабул қилинган принципдан материаллар қаршилигида ҳам кенг фойдаланилади. Бу принципни татбиқ этиш мумкин бўлмайдиган масалалар ҳам учрайди. Ундай масалаларни ечишда бу принципдан воз кечишга тўғри келади.

Призматик стержень кесимидаги ички кучлар, умумий ҳолда, олти компонентдан иборатлигини кўрсатдик. Амалий масалаларни ечишда бу олти компонентнинг ҳаммаси бирданига мавжуд бўлмайди, албатта. Қўпинча, иншоот ва машина қисмлари бу олти компонентдан фақат биттасининг таъсирида бўлади. Агар иншоот қисмлари икки ёки учта ҳар хил куч комбинацияси таъсирида бўлса, улар мураккаб қаршилиқ кўрсатади.

Ички кучларнинг олти компоненти билан уларга тегишли деформациялар орасидаги юқорида келтирилган муносабатларни иншоот қисмларини геометрик ўлчамлари билан боғлаш масаласига ўтамиз.

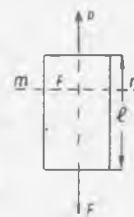
□

II БОБ

ЭЛАСТИКЛИК ЧЕГАРАСИДА ПРИЗМАТИК СТЕРЖЕНЛАРНИНГ ЧЎЗИЛИШИ ВА СИҚИЛИШИ

10-§. Чўзилувчи (сиқилувчи) стержень кўндаланг кесимидаги кучланиш. Ҳисоб тенгламаси

Призматик стержень ўзининг учларига қўйилган ва ўқи бўйлаб йўналган карама-қарши $P = P$ кучлар таъсирида мувозанатда турсин (18-шакл). Бу тарзда қўйилган кучлар таъсиридан призматик стержень чўзилади. Унинг кўндаланг кесимида ҳосил бўладиган зўриқишларни топиш учун, кесини усулидан фойдаланамиз. Стерженни унинг ўқиға тик бирор mn текислик билан фикран икки қисмга ажратиб, бир қисмини ташлаймиз ва бошқа қисмининг мувозанатини текширамиз. Масалан, юқори қисмини ташлаб, пастки қисмини қолдирамиз (19-шакл). mn кўндаланг кесим юзаси бўйича таъсир қилувчи ички кучлар стерженнинг пастки учига қўйилган ташқи P куч билан мувозанатлашади. mn кесим юзасидаги ички кучлар юзаға тик йўналган бўлади. Уларнинг юза бирлигидаги қийматини, яъни кучланишни, σ билан белгилаймиз. У ҳолда мувозанат шарти қуйидагича ёзилади:



18- шакл.



19- шакл.

$$P = \int \sigma dF. \quad (10.1)$$

Агар кучланиш кўндаланг кесим юзаси бўйича текис тарқалган деб қаралса, σ ни интеграл остида чиқаришимиз мумкин. У ҳолда (10.1) қуйидагича ёзилади:

$$P = \sigma \cdot F. \quad (10.2)$$

Бундан чўзилувчи (сиқилувчи) стерженнинг кўндаланг кесимидаги кучланиш учун қуйидагича формула оламиз:

$$\sigma = \frac{P}{F}. \quad (10.3)$$

Призматик стерженни чўзувчи (сиқувчи) куч ва унинг кўндаланг кесим юзи маълум бўлса, ундаги кучланиш (10.3) дан ҳисобланади.

Энди, мустаҳкамлик шarti (8.2) га мувофиқ ҳисоб тенгламасини чиқарамиз. P куч таъсиридан чўзилувчи стерженнинг кўндаланг кесимида ҳосил бўладиган σ кучланиш стерженнинг материали учун белгиланган рухсат этилган кучланиш $[\sigma]$ дан ошмаслиги лозим, яъни

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq [\sigma] \quad (10.4)$$

бўлиши керак. Бу тенглама мустаҳкамлик шarti дейилади. Бундан, P кучга бардош берадиган бўлиши учун стержень кўндаланг кесимининг юзи қандай бўлиши кераклигини аниқлаш мумкин.

$$F \geq \frac{P}{\sigma}. \quad (10.5)$$

Чўзилувчи (сиқилувчи) стерженнинг материали ва кўндаланг кесимининг юзи маълум бўлса, унга қўйилиши мумкин бўлган чўзувчи (сиқувчи) кучнинг миқдорини аниқлаш мумкин:

$$P \leq [\sigma] \cdot F. \quad (10.6)$$

Чўзувчи (сиқувчи) кучларни статика тенгламаларидан аниқлаш мумкин бўлган ҳолларда, тегишли стерженлар учун мустаҳкамлик шартининг бажарилишини (10.4) тенглама ёрдамида текшириш мумкин.

11-§. Чўзилувчи (сиқилувчи) призматик стерженнинг бўйлама ва кўндаланг деформациялари. Пуассон коэффиценти

Призматик стержень бир жинсли параллел толалардан тузилган деб фарз қилинса, қўйилган куч таъсиридан барча толаларни бир хилда чўзилиб (қисқариб), стержень кўндаланг кесимининг юзаси ўз-ўзига параллел равишда кўчади (20-шакл). Натижада унинг l бошланғич узунлиги узайиб, l_1 га айланади. Стерженнинг абсолют чўзилиши

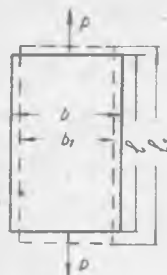
$$\Delta l = l_1 - l \quad (11.1)$$

бўлади. Бу миқдор чўзилиш учун мусбат, сиқилиш учун эса манфий бўлади. Деформацияни стержень узунлигининг қийматига боғламаслик учун узунлик бирлигига тўғри келадиган деформацияни текширамиз. Узунлик бирлигига тўғри келадиган деформация *нисбий деформация*, яъни нисбий чўзилиш ёки нисбий сиқилиш дейилади. Нисбий деформацияни ϵ билан белгиласак, у

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (11.2)$$

кўринишда ёзилади. Стерженнинг узунлиги ва абсолют чўзилиш узунлик бирлигида ўлчангани учун, нисбий чўзилиш ўлчовсиз сон бўлади.

Ўтказилган тажрибалар призматик стержень бўйига чўзилганда унинг кесими сиқилиб, бўйига сиқилганда кўндаланг кесими кенгайишини кўрсатди. Демак, стержень чўзилганда бўйига узайиш билан бирга ингичка торгади (20-шакл).



20-шакл.

Призматик стерженлар кўндаланг кесими ўлчамларининг ўзгариши *кўндаланг деформация* дейилади. Кўндаланг кесим ўлчами олдин b бўлиб, деформациядан кейин b_1 бўлса, кўндаланг деформацияни ϵ_1 деб белгилаб, унинг учун:

$$\epsilon_1 = \frac{b - b_1}{b} \quad (11.3)$$

формулани ҳосил қиламиз. Призматик стержень чўзилса, $\epsilon > 0$, $\epsilon_1 > 0$; сиқилса $\epsilon < 0$, $\epsilon_1 < 0$ бўлади. Тажрибалар шуни кўрсатадики, ϵ_1 кўндаланг деформациянинг ϵ бўйлама деформацияга нисбати ўзгармас сон бўлиб, у фақат стерженнинг материалга боғлиқдир. Бу нисбатнинг абсолют қиймати μ билан белгиланади ва Пуассон коэффициенти деб аталади:

$$\mu = \frac{\epsilon_1}{\epsilon} \quad (11.4)$$

Баъзи материаллар учун Пуассон коэффициентининг қийматлари қуйидаги жадвалда келтирилган. Барча материаллар учун $\mu < 0,5$ бўлишини 38-параграфда кўрсатамиз.

Кўндаланг деформация коэффициенти
қийматлари

Материалнинг номи	μ
Пўлат	0,25—0,33
Мис	0,31—0,34
Бронза	0,32—0,35
Чўч	0,23—0,27
Кўргошин	0,45
Латунь (жез)	0,32—0,42
Алюминий	0,32—0,36
Рух	0,21
Олтин	0,42
Кумуш	0,39
Шини	0,25
Тош	0,16—0,34
Бетон	0,08—0,18
Каучук	0,47
Пўлак	0,00
Филер	0,07
Целлюлоид	0,39
Стеклотекстолит	0,056—0,213

12-§. Гук қонуни

Чўзилувчи (сиқилувчи) стерженларда ҳосил бўладиган физик ҳодисаларни тажрибада кузатиш мумкин. Чўзувчи (сиқувчи) кучланиш $\sigma = \frac{P}{F}$ стерженнинг материал учун аниқланган маълум чегарадан ошмаса стержень эластик хоссасига эга бўлади, яъни стержендан чўзувчи (сиқувчи) куч таъсири олинса, у ўзининг аввалги ҳолига қайтади. Шу чегарага тегишли σ_n кучланиш пропорционаллик чегараси дейилади. Бу чегарагача нисбий чўзилиш ϵ билан чўзувчи (сиқувчи) кучланиш σ ўзгармас нисбатда бўлади:

$$\frac{\sigma}{\epsilon} = E.$$

Бошқача қилиб айтганда, пропорционаллик σ_n чегарасигача кучланиш нисбий чўзилишга пропорционалдир:

$$\sigma = E \cdot \epsilon. \quad (12.1)$$

Бу формула билан ифодаланган хулоса *Гук қонуни* дейилади.

Тажрибалардан чиқарилган (12.1) муносабат материаллар қаршилиги фанининг асосидир.

Пропорционалик коэффициенти E чўзилишдаги (сиқилишдаги) *эластиклик модули дейилади*. σ кучланиш кг/см^2 ҳисобида ўлчанади, ε эса ўлчовсиз сон бўлганидан, E ҳам кучланиш каби кг/см^2 ҳисобида ўлчанади. Агар $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = 1$ бўлса, $\sigma = E$ бўлади. Демак, эластиклик модули E элементининг деформациядан кейинги узунлиги деформациядан олдинги узунлигидан икки баробар катта бўлгандаги ҳолатида ҳосил бўладиган кучланиш экан. Бу коэффициент маълум материал учун қатъий бир қийматга эга бўлиб, унинг қийматлари турли материаллар учун тажриба йўли билан аниқланади. Баъзи материаллар учун E нинг қийматлари қуйидаги жадвалда келтирилган.

Эластиклик модулининг қийматлари

Материалнинг номи	$E, 10^6 \text{ кг/см}^2$ ҳисобида
Пўлат	2,0
Чўян (қул ранг ва оқ чўян)	1,15—1,60
Мис ва унинг қотишмалари (латунъ, бронза)	1,0
Алюминий ва дюралюминий	0,7
Девор, устун ва шу қаннлар	
гранитдан терилган	0,09
оҳак тошдан терилган	0,06
ғиштдан терилган	0,03
Бетон	0,10—0,30
Еғоч: толалари бўйича	0,1
толаларга қўндаланг	0,005
Каучук	0,00008
Целлюлоид	0,0193—0,0174
Текстолит	0,06—0,10
Бакелит	0,02—10,03

Гук қонунидан фойдаланиб, P чўзувчи куч, стерженнинг геометрик ўлчамлари F ва абсолют чўзилиш Δl орасидаги муносабатни топамиз: (11.2) формуладан абсолют чўзилиш:

$$\Delta l = \varepsilon \cdot l \quad (12.2)$$

бўлади. (12.1) дан E нинг қийматини юқоридаги формулага қўямиз:

$$\Delta l = \frac{\sigma}{E} \cdot l$$

σ кучланишини (10.3) дан келтириб қўйсак,

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF} \quad (12.3)$$

формулани ҳосил қиламиз. Демак, призматик стерженнинг чўзилиши (сиқилиши) чўзувчи (сиқувчи) кучга ва стерженнинг узунлигига пропорционал, эластиклик модулига ва стержень қўндаланг кесими юзига тескари пропорционал бўлар экан.

EF миқдор призматик стерженнинг чўзилишдаги (сиқилишдаги) *бикрлиги* дейилади. Бикрлик тушунчасини мойилликнинг тескари маъносида тушуниш лозим, яъни стержень қанчалик чўзилишга мойил бўлса, шунчалик унинг бикрлиги кам бўлади ва аксинча.

МАСАЛАЛАР

1. Доиравий кўндаланг кесимли пўлат стерженнинг диаметри $d = 20$ мм, узунлиги $l = 200$ мм. Стержень $P = 2000$ кг куч билан чўзилади, ундаги чўзувчи кучланиш, абсолют ва нисбий чўзилишлар топилсин. Эластиклик модули $E = 2 \cdot 10^6$ кг/см² ва Пуассон коэффициенти $\mu = 0,3$.

Е ч и ш. Чўзувчи кучланишни топамиз:

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{2000}{\frac{\pi d^2}{4}} \approx 640 \text{ кг/см}^2;$$

абсолют чўзилиш:

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF} = \frac{2000 \cdot 20}{2 \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi d^2}{4}} = 640 \cdot 10^{-5} \text{ см};$$

нисбий чўзилиш:

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} = 320 \cdot 10^{-6}.$$

Кўндаланг нисбий сиқилишни топамиз. Пўлат учун Пуассон коэффициенти:

$$\epsilon_1 = \mu \epsilon = 0,3 \cdot 320 \cdot 10^{-6} = 96 \cdot 10^{-6}.$$

2. Қалинлиги $\delta = 0,6$ см бўлган пўлат полоса $P = 8,4$ т куч билан чўзилади. Мустақкамлик чегараси $\sigma_b = 4200$ кг/см², мустақкамлик коэффициенти $n = 3$; полосанинг эни b топилсин.

Е ч и ш. Олдин рухсат этилган кучланиш $[\sigma]$ ни топамиз:

$$\sigma = \frac{\sigma_b}{n} = 1400 \text{ кг/см}^2.$$

Полосанинг кўндаланг кесим юзи:

$$F \geq \frac{P}{[\sigma]} = 6 \text{ см}^2, \quad \text{бундан } b = \frac{F}{\delta} = 10 \text{ см}.$$

3. Буғ цилиндрининг қопқоғи цилиндрга 8 та болт билан бириктирилган. Цилиндрнинг ички диаметри $D = 50$ см, болтлар учун рухсат этилган кучланиш $[\sigma] = 500$ кг/см² ва цилиндрдаги буғнинг босими $p = 6$ ат; болтларнинг диаметри қандай бўлиши керак?

Е ч и ш. 8 та болтнинг чўзувчи P кучни топамиз:

$$P = p \cdot \frac{\pi D^2}{4} = 6 \cdot \frac{3,14 \cdot 50^2}{4} = 11,775 \text{ т}.$$

Бу кучни 8 та болт қабул қилгани учун ҳисоб тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$P = 8 [\sigma] \frac{\pi d^2}{4}, \quad \text{бундан } d = 19,4 \text{ мм}.$$

4. Диаметри $d = 25$ мм бўлган тортқи P куч билан чўзилганда унда $\sigma = 1000$ кг/см² кучланиш ҳосил бўлади (21-шакл). Тортқига кийгизилган шайбанинг деворга кўрсатадиган босими $P = 14$ кг/см² дан ошмаслиги учун шайба диаметри қандай бўлиши керак?

Е ч и ш. Олдин чўзувчи P кучни аниқтаймиз:

$$P = 1000 \frac{\pi \cdot 2,5^2}{4} = 4906,25 \text{ кг}.$$

Шайбанинг диаметрини қуйидаги шартдан топамиз:

$$\frac{\pi \cdot (D^2 - d^2)}{4} \cdot 14 \geq 4906,25; \quad \text{бундан } D = 213 \text{ мм}.$$

5. Гайка буралганда болтда ҳосил бўладиган зуриқиш 1500 кг (22-шакл). Қўйилган куч $P = 500$ кг. A ва B қисмларнинг бир-бирига кўрсатадиган босими 15 кг/см²; уларнинг тегишиб турган юзлари топилсин.

Е ч и ш. A ва B қисмларнинг бир-бирига кўрсатаётган босими

$$N = 1500 - 5000 = 1000 \text{ кг}.$$

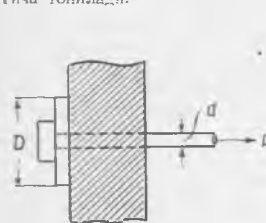
$$\text{Қисмларнинг юзи } F \geq \frac{1000}{15} = 73,4 \text{ см}^2.$$

6. Қўндаланг кесимининг юзи 20 см^2 , узунлиги $0,8 \text{ м}$ бўлган AB стерженга ўқи бўйлаб 1—1, 2—2, 3—3 кесимларига қўйилган $P_1 = 10 \text{ т}$, $P_2 = 24 \text{ т}$, $P_3 = 30 \text{ т}$ кучлар таъсир қилади (23-шакл). Стерженнинг хусусий оғирлигини ҳисобга олмай, турли кесимларидаги кучланишларини ва A нуқтасининг кўчишини аниқланг. $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$.

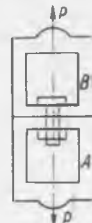
Е ч и ш. 1—1 ва 2—2 оралиғидаги барча кесимларда кучланишлар сиқувчи бўлиб, у

$$\sigma = \frac{P_1}{F} = \frac{10000}{20} = 500 \text{ кг/см}^2.$$

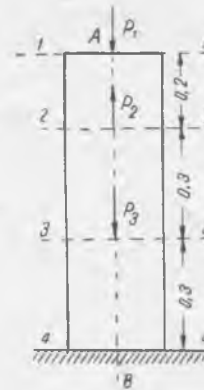
2—2 билан 3—3 оралиғидаги кесимларда кучланишлар чўзувчи бўлиб, у қуйидагича тонилади:



21-шакл.



22-шакл.



23-шакл.

$$\sigma_3 = \frac{P_2 - P_1}{F} = \frac{14000}{20} = 700 \text{ кг/см}^2;$$

3—3 билан 4—4 оралиғидаги кучланишлар сиқувчи бўлиб, у:

$$\sigma_4 = \frac{P_3 + P_1 - P_2}{F} = \frac{16000}{20} = 800 \text{ кг/см}^2$$

дир.

A нуқтасининг кўчишини аниқлаш учун стержень қисмларининг Δl_1 , Δl_2 , Δl_3 деформацияларини ҳисоблаш лозим. Биринчиси:

$$\Delta l_1 = -\frac{P_1 \cdot a}{EF} = -\frac{10000 \cdot 0,2}{2 \cdot 10^6 \cdot 20} = -0,005 \text{ см},$$

иккинчиси:

$$\Delta l_2 = \frac{(P_2 - P_1) \cdot b}{EF} = \frac{14000 \cdot 0,3}{2 \cdot 10^6 \cdot 20} = 0,0105 \text{ см}$$

ва учинчиси:

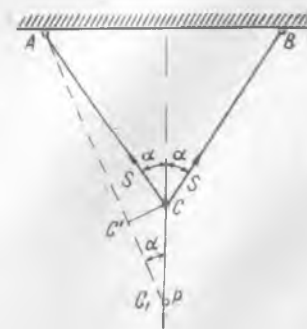
$$\Delta l_3 = -\frac{(P_3 - P_1 - P_2) \cdot c}{EF} = -\frac{16000 \cdot 0,3}{2 \cdot 10^6 \cdot 20} = -0,012 \text{ см бўлади.}$$

A нуқтасининг кўчиши $\Delta l = -0,005 + 0,0105 - 0,012 = -0,0065 \text{ см}$.

7. 24-шаклда кўрсатилган бир хил узунликдаги $AC = BC$ стерженлар A ва B нуқталарга шарнир воситаси билан боғланиб, уларнинг учларини туташтирувчи C шарнирда P юк қўйилган. Стерженларнинг материаллари бир хил бўлиб, эластиклик модули E , қўндаланг кесим юзи F бўлса, C тугунининг кўчиши қанча бўлади?

Е ч и ш. Стерженлар симметрик равишда ўрнатилгани учун C нуқта вертикал йўналишда кўчади. Шаклда AC нинг деформациядан кейинги ҳолати нуқтир чизик билан кўрсатилган. Стерженлардаги S зўриқишларни C нуқтасининг мувозанатда бўлишидан фойдаланиб топамиз:

$$S = \frac{P}{2 \cos \alpha};$$



24-шакл.

АС нинг чҶзилиши:

$$\Delta l = \frac{S \cdot l}{EF} = \frac{Pl}{2EF \cos \alpha}.$$

Деформация кичик бўлгани учун $\angle CC_1C'$ ни α деб олишимиз мумкин. Шунинг учун, С нуқтанинг кучишнни δ десак,

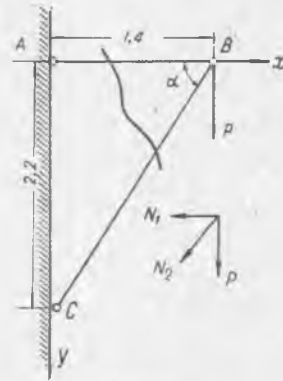
$$\delta = \frac{\Delta l}{\cos \alpha} = \frac{Pl}{2EF \cos^2 \alpha} \quad \text{бўлади.}$$

8. Узунлиги $l = 4$ м, қўндаланг кесимининг юзи $F = 20$ см² бўлган пўлат стержень юқори учидан вертикал ҳолатда бириктириб қўйилган (25-шакл). Пастки учидан полгача бўлган оралик $\delta = 0,2$ см. Стерженьнинг ўртасига қўйилган ва унинг ўқи бўйлаб таъсир қилувчи P кучнинг қандай қийматида пастки учи чолга эркин равишда уринади? Стерженьнинг юқори ва пастки қисмларида шу куч таъсиридан ҳосил бўладиган кучланишлар ҳам топилсин.

Е чи ш. Стерженьнинг фақат юқори қисми чҶзилади, холос. У чҶзилиши Δl десак, масала шартига мувофиқ: $\Delta l = \delta$; бундан $P = \frac{2EF}{l} \delta = 40000$ кг; юқори қисмидаги кучланиш $\sigma = 2000$ кг/см², пастки қисмидаги кучланиш $\sigma = 0$.



25-шакл.



26-шакл.

9. АВ ва ВС стерженьлар 26-шаклда кўрсатилган тарзда шарнир воситаси билан туташтирилиб, В шарнирга P юк қўйилган. АВ стержень пўлатдан бўлиб, ВС эса ёғочдандир. Пўлат стерженьнинг қўндаланг кесими $F_1 = 6$ см², рухсат этилган кучланиши эса $[\sigma] = 1400$ кг/см². Ёғоч стерженьнинг қўндаланг кесим юзи $F_2 = 300$ см² бўлиб, чҶзилишга рухсат этилган кучланиши $[\sigma] = 80$ кг/см², сиқилишга рухсат этилган кучланиш эса $[\sigma] = 35$ кг/см². Қўйилиши мумкин бўлган P куч аниқлансин.

Е чи ш. Боғланишнинг тури ва кўпнинг қўйилиш шarti иккала стержень ҳам бўйлама зўриқиш таъсирда бўлишини кўрсатади. Шунинг учун В шарнирнинг мувозанат шартидан АВ ва ВС даги зўриқишларни топамиз. Уларни мос равишда N_1 ва N_2 деб белгиласак.

$$\begin{aligned} \Sigma X &= -N_1 - N_2 \cos \alpha = 0 & \cos \alpha &= 0,538; & \sin \alpha &= 0,845; \\ \Sigma Y &= P + N_2 \sin \alpha = 0; \\ N_2 &= -\frac{P}{0,845}; & N_1 &= P \frac{0,538}{0,845} & N_1 &= 0,637 \cdot P; & N_2 &= -1,18 \cdot P \end{aligned}$$

бўлади.

Бундан кўрампзки, АВ стержень чҶзилади, ВС эса сиқилади. Пўлат стерженьнинг мустаҳкамлик шартидан:

$$\sigma = \frac{N_1}{F_1} = \frac{0,637 \cdot P}{6} < 1400; \quad P = 13200 \text{ кг.}$$

Ёғоч стерженнинг мустаҳкамлик шартидан:

$$\sigma = \frac{N_x}{F_x} = -\frac{1,18 \cdot P}{300} < -35; \quad P = 8850 \text{ кг.}$$

Демак, рухсат этилган юк ВС стерженнинг мустаҳкамлиги шартидан аниқланар экан.
10. О нуктага шарнир воситаси билан бириктирилган балканинг АВ тиргагида ҳосил

бўладиган кучланиш топилсин (27-шакл). Балкага қўйилган юк $q_x = q \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)$ парабола

қонуни билан ўзгаради. Тиргакнинг ўлчамлари: $l = 4 \text{ м}$; $h = 1,8 \text{ м}$; қиялик бурчаги $\alpha = 30^\circ$; юк $q = 120 \text{ кг/м}$; тиргакнинг қундаланг кесим юзи $F = 10 \text{ см}^2$.

Е ч и ш. Балканинг мувозанат тенгламасини тузамиз. Бунинг учун балкага қўйилган барча кучларнинг О нуктага нисбатан олинган моментлари йиғиндисини нолга тенглаштирамиз:

$$\int_0^l q_x \cdot x dx - N h \cos \alpha = 0; \text{ бундан } N = \frac{q l^2}{4h \cos \alpha};$$

энди тиргакдаги кучланишни аниқлаш қийин эмас:

$$\sigma = \frac{q l^2}{4h F \cos \alpha} \approx 1200 \text{ кг/см}^2.$$

11. Қаршилик кўрсатувчи мухитга ўрилатилган АВ стерженни суғуриб олишда унинг А учига қўйилган Р куч ишқаланиш кучини енгади (28-шакл, а). Ишқаланиш кучи стерженнинг узунлиги бўйича масофага пропорционал қонун билан ўзгариб, В учига ноль, А учига эса q_0 га тенгдир. Стержень бўйича ишқаланиш кучи, нормал зуриқиш, нисбий чўзилиш ва абсолют чўзилишнинг қанчали қонун билан ўзгариши топилсин ва уларнинг графиклари ясалсин. Берилишига кура F , E , P ва l маълум.

Е ч и ш. Стерженни мухит таъсиридан қутқазиб, унинг таъсирини тегишли кучлар билан алмаштирамиз (28-шакл, а). Масала шартига мувофиқ, ишқаланиш кучи $q_x = q_0 \frac{x}{l}$ қонуни билан ўзгаради.

Мувозанат шартидан:

$$2 \int_0^l q_x dx = P; \quad q_0 = \frac{P}{l}.$$

Демак,

$$q_x = \frac{P}{l^2} x$$

яъни ишқаланиш кучи тўғри чизиқли қонун билан ўзгаради (28-шакл, d). Стержендан ажратилган dx элементнинг мувозанатидан

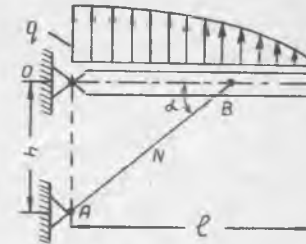
$\frac{dN}{dx} = 2q_x = \frac{2P}{l^2} x$ тенгламани оламиз, буни интегралласак,

$$N = \frac{Px^2}{l^2}$$

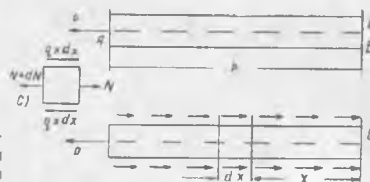
келиб чиқади. Демак, қундаланг кесимдаги нормал зуриқиш параболик қонунда ўзгарад экан (28-шакл, e).

Нисбий чўзилиш:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{N_x}{EF} = \frac{Px^2}{EF l^2}.$$



27-шакл.



28-шакл.

Бу ҳам параболик қонун билан ўзгарар экан (28- шакл, f).
Ажратилган чексиз кичик элементнинг (28- шакл, c) абсолют қўзилиши

$$d(\Delta l) = \epsilon \cdot dx \frac{Px}{EF^2} dx$$

булади. Интегралласак:

$$\Delta l = \frac{Px^3}{3EF^2}$$

тенгламани оламиз. Бу учинчи даражали параболадир, унга тегиншли график 28- шакл, q да кўрсатилган.

□

III БОБ

МАТЕРИАЛЛАРНИНГ МУСТАҲКАМЛИГИНИ СИНОВ ЙЎЛИ БИЛАН ЎРГАНИШ

13- §. Материалларни синаш машиналари

Материалларнинг қўзилиши ва сиқилишини синиш учун турли конструкцияли машиналар бор. Улар синалаётган намунада ҳосил бўладиган зўриқишларни етарли даражада аниқ ўлчашига имкон беради. Деформация эса синов машинасига ўрнатилган махсус механизмлар ёки синов машиналари таркибига кирмайдиган алоҳида асбоблар воситаси билан ўлчанади. Ҳозирги замон синов машиналари синалаётган намунадаги зўриқишларни бир неча минг тоннага қадар етказа олади. Бу тарздаги машиналарда намуналарни синаш билан бирга, иншоот қисмларини асли катталигида ҳам синаш мумкин. Лаборатория шаронтида кичикроқ қувватга эга бўлган машиналар ишлатилиб, улардан турли материалларнинг намуналарини синаш учун фойдаланилади. Синов лабораторияларида кўпинча синалаётган намунага 5 тоннадан 500 тоннагача зўриқиш берадиган синов машиналари ишлатилади. Бу синов машиналари гидравлик ёки механик равишда ҳаракатга келтирилади. Сиқилишга синалувчи намуналар сиқилиш қобилияти 5000 тоннагача бўлган гидравлик пресслар воситаси билан синалади. Кўпинча, синов лабораторияларида учратиладиган машиналар пшанг (ричаг) асосида ишлайдиган машиналардан иборат бўлади. Ана шу тур машинанинг тузилиши ўстида қисқача тўхтаб ўтамиз.

Пшангли синов машинасида посангли тебрангич (маятник) бўлиб, қўзилишга синалаётган намунада 50 тоннагача зўриқиш ҳосил қила олади. Бу типдаги машиналар машинасозлик заводларимизда чиқарилади.

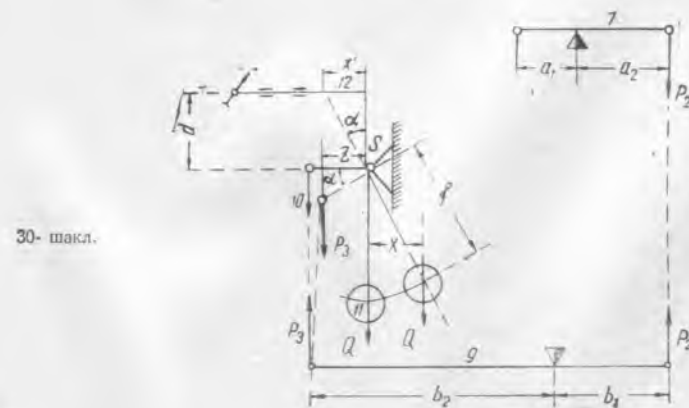
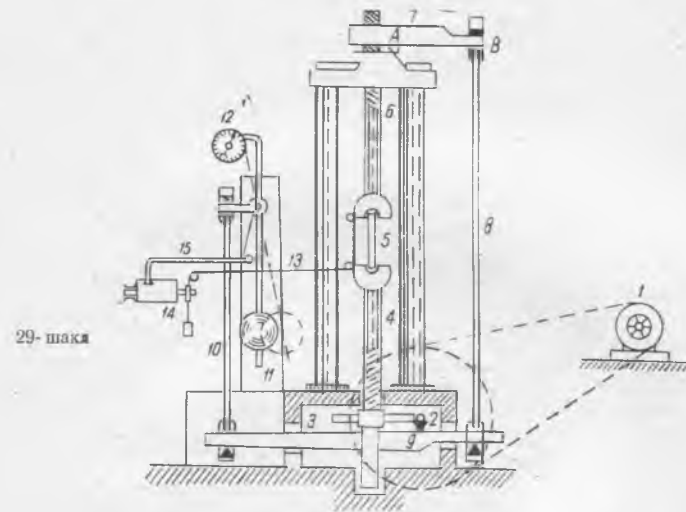
Бу типдаги машина 29- шаклда кўрсатилган. Машина электр мотори (1) воситаси билан юргизилади. Ҳаракат электр моторидан 2 червяк ва 3 тишли гилдирак орқали 4 стерженга берилади ва 4 стержень учигади тутқичга ўрнатилган 5 намунани пастга тортади. Юқоридаги 6 стержень винт воситаси билан 7 пшангга туташтирилган. 7 пшанг машинанинг асосидаги А нуқтага тиралиб, В нуқтада 8 тортқига шарнир воситаси билан боғланган. Бу 8 тортқи, ўз навбатида, машинанинг пастигади 9 пшанга шарнир воситаси билан туташтирилган. Бу 9 пшанг 10 тортқи билан ҳам шарнир воситасида туташтирилган, 10 тортқи эса 11 тебрэнгич билан шарнир воситасида туташтирилган. 4 винт пастга қараб қўзғалганда, намуна қўзилиб, 6 стержень пасаяди, натижада 7—8—9—10 шарнирли стерженлар системаси

ҳаракатланади; ниҳоят 11 тебрангич бирор бурчакка оғиб, бутун системани мувозанатлаштиради. 30- шаклда машинанинг пшанглар системаси схематик равишда тасвирланган. Намунага P_1 зўриқиш берилган деб фараз қилайлик. Бу зўриқиш 7 пшанг орқали 8 тортқини P_2 зўриқиш билан чўзади. Унинг қийматини 7 пшангнинг мувозанатидан топамиз:

$$P_2 = P_1 \frac{a_1}{a_2}. \quad (13.1)$$

Бу зўриқиш пастки пшанг орқали 10 тортқини P_3 куч билан чўзади:

$$P_3 = P_1 \frac{a_1 \cdot b_1}{a_2 \cdot b_2}. \quad (13.2)$$



S шарнирга нисбатан P_3 кучдан олинган момент, оққан тебрангич оғирлиги Q нинг моменти билан мувозанатлашади, яъни:

$$Qx = P_3 \cdot z.$$

Бунда x ва z елкалар ўзгарувчи узунлик бўлиб, тебрангичнинг оғиш бурчаги α га боғлиқдир. P_3 нинг қийматини (13.2) дан кейинги муносабатга қўйиб, қуйидаги тенгламани оламыз:

$$Qx = P_1 \frac{a_1 b_1}{a_2 b_2} z. \quad (13.3)$$

Бу тенгламадан намунани чўзувчи P зўриқишни топамиз:

$$P_1 = Q \frac{a_2 b_2}{a_1 b_1} \cdot \frac{x}{z} \quad (13.4)$$

Машина шундай тузилганки, тебрангичнинг юқори учи тегиб турадиган 12 стерженча билан S шарнирнинг оралиғи ҳамма вақт ўзгармасдан қолаверадди. 12 стержень ҳамма вақт горизонтал ҳолатда йўналтирувчи бўйлаб сирпаниши мумкин. У ўзининг ҳаракатида кучни ҳисоблайдиган шкала стрелкасига бириктирилган махсус гилдиракка айланма ҳаракат беради. 30-шаклдан, x билан z ни елка (c_1) ва тебрангич узунлиги (l) оркали қуйидагича ифдалаш мумкин:

$$\begin{aligned} z &= c_1 \cos \alpha, \\ x &= l \sin \alpha, \\ \frac{x}{z} &= \frac{l}{c_1} \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

Шу 30-шаклдан

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x'}{d}$$

муносабатни ҳам ёзишимиз мумкин. Топилган қийматларни (13.4) га қўйсак, P_1 учун қуйидаги ифодани ҳосил қиламыз:

$$P_1 = Q \frac{a_2 b_2}{a_1 b_1} \cdot \frac{l}{c_1} \cdot \frac{x'}{d}. \quad (13.5)$$

Бу тенглама P_1 куч билан x' кўчиш орасидаги оддий муносабатдир. Бу муносабатдан фойдаланиб, чўзувчи кучни кўрсатувчи шкаланинг даражалари аниқланади.

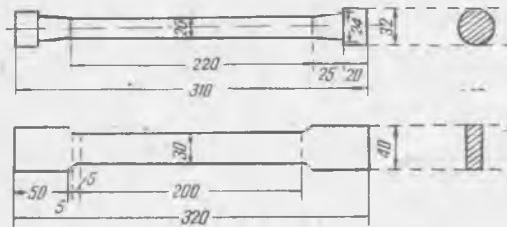
Бошқа типдаги синов машиналари учун ҳам (13.5) каби муносабатларни чиқариш мумкин. Қўлингча, синов машиналарига, зўриқишни белгилловчи шкаладан ташқари, кучланиш билан тегинчи, деформация орасидаги муносабат графигини автоматик равишда чизадиган асбоб ҳам ўрнатилган бўлади. (29-шаклда тасвирланган машинадаги 14 цилиндрга миллиметрли қоғоз уралади.) Бу ҳақдаги мулоҳазалар 15-параграфда берилади.

14-§. Намунанинг шакли. Синов натижаларига намуна шаклининг ва узунлигининг таъсири

Синалаётган намуна, одатда, цилиндрик шаклда тайёрланади. Цилиндрик шаклда тайёрлашнинг иложи бўлмаганда, текис шаклда тайёрланади. 31-шаклда цилиндрик ва текис нормал намуналар тасвирланган.

Ҳамма ўлчамлар намунанинг ўрта қисмидан олинади, яъни цилиндрик намуна учун 220 мм қўйилган, текис намуна учун эса 200 мм қўйилган ораликдан олинади, чунки намунанинг шу қисмидагина кучланиш кундаланг кесимлар бўйича текис тарқалади. Кучланиш ва деформацияларнинг етарли

даражада бир хилда бўлишини таъминлаш учун цилиндрик намуналарнинг боши урта қисми билан конус орқали туташтирилади. Турли материаллар билан ўтказилган тажрибалар узилишга кўрсатадиган қаршиликнинг синалаётган намуна узунлигига боғлиқ эмаслигини тасдиқлайди. Намуналарнинг кўндаланг кесим юзаси қандай шаклда бўлмасин, юзи баробар бўлса, уларнинг вақтли қаршилиги ҳам бирдек бўлади. Синалаётган намунанинг мустаҳ-



31-шакл

камлиги унинг кўндаланг кесими юзига пропорционаллиги ўтказилган тажрибалар натижасида тасдиқланади. Ўтказилган тажрибалар шуни кўрсатадики, тажриба натижаларини фақат геометрик ўхшаш намуналар учунгина солиштириш мумкин. Бундай намуналарда узувчи юк уларнинг ўхшаш ўлчамларининг квадратига пропорционал бўлади, яъни узувчи кўчланиш бир хилда бўлади. Кўчланишларнинг тенглиги тегишли нисбий чўзилишларнинг тенглигига келтиради. Нисбий кўндаланг сиқилишлар ҳам тенг бўлади. Умуман, намуналар деформацияланган ҳолатда ҳам ўхшаш бўлади.

Нормал намунани цилиндрик шаклда тайёрлаб, синалаётган қисмининг узунлиги (l) билан диаметри (d) маълум муносабатда олинади. СССРда $l = 10 \cdot d$ деб қабул қилинган. Кейинги вақтларда калта намуналар учун $l = 4 \cdot d$ ёки $l = 5 \cdot d$ олишга ҳаракат қилинмоқда.

Тўғри тўртбурчак шаклидаги кўндаланг кесимли текис намунани синашга тўғри келса, унинг узунлиги (l) ни шундай танлаш лозимки, чиққан натижаларни нормал намуна натижалари билан солиштириш мумкин бўлсин. Текис намунанинг кўндаланг кесим юзи F бўлса, шунга тенг юзли доиравий намуна кўндаланг кесимининг диаметри қуйидагича аниқланади:

$$d = \sqrt{\frac{4F}{\pi}}. \quad (14.1)$$

Бу турдаги намунанинг синаладиган қисми узунлиги қуйидагича бўлади:

$$l = 10 \cdot d = 10 \sqrt{\frac{4F}{\pi}} = 11,3 \sqrt{F}. \quad (14.2)$$

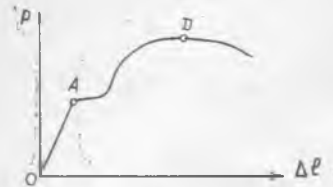
Бу формуладан кўндаланг кесим юзи F бўлган текис намуналарнинг синовда иштирок этадиган узунлиги аниқланади.

15-§. Чўзилиш диаграммаси

Синов машиналарига тажрибанинг боришини тасвирловчи диаграммани автоматик равишда чизадиган махсус асбоблар ўрнатилган бўлади. Масалан, 13-параграфдаги 29-шаклда тасвирланган синов машинасида чўзилиш диаграммаси 14 цилиндрга ўралган қозога чизилади. Намуна чўзилганда 13 ил

тортилиб, цилиндрни айлантиради; демак, цилиндрнинг айланиши деформацияга боғлиқдир.

Диаграмма чизадиган 15 стерженга ўрнатилган қалам 11 тебрангичга боғланган бўлиб, тебрангич оғиши билан қалам цилиндрнинг ясовчиси бўйлаб қўзғалади. Бунинг натижасида цилиндрга ўралган қоғозда чўзилиш диаграммаси чизилади. Бу диаграмма Δl абсолют чўзилиш билан P чўзувчи куч орасидаги муносабатни тасвирлайди (32-шакл). Δl абсолют чўзилиш ϵ нисбий чўзилиш билан, P чўзувчи куч σ кучланиш билан туғри пропорционаллик муносабатида бўлганидан, яъни:



32-шакл.

$$\Delta l = \epsilon \cdot l;$$

$$P = \sigma \cdot F$$

бўлганидан Δl ва P учун чизилган диаграмма ϵ ва σ учун чизиладиган диаграммадан фақат абсцисса ва ординатларнинг масштаби билан фарқ қилади. P кучни намунанинг бошланғич қўндаланг кесим юзи F га, абсолют чўзилиш Δl ни эса намунанинг бошланғич узунлиги l га бўлиб, тузилган диаграмма—кучланишлар диаграммаси, намунанинг геометрик ўлчамларидан мустасно бўлгани учун, синов вақтида рўй берадиган физик ҳодисаларни яққол тасвирлайди. 33-шаклда кучланишлар диаграммаси тасвирланган. Ушундай чизилганки, тажрибанинг турли ҳолатларига тегишли абсцисса ва ординатлар ϵ ва σ нинг қийматларини ифодалайди. Тажриба вақтида P чўзувчи кучининг маълум интервалдаги қиймати ҳисоблаб ва тегишли Δl чўзилишини ўлчаб, уларни маълум жадвалда қайд қилиш лозим. Бу жадвалдаги P ва Δl нинг қийматларидан фойдаланиб, тегишли σ ва ϵ нинг жадвалини тузиш мумкин. Бу тарздаги ҳисобларни ойдинлаштириш учун қуйидаги А ва В жадвалларда цилиндрик нормал пўлат намунани синашдан олинган маълумотлар келтирилган (намунанинг синаладиган қисми узунлиги $l = 220$ мм, $d = 10$ мм):

А жадвал

Тартиб №	P юк (кг ҳисобида)	Δl абсолют чўзилиш (мм ҳисобида)	Тартиб №	σ кучланиш (кг/см ² ҳисобида)	ϵ нисбий чўзилиш	$\frac{\sigma}{\epsilon} = E$ (кг/см ² ҳисобида)
1	157	0,020	1	2000	0,000091	2190000
2	393	0,055	2	500	0,000250	2000000
3	628	0,085	3	800	0,000380	2070000
4	864	0,117	4	1100	0,00053	2070000
5	1180	0,165	5	1500	0,00075	2000000
6	1410	0,188	6	1800	0,00085	2120000
7	1780	0,233	7	2200	0,00116	2070000
8	1960	0,289	8	2500	0,00131	1910000
9	2200	0,409	9	2800	0,00186	1500000
10	2360	1,474	10	3000	0,0067	447000
11	2510	4,048	11	3200	0,0183	175000
12	2670	8,008	12	3400	0,0363	93500
13	2830	11,890	13	3600	0,0540	66500
14	2980	17,250	14	3800	0,0785	48300
15	3150	46,200	15	4000	0,2100	18100
16	2980	—				

В жадвал

33-шаклда кўрсатилган диаграмма шу жадваллардаги рақамлар асосида тузилган.

Юмшоқ пўлатдан тайёрланган намуначи синаш натижасида тузилган диаграмманинг характерли нуқталари устида тўхталиб ўтамиз. Аввал, диаграммадан қўрамизки, кучланиш маълум миқдорга етгунча, σ билан ϵ ўртасидаги муносабат OA тўғри чизик билан тасвирланади, яъни σ кучланиш ϵ нисбий чўзилишга тўғри пропорционал бўлади:

$$\sigma = E\epsilon.$$

Бу чегарада Гук қонунининг тўғрилигини кўрамиз. A нуқтага тегишли кучланиш *пропорционаллик чегараси* дейилади. Биз текширган ҳолда, пропорционаллик чегараси

$$\sigma_n \cong 2200 \text{ кг/см}^2$$

бўлади.

$E = \frac{\sigma}{\epsilon}$ эластиклик модули диаграммадаги тўғри чизикдан иборат бўлган OA қисм оғиш бурчагининг тангенсига пропорционал эканлиги шаклдан кўриниб турибди, яъни:

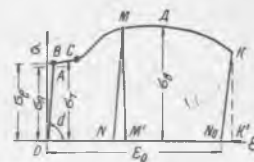
$$E = \frac{m}{n} \operatorname{tg} \alpha; \quad (15.1)$$

m — диаграмманинг ордината масштаби, n — абсцисса масштаби.

A нуқтадан кейин диаграмма эгри чизик билан тасвирланиб, кучланиш деформацияга пропорционал бўлмайди. A нуқтадан озгина юқорида B нуқта туради. Бу нуқтага тегишли кучланиш *эластиклик чегараси* дейилади. Эластиклик чегарасидан кейин, материал ўзининг эластиклик хусусиятини йўқота бошлайди. Бу чегарадан кейин, намунадан куч таъсири олинса, намунадаги деформация бутунлай йўқолиб кетмай, унинг маълум бир қисми сақланиб қолади. U қолдиқ деформация дейилади. A ва B нуқталар бир-бирига жуда яқин бўлганидан, одатда, бу нуқталарнинг фарқига ҳамма вақт ҳам эътибор берилмавермайди. Чунки уларнинг диаграммадаги ҳолатларини аниқлаш қийин бўлади. Аниқ ўлчашлар намуна материалининг мутлақ бир жинсли бўлмаслиги натижасида диаграмманинг OA қисмидаги нуқталари катъий тўғри чизикда ётмаслигини кўрсатади. Қисман шу сабабли, намунадан «пропорционаллик чегарасида» куч таъсири олинганда бир оз бўлса-да, нолдан фарқланадиган қолдиқ деформация мавжуд бўлади. Шунинг учун ҳам, одатда, фақат техник пропорционаллик чегараси аниқланади. Бу чегара шартли бўлиб, қолдиқ деформация олдиндан белгиланган маълум миқдордан (масалан, қолдиқ деформация $0,001\%$ ёки $0,002\%$ дан ошмаса), кучланиш ва деформация шу чегарадан ошмаган деб ҳисобланади.

Диаграмманинг кейинги характерли нуқтаси C бўлиб, бу нуқтага тегишли кучланиш *оқиш чегараси* дейилади. Бу C нуқтага эришиш олдида, диаграмманинг эгилиши кескин ўзгариб, кейин абсцисса ўқига деярли параллел бўлади. Бу вақтда, синалаётган материал эриган модда каби оқаётгандай чўзилади. Кучланиш сезиларли даражада ўзгармайди, чўзилиш эса бу чегарага эришуви олдидаги чўзилишга қараганда тўсатдан ошиб кетади.

Синалаётган намунанинг сирти жуда силлиқ қилиб тайёрланади. Намунанинг силлиқ сирти оқиш чегарасида жиралашиб, чизиклар билан қопланади. Бу чизиклар намуна ўқига тахминан 45° га яқин бурчаклар остида қия бўлади ва чўзувчи куч орттирилган сари улар калинлаша бориб, шаклда кўрсатилгандек, намуна сиртини икки томонлама қоплай бошлайди.



33-шакл.

(34-шакл). Бу чизикларни энг аввал Чернов ва Людерс деган олимлар топгани учун, улар *Чернов-Людерс чизиклари* дейилади.

Оқиш чегарасидан кейин материалнинг каршилиқ кўрсатиш қобилияти яна ўса бошлайди, яъни материал мустахкамланади. Намунанинг чузилишини давом эттириш учун, чузувчи кучни кўпайтириш керак бўлади.

Диаграмманинг энг юқори нуқтаси D да кучланиш энг катта қийматга эришади, бу кучланиш *мустахкамлик чегараси* дейилади. Бу кучланишга тегишли юк *узувчи юк* деб аталади.

Кучланиш мустахкамлик чегарасига эришиш олдида намунанинг бирор жойида «бўйин» ҳосил бўла бошлайди (35-шакл). Кучланиш мустахкамлик чегарасига эришганда, бўйин ингичкаланади, намуна тезда узилади. Узилиш диаграмманинг D нуқтасига мос келмай, ундан кейинда ётувчи бошқа бир K нуқтага мос келади. Курамизки, D нуқтадан кейин кучланиш озаёиб, деформация жуда тез ўсаётир. Намунадаги кучланиш D нуқтага тегишли қийматга эришганда, унинг каршилиқ кўрсатиш қобилияти тугайди. Бу ҳолда намунадан ташқи куч таъсири олинганда ҳам уни узилишдан сақлаб бўлмайди. D нуқтадан кейин деформация ҳеч қандай кучланишсиз давом этади ва ниҳоят, намуна K нуқтада узилади.

Синашни оқиш чегарасидан кейинда ётувчи бирор M нуқтагача давом эттириб, бу нуқтада намуна юкдан бўшатиlsa, диаграмма чизаётган қалам олдинги юрган йўли билан қайтмасдан, пастга қараб OA чизикқа параллел тўғри чизик билан қайтади. Бу тўғри чизик абсцисса ўқи билан бирор N нуқтада кесинади. ON кесма намунадаги қолдиқ деформацияни тасвир-



34-шакл.

лайди. M нуқтанинг абсцисса ўқидаги проекциясини M' десак, $NM' = \epsilon_e$ намунанинг эластик деформацияси бўлиб, намунадан юк олинганда, бу деформация йўқолади. Агар намунадан юк диаграмманинг A нуқтасидан ёки ундан пастдаги нуқтадан бошлаб олинса, ҳеч қандай қолдиқ деформация ҳосил бўлмас эди. Намуна узилганда диаграмма чизаётган қаламнинг учи K нуқтадан, яна OA га параллел чизик чизиб, N_0 га келиб тўхтаёди. K нинг абсциссадаги проекциясини K' десак, $N_0K' = \epsilon_e$ намуна узилиши биланоқ йўқолган эластик деформацияни тасвирлайди.

Синаш натижасида, материалнинг механик сифатини характерловчи эластиклик модули E дан ташқари қуйидагилар:

1) диаграмманинг тўғри чизикли қисми тугайдиган A га тегишли σ_A кучланиш,

2) намунанинг эластиклик хусусияти лимитини ифодаловчи ва диаграмманинг эгри чизикли қисмида ётувчи эластиклик чегараси B га тегишли σ_e кучланиш,

3) оқиш чегараси C нуқтага тегишли σ_T кучланиш,

4) намунанинг узилиш олдидаги мустахкамлик чегарасига тегишли σ_b кучланиш,

5) намуна узилгандан кейин, ундаги қолдиқ деформация ҳам аниқланади; бу миқдор кўпинча % билан ифодаланади, у материалнинг қанчалик пластик эканлигини ўлчаш учун хизмат қилади ва δ билан белгиланади:

$$\delta = \epsilon_0 \cdot 100\% = \frac{l - l_0}{l_0} \cdot 100\%; \quad (15.2)$$

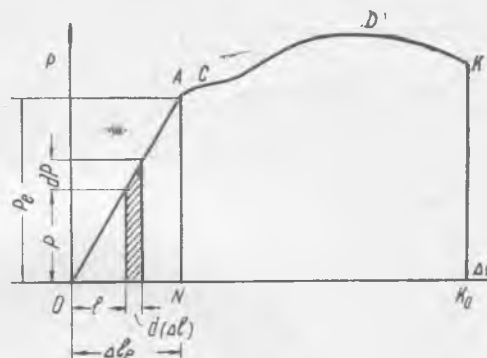
бунда l — намунанинг узилгандан кейинги узунлиги, l_0 — бошланғич узунлиги. Бундан ташқари, материалнинг пластик узилишдаги нисбий ингичкаланиши билан ҳам ифодаланади (35-шакл).

Намунанинг қўндаланг кесим юзи синаш олдида F_0 узилган жойидаги юзи F_1 бўлсин. У ҳолда нисбий ингичкаланиш % ҳисобида қуйидагича аниқланади:

$$\psi = \frac{F_0 - F_1}{F_0} \cdot 100\% . \quad (15.3)$$



35-шакл.



36-шакл.

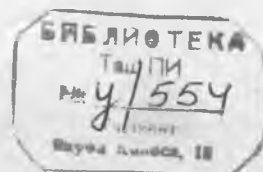
Чўзилиш диаграммасидан фойдаланиб, материалнинг зарбали куч таъсирга қаршилиқ кўрсатиш қобилиятини ифодаловчи яна бир хусусияти устида тўхталиб ўтамиз.

Материални узиш учун қанчалик кўп иш сарфланса, унинг зарбали куч таъсирга қаршилиқ кўрсатиш қобилияти шунча катта бўлади. Шу сабабли материалнинг бирданига қўйиладиган кучга (зарбга) бардош бериш қобилиятини характерловчи миқдор сифатида синалаётган намунанинг эластиклик чегарасигача чўзишга ва бутунлай узишга сарфладиган ишлар олинади. Чўзилиш диаграммасининг юзи маълум масштабда ана шу ишларни ифодалайди (36-шакл).

Чўзилиш диаграммасининг Гук конуни чегарасига тегишли қисмини текшираемиз. Призматик стержень ёки синалаётган намуна ўз ўқи бўйлаб тадрижий равишда ўсаётган куч таъсиридан чўзилади, деб фараз қилайлик. Чўзувчи кучнинг бирор пайтдаги қиймати P , тегишли абсолют чўзилиш Δl бўлсин. P куч dP миқдор ортганда абсолют чўзилиш (Δl) ҳам $d(\Delta l)$ орттирмага эга бўлади; куч P дан $P + dP$ га ўзгарганда қўшимча иш бажаради. Бу ишни dA деб белгиласак, унинг учун

$$dA = (P + dP) d(\Delta l) = Pd(\Delta l) + dPd(\Delta l)$$

ифодасини ҳосил қиламиз. Бу элементар иш штрихланган чексиз кичик юзача билан тасвирланади. Элементар иш ифодасининг иккинчи қисми иш



кинчи тартибдаги чексиз кичик миқдор бўлгани учун, уни ташлаб юборишимиз мумкин. У ҳолда элементар иш ифодаси қуйидагича ёзилади:

$$dA = Pd(\Delta l). \quad (15.4)$$

Стерженни эластиклик чегарасигача чўзиш учун сарфланган тула ишни топиш ниятида, элементар иш ифодасини интеграллаймиз. Стерженнинг O дан қандайдир Δl гача чўзилиши кўзда тутилса, P кучнинг бажарган иши қуйидагича аниқланади:

$$A = \int_0^P Pd(\Delta). \quad (15.5)$$

Гук қонунига мувофиқ:

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF}, \quad d(\Delta l) = \frac{dPl}{EF} = \frac{l}{EF} dP.$$

Интеграллаш чегарасини мувофиқлаштириб, $d(\Delta l)$ нинг қийматини (15.5) га қўйсақ, стерженни эластиклик чегарасига қадар чўзиш учун сарфланган ишнинг ифодаси қуйидагича ёзилади:

$$A = \int_0^P \frac{l}{EF} P dP = \frac{P^2 l}{2EF} = \frac{P \Delta l_e}{2}. \quad (15.6)$$

Чўзилиш диаграммасида бу иш OAN учбурчакнинг юзи билан ифодланади, яъни:

$$\Delta OAN_{\text{юзи}} = \frac{1}{2} P_e \Delta l_e.$$

Чўзувчи кучнинг эластиклик чегарасидаги деформацияда бажарган иши стерженда деформациянинг потенциал энергияси тарзида тўпланади; стержендаги чўзувчи куч таъсири олинганда, унда тўпланган деформация потенциал энергияси стерженни олдинги ҳолига келтириш учун сарфланади. Деформация натижасида (айниқса эластиклик чегарасигача) стержень материалида ҳосил бўладиган термик ва электромагнит хусусиятларнинг ўзгариши жуда кичик бўлгани учун, бу ҳодисаларни эътиборга олмас ҳам бўлади. Турли материалларнинг деформация потенциал энергиясини тўплаш қобилиятини солиштириш учун, унинг ҳажм бирлигидаги қийматини текшириш қулайдир. Деформация потенциал энергиясининг ҳажм бирлигида тўпланган қиймати *солиштирма потенциал энергия* дейилади.

Чўзилиш учун синалаётган намунанинг ёки чўзилаётган стерженнинг ҳажми Fl бўлса, солиштирма потенциал энергия

$$a = \frac{A}{Fl} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{F} \cdot \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{2} \sigma \epsilon = \frac{\sigma^2}{2E} \quad (15.7)$$

кўринишда ёзилади. E билан σ кг/см^2 ҳисобида ўлчангани учун a 1 см^3 да тўпланган ва кг.см ҳисобида ифодаланган энергияга тенг бўлади.

(15.5) дан стерженни узиш учун сарфланган тула иш чўзилиш диаграммасининг $OACDKK_0$ юзи билан ифодаланади деган хулосани чиқара оламиз. Чўзувчи куч билан абсолют чўзилиш орасидаги муносабатнинг аналитик ифодаси эластиклик чегарасидан кейин ҳам, то стерженнинг узилишгача маълум бўлган чоғда, узилиш учун сарфланган иш (15.5) интегралдан аниқланар эди. Бироқ чўзувчи куч билан абсолют чўзилиш орасидаги муносабатнинг аналитик ифодаси эластиклик чегарасидан кейин номаълум бўлгани сабабли, намунани узиш учун сарфланган ишни аналитик равишда ҳисоблаб бўлмайди. Шунинг учун диаграмманинг юзи турли усуллар билан

улчаниб, намунани узиш учун сарфланган иш тақрибий равишда ҳисобланади. Ҳазуви кучни $P_{\max}$, узилиш олдидаги абсолют чўзилишни $\Delta l_{\max}$ десак, буларнинг кўпайтмаси диаграмманинг юзини ўз ичига олган тўғри тўртбурчак юзини ифодалайди. Бу юз диаграмма юзидан бирмунча каттадир. Шунинг учун у ифода бирдан кичик бўлган бирор коэффициентга кўпайтирилса, диаграмманинг ҳақиқий юзи ёки узиш учун сарфланган тўла иш чиқади:

$$A_{\text{узиш}} = \eta \cdot P_{\max} \cdot \Delta l_{\max}; \quad (15.8)$$

η тўлдириш коэффициенти дейилади, бу миқдор маълум бир материал учун ўзгармас бўлиб, тажрибадан аниқланади. Узиш учун сарфланган солиштирма ишни топамиз:

$$\alpha_{\text{узиш}} = \frac{A_{\text{узиш}}}{Fl} = \eta \frac{P_{\max}}{F} \frac{\Delta l_{\max}}{l} = \eta \cdot \sigma_{\text{узиш}} \cdot \delta. \quad (15.9)$$

Узиш учун сарфланган солиштирма иш, маълум даражада, $\sigma_{\max} \cdot \delta$ кўпайтма билан характерланади. Шунинг учун ҳам бу кўпайтма материалнинг зарбали кучга қаршилиқ кўрсатиш қобилиятини характерлайди

16- §. Сино процессига оид баъзи мулоҳазалар ва қўшимча маълумотлар

Юқорида келтирилган чўзилиш диаграммаси пропорционаллик чегараси A га қадар чўзилиш процессини етарли даражада аниқ ифодалайди ва бу чегарада кўндаланг деформация ниҳоят даражада кичик бўлгани учун, уни ҳисобга олмаса ҳам бўлади. Аммо оқиш чегараси C дан кейин, хусусан мустаҳкамлик чегараси D да намунанинг кўндаланг кесими сезиларли даражада ингичкаланиб, уни эътиборга олмаслик янглиш натижаларга олиб боради.

Кўндаланг кесим юзининг ингичкаланиши кўзда тутилганда, ҳақиқий кучланишнинг кузатилаётган чўзувчи кучни намунанинг синов олдидаги кесим юзига бўлиндан чиқарилган кучланишга қараганда бирмунча катта бўлиши табиийдир.

Шунинг учун ҳам ҳақиқий кучланиш, хусусан оқиш чегарасидан кейин, 33- шаклда чўзилиш диаграммасининг ординатаси билан тасвирланган кучланишга қараганда бирмунча катта бўлади. Ҳақиқий ҳолатни тасвирловчи диаграммани тузиш учун, тажриба даврида бир неча ҳолатларга оид чўзувчи куч миқдори билан маълум бир кесим юзини ўлчаб бориш лозим. Ингичкалана бошлаган кесимнинг юзини ўлчаб бориш қулайдир. Булардан фойдаланиб, деформация процессида ҳосил бўладиган ҳақиқий кучланишни ҳисоблаш ва ҳақиқий ҳолатни тасвирловчи диаграммани тузиш мумкин. Тажриба даврининг бирор пайтига оид чўзувчи куч P_t , ингичкалана бошланган кесим юзи эса F_t бўлсин. Намунанинг синаш олдидаги кесим юзини F_0 десак, текширилатган пайтга оид нисбий ингичкаланиш

$$\Psi_t = \frac{F_0 - F_t}{F_0}$$

бўлади. Бу ҳолатга тегишли ҳақиқий кучланиш

$$\sigma_t = \frac{P_t}{F_t}$$

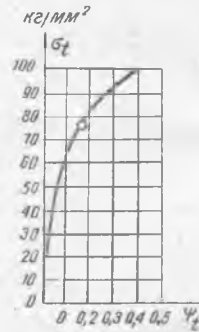
формуладан аниқланади. Абсцисса ўқи бўйлаб Ψ , ордината ўқи бўйлаб σ , қўйилса, ҳақиқий кучланиш диаграммаси ҳосил бўлади (37-шакл).

Бу диаграммадан кўраминики, кучланиш то намуна узилгунча ўсиб боради. Ўсиш олдин тез бўлса-да, куч ўзининг максимал қийматига яқинлашганда бир оз сусаяди. Шаклда кучнинг максимал қийматига оид нуқта белгиланган.

Ўзилиш олдидаги ҳақиқий кесим юзига нисбатан ҳисобланган кучланиш мустаҳкамлик чегараси учун оддий усул билан ҳисобланган кучланишга қараганда бирмунча катта бўлади. Келтирилган мисолда, мустаҳкамлик чегарасига тегишли кучланиш 6770 кг/см^2 га, ўзилиш олдидаги ҳақиқий кучланиш эса 10210 кг/см^2 га тенгдир. Бироқ стерженга қўйиладиган максимал кучнинг миқдорини келтирилган бу кучланиш асосида ҳисоблаш тўғри бўлмайди, чунки намуна узилмасдан бардош бериб турган максимал кучнинг миқдори унинг ўзилиш даврига мос келмасдан, бирмунча олдинги чўзилиш даврига мос келади. Шунинг учун ҳам кучнинг бу миқдори намуна кўндаланг кесимининг синов бошидаги юзига нисбатан олинади ва *мустаҳкамлик чегараси* деб аталади. Кўндаланг кесимнинг ингичкаланиши натижасида, ҳақиқий кучланишнинг ортиши, амалий жиҳатдан олганда, намунани синаш процесси билан боғлиқдир. Ҳақиқий кучланиш диаграммасидан фойдаланиб, жисмнинг механик хоссаларини характерловчи бир неча хулосалар чиқариш мумкин.

Пластик деформацияни давом эттириш учун материалдаги кучланишни тобора кўпайтириш зарур. Пластик деформация ўсган сари материалнинг қаршилиқ кўрсатиш қобилияти ҳам орта боради. Бу ҳодиса материалнинг *пишиқланиши* дейилади. Материалнинг пишиқланиш қобилияти ҳақиқий диаграмма эгри чизиғининг кўтарилиши билан характерланади.

Диаграмманинг белгиланган нуқтасида чўзувчи юк ўзининг энг катта қийматига эришади. Бу нуқтага тегишли кучланиш ҳақиқий мустаҳкамлик чегараси дейилади.



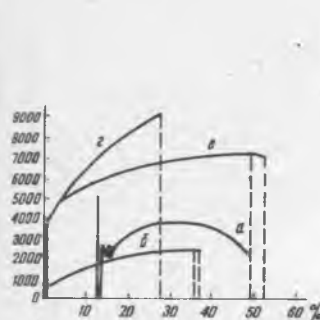
37-шакл.

17-§. Пластик ва мўрт материалларнинг чўзилиш диаграммалари

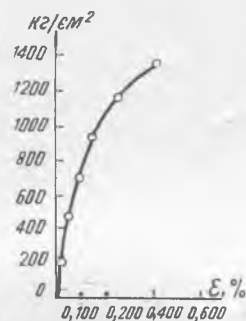
Юқорида биз юмшоқ пўлат типдаги материаллар учун тузилган чўзилиш диаграммаларини текширдик. Бошқа тур пластик материалларнинг чўзилиш диаграммалари ҳам юқорида текширилган диаграммаларга ўхшаган бўлади. Баъзи махсус пўлатларда, мис ва бронза каби материалларнинг диаграммасида оқиш чегараси аниқ кўринмайди. Диаграмманинг тўғри қисми эгри қисми билан бевосита туташади. Мисол учун қўйма пўлат, бронза, никелли пўлат ва марганецли пўлат учун тузилган кучланиш диаграммалари 38-шаклда (а, б, в, г) тасвирланган. Оқиш чегараси аниқ бўлмаган материаллар учун бу чегара, шартли равишда, қолдиқ нисбий чўзилиш миқдори билан белгиланади. Оқиш чегараси аниқ бўлган материал учун бу чегарада қолдиқ нисбий чўзилиш қанча бўлса, шу сон оқиш чегараси аниқ бўлмаган материаллар учун оқиш чегарасини белгилайди. Масалан, юмшоқ пўлат учун, кучланишнинг оқиш чегарасидаги қийматида қолдиқ нисбий

чўзилиш тахминан 0.2% га тенг бўлади. Ана шу сон оқиш чегараси аниқ бўлмаган материалларда ҳам оқиш чегарасини белгилаш учун қабул қилинган

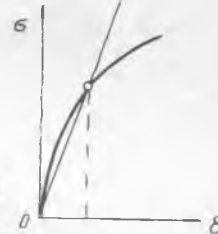
Мўрт материаллар кичик деформациядаёқ емирилади. Чўяндек типик мўрт материал чўзилганда то узилгунча билинар-билинемас даражада деформацияланади. Бундай материаллар бирданига узилади. Узилгандан кейин уларнинг нисбий чўзилиши ва нисбий ингичкаланиши сезилмайдиган даражада кичик бўлади.



38-шакл.



39-шакл.



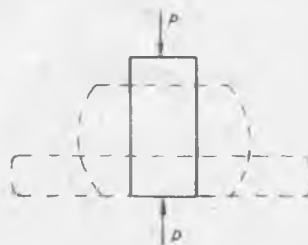
40-шакл.

Чўян учун чўзилиш диаграммаси 39-шаклда тасвирланган. Мўрт материаллар чўзилишга жуда ҳам оз қаршилиқ кўрсатади. Мўрт материалларнинг узилишдаги мустаҳкамлик чегараси пластик материалларникига қараганда бир неча марта кичикдир. Мўрт материаллар учун кучланиш билан нисбий чўзилиш орасидаги муносабат Гук қонунига яхши мос келмайди. Ҳатто кучланишнинг эластиклик чегарасидан пастки қийматларидаёқ диаграмма бир қадар эгилган чизиқ билан тасвирланади. Бу ҳол кучланиш билан тегишли деформация орасида чизиқли муносабатнинг сақланмаганлигини кўрсатади, шунинг учун ҳам бундай материалнинг эластиклик модули E ни ўзгармас сон деб бўлмайди. Чунки (15.1) га мувофиқ, E диаграмма чизигига ўтказилган уринманинг абсциссалар ўқи билан ҳосил қилган бурчаги тангенсига тенг. Бу эса эгри чизиқ учун ўзгарувчи миқдордир. Бироқ иншоотларни ишлатиш даврида, уларнинг қисмларида ҳосил бўладиган кучланишлар Гук қонунидан аниқланадиган кучланишлардан кам фарқланади. Шунинг учун, мўрт материалларнинг эгри чизиқ билан тасвирланган диаграммаси координаталар бошидан ўтказилган ватар билан алмаштирилиб, E ўзгармас сон деб қабул қилинади (40-шакл).

Материалларнинг сиқишга кўрсатадиган қаршилигини тегишришда куб шаклидаги ёки баландлиги диаметридан оз фарқ қиладиган цилиндр шаклидаги намуналардан фойдаланишга тўғри келади. Узун намуналар билан тажриба ўтказилганда, бундай намуналарнинг эгилмай туриб соф сиқишига эришиш жуда қийин бўлади.

Тошларни синашда, куб шаклидаги намуналар ишлатилгди; куб қирраларининг узунлиги, тошларнинг хилига қараб, 3 см дан 10 см гача олинади. Чўян намунаси учун кубнинг қирраси 3 см бўлиши керак. Бетон учун 20 см дан 30 см гача олинади. Ёғоч материалларни синашда кубнинг ўлчамлари 10×10×10 см қилиб олинади.

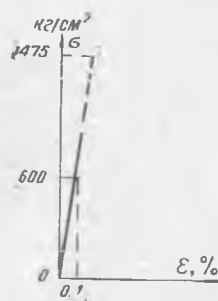
Пластик материаллардан тайёрланган цилиндрик намуна синалганда кучланиш пропорционаллик чегарасидан, ҳатто оқиш чегарасидан ошгандан кейин ҳам, материал ўзини чўзилишда қандай турса, сиқилишда ҳам худди шундай тутади. Пластик материалларнинг пропорционаллик чегараси ва эластиклик коэффиценти чўзилиш ва сиқилиш учун бир хилдир. Пропорционаллик чегарасидан кейин, сезиларли даражада қолдиқ деформация ҳосил бўлади; намунанинг бўйи қисқариб, кўндаланг кесими бир оз кенгаяди. Намунани синаш прессининг товоғи билан намуна асосининг юзаси орасида



41-шакл.



42-шакл.



43-шакл.



44-шакл.



45-шакл.

ҳосил бўладиган ишқаланиш кучлари намуна қирғоқларининг кўндалангига томон деформацияланишига йўл қўймайди. Шунинг учун, намуна синаш натижасида бочкага ўхшаш шаклга киради (41-шакл). Кўндаланг кесим юзи кенгайган сари, деформацияни яна ҳам кўпайтириш учун, сиқувчи юкни ошириб бориш керак. Намунанинг сиқилиши давом эттирилса, у кулчага ўхшаб қолади. Пластик материаллар учун сиқилишдаги типик кучланиш диаграммаси 42-шаклда тасвирланган.

Чўян, тош, бетон каби мўрт материаллар сиқилишда ҳам чўзилишдагидек, жуда оз деформациядаёқ емирилади. 43-шаклда ўлчамлари $10 \times 10 \times 10$ см тош намунаси учун тузилган диаграмма тасвирланган. Пластик ва мўрт материалларнинг сиқилишдаги емирилиш характери турличадир. Пластик материаллар намунасининг сиқилишда кулчага ўхшаб қолиши айтиб ўтилган эди. Тош намунасининг сиқилишдаги емирилиши 44-шаклда кўрса-

тилган. Парчаланган намуна учлари бир-бирига туташтирилган пирамидаларга ўхшайди. Шу шаклда парчаланиш пресс товоқлари билан синалаётган намуна асослари орасида мавжуд бўладиган ишқаланиш кучларига боғлиқдир. Бу ишқаланиш кучлари йўқотилса, масалан, пресс товоқлари юзасига ва намуна асосларига парафин суркалса, намунанинг парчаланиш характери тамоман бошқача бўлади. Бу тарзда синалган тош намунаси сиқувчи кучлар йўналишига параллел ҳолда бир қанча қисмларга ажралиб кетади. Бу ҳолда намунани парчаловчи куч оддий ҳолда сиқилаётган намунани парчаловчи кучга қараганда кичикроқ бўлади. Шунинг учун ҳам сиқилишга синалган материалнинг мустаҳкамлик чегараси маълум даражада шартли миқдордир. Мустаҳкамлик коэффициентини танлашда бу ҳолни кўзда тутиш зарур.

Чўян намунаси худди тош ва бетон намуналари каби парчаланadi. Чўяндан ясалган цилиндрик намунанинг парчаланиши 45-шаклда кўрсатилган. Қўйидаги жадвалда муҳим қурилиш материаллари учун чўзилишдаги ва сиқилишдаги мустаҳкамлик чегарасига оид кучланишлар келтирилган.

Мустаҳкамлик чегаралари (кг/см^2 ҳисобида)

Материалнинг номи	Чўзилиш учун	Сиқилиш учун
Конструкцияларда (кўприklar, биноларда ишлатиладиган) Ст. 3 маркали пулат	3800—4800	—
Машинасозлик пулати (углеродли пулат)	3200—8000	2
Рельс пулати	7000—8000	—
Машинасозликда ишлатиладиган махсус пулатлар	7500—19000	—
Кул ранг чўян	1400—1800	6000—10000
Мис қотчималари (латунь, бронза)	2200—5000	—
Еғоч (қаршай)	8000	4000
Сунъий тошлар	—	100—5000
Бетон	—	50—350
Текстолит	850—1000	—
СВАМ	2600—4800	—

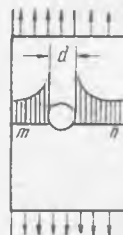
18- §. Пластик ва мўрт материалларнинг механик характеристикаларини таққослаш

Пластик материаллар узилиш олдида анчагина деформацияга эга бўлади. Масалан, юмшоқ пулатнинг узилиш олдидаги чўзилиши 20—25 % га боради.

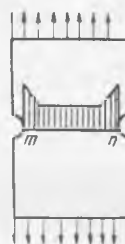
Мўрт материалларнинг емирилиш олдидаги деформацияси жуда оз бўлади. Масалан, чўянинг узилиш олдидаги деформацияси 0,5—0,6 % дан ошмайди. Шу сабабли, пластик материаллар диаграммасининг юзи мўрт материаллар диаграммасининг юзига қараганда анча каттадир. Пластик материалларни емириш учун мўрт материалларни емиришдагига қараганда анча кўп иш сарф қилинади. Шунинг учун ҳам, конструкция элементлари зарбали кучлар таъсирига дуч келадиган бўлса, улар пластик материаллардан ишланади. Мўрт материаллар зарбали куч таъсирига бардош беролмай, жуда тез емирилади. Сиқувчи куч аста секин кўпайтириб берилса, мўрт

материаллар пластик материалларга қараганда бирмунча кўп юкни қабул қила олади. Шунинг учун ҳам, кўпинча иншоот элементларининг фақат сиқилишга ишлайдиган қисмлари мўрт материаллардан ясалади.

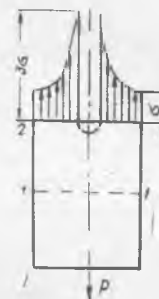
Кўпгина пластик материалларнинг яна бир хусусияти шундаки, улар сиқилиш ва чўзилишга бир хилда қаршилиқ кўрсатади. Мўрт материалларнинг кўпи сиқилишга яхши қаршилиқ кўрсатиб, чўзилишга чидамайди. Бу ҳол материаллар ишлатиш доирасини анчагина чеклайди. Бъъзан, мўрт материалларни чўзилишга ишлайдиган элементлар учун ишлатиш зарурияти туғилган тақдирда, қўшимча тадбирлар кўриш лозим бўлади. Масалан, чўзилишга ишлайдиган бетон элементлари пулат симлар (арматура) билан кучайтирилади.



46- шакл.



47- шакл.



48- шакл.

Мўрт материаллар билан пластик материалларнинг яна бир муҳим фарқи шундаки, улар кучланиш тўпламига турлича сезгирлик кўрсатади. Кучланиш тўплами конструкция элементининг текширилатган қўндаланг кесим юзидagi кичкина бирор участкада ҳосил бўлади. Кесим юзининг кескин ўзгарган жойида ёки ўйилган жойида кучланиш кесимнинг бошқа нуқталаридаги кучланишларга қараганда бир неча марта катта бўлади. 46 ва 47-шаклларда призматик стерженнинг кучланиш тўплами ҳосил бўладиган қўндаланг кесим участкалари кўрсатилган. Тешик ёки ўйик бор жойдан узоқроқ қўндаланг кесимлардаги чўзувчи кучланишлар кесим юзаси бўйича текис тарқалиб, улар $\frac{P}{F}$ га тенг, яъни $\sigma = \frac{P}{F}$ бўлади (масалан, 48-шаклдаги 1—1 кесим). Стерженнинг заифлашган жойидаги 2—2 кесимни олсак, тешик олдидаги нуқталарда ҳосил бўладиган кучланишлар тахминан 3σ га етади. Мазкур кесимнинг бошқа нуқталаридаги кучланишлар худди кесим заифланмагандек, тахминан σ га тенглигича қолади. Бу тарздаги кучланиш тўплами, иншоот қисмларининг тирналган ёки ўйилган ҳар қандай жойида, винт қирқимларида, шпонка учун қолдирилган ариқчалар олдида ҳосил бўлиши мумкин.

Кучланиш тўпламининг максимал қиймати мустаҳкамлик чегарасига тегишли σ кучланишга етмаслиги лозим. Мўрт материалларда оқиш чегараси бўлмайди, улар ҳатто мустаҳкамлик чегарасида ҳам сезиларли даражада деформацияланмайди. Демак, кучланиш тўпламининг максимал қиймати пропорционаллик чегарасидан ўтиши биланоқ мўрт материаллар емирила бошлайди ёки кучланиш тўпланган жойларда дарз кетади. Шунинг учун ҳам кучланиш тўпламига мўрт материаллар бардош бера олмайди. Аксинча, плас-

Муҳим материалларнинг механик хоссалари

	Материал	E кг/см ²	G кг/см ²	μ	Оқши чегараси, кг/см ²	Ўзилишдаги мустаҳкамлик чегараси, кг/см ²	Сиқилишдаги мустаҳкамлик чегараси, кг/см ²	Ўзилиш вақтидаги нисбий ызузилиш, %	Ўзилиш вақтидаги нисбий тоңрайиш, %
Темир на пулат	Чуян	$10 \cdot 10^5$	$3,8 \cdot 10^5$	0,3	—	1200 ÷ 2000	7000 ÷ 8500	—	—
	Куйма пулат	$21,5 \cdot 10^5$	$8,3 \cdot 10^5$	0,3	1800 ÷ 4500	3400 ÷ 8000	1800 ÷ 4500	25 ÷ 8	60 ÷ 15
	Никелли пулат, юмшатилагани	$21,5 \cdot 10^5$	$8,3 \cdot 10^5$	0,3	3500 ÷ 4500	5500 ÷ 6500	3500 ÷ 4500	22 ÷ 18	65 ÷ 55
	Хром ва никелли пулат, тоблангани	$21,5 \cdot 10^5$	$8,3 \cdot 10^5$	0,3	10500 ÷ 11500	11500 ÷ 13500	10500 ÷ 11500	10 ÷ 6	60 ÷ 50
	Пружина пулати, тобланлагани	$21,5 \cdot 10^5$	$8,3 \cdot 10^5$	0,3	12000 ÷ 14000	13500 ÷ 15500	12000 ÷ 14000	8 ÷ 6	40 ÷ 30
Бошқа металлар	Алюминий сими	$7,2 \cdot 10^5$	$2,7 \cdot 10^5$	0,34	500	900 ÷ 1000	—	8 ÷ 13	—
	Қўрошсин	$1,7 \cdot 10^5$	$0,6 \cdot 10^5$	0,45	50 ÷ 300	100 ÷ 500	—	—	—
	Олтин	$8,1 \cdot 10^5$	$2,8 \cdot 10^5$	0,42	1400	—	—	—	—
	Мис	$11,5 \cdot 10^5$	$4,7 \cdot 10^5$	0,34	1200	2200	6000	35 ÷ 38	45 ÷ 50
	Платина	$17,0 \cdot 10^5$	$6,2 \cdot 10^5$	0,39	2600	3400	—	—	—
	Кумуш	$8,1 \cdot 10^5$	$2,9 \cdot 10^5$	0,38	1100	2900	—	—	—
	Рух	$13,0 \cdot 10^5$	—	0,33	1000	2000 ÷ 2500	—	12 ÷ 38	23 ÷ 56
	Қалай	$5,5 \cdot 10^5$	$2,0 \cdot 10^5$	0,33	400	350	—	—	—
	Латунь	$9,0 \cdot 10^5$	$3,5 \cdot 10^5$	0,33	2000	2500	—	—	—
	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Табиий тошлар	Гранит	$2,4 \cdot 10^5$	—	—	—	50 ÷ 80	900 ÷ 2300	—	—
	Базальт	—	—	—	—	1	800 ÷ 4500	—	—
	Оҳактош	$1,9 \cdot 10^5$	—	—	—	15 ÷ 60	700 ÷ 2500	—	—
	Қумтош	$0,63 \cdot 10^5$	—	—	—	25	200 ÷ 2200	—	—
	Мармар	$2,6 \cdot 10^5$	—	—	—	20 ÷ 60	500 ÷ 1500	—	—
Ёғоч	—	$1,75 \cdot 10^5$	—	—	—	1300	300	—	—
	Дуб	$1,05 \cdot 10^5$	—	—	200	1000	350	—	—
	Қора қарағай	$0,95 \cdot 10^5$	—	—	—	750	250	—	—
	Қарағай	$0,93 \cdot 10^5$	—	—	—	800	300	—	—
Бошқа материаллар	Шинша	$7,0 \cdot 10^5$	$2,7 \cdot 10^5$	0,3	250 ÷ 320	350 ÷ 900	6000 ÷ 1200	—	—
	Чарм тасма	1200 ÷ 2200	—	—	—	250 ÷ 350	—	—	—
	Каучук	2 ÷ 80	—	—	150 ÷ 300	500 ÷ 1200	—	—	—

тик материаллар кучланиш тўпламига чидамлироқдир; чунки ундаги максимал кучланиш σ_t оқиш чегарасига тегишли қийматга эришганда, бу кучланиш таъсир қилувчи элементларда деформация ўзича ўсиб, қўшимча кучланиш талаб қилмайди. Чўзувчи кучнинг орттирилишидан ҳосил бўладиган қўшимча кучланиш қўшни элементларда кўпайиб, уларда оқиш процесси бошланганда, кучланиш кесимнинг кейинги элементларига ўтади. Ниҳоят, қўйилган куч орттирилган сари, бутун кесим бўйича кучланиш тенглашиб, оқиш чегарасидаги кучланишга барабар бўлиб қолади (49-шакл а, б, в, г). Пластик материалларнинг оқиш чегарасида узилмаслиги маълум.



49- шакл.

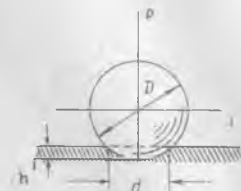
Шундай қилиб, мўрт материаллар кучланиш тўпламига жуда ҳам сезгирдир, пластик материаллар учун эса кучланиш тўпланининг аҳамияти катта эмас.

Кўпинча, конструкция ва машина элементларини монтаж қилишда ёки тиклашда, уларнинг эгрилигини бир қадар тўғрилаш ёки уларни бир оз букиш керак бўлади. Мўрт материалларни бундай қилиш хавфлидир. Чунки болға зарбидан мўрт материаллар дарҳол синади. Аксинча, пластик материаллар катта деформацияланиш қобилиятига эга бўлганидан, бир оз тўғриланганда ёки букилганда болға зарбига бардош беради.

Демак, мўрт материаллар сиқишиш ва чўзилишга бир хилда қаршилиқ кўрсатмайди, зарбали кучлар таъсирига бардош бера олмайди, кучланиш тўпламига жуда сезгир бўлади. Шунинг учун ҳам мўрт материалларни ишлатиш жуда чекланган. Пластик материаллар бу камчиликлардан холи бўлгани учун улардан машина ва конструкция элементлари тайёрлашда кенг қўламда фойдаланилади.

19- §. Қаттиқлик

Материалларнинг механик сифатини аниқлаш учун синов машиналари ва тегишли намуналар бўлиши зарурлиги бизга маълум. Аммо қимматбаҳо синов машиналарининг ҳамиша ҳам мавжуд бўлмаслиги, тегишли намуналарни тайёрлаш имкониятининг чекланганлиги материалларнинг механик сифатини тез аниқлашнинг бошқа усулларини ҳам вужудга келтирди. Бу усуллардан энг қулайи материалларнинг механик сифатини қаттиқлиги асосида аниқлашдир.



50- шакл.

Материалнинг қаттиқлиги унга жуда қаттиқ бошқа бир материалнинг ботиш чуқурлиги билан ўлчанади. Қаттиқликни синаш усулларидан энг кўп қўлланиладигани Бринель томонидан тавсия этилган усул бўлиб, бу усул жуда қаттиқ пўлатдан ишланган шарчани қаттиқлиги синалаётган материал намунасига босишдан иборатдир (50-шакл). Шарчага қўйилган куч олингандан кейин, намуна сиртида шарчанинг изи қолади. Бу из шарча сегменти бўлади. Шарчага қўйилган босувчи кучнинг мазкур сегмент юзига нисбати Бринель

бўйича қаттиқлик сони дейилади. Шарчанинг диаметрини D , шарча сегменти диаметрини d , унинг чуқурлигини h ва босувчи кучни P деб белгиласак, Бринель бўйича қаттиқлик сони

$$H_B = \frac{P}{\pi D h} = \frac{2P}{\pi D (D - \sqrt{D^2 - d^2})} \quad (19.1)$$

формуладан аниқланади. Демак, Бринель бўйича қаттиқлик ҳам H_B мм² ҳисобида ўлчанар экан. Юмшоқ пулат учун бу сон $H_B = 100 - 200$ кг/мм², тобланган қаттиқ пулат учун $H_B = 400 - 850$ кг/мм² гача етиши мумкин. Пулат учун, узилишдаги мустақкамлик чегараси (σ_b) билан Бринель сони орасида қуйидаги эмпирик муносабат белгиланган:

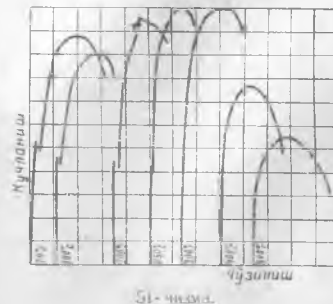
$$\sigma_b \approx 0,36 H_B. \quad (19.2)$$

Бинобарин, пулатнинг мустақкамлигини билиш учун уни узилишга синаб ўтирмасдан, қаттиқлигини аниқлаш билан кифояланса бўлади. Бу усулдан тажрибада кўп фойдаланилади. (19.2) эмпирик муносабатнинг аниқлиги 10 % чегарасидадир.

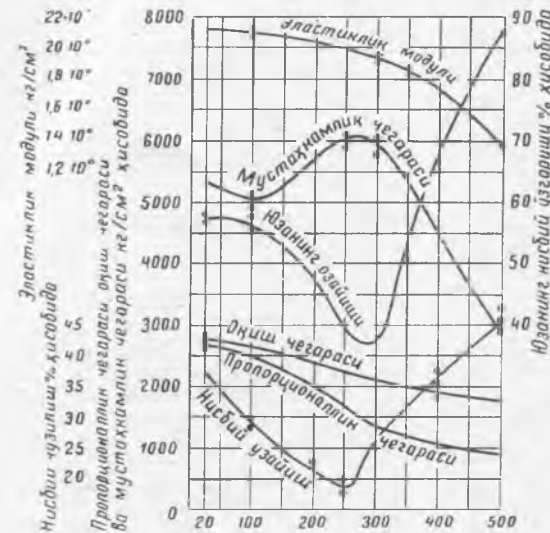
Материалларнинг қаттиқлиги Роквелл ва Виккерс усуллари билан ҳам аниқланади. Роквелл усули олмос конусни ёки жуда қаттиқ пулатдан тайёрланган шарчани синалаётган материал намунасига босишдан иборат. Синалаётган материалнинг қаттиқлиги шу конуснинг ёки шарчанинг намунага ботиш чуқурлиги билан ўлчанади. Виккерс усули олмос пирамидани намунага босишдан иборат. Намунага таъсир эттирилган кучнинг шу намунада қолдирилган ромб изининг юзига нисбати қаттиқликни билдирадиган сондир. Роквелл усулида қаттиқликни характерловчи сон мм ҳисобида ўлчанади. Виккерс билан Бринель усулларида эса бу сон кучланиш ўлчови кг/мм² билан ифодаланади. Аммо қаттиқликнинг қандай усулда ўлчанишидан қатъи назар, турли ўлчовларда ифодаланган сонларни махсус жадваллардан фойдаланиб бир-бирига таққослаш мумкин.

20-§. Материалнинг механик хоссаларига температуранинг таъсири

Қозон трубалари, химиявий машиналарнинг, хусусан реактив двигателларнинг айрим деталлари жуда юқори, масалан, 500°C га етадиган температурада ишлайди. Реактив самолётларнинг двигателларида температура ҳатто 1000°C гача боради. Шу сабабли, юқори температура шароитида ишлайдиган металлларнинг механик хусусиятларини текшириш катта аҳамиятга эга. 51-шаклда углеродли пулатнинг ҳар хил температуралардаги чузилиш диаграммалари келтирилган. Бу диаграммалардан кўрамизки, температура 300 С га етганда оқиш юзачаси мутлақо йўқолиб, диаграмма мис, алюминий диаграммаларига ўхшаб қолган. Температура 400 С дан ошганда, диаграмманинг тўғри чизиқли участкаси йўқолиб, синов оқибати, асосан, чузилиш тезлигига боғлиқ бўлиб қолади. Қўйилган юкнинг қиймати бир хил сақланганда, деформация вақт ўтиши билан ўсади. Бу ҳолда металл ўзича чузилади. Температура 600°C дан ошганда, пулатнинг деформацияга қаршилиги жуда озайиб, унинг сиртида интенсив равишда куюнди ҳосил бўлади.



52-шаклда температура кўтарилиши билан оқиш чегараси, мустаҳкамлик чегараси ва бошқаларнинг ўзгариши тасвирланган. Бу графикдан кўрамизки, температура 250—300°C га етганда, мустаҳкамлик чегараси энг катта қийматга эришади, нисбий чўзилиш эса озаяди. Температура 400°C дан ошадиган бўлса, углеродли пўлат ишлатиш тавсия этилмайди. Бундай температурада углеродли пўлатнинг мустаҳкамлиги жуда паст бўлади. Юқори температура



52-чизма.

шароитида иссиққа чидамли махсус пўлат ишлатиш керак. Махсус пўлатлар жумласига никелли, хромли, ванадийли ва бошқа пўлатлар киради, бундай пўлатлар легирланган пўлат дейилади. Бундай пўлатлар юқори температурада ҳам механик хоссаларини у қадар йўқотмай, қаршилиқ кўрсата олади.

Температура кўтарилган сари эластиклик модули камайиб температура 500°C га борганда, E тахминан 30% озаяди. Пуассон коэффициенти эса 0,5 га яқинлашади 52-шаклда эластиклик модулининг температура кўтарилиши билан ўзгариши тасвирланган.

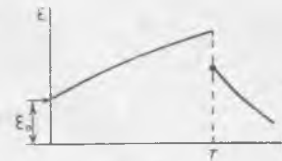
21-§. Кейинги таъсир ва ўзича чўзилувчанлиги

Юқори температурада металлга қўйилган юк ўсмаса ҳам вақт ўтиши билан ундаги деформация ўсиб, металл ўзича чўзилади, деган эдик. Бундай ҳодиса органик материалларда нормал температурада ҳам рўй беради ва кейинги таъсир дейилади. Мазкур процесснинг ички механизми ва ташқи рўй бериши турли материаллар учун турличадир. Бу ҳодисанинг етарли даражада текширилган типик кўринишлари куйидагилардир:

а. Эластиклигининг кейинги таъсири. Резина, ипак толасида (умуман, толлари материалларда) ва шулар каби бир қанча материалларда рўй беради-

ган эластикликнинг кейинги таъсири қуйидагидан иборат: юк қўйилган намунадаги σ кучланиш унга бирданига $\epsilon = \frac{\sigma}{E}$ деформацияни беради, кейин намунага қўйилган юк ўсмаса ҳам, деформацияланиш процесси вақт ўтиши билан давом этаверади. Вақтни абсцисса ўқи бўйлаб, деформацияни ордината ўқи бўйлаб қўйсак, 53-шаклда тасвирланган график ҳосил бўлади. T вақт ўтгандан кейин намунадан куч таъсири олинса, у бирданига ϵ_0 миқдорга қисқаради. Аммо намунанинг қисқариш процесси бу билан тугамайди. Намунадан юк олинган пайтда қолдиқ бўлиб қолган деформация вақт ўтиши билан камайиб, 53-шаклнинг иккинчи қисмида кўрсатилганидек, анча кўп вақт ўтгандан кейин тамом бўлади. Бинобарин, бу эластик деформацияга ўхшайди, аммо эластиклик кечикиб рўй беради.

Эластикликнинг кейинги таъсирини математик жиҳатдан даставвал Максвелл текшириб, бу ҳодисани қуйидаги дифференциал тенглама билан ифодалаган:



53-шакл.

$$\frac{d\sigma}{dt} + \lambda\sigma = E \left(\frac{d\epsilon}{dt} + \mu\epsilon \right); \quad (21.1)$$

бу ерда λ ва μ — тажриба йўли билан аниқланадиган ўзгармас сонлар.

Биз текшираётган ҳолда қўйилган юк намунада ўзгармас кучланиш ҳосил қилади: $\sigma = \text{const}$ бўлади. Шунинг учун Максвелл тенгламаси бирмунча осонлашади:

$$\frac{d\epsilon}{dt} + \mu\epsilon = E \frac{\lambda}{E} \sigma = \lambda\epsilon_0. \quad (21.2)$$

Бу тенглама биринчи тартибли чизикли дифференциал тенглама бўлиб унинг интеграли

$$\epsilon = \epsilon_0 \left[1 + \frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t}) \right] \quad (21.3)$$

кўринишда ёзилади. Дарҳақиқат, 53-шаклдаги график шу тенгламага мосдир.

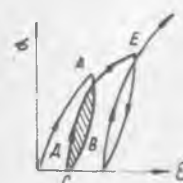
б. Ўзича чўзилувчанлик. Ўзгармас юк қўйилгандан кейин вақт ўтиши билан намунада ҳосил бўладиган ва намунадан юк олингандан кейин ҳам йўқолмайдиган деформация тўплами *ўзича чўзилувчанлик* дейилади. Намунадан юк олинганда, ундаги эластик деформация йўқолиб, ўзича чўзилиш процессида тўпланган деформация қолади. Шунинг учун ҳам ўзича чўзилувчанликни пластикликнинг кейинги таъсири дейиш мумкин.

Пулатда ўзича чўзилиш процесси температура 400°C дан ошганда рўй беради. Машинанинг узоқ вақт давомида юкори температура шароитида ишлайдиган қисмларини ҳисоблашда, биринчи навбатда, рухсат этилган кучланишни ўзича чўзилишни ҳисобга олиб аниқланган кучланишга нисбатан танлаш лозим. Ўзича чўзилиш ҳодисаси металлдагина эмас, балки бошқа материалларда (масалан, бетонда) ҳам учрайди. Бетонда ўзича чўзилиш ҳодисаси нормал температурадаёқ рўй беради. Ўзича чўзилувчанлик темир-бетонда кучланишнинг вақт ўтиши билан арматура ва бетон орасида қайта

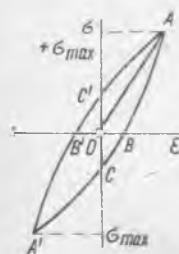
тақсимланишига олиб боради. Арматура кўпроқ кучланиб, бетон бирмунча енгиллашади; аммо темир-бетондан ишланган иншоот элементларининг қаршилиқ кўрсатиш қобилиятига ўзича чўзилувчанлик ҳеч қандай таъсир кўрсатмайди.

22-§. Эластик гистерезис

Табиатда идеал эластик материалларнинг учрамаслиги маълум. Пулат ўзининг механик хоссалари жиҳатидан идеал эластик материалга яқинлашса-да, аммо унинг синов вақтидаги деформацияси юқори даража аниқликдаги жуда нозик асбоблар билан ўлчанганда, пулатнинг ҳам мутлақ эластик эмаслигига ишонамиз. Синалаётган намунадан куч таъсири олинганда



54-шакл.



55-шакл.

у ўзининг олдинги ҳолига батамом қайтмайди. Чўянга ўхшаш материаллар чўзилиш ва сиқилишга синалганда, уларда эластиклик хоссаси йўқдек кўринади. Бундай материаллар синалганда кучланиш билан деформация орасидаги муносабатни тасвирловчи диаграмма намунага юк қўйилганда ҳам, намунадан юк олганида ҳам эгри чизиқ билан тасвирланади. Масалан, синалаётган намунага маълум $\sigma_{\max}$ кучланиш ҳосил бўлгунча юк таъсир эттириб (бу ҳолат 54-шаклда A билан белгиланган), кейин юк таъсири тамоман олинса, у ABC чизиги билан қайтади. Намунага яна юк қўйилса, у энди CDE чизиги билан кўтарилади. Ниҳоят, юклаш процессини тасвирловчи эгри чизиқ билан юкдан бўшатиш процессини тасвирловчи эгри чизиқ ABCD сиртмоғини ҳосил қилади. Бу сиртмоқнинг юзи шаклда штрихлаб қўйилган. Штрихланган бу юз чўзилиш учун сарфланган ишнинг бир қисmini ифодалайди. Бу иш синалаётган намунанинг деформацияланиши натижасида вужудга келадиган ички ишқаланишларни енгиллашга ёки синалаётган намунани иситишга сарфланади.

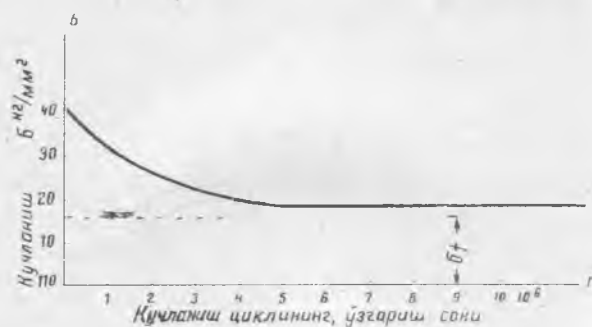
Намунадан юк таъсири олиниб, унга яна юк таъсир эттирилса, деформация кучланишга қараганда бирмунча орқада қолаётгани 54-шаклдан кўриниб турибди. Шунинг билан бирга, намунага юк қўйилиб, сўнг ундан юк олинса, намунада тўпланган деформация потенциал энергиясининг бир қисми (54-шаклда штрихланган ABCD юзи) тамоман йўқолади. Йўқолган бу энергия ҳам жисмнинг эластиклик хоссасини характерлайди.

Намунага юк таъсир эттирилиб, сўнг ундан юк таъсири олинганда деформациянинг кучланишга қараганда орқада қолиши ва бу процессда маълум миқдор энергия йўқотилиши жисмнинг эластиклик хоссаси бўлиб, у эластик гистерезис дейилади.

Намунани синашда, намунага $+\sigma_{\max}$ га қадар юк таъсир эттириб, кейин бу юк олинса-ю, яна $-\sigma_{\max}$ кучланишгача юк қўйилиб, сўнг унга яна $+\sigma_{\max}$ гача юк таъсир эттирилса, диаграммада ёпиқ сиртмоқ шаклидаги OABCA'C'A (55-шакл) ҳосил бўлади. Бу шакл тўла бир циклни тасвирлайди $\sigma_{\max}$ қанча катта бўлса, бу шаклнинг юзи ва, демак, йўқотилган иш миқдори шунча кўп бўлади.

23- §. Толиқиш ва толиқиш натижасида материалнинг емирилиши

Юқорида тасвирланган ҳодисаларнинг ҳэммаси материалнинг статик куч таъсирига нисбатан ўзини тутишига оиддир. Аммо шундай ҳоллар учрайдики, материал миқдор ва йўналишини систематик равишда ўзгартирувчи юк таъсирида бўлади. Материалнинг бу тарздаги юк таъсирига қаршилиқ кўрсатиши статик равишда қўйилган юк таъсирига қаршилиқ кўрсатишидан бошқача бўлади. Пулат стерженга йўналишини жуда тез ўзгартирувчи куч анча вақт давомида таъсир эттирилса (пулат кўп марта чўзиб сиқилса), кучланиш ишорасининг ўзгариш сони маълум миқдорга етганда стержень ичининг бирор жойи дарз кетади. Кейин стержень мустаҳкамлик чегарасидан анча пастки кучланишдаёқ емирилади. Ишорасини ўзгартирувчи кучланиш таъсиридан ҳатто пластик материаллар ҳам, мўрт материаллар каби жуда



56-шакл.

оз қолдиқ деформацияда емирилади. Ўзгарувчан кучланиш таъсиридан материалларнинг емирилиши уларнинг чидамлиги дейилади. Ҳар бир материал учун шундай бир σ кучланиш белгилаш мумкинки, бу кучланишда, юқорида айтилган кучланишнинг ўзгариш сони ҳар қанча бўлса ҳам, материалда толиқиш рўй бермайди. Бу кучланиш σ_e билан белгиланади ва *чидаш чегараси* дейилади. Материалда ҳосил бўладиган кучланишнинг киймати шу чидаш чегарасига оид кучланишга эришгунча, ўзгариш сони ҳар қанча бўлса ҳам, материал чидайди. Демак, ўзгарувчи юк таъсиридаги жисм учун, янги механик характеристика сифатида чидаш чегараси қабул қилинди. Бу характеристика материалнинг ўзгарувчи юк таъсирига қаршилиқ кўрсатиш қобилиятини аниқлайди. 56-шаклда ишоранинг ўзгариш сони билан кучланиш орасидаги муносабат график тарзида тасвирланган. Бу график учун чидаш чегараси σ_e асимптота бўлади. Чидамсизлик натижасидаги емирилиш мустаҳкамлик чегарасидан бирмунча пастки кучланишда рўй беради. Шунинг учун ҳам чидаш чегарасига тегишли кучланиш эластиклик чегарасидаги кучланишдан пастдир. Масалан, 0,15% углерод қўшилган пулат учун мустаҳкамлик чегараси $\sigma_b = 4000 - 5000$ кг/см², чидаш чегараси эса $\sigma_e = 1500$ кг/см² дир. Демак, чидаш чегараси мустаҳкамлик чегарасининг тахминан $\frac{1}{3}$ қисмига тенг.

IV боб

ЧЎЗИЛИШ ВА СИҚИЛИШГА ОИД БАЪЗИ
МУРАККАБ МАСАЛАЛАР

24-§. Статик аниқмас масалалар

Призматик стерженларнинг чўзилиш ва сиқилишга қаршилиқ кўрсатиши билан боғлиқ бўлган масалаларни ечишда стерженлардаги зўриқишларни статика тенгламаларидан аниқлаш мумкин бўлмаса, бундай масалалар *статик аниқмас* масалалар дейилади. Бу хилдаги масалаларни ечиш учун стерженларнинг деформацияларини ҳисобга олиш керак бўлади, шунинг учун ҳам аниқланган зўриқишларнинг қиймати, умуман, стерженларнинг ўлчамларига ҳамда эластиклик хоссаларига боғлиқ бўлади. Статик аниқмас масалаларни ечишда қуйидаги схемадан фойдаланиш тавсия этилади:

1. Текширилаётган масаладаги стерженлар системасига қўйилган кучларни ва унинг таркибига кирган қисмларда ёки стерженларда ҳосил бўладиган зўриқишларни белгилаш.

2. Белгиланган бу кучлар системаси учун статика тенгламаларини тузиш.

3. Конструкция қисмларида ҳосил бўладиган деформациялар орасидаги муносабатларни, системанинг геометрик ўзгармаслик шартидан, фойдаланиб аниқлаш. Зотан ҳар қандай конструкция ёки иншоот деформацияланганда, бир-бирига бириктирилган қисмларининг деформациялари ўзаро қатъий бир муносабатда бўлиши зарур. Бу муносабатлар деформация тенгламалари дейилади ва улар статика тенгламаларига қўшимча бўлади. Шунинг учун ҳам бу тенгламалар аксари қўшимча тенгламалар деб аталади.

4. Қўшимча тенгламалар таркибига кирган деформацияларни Гук қонуни ёрдамида тегишли зўриқишлар ёки кучланишлар орқали ифодалаш.

5. Ҳосил бўлган ҳамма тенгламаларни бирликда ечиш.

Статик аниқмас масалалардан бир нечасини мазкур схема бўйича ечамиз.

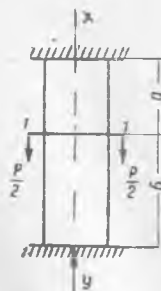
Қўндаланг кесим юзи F бўлган устуннинг юқориғи учи шипга, пастки учи полга маҳкамланган бўлиб, юқориғи учидан a масофадаги кесимига (57- шаклда кўрсатилганича) P куч қўйилган. Устуннинг юқориғи ва пастки қисмларидаги зўриқишларни топамиз.

Устун $I-I$ кесимдаги P куч ва шип билан полнинг реакциялари таъсирида мувозанатда туради. Устуннинг мувозанат тенгламасини ёзамиз:

$$X + Y = P. \quad (24.1)$$

Бу битта тенгламада иккита номаълум бор. Қўшимча тенглама тузиш учун устуннинг юқориғи ва пастки қисмларининг чўзилиш ва сиқилишини Δa ва Δb деб белгилаймиз. Деформация натижасида устуннинг узунлиги ўзгармаслиги лозим. Шунинг учун:

$$\Delta a + \Delta b = 0 \quad (24.2)$$



57- шакл.

булиши керак. Бу тенгламани тегишлича X ва Y кучлар орқали ифодалаймиз:

$$\Delta a = \frac{X \cdot a}{EF}, \quad \Delta b = -\frac{Y \cdot b}{EF}.$$

Буларнинг қийматини (24.2) га қўйсак, қўшимча тенглама қуйидагича бўлади:

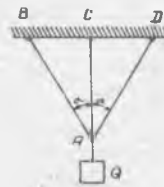
$$Xa - Yb = 0. \quad (24.3)$$

(24.1) ва (24.3) тенгламалардан номаълум зўриқишларнинг қийматини аниқлаймиз:

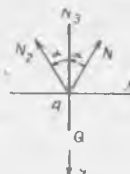
$$X = \frac{a}{a+b} P, \quad Y = \frac{b}{a+b} P.$$

Энди, шу схема асосида мураккаброқ масалаларни ечишга утамиз.

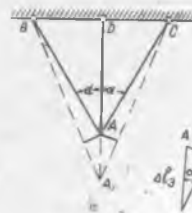
58- шаклда кўрсатилган стерженлар системаси A шарнирга осилган Q юк таъсирида туради. Четдаги стерженлар пўлатдан ясалган ва иккаласи бир хил: узунлиги l_1 , рухсат этилган кучланиши $[\sigma_c]$ бўлсин. Ўртадаги стержень мисдан ясалган, унинг узунлиги l_3 , рухсат этилган кучланиши $[\sigma_m]$ бўлсин. Мазкур стерженларнинг мустаҳкамлигини таъмин этувчи кўндаланг кесим юзларини аниқлаймиз.



58- шакл.



59- шакл.



60- шакл.

Стерженлар A , B , C ва D нуқталарида шарнирлар воситаси билан туташтирилгани учун уларда фақат ўқи бўйлаб йўналган зўриқишлар ҳосил бўлиши мумкин. Бу зўриқишларни чўзувчи зўриқишлар деб ҳисоблаймиз. Уларни аниқлаш учун A шарнирнинг мувозанатини текшираимиз. Шарнирга таъсир этувчи кучлар ва координата ўқларининг йўналиши 59-шаклда кўрсатилган. Бу A нуқтага қўйилган 4 та куч учун статикадан иккита тенглама тузишимиз мумкин:

$$\Sigma X = 0; N_1 \sin \alpha - N_2 \sin \alpha = 0, \quad \Sigma Y = 0; Q - N_3 - N_1 \cos \alpha - N_2 \cos \alpha = 0.$$

Бу тенгламаларнинг биринчисидан: $N_1 = N_2$ бўлади; буни кўзда тутиб, иккинчисини қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$N_3 + 2N_1 \cos \alpha = Q.$$

Бу битта тенгламада иккита номаълум бор. Қўшимча тенгламани текшириладиган конструкция элементларидаги деформацияларни эътиборга олиб тузамиз. Q юк таъсирида A нуқта пасайиб, учала стержень ҳам чўзилади. Четдаги стерженларнинг материали, кўндаланг кесим юзи ва узунлиги бир хил бўлгани учун, Δl_1 ва Δl_2 чўзилишлар ҳам бир хил бўлади. Шунинг учун A нуқта вертикал йўналишда кўчади. Учинчи стерженнинг чўзилишини Δl_3 деб белгилаймиз. A нуқтанинг янги ҳолати A_1 бўлсин. 60- шаклда пунктирли чизик билан системанинг янги ҳолати кўрсатилган. Шаклдан

$\Delta l_1 = \Delta l_2$ билан Δl_3 орасидаги муносабатни топамиз:

$$\Delta l_1 = \Delta l_3 \cos \alpha. \quad (24.5)$$

Энди, Δl_1 ва Δl_3 ни N_1 ва N_3 орқали ифодалаймиз. Аммо бу ерда стерженларнинг кўндаланг кесим юзи номаълум. Статик аниқмас масалаларни ечишда кўндаланг кесим юзи олдиндан берилган, деб фараз қилинади. Кўндаланг кесим юзлари F_1 ва F_3 , эластиклик модуллари эса тегишлича E_c ва E_m бўлсин. У ҳолда:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_c F_1}, \quad \Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{E_m F_3}. \quad (24.6)$$

Буларнинг қийматини (24.5) га қўйсак,

$$\frac{N_1 l_1}{E_c F_1} = \frac{N_3 l_3}{E_m F_3} \cos \alpha \quad (24.7)$$

келиб чиқади. 60- шаклдаги ABC учбурчакдан l_3 ни аниқлаймиз:

$$l_3 = l_1 \cos \alpha.$$

Буни (24.7) га қўйсак, қуйидаги тенгламани оламиз:

$$N_1 = N_3 \frac{E_c F_2}{E_m F_3} \cos^2 \alpha. \quad (24.8)$$

Бу қўшимча тенгламани статика тенгламаси (24.4) билан бирга ечамиз:

$$N_3 = \frac{Q}{1 + 2 \frac{E_c F_1}{E_m F_3} \cos^3 \alpha}, \quad (24.9) \quad N_1 = \frac{Q \frac{E_c F_1}{E_m F_3} \cos^2 \alpha}{1 + 2 \frac{E_c F_1}{E_m F_3} \cos^3 \alpha}. \quad (24.10)$$

Бу формулалардан N_1 ва N_3 зўриқишлар, кўндаланг кесим юзи билан эластиклик модулининг абсолют қийматига эмас, балки уларнинг нисбатига боғлиқ эканлигини кўраётимиз.

$\frac{F_1}{F_3} = n$ нисбатнинг турли қийматлари учун N_1 ва N_3 нинг ҳар хил комбинацияларини оламиз. Бу зўриқиш ва маълум рухсат этилган кучланишлар воситаси билан кўндаланг кесим юзлари F_1 ва F_3 ни ҳисоблаш осон:

$$F_1 \geq \frac{N_1}{[\sigma_c]}, \quad F_3 \geq \frac{N_3}{[\sigma_m]}. \quad (24.11)$$

(24.11) нинг биринчисидан F_1 ни аниқлаб, F_3 нинг қийматини $\frac{F_1}{F_3} = n$ дан топамиз. Бу қиймат (24.11) тенгламанинг иккинчи қисмини қаноатлантириши лозим. Агар қаноатлантирмаса, олдин F_3 ни (24.11) нинг иккинчисидан аниқлаб, F_1 ни $F_1 = n F_3$ тенгликдан топиш керак.

Бинобарин, маълум куч таъсиридаги статик аниқмас система стерженларида ҳосил бўладиган зўриқишларни кўп вариантларда ўзгартириш мумкин.

25- §. Айрим қисмларнинг аниқ тайёрланмаслиги натижасида конструкция элементларида ҳосил бўладиган зўриқишлар

Турли иншоотлар, машина ва ҳар хил конструкциялар қуришда, уларнинг қисмларини мутлақо аниқ ўлчамли қилиб тайёрлаш қийин бўлади. Статик аниқ системаларда, бирорта қисмининг керагидан узунроқ ёки қисқароқ бўлиши система таркибидаги стерженларда ҳеч қандай қўшимча зў-

риқишлар ҳосил қилмайди. Аммо статик аниқмас системаларда, система таркибидаги стерженлардан бирортаси узун ёки қисқа тайёрланган бўлса, бунинг натижасида мазкур қисмдагина эмас, балки у билан боғланган бошқа қисмларда ҳам қўшимча зўриқишлар ҳосил бўлади. Масалан, 61- шаклда тасвирланган статик аниқмас конструкциянинг ўртадаги стержени δ миқдорга калтароқ қилиб тайёрланган бўлсин: $A_0 A = \delta$. Ўрта стержень учи A_0 ни четдаги стерженларнинг учи билан бирор A_1 нуқтада туташтириш учун, ўрта стерженни $A_0 A_1 = \Delta l_3$ га чўзиб, четдаги стерженларни $\Delta l_1 = AB_2 = AC_2$ га сиқиш зарур. Шаклдан:

$$A_0 A = A_0 A_1 + A_1 A$$

ёки

$$\delta = \Delta l_3 + \frac{\Delta l_1}{\cos \alpha}. \quad (25.1)$$

Ўртадаги стержень чўзилиб, четдаги стерженлар сиқилгани учун, олдинги параграфдаги (24.4) тенглама қуйидагича ёзилади:

$$N_3 - 2N_1 \cos \alpha = 0. \quad (25.2)$$

Δl_1 билан Δl_3 нинг қийматини (24.6) дан (25.1) га қўйсак, қўшимча тенгламани ҳосил қиламиз:

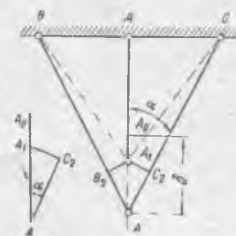
$$\delta = \frac{N_3 l_3}{E_m F_3} + \frac{N_1 l_1}{E_c F_1 \cos \alpha}. \quad (25.3)$$

(25.2) ва (25.3) тенгламаларни бирга ечиб, N_3 билан N_1 учун қуйидаги ифодаларни ҳосил қиламиз:

$$N_3 = \frac{E_m F_3 \delta}{l_3 \left[1 + \frac{E_m F_3}{2 E_c F_1 \cos^2 \alpha} \right]}, \quad N_1 = \frac{N_3}{2 \cos \alpha}. \quad (25.4)$$

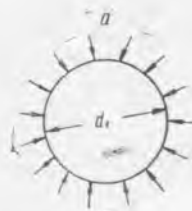
Ўрта стерженнинг узунлиги аниқланганда, $l_3 - \delta$ ўрнига l_3 олинди, чунки l_3 га қараганда δ жуда ҳам кичик сондир. Чиққан натижадан, конструкция қисмларининг аниқ тайёрланмаганлиги сабабли, уларда қўшимча зўриқишлар ҳосил бўлганлигини кўрамиз. Учала стерженнинг материалли ҳам, бикрлиги ҳам бир хил, бундан ташқари, Q юк 58- шаклда кўрсатилганидек қўйилган, деб фараз қилайлик. У ҳолда ўрта стерженнинг қисқалиги бу стерженда қўшимча зўриқиш ҳосил қилади. Агар ўрта стержень зарур ўлчамдан бир оз узунроқ қилиб тайёрланган бўлса, бу стержень қўшни стерженларда қўшимча сиқувчи зўриқиш ҳосил қилиб, уларни қўйилган юкдан ҳосил бўладиган зўриқишдан бирмунча бўшатади. Бу ҳолда, статик аниқмас системадаги бирор қисмнинг ўлчами мувофиқлашмаганлиги конструкция элементларидаги зўриқишларни бирмунча бўшатиб, шунинг билан бирга, унинг ишини яхшилаш учун фойда беради. Система қисми ўлчамининг аниқмаслиги натижасида ҳосил бўладиган қўшимча зўриқишларнинг фойдали бўладиган ҳоли учун яна бир мисол келтирамиз.

Цилиндрик стерженга ҳалқани кўзгалмас қилиб кийгизиш учун, цилиндрнинг диаметри (d_1) ҳалқанинг ички диаметри (d_2) дан каттароқ қилиб олинади (62- шакл, а ва б). Одатда, бу фарқ $\frac{d_1}{n} \approx \frac{d_1}{1000}$ бўлади. Ҳалқани цилиндрга кийгизиш учун, ҳалқа цилиндрга сиғадиган даражада қиздири-



61- шакл.

лади. Ҳалқа совиган сари цилиндрни сиқа бошлайди. Ҳалқанинг совииши натижасида ҳосил бўладиган чўзувчи зўриқиш (N) цилиндр билан ҳалқа сиртлари орасида p реакция кучини ҳосил қилади. Ҳалқани диаметрал текислик билан кесиб, бир қисмини ташлаб юборсак (63-шакл), ундаги N чўзувчи зўриқиш ҳалқа ички сиртига таъсир қилувчи p босим йиғиндиси



62- шакл.



63- шакл.

билан мувозанатлашади. Барча кучларнинг Y ўқига проекцияларини олиб, мувозанат тенгламасини тузамиз. Ҳалқанинг ds элементига pds босим таъсир қилади. Унинг Y ўқидаги проекцияси — $pds \sin \alpha = -p \frac{d}{2} \sin \alpha d\alpha$ бўлади, чунки: $ds = \frac{d}{2} d\alpha$. Мувозанат шarti қуйидагича ёзилади:

$$2N - \int_0^{\pi} p \frac{d}{2} \sin \alpha d\alpha = 0.$$

Бундан:

$$N = \frac{pd}{2} \text{ ёки } p = \frac{2N}{d} \quad (25.5)$$

келиб чиқади.

N ва p ни аниқлаш учун битта тенглама олдик. Бинобарин, масала статик аниқмас экан. Қўшимча тенгламани конструкция элементларининг биргаликда деформацияланиш шартидан тузамиз. Ҳалқанинг чўзилиши ва цилиндрнинг диаметрал сиқилиши натижасида d_1 билан d_2 нинг фарқи йўқолиши керак. Цилиндрнинг бикрлиги узукнинг бикрлигига қараганда жуда ҳам катта бўлгани учун, унинг деформациясини ҳисобга олмаса ҳам бўлади. У ҳолда ҳалқанинг деформацияси диаметрларнинг фарқига, яъни $\frac{1}{n}$ га тенгдир, чунки ҳалқанинг нисбий кенгайиши:

$$\epsilon = \frac{\pi d_1 - \pi d_2}{\pi d_2} = \frac{d_1 - d_2}{d_2}, \quad d_1 = d_2 + \frac{d_2}{n}.$$

Шунинг учун: $\epsilon = \frac{1}{n}$; ҳалқанинг N куч таъсиридан нисбий чўзилиши эса $\epsilon_N = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{EF}$ бўлади; бунда F — ҳалқанинг кўндаланг кесим юзи. Конструкция элементларининг биргаликда деформацияланиш шартига мувофиқ $\epsilon = \epsilon_N$ бўлади. Ёки:

$$\frac{N}{EF} = \frac{1}{n} \quad (25.6)$$

(25.5) билан (25.6) тенгламаларни ечиб, N ва p ни аниқлаймиз.

$$N = \frac{EF}{n}; \quad p = \frac{2EF}{nd}. \quad (25.7)$$

Ҳалқадаги қўзувчи кучланиш:

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{E}{n}.$$

Масалан, ҳалқа пўлатдан ясалган бўлса, $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$,

$$\sigma = \frac{E}{n} = \frac{2 \cdot 10^6}{1000} = 2000 \text{ кг/см}^2 \text{ дир.}$$

26- §. Температуранинг ўзгаришидан ҳосил бўладиган кучланишлар

Призматик стерженнинг икки учи t_1 температурада маҳкамлаб қўйилган бўлсин (64- шакл). Температура t_2 гача ўзгарганда, стерженда ҳосил бўладиган кучланишни топамиз. Стерженнинг узунлиги l , қўндаланг кесим юзи F ва эластиклик модули E бўлсин.

Стерженнинг температураси t_1 дан t_2 га ўзгарганда стержень чўзилиб, A ва B таянчларни ёриб киришга интилади. Бу таянчларнинг қаршилик кучлари (реакциялар) стерженга шаклда кўрсатилгандек таъсир этади. Ана шу реакциялар стерженда сиқилиш зўриқишларини ҳосил қилади. Б. реакцияларни статика тенгламаларидан аниқлаб бўлмайди, чунки биргина мувозанат шарти A ва B даги реакцияларнинг тенг ва қарама-қаршилигини ифодалайди. Сиқувчи P кучнинг миқдори номатълумлигича қолавергани учун, масала статик аниқмасдир. Қўшимча тенгламани стерженнинг узунлиги температура ўзгарганда ҳам ўзгармай қолиши шартидан фойдаланиб тузамиз. Стерженнинг учларидан бирортаси эркин бўлганда, температура таъсиридан стержень Δl_t га чўзилган бўлар эди. Аммо P сиқувчи кучлар стерженни чўзилишга қўймайди, аксинча, узунлиги $l + \Delta l$ бўладиган стерженни сиқиб, унинг узунлигини l га тенглигича сақлайди. Демак, P таъсиридан стержень $\Delta l_p = \Delta l_t$ га сиқилар экан.

Ана шу шартдан фойдаланиб, P ни аниқлаш учун қўшимча тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\Delta l_p = \frac{Pl}{EF}; \quad \Delta l_t = \alpha l (t_2 - t_1).$$

Бунда α — стерженнинг температура таъсиридан чизиқли кенгайиш коэффициенти;

$$\frac{Pl}{EF} = \alpha l (t_2 - t_1),$$

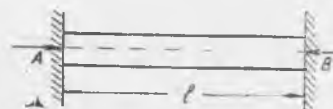
бундан:

$$P = \alpha EF (t_2 - t_1). \quad (26.1)$$

Температура таъсиридан ҳосил бўлган кучланиш:

$$\sigma = \frac{P}{F} = \alpha E (t_2 - t_1).$$

Қўрамик, бу кучланиш стерженнинг механик характеристикаси α ва E га ҳамда температуранинг ўзгаришига боғлиқ экан.



64- шакл.

27- §. Статик аниқмас системаларни рухсат этилган юкка мувофиқ ҳисоблаш

Яқин вақтларгача статик аниқмас системаларнинг мустаҳкамлиги

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] \quad (27.1)$$

шарт асосида амалга оширилар эди. Кейинги текширишлар бу ҳол статик аниқ системалар учун мустаҳкамлик коэффициентини ўзгартмаса ҳам статик аниқмас системалар учун мустаҳкамлик коэффициентини ошириб, конструкциянинг қаршилиқ кўрсатиш қобилиятидан тўла фойдаланмасликка олиб боришини кўрсатди. 24- параграфда текширилган стерженлар системасини оламиз. Стерженларнинг бикрлиги бир хил бўлсин. У ҳолда эластиклик чегарасида ечилган масаланинг жавоби қуйидагича бўлади:

$$N_3 = \frac{Q}{1 + 2 \cos^3 \alpha}; \quad N_1 = N_2 = \frac{Q \cos^3 \alpha}{1 + \cos^3 \alpha}; \quad (27.2)$$

$N_3 > N_1$ бўлгани учун, Q юк кўпайтирилганда ўрта стержень оқиш чегара сига чет стерженлардан илгарироқ эришади. Аммо бу билан конструкция стерженларининг қаршилиқ кўрсатиш қобилияти тугади, деб бўлмайди. Четдаги стерженлар эластик ҳолатда бўлганлигидан, ўртадаги стерженнинг пластик деформацияланишига тўсқинлик қилади. Бинобарин, система олдин эластик даврида бўлиб, унинг стерженларидаги зўриқишлар (27.2) билан ифодаланади. Кейин, системанинг бирорта стерженида пластик деформация бошланиши билан, у эластик-пластик ҳолатга ўтади. Бунда қўйилган юк эластик ҳолатдагидан каттароқ бўлиб, унга тегишли зўриқишлар қуйидагича аниқланади:

$$N_3 = \frac{Q_1}{1 + 2 \cos^3 \alpha} = \sigma_t F \quad \text{ёки} \quad Q_1 = \sigma_t F (1 + 2 \cos^3 \alpha). \quad (27.3)$$

Бу ерда стержень материални идеал пластик деб фараз қилдик. Шунинг учун:

$$N_3 = \sigma_t F$$

бўлади.

Ўрта стержендаги N_3 зўриқиш пластик деформациянинг бошланиш шартидан аниқланиши сабабли, статик тенгламадан N_1 топилади:

$$N_3 + 2N_1 \cos \alpha = Q.$$

Бундан:

$$N_1 = \frac{Q - \sigma_t F}{2 \cos \alpha}. \quad (27.4)$$

Қўйилган юк кўпайтирилган сари, чет стерженларда ҳам пластик деформация ҳосил бўла бошлайди. Ниҳоят, система бутунлай пластик ҳолатга ўтади. Бу ҳолатга тегишли юк системанинг *қўтариш қобилиятига* тўғри келувчи юк дейилади. У Q_t билан белгиланади. Система қўтариш қобилиятига тегишли юк таъсирида бўлса, унинг четдаги стерженларидаги зўриқиш $N_1 = \sigma_t F$ бўлади. Буни (27.4) га қўйсак, системанинг қўтариш қобилиятига тегишли юк Q_t ни топамиз:

$$Q_t = \sigma_t F (1 + 2 \cos \alpha). \quad (27.5)$$

Конструкциянинг қўтариш қобилияти учун икки хил ифодани ҳосил қилдик. Иккала ҳол учун ҳам мустаҳкамлик коэффициенти n ни бир хил

қилиб олсак, рухсат этилган кучланиш билан ҳисоблаганимизда қўйилиши мумкин бўлган юк миқдори (27.3) га мувофиқ:

$$Q \leq \frac{\sigma_1 F}{n} (1 + \cos^3 \alpha)$$

бўлади.

Кутариш қобилиятига мувофиқлаб ҳисоблаганимизда, қўйилиши мумкин бўлган юк:

$$Q \leq \frac{\sigma_1 F}{n} (1 + \cos \alpha)$$

бўлади.

Курамызми, бу ҳолда қўйилиши мумкин бўлган юкнинг қиймати олдингига қараганда бирмунча катта; масалан, $\alpha = 30^\circ$ бўлса, 19% фарқ қилади.

МАСАЛАЛАР

12. Темир-бетон устуннинг кундаланг кесим юзаси квадрат бўлиб, $F = a^2 = 25 \times 25 \text{ см}^2$, арматуранинг юзаси умумий юзанинг 1% ини ташкил қилади. Устунга сиқувчи $P = 30 \text{ т}$ куч қўйилган бўлса, бу кучнинг қандай қисмини арматура ва қандай қисмини бетон қабул қилади (65-шакл)? Бетон ва арматурада ҳосил бўладиган кучланишлар ҳам аниқлансин. Эластиклик модулларининг нисбати 10 га тенг ($\frac{E_c}{E_\delta} = 10$).

Еч и ш. Устуннинг бетон қисми кундаланг кесимининг юзини F_δ билан, арматура юзини F_c билан белгилаймиз, у ҳолда $F_\delta + F_c = a^2$ бўлади, бетон ва арматурадаги зўриқишларни P_δ ва P_c десак, статика битта тенглама беради:

$$P_\delta + P_c = P. \quad (1)$$

Бетон ва арматуранинг биргаликда деформацияланиш шартидан йқинчи тенгламани оламиз:

$$\Delta l_\delta = \Delta l_c \quad \text{ёки} \quad \frac{P_\delta l}{E_\delta F_\delta} = \frac{P_c l}{E_c F_c} \quad (2)$$

Бу иккала тенгламадан:

$$P_\delta = \frac{P}{1 + \frac{E_c F_c}{E_\delta F_\delta}}, \quad P_c = \frac{P}{1 + \frac{E_\delta F_\delta}{E_c F_c}}$$

келиб чиқади.

$$\text{Масала шартига мувофиқ: } \frac{E_c}{E_\delta} = 10, \quad \frac{F_c}{F_\delta} = \frac{1}{100}.$$

Шунга кўра $P_\delta \approx 27,27 \text{ т}$, $P_c \approx 2,73 \text{ т}$ бўлади.

Кучланишларни ҳисоблаш учун бетон билан арматура юзини $F_\delta + F_c = 625 \text{ см}^2$ ва $F_\delta = 100 F_c$ тенгламалардан аниқлаймиз, $F_\delta = 618,8 \text{ см}^2$ ва $F_c = 6,2 \text{ см}^2$.

$$\sigma_\delta = 44,1 \text{ кг/см}^2, \quad \sigma_c = 440,3 \text{ кг/см}^2.$$

Арматуранинг қаршилик кўрсатиш қобилиятидан 30% фойдаланилмоқда, чунки $[\sigma_c] = 1250 \text{ кг/см}^2$.

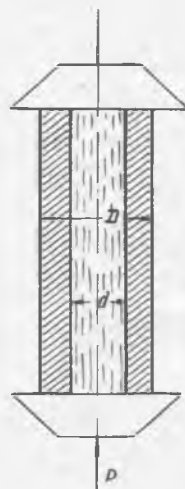
13. 66-шаклда кўрсатилгандек, пресс остида мис труба ва унга жойланган пўлат цилиндр сиқилмоқда. Мис труба билан пўлат цилиндрда ҳосил бўладиган кучланишлар ҳамда нисбий қисқаришлар аниқлансин. Сиқувчи куч $P = 45 \text{ т}$, $D = 20 \text{ см}$, $d = 10 \text{ см}$.

Еч и ш. Бу масала айнан юқорида чиқарилган масаладек ечилади. $\sigma_m = 117 \text{ кг/см}^2$, $\sigma_c = 220 \text{ кг/см}^2$.

Нисбий сиқилиш:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_m}{E_m} = 104 \cdot 10^{-6}.$$

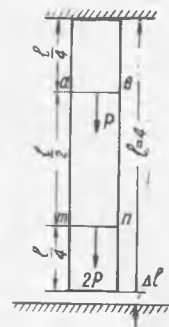




66- шакл.



67- шакл.



68- шакл.

14. Қўндаланг кесим юзи 25×25 см. ли, калта ёғоч устуи $40 \times 40 \times 4$ мм ўлчамли тўртта пулат бурчаклик билан кучайтирилган (67- шакл). $E_c = 2 \cdot 10^9$ кг/см², $E_d = 1 \cdot 10^9$ кг/см². Устуи P куч билан сиқилса, пулат бурчаклик бу кучнинг қандай қисмини ўзига қабул қилади?

Бу масала аввалги икки масаладан катта фарқ қилмайди.

Жавоби:

$$P_c = \frac{P}{1 + \frac{E_d F_d}{4 E_c F_c}} \cong 0,3 P.$$

15. Узунлиги $l = 4$ м, қўндаланг кесим юзи $F = 16$ см² бўлган пулат стержень юқори учи билан маҳкамланган, пастки учи билан фундамент ораси $\delta = 0,1$ см. Стерженьга 68- шаклда курсатилгандек қўйилган P кучнинг қандай қийматида стержень пастки учининг фундаментга курсатган босими $q = 300$ кг/см² дан ошмайди.

Ечиш. Фундаментнинг реакциясини Y десак, унинг қиймати $Y = F \cdot q = 4800$ кг бўлади.

Юқориги учининг реакциясини X десак, статиканинг тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$X + Y = 3P. \quad (1)$$

Деформация тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$\frac{Xl}{4EF} + \frac{(X - P)l}{2EF} = \frac{Yl}{4EF} + \delta.$$

ёки

$$X = \frac{1}{3} \left(2P + Y + \frac{4EF}{l} \delta \right). \quad (2)$$

(1) ва (2) тенгламаларни ечиб, P нинг қийматини толамиз:

$$P = 12,8 \text{ т.}$$

16. Узунлиги $l_a = 25,004$ см, қўндаланг кесим юзи $F = 20$ см² бўлган алюминий стержень узунлиги $l_c = 25$ см, қўндаланг кесим юзи $F = 20$ см² бўлган пулат трубага

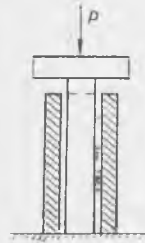
69- шаклда кўрсатилгандек қийғизилган. Пулат труба билан алюминий стерженда бир хил кучланиш ҳосил бўлиши учун, сиқувчи куч қандай бўлиши керак?

$$E_a = 0,7 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2, E_c = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2.$$

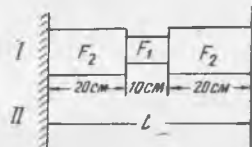
Жавоби: $P = 6,9 \text{ т.}$

17. Иккита пулат стерженнинг учлари абсолют каттиқ деворга маҳкамлаб қўйилган (70- шакл). Стерженлардан бири рихталанган, унинг бу жойидаги кундаланг кесим юзи F_1 иккинчи стерженнинг кундаланг кесим юзига тенг. Биринчи стерженнинг рихталанмаган кесимида ва иккинчи стерженда, температура 30° ўзгарганда, ҳосил бўладиган кучланишлар ҳисоблансин.

$$F_1 = 1 \text{ см}^2; F_2 = 2 \text{ см}^2.$$



69- шакл.



70- шакл.



71- шакл.

Е ч и ш. Биринчи стержень учун мувозанат тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$\sigma_1 F_1 = \sigma_2 F_2; \quad (1)$$

деформация тенгламаси эса:

$$\frac{\sigma_1}{E} 40 + \frac{\sigma_1}{E} 10 = \alpha t 50. \quad (2)$$

Бу тенгламалардан:

$$\sigma_1 = 1250 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}.$$

Иккинчи стержень учун:

$$\sigma_2 = E_a t = 750 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}.$$

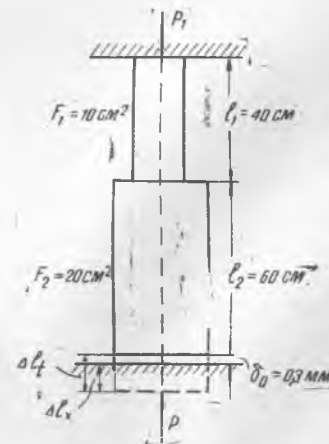
18. Температура 20°C ўзгарганда 71- шаклда тасвирланган конструкцияда ҳосил бўладиган кучланишлар аниқлансин.

$$E_m = 0,8 \cdot 10^6 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}, \quad E_n = 1 \cdot 10^6 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2},$$

$$\alpha_m = 165 \cdot 10^{-7}, \quad \alpha_n = 125 \cdot 10^{-7}.$$

Жавоби:

$$\sigma_m = 197,6 \text{ кг/см}^2, \quad \sigma_n = 123,6 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}.$$



72- шакл.

19. Пулат стержень икки қисмдан иборат бўлиб, бу қисмлардан бирининг узунлиги $l_1 = 40$ см, иккинчисининг узунлиги $l_2 = 60$ см. Кундаланг кесим юзлари тегишлича $F_1 = 10$ см², $F_2 = 20$ см². Стерженьнинг юқориги учини маҳкамланган, пастки учини эса таянчга $\delta = 0,3$ мм етмайди (72- шакл). Температура 50°C га ўзгарганда ҳар қайси қисмдаги кучланишлар аниқлансин. $\alpha = 125 \cdot 10^{-7}$.

Е ч и ш. Температуранинг ўзгаришидан стержень Δl_t га узаяди, таянч реакциялари P таъсиридан Δl_x га сиқилади. Бу икки деформациянинг айирмаси δ га тенг бўлиши керак.

$$\Delta l_t - \Delta l_x = \delta \quad (1)$$

$$\Delta l_t = \alpha t (l_1 + l_2), \quad \Delta l_x = \frac{Pl_1}{EF_1} + \frac{Pl_2}{EF_2} = \frac{Pl_1}{EF_1} \left(1 + \frac{F_1 l_2}{F_2 l_1}\right).$$

Буларни (1) га қўйсак:

$$P = \frac{[\alpha t (l_1 + l_2) - \delta] EF_1}{l_1 \left(1 + \frac{F_1 l_2}{F_2 l_1}\right)} = 9300 \text{ кг}$$

келиб чиқади. Юқори қисмдаги кучланиш:

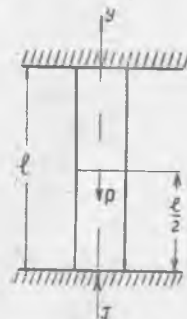
$$\sigma_1 = \frac{P}{F_1} = 930 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2},$$

пастки қисмдаги кучланиш эса:

$$\sigma_2 = \frac{P}{F_2} = 465 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$$

бўлади. Оралиқ бўлмаганда температура таъсиридаги зуриқиш 1,9 марта ортиқ бўлар эди.

20. A ва B учлари маҳкамланган стержень тенг икки қисмдан иборат бўлиб, юқориги қисми пулатдан, пастки қисми эса мисдан ясалган, кундаланг кесим юзи $F = 20$ см² (73- шакл). Стерженьнинг ўртадаги кесимига уқи бўйлаб йўналган $P = 6$ т куч таъсир этади. Температура $t = 30^\circ$ кўтарилганда мис ва пулат қисмларда ҳосил бўладиган зуриқишларни аниқлаш керак.



73- шакл.

$$E_c = 2 \cdot 10^8 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}, \quad E_m = 10^8 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}, \quad \alpha_c = 125 \cdot 10^{-7}, \quad \alpha_m = 165 \cdot 10^{-7}.$$

Е ч и ш. Таянч реакциялари юқорига йўналган деб фараз қиламиз. Статиканинг тенглмаси қуйидагича ёзилади:

$$X + Y = P. \quad (1)$$

Қўшимча тенгламани қуйидаги мулоҳазага мувофиқ тузимиз. Мис ва пулат қисмларнинг температура таъсиридан, юқориги қисмининг эса P куч таъсиридан чўзилишларининг йиғиндиси X реакциянинг таъсиридан вужудга келган сиқилишга тенг бўлиши керак:

$$\frac{l}{2} \alpha_c + \frac{l}{2} \alpha_m + \frac{Pl}{2E_c F} = \frac{Xl}{2E_c F} + \frac{Xl}{2E_m F}$$

$$\frac{\alpha_c}{2} \left(1 + \frac{\alpha_m}{\alpha_c}\right) + \frac{P}{2E_c F} = \frac{X}{2E_c F} \left(1 + \frac{E_c}{E_m}\right) \quad (2)$$

Бундан X реакцияни ва (1) дан Y реакцияни толамиз:

$$X = \frac{P}{1 + \frac{E_c}{E_m}} + \frac{\alpha_c \left(1 + \frac{\alpha_m}{\alpha_c}\right) E_c F}{1 + \frac{E_c}{E_m}}, \quad Y = P - X = \frac{P \frac{E_c}{E_m}}{1 + \frac{E_c}{E_m}} - \frac{\alpha_c \left(1 + \frac{\alpha_m}{\alpha_c}\right) E_c F}{1 + \frac{E_c}{E_m}}.$$

Қўрамизки, иккала реакция ҳам икки қўшилувчидан иборат. Бу қўшилувчиларнинг, бири қўйилган юкдан, иккинчиси эса температуранинг ўзгаришидан келиб чиқади. Темпера-

туранинг ўзгаришидан сиқувчи кучланиш ҳосил бўлиши бизга маълум. P таъсиридан эса юқори қисми чўзилиб, пастки қисми сиқилади. Шунинг учун:

$$\sigma_c = \frac{Y}{F} = \frac{P \frac{E_c}{E_m}}{\left(1 + \frac{E_m}{E_c}\right) F} = \frac{\alpha_c t \left(1 + \frac{\alpha_m}{\alpha_c}\right) E_c}{1 + \frac{E_c}{E_m}} = 38 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2};$$

$$\sigma_m = \frac{X}{F} = -\frac{P}{\left(1 + \frac{E_c}{E_m}\right) F} = -\frac{\alpha_c t \left(1 + \frac{\alpha_m}{\alpha_c}\right) E_c}{1 + \frac{E_c}{E_m}} = -680 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$$

бўлади.

21. Юқориги учи маҳкамланиб, пастки учи асосдан $\delta = 0,06$ мм оралиқда бўлган стержень икки қисмдан иборат (74-шакл.) Стерженьнинг юқоридаги қисми пулатдан ва пастки қисми мисдан бўлиб, қўнадаланг кесим юзлари тегишлича $F_c = 200 \text{ см}^2$ ва $F_m = 100 \text{ см}^2$ дир: $a = 0,5$ м; $b = 0,5$ м; $C = 1$ м. Қўйилган $P = 15$ т кучдан ва температура $t = 20^\circ\text{C}$ га ўзгаришидан стерженьнинг қисмларида ҳосил бўладиган кучланишлар аниқлансин.

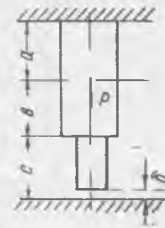
Қўрсатма. Статиканинг тенгламаси бундан олдинги масаладагидек тузилади, яъни $X + Y = P$; деформация тенгламаси эса қуйидагича ёзилади:

$$(a + b)\alpha_c + c\alpha_m + \frac{Xa}{E_c F_c} = \frac{Yb}{E_c F_c} + \frac{Yc}{E_m F_m} + \delta.$$

Бу тенгламалардан X ва Y аниқлангандан кейин қисмлардаги кучланишларни ҳисоблаш қийин эмас:

$$\sigma_1 = \frac{X}{F_c} = 82,5 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}, \quad \sigma_2 = \frac{X - P}{F_c} = -157,5 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2},$$

$$\sigma_2 = -\frac{Y}{F_m} = -315 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}.$$



74-шакл.

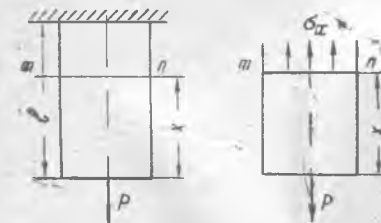
28-§. Хусусий оғирликни эътиборга олиб, қўнадаланг кесимни танлаш

Конструкция элементларининг деформация ва кучланишларини ҳисоблашда, бу деформация ва кучланишларга элементларнинг хусусий оғирлиги кўрсатадиган таъсирни эътиборга олмаган эдик. Аммо, баъзан, конструкция элементларининг хусусий оғирлиги қўйиладиган юк билан бир тартибда бўлиши мумкин. Бундай ҳолларда хусусий оғирликни ҳисобга олмаслик катта хатоларга олиб бориши мумкин.

Вертикал стержень тепа учи билан осилган, пастки учига эса P куч қўйилган бўлсин. Стерженьнинг узунлиги L , қўнадаланг кесим юзи F , эластиклик модули E ва солиштирма оғирлиги γ бўлсин (75-шакл). Стерженьнинг пастки учидан x оралиқдаги қўнадаланг кесими орқали m текисликни ўтказиб, пастки қисмининг мувозанатини тек-
тираймиз. Бу қисм пастки учига қўйилган P куч, узунлиги x бўлган қисмнинг хусусий оғирли-

ги $F \cdot \gamma \cdot x$ ҳамда m кесим юзаси бўйича теги тарқалган ички кучлар таъсирида мувозанатда туради (75-шакл). Шунинг учун:

$$\sigma_x F = P + F\gamma x;$$



75-шакл.

бундан:

$$\sigma_x = \frac{P + F\gamma x}{F} = \frac{P}{F} + \gamma x \quad (28.1)$$

келиб чиқади.

Қўрамызки, стерженнинг хусусий оғирлиги эътиборга олинганда, барча қўндаланг кесимлардаги нормал кучланишлар бир хил бўлмасдан, унинг ўқи бўйлаб, чизиқли қонун билан ўзгарар экан. Энг катта кучланиш осилган жойда, $x = l$ бўлган кесимда ҳосил бўлади. Ундаги кучланиш:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} + l\gamma. \quad (28.2)$$

Мустаҳкамлик шarti юқорида айtilган кесим учун бажарилиши лозим:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} + \gamma l \leq [\sigma]. \quad (28.3)$$

Бу тенгламадан мустаҳкамликни таъминловчи юзни топамиз:

$$F \geq \frac{P}{[\sigma] - \gamma l}. \quad (28.4)$$

Қўндаланг кесим юзини аниқловчи формуланинг маҳражи γl миқдорча камайди. Бунинг амалий жиҳатдан қандай аҳамиятга эга эканини билиш учун иккита ҳолни текширамыз. Узунлиги $l = 10$ м бўлган пўлат стерженни оламыз. Унинг учун:

$$[\sigma] = 1400 \text{ кг/см}^2, \quad \gamma l = 7,85 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3 = 7,85 \text{ кг/см}^2; \quad \frac{\gamma l}{[\sigma]} = \frac{7,85}{1400}, \text{ яъни } 0,6\%.$$

Демак, пўлат стержень учун хусусий оғирликнинг таъсири 0,6% экан. Баландлиги 10 м ли гиштин устунни оламыз. Унинг учун: $[\sigma] = 12 \text{ кг/см}^2$,

$$\gamma l = 1,8 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3 = 1,8 \text{ кг/см}^2; \quad \frac{\gamma l}{[\sigma]} = \frac{1,8}{12}, \text{ яъни } 15\%.$$

Стерженлар жуда узун бўлмаса, уларнинг хусусий оғирлиги ҳисобга олинмаса ҳам бўлади. Аммо тош, гишт каби, мустаҳкамлиги жуда юқори бўлмаган материаллар учун хусусий оғирлик асосий юклар қаторига киради. Юк қўтарадиган узун канатларни, шахта цтангларини, минораларга ўхшаш иншоотларни, кўприк фермалари таянчларини ҳисоблашда хусусий оғирликни албатта эътиборга олиш зарур. Бундай ҳолларда стерженнинг шаклини мувофиқлаб танлаш масаласи катта аҳамиятга эга. Мустаҳкамлик шarti энг кўп кучланиш ҳосил бўладиган кесим учун қаноатлантирилса, бошқа кесимларда материалдан тўла фойдаланмаган бўламыз. Натижада ортиқча материал сарфланади. Шундай шакл топиш қеракки, стерженнинг барча қўндаланг кесимларида кучланиш бир хил бўлиб, у рўхсат этилган кучланишга тенг келсин. Стерженнинг бундай шакли чўзилиш ёки сиқилишга тенг қаршилик кўрсатувчи шакл дейилади. Тенг қаршилик кўрсатувчи шаклли стержень минимал оғирликда бўлади.

Тепасига қўйилган сиқувчи P куч билан хусусий оғирлиги таъсиридан сиқилаётган стерженни оламыз. Асосига яқинлашган сари, унинг кесимларида кучланиш катталаша бормасин учун, қўндаланг кесим юзини ҳам ошириб борамиз (76-шакл). Стержень пастга томон кенгаювчи шаклда бўлади. Қўндаланг кесим юзи (F) баландлик бўйича ўзгаради ва x нинг функ-

цияси бўлади: $F = F(x)$. Бу функцияни топамиз. Стерженнинг юқори юзи F_0 ни мустақкамлик шартидан топамиз:

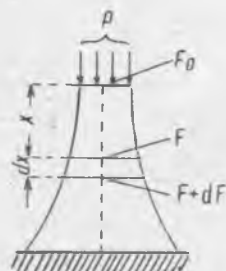
$$F_0 = \frac{P}{[\sigma]},$$

$[\sigma]$ — сиқилиш учун рухсат этилган кучланиш. Стерженнинг барча кесимларидаги кучланишлар рухсат этилган ана шу кучланишга тенг бўлиши керак:

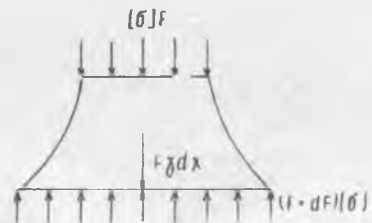
$$\sigma = [\sigma] = \frac{P}{F_0}.$$

Стержендан x ва $x + dx$ ораликдаги текисликлар билан битта чексиз кичик элемент ажратамиз (77-шакл). Бу элементнинг юқориги юзи F , унга чексиз яқин пастки юзи эса $F + dF$ бўлсин. У ҳолда ажратилган элементнинг мувозанат тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$F[\sigma] + F\gamma dx = (F + dF)[\sigma]$$



76-шакл.



77-шакл.

Бундан $\frac{dF}{F} = \frac{\gamma}{[\sigma]} dx$ тенгламани ҳосил қиламиз.

Бу тенгламанинг интегрالي:

$$\ln F + C = \frac{\gamma}{[\sigma]} x$$

бўлади.

C ни чегара шартидан топамиз, $x = 0$ бўлганда юз $F = F_0$ эди. Шунинг учун $C = -\ln F_0$. Бунни юқорида чиқарилган тенгламага қўйсак, F функцияси учун қуйидаги формулани оламиз:

$$F = F_0 e^{\frac{\gamma x}{[\sigma]}}. \quad (28.5)$$

Стерженнинг кўндаланг кесими ана шу шаклда ўзгарадиган қилиб тайёрланса, унинг сирти эгри чизиқли бўлиб, бу тарздаги иншоот бажарилганда ҳам, у қимматга тушади. Шунинг учун, одатда, бу шакл тақрибий шакл билан алмаш-



78-шакл.

тирилади. Масалан, текис томонли параллелепипедлар устма-уст қўйилиб, поғонали шакл ҳосил қилинади (78- шакл). Ҳар қайси поғонанинг қўндаланг кесим юзи қуйидагича аниқланади. 1- поғонанинг юзи (28.4) дан топилади:

$$F_1 = \frac{P}{[\sigma] - l_1 \gamma}.$$

2- поғонанинг юқориги юзасига қўйилган куч $N = [\sigma]F_1$, шунинг учун, унинг пастки қисмининг юзи:

$$F_2 = \frac{F_1[\sigma]}{[\sigma] - l_2 \gamma} = \frac{P[\sigma]}{([\sigma] - l_1 \gamma)([\sigma] - l_2 \gamma)}$$

бўлади; 3- поғона учун ҳам худди шу муҳокамани юргизиб, F_3 ни топамиз:

$$F_3 = \frac{F_2[\sigma]}{[\sigma] - l_3 \gamma} = \frac{P[\sigma]^2}{([\sigma] - l_1 \gamma)([\sigma] - l_2 \gamma)([\sigma] - l_3 \gamma)},$$

шунга ўхшаш муҳокама юргизиб, n - поғонанинг пастки учига тегишли кесим юзи учун қуйидаги умумий формулани ёзишимиз мумкин:

$$F_n = \frac{F_{n-1}[\sigma]}{[\sigma] - l_n \gamma} = \frac{P[\sigma]^{n-1}}{([\sigma] - l_1 \gamma)([\sigma] - l_2 \gamma) \dots ([\sigma] - l_n \gamma)}. \quad (28.6)$$

Агар $l_1 = l_2 = l_3 = \dots = l_n = \frac{L}{n}$ бўлса, (28.6) формулани бундай ёзиш мумкин:

$$F_n = \frac{P}{[\sigma]} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{L\gamma}{n[\sigma]}\right)^n}. \quad (28.7)$$

Поғонали брусларнинг қўндаланг кесим юзларини шу формула билан белгилаш осон. Шунинг ҳам айтиб ўтиш керакки, (28.7) формулани (28.5) осонлик билан чиқариш мумкин.

Тенг қаршилиқ кўрсатувчи шаклнинг поғонали ва ўзгармас кесимли брусларга нисбатан нақадар қулайлигини кўрсатиш учун бир мисол келтирамиз.

22- масала. Баландлиги $h = 42$ м бўлган таянчга ўқи бўйлаб сиқувчи $P = 400$ т куч таъсир қилади. Таянч материалининг солиштирма оғирлиги $\gamma = 2,2$ т/м³, сиқилиш учун рухсат этилган кучланиш $[\sigma] = 12$ кг/см². Таянчнинг ҳажми қуйидаги уч ҳол учун солиштирилсин:

1. Таянчнинг қўндаланг кесими ўзгармас.
 2. Таянч баландлиги бир хил учта поғонадан иборат.
 3. Таянч сиқилишга тенг қаршилиқ кўрсатувчи шаклда.
- Ечиш. Ҳисобни тонна ва метр ўлчовларида олиб борамиз.

Биринчи ҳол учун қўндаланг кесим юзи:

$$F = \frac{P}{[\sigma] - h\gamma} = 14,5 \text{ м}^2,$$

ҳажми эса:

$$V = Fh = 14,5 \cdot 42 = 610 \text{ м}^3.$$

Иккинчи ҳолда юқори поғонанинг қўндаланг кесим юзи:

$$F_1 = \frac{P}{[\sigma] - \frac{h}{3}\gamma} = 4,48 \text{ м}^2 \text{ га тенг.}$$

Иккинчи поғона учун:

$$F_2 = \frac{F_1[\sigma]}{[\sigma] - \frac{h}{3}\gamma} = 6,04 \text{ м}^2.$$

Учинчи погонанинг қўндаланг кесим юзи:

$$F_3 = \frac{F_0[\sigma]}{[\sigma] - \frac{h}{3}\gamma} = 8,12 \text{ м}^2.$$

Таянчининг тўла ҳажми:

$$V = (F_1 + F_2 + F_3) \frac{h}{3} = 261 \text{ м}^3.$$

Тенг қаршилик кўрсатувчи шаклнинг юқори юзи:

$$F_0 = \frac{P}{[\sigma]} = \frac{400}{120} = 3,33 \text{ м}^2.$$

Пастки кесимнинг юзи:

$$F_h = F_0 e^{\frac{\gamma}{[\sigma]h}} = 3,33 e^{\frac{2,2 \cdot 42}{120}} = 3,33 e^{0,7} = 7,15 \text{ м}^2.$$

Тенг қаршилик кўрсатувчи шаклдаги таянчининг оғирлиги:

$$Q = [\sigma]F_h - P = 120 \cdot 7,15 - 400 = 460 \text{ т}.$$

Таянчининг ҳажми:¹

$$V = \frac{Q}{\gamma} = 209 \text{ м}^3.$$

Бу ҳажм погонали таянч ҳажмидан 20% кичик, ўзгармас қаршилик шаклидаги таянч ҳажмидан тахминан уч марта кичикдир.

29- §. Критик узунлик

Қўндаланг кесим юзи ўзгармас бўлган узун ип, сим, арқон каби осилиб турган материал ўз оғирлиги таъсиридан узилса, унинг узунлиги *критик узунлик* дейиладиган узунликдан катта бўлади. Критик узунлик l_k билан белгиланади. Бу узунлик қўйидаги шартдан аниқланади. Умуман, призматик стерженнинг узилиши учун ундаги кучланиш мустаҳкамлик чегарасига тенг бўлиши керак. Шунинг учун критик узунликка тегишли оғирлик узувчи кучга тенг бўлади:

$$\begin{aligned} l_k F_\gamma &= F\sigma_b, & \text{бундан:} \\ l_k &= \frac{\sigma_b}{\gamma} \end{aligned} \quad (29.1)$$

келиб чиқади. Бу формуладан кўринадики, критик узунлик ипнинг ёки симнинг қўндаланг кесим юзига боғлиқ бўлмай, унинг материаллигига боғлиқдир.

Критик узунлик тушунчасидан тўқимачилик материалларининг механик сифатини аниқлашда кўпроқ фойдаланилади. Масалан, каноп учун критик узунлик l_k 35 км, пахтадан йигирилган ип учун эса $l_k = 22 \div 28$ км.

¹ Тенг қаршилик кўрсатувчи шаклнинг ҳажмини интеграл ҳисобдан фойдаланиб ҳам чиқариш мумкин:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^l F(x) dx = F_0 \int_0^l e^{\frac{\gamma}{[\sigma]x}} dx = \frac{F_0[\sigma]}{\gamma} \left[e^{\frac{\gamma}{[\sigma]l}} - 1 \right] = \frac{F_0[\sigma]}{\gamma} \cdot (e^{0,77} - 1) = \\ &= \frac{3,33 \cdot 120}{7,2} [2,16 - 1] = 209 \text{ м}^3. \end{aligned}$$

30-§. Хусусий оғирлик таъсиридан бўладиган деформация

Чўзилувчи ёки сиқилувчи стержень хусусий оғирлигининг деформацияга таъсири эътиборга олинганда, унинг турли кесимларидаги қучланишлар ва, демак, нисбий чўзилишлар ҳар хил бўлишини кўзда тутиш лозим. Қўндаланг кесим юзи ўзгармайдиган призматик стержендан (79-шакл) пастки учидан x масофада, узунлиги чексиз кичик dx га тенг бир элемент ажратамиз. Ажратилган бу элементнинг абсолют чўзилиши қуйидагича бўлади:

$$\Delta(dx) = \epsilon_x dx = \frac{\sigma_x}{E} dx = \frac{(P + F\gamma x)}{EF} dx$$

ёки

$$\Delta(dx) = \frac{1}{E} \left(\frac{P}{F} + \gamma x \right) dx.$$

Стерженнинг тўла чўзилиши:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{1}{E} \left(\frac{P}{F} + \gamma x \right) dx = \frac{Pl}{EF} + \frac{\gamma l^2}{2EF} + \frac{(P + \frac{\gamma Fl}{2})l}{EF} \quad (30.1)$$

бўлади; γFl — стерженнинг оғирлиги. Демак, қўйилган юк ва хусусий оғирлик таъсиридан стерженнинг абсолют чўзилишини ҳисоблаш учун, олдин чиқарилган:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF}$$

формуладан фойдаланса бўлар экан; фақат N кучнинг ўрнига, қўйилган юк P билан стерженнинг ярим оғирлиги йиғиндисини олиш лозим.

Тенг қаршилиқ кўрсатувчи шаклнинг абсолют чўзилишини ёки сиқилишини топиш осон, чунки унинг барча қўндаланг кесимидаги қучланишлар бир хил бўлиб, рухсат этилган қучланишга тенг. Шунинг учун:

$$\epsilon = \frac{[\sigma]}{E}, \quad \Delta l = \frac{[\sigma]l}{E} = \frac{[\sigma]Fl}{EF_0} = \frac{Pl}{EF_0}$$

бўлади.

Погонали стерженларнинг ҳар қайси поғонаси учун Δl_i ҳисобланади. Навбатдаги поғона учун ҳисоблаганда олдинги погонанинг оғирлигини кўзда тутиш лозим. Умумий Δl ҳар қайси погоналар учун ҳисобланган Δl_i ларнинг йиғиндисига тенгдир.

31-§. Эгилувчан ипни ҳисоблаш

Иншоот ва машина қисмларида фақат чўзилишгагина қаршилиқ кўрсатадиган баъзи элементлар учрайди. Бундай элементлар *эгилувчан ип* дейилади. Симлар, махсус вагончалар юрадиган сим арқонлар (трослар), осилиб турадиган кўприкларни тутиб турувчи элементлар, ингичка стерженлар ва бошқалар ана шу термин билан аталади. Бундай элементларнинг мустаҳкамлигини ҳисоблашда, уларнинг хусусий оғирлиги муҳим аҳамиятга эга.

Ўз оғирлиги таъсирида бўлган ва қўндаланг кесими ўзгармайдиган эгилувчан ип ҳар хил баландликда турувчи A ва B нуқталарга осилган (80-шакл). Ип ўзининг хусусий оғирлиги таъсиридан AOB эгри чизиқни ҳосил қилади. Бу эгри чизиқнинг шаклини аниқлаш учун ипнинг мувозанат дифференциал тенгламасини тузамиз. Ипнинг узунлик бирлигидаги оғирлигини p кг/см билан, горизонтал ўқнинг узунлик бирлигидаги оғирлигини эса q кг/см билан белгилаймиз. Ипдан чексиз кичик элемент ажратиб, унинг

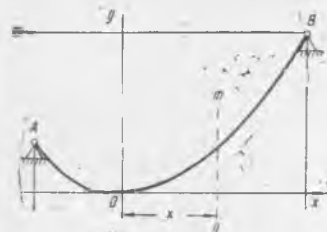


79-шакл.

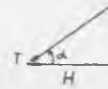
узунлигини ds , горизонтал проекциясини эса dx деймиз. Мазкур элементга тўғри келган юк pds ёки qdx га тенгдир.

$$pds = qdx; \text{ бундан } p = q \frac{dx}{ds} = q \cos \alpha. \quad (31.1)$$

α — ипга ўтказилган уринманинг оғиш бурчаги. Ипдан ажратилган элементнинг M ва N нуқталарига ташлаб юборилган қисмларининг таъсирини алмаштирувчи T ва T_1 тортилишларни қўямиз. Ип эгилувчан бўлгани учун бу кучлар



80-шакл.



81-шакл.

ипнинг M ва N нуқталарига уринма бўлиб йўналади (81-шакл). Ажратилган элемент бир нуқтада кесишувчи учта T , T_1 ва qdx кучлар таъсирида мувозанатда туради. Шунинг учун мувозанат тенгламаларини қуйидагича ёзамиз:

$$\Sigma x = H_1 - H = 0,$$

$$\Sigma y = H_1 \operatorname{tg}(\alpha + d\alpha) - H \operatorname{tg} \alpha - qdx = 0.$$

Бу ерда T ва T_1 тортилишларнинг горизонтал проекциялари H ва H_1 билан белгиланган. Бу тенгламаларнинг биринчисидан:

$$H_1 = H;$$

яъни ип тортилишининг горизонтал проекциялари ўзгармас экан. Бу асосда мувозанат тенгламаларининг иккинчисини қуйидагича ёзамиз:

$$H \{ \operatorname{tg}(\alpha + d\alpha) - \operatorname{tg} \alpha \} = qdx.$$

Аммо:

$$\operatorname{tg}(\alpha + d\alpha) - \operatorname{tg} \alpha \approx d \operatorname{tg} \alpha = d \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2 y}{dx^2} dx$$

бўлгани учун, олдинги тенгликни dx га қисқартириб, ипнинг мувозанат тенгламасини қуйидагича ёзамиз:

$$H \frac{d^2 y}{dx^2} = q. \quad (31.2)$$

p юк, умуман, ип бўйича бир хил эмас, шунинг учун биз уни x нинг функцияси деб ҳисоблашимиз керак. Амалий масалаларни ечишда юк ип бўйича тенг тарқалади деб қабул қилинади, шунинг учун $p = \text{const}$. Бу ҳолда ипнинг горизонтал проекциясига тегишли узунлик бирлигидаги оғирлиги:

$$q = \frac{p}{\cos \alpha} \quad (31.3)$$

ўзгарувчан бўлади, чунки $\cos \alpha$ ил бўйича ўзгарувчандир. Ипнинг учлари орасидаги масофа катта бўлиб, унинг салқилиги j кичик бўлса, α бурчак ҳам кичик бўлади. Бу тарздаги иплар учун $\cos \alpha = 1$ деб қабул қилиш мумкин:

У ҳолда:

$$T \approx H, \quad (31.4)$$

$$q \approx p = \text{const}, \quad (31.5)$$

яъни ипнинг тортилиши ўзгармас ва юк горизонтал ўқ бўйича тенг тарқалган деб қабул қилинади.

Бундай шартларда (31.2) тенгламанинг интеграллини қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$\left. \begin{aligned} H \frac{dy}{dx} &= qx + c_1 \\ Hy &= \frac{qx^2}{2} + c_1x + c_2 \end{aligned} \right\} \quad (31.6)$$

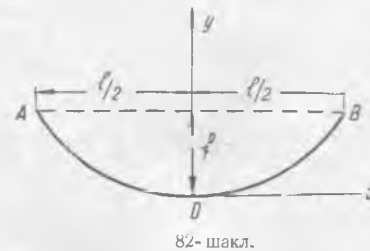
Бу тенгламалардан тенг тарқалган юк таъсиридаги салқилиги кичик бўлган ил парабола шаклига киришини кураимиз. Ихтиёрий ўзгармасларни қуйидаги шартдан аниқлаймиз (80-шакл):

$$x = 0 \text{ бўлганда, } y = 0 \text{ ва } \frac{dy}{dx} = 0, \quad (31.7)$$

демак, $c_1 = 0$, $c_2 = 0$.

Шунинг учун (31.6) тенгламалар қуйидагича ёзилади:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{qx}{H} \\ y &= \frac{qx^2}{2H} \end{aligned} \right\} \quad (31.8)$$



Ил маҳкамланган A ва B нукталар бир хил баландликда бўлган ҳолни текшираимиз (82-шакл). Ипнинг салқилиги j ни (31.8) дан аниқлаймиз, яъни $x = \frac{l}{2}$ бўлганда $y = f$ бўлади:

$$f = \frac{ql^2}{8H}$$

Бу формуладан фойдаланиб, ипнинг тортилишини салқилик f орқали ифодалаймиз.

$$T = H = \frac{ql^2}{8f}. \quad (31.9)$$

Ипнинг салқилиги жуда кичик бўлмаса, α бурчак параболанинг салқилиги энг катта нуктасида, яъни парабола учида ноль бўлиб, боғланиш нуқталарига қараб ўса боради. Шунингдек, ипнинг тортилиши T ҳам шу нуқтада узининг горизонтал проекцияси H га тенг бўлиб, боғланиш нуқталарига қараб ўсади. Шаклдан:

$$H = T \cos \alpha \quad \text{ёки} \quad T = \frac{H}{\cos \alpha}$$

тенгликни оламиз. Боғланган нуқтада илга ўтказилган уринманинг киялик бурчаги (α) энг катта қийматга эришади. Шунинг учун бу нуқтада тортилиш

$T_{\max}$ бўлади. Мазкур $T_{\max}$ ни ҳисоблаш учун $\frac{1}{\cos \alpha}$ нинг қийматини топамиз:

$$\frac{1}{\cos \alpha} = \sec \alpha = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \sqrt{1 + y'^2}, \quad (a)$$

y' нинг қийматини (31.7) дан $x = \frac{l}{2}$ учун ҳисоблаймиз:

$$(y')_{x=\frac{l}{2}} = \frac{ql}{2H}.$$

Бу тенгликка H нинг қийматини (31.9) дан келтириб қўямиз. У ҳолда:

$$(y')_{x=\frac{l}{2}} = \frac{4f}{l}, \quad (б)$$

y' ни (б) дан (а) га қўйсак:

$$\frac{1}{\cos \alpha} = \sqrt{1 + 16 \frac{f^2}{l^2}} \quad (c)$$

келиб чиқади. Энди $T_{\max}$ учун қуйидаги формулани оламиз:

$$T_{\max} = H \sqrt{1 + 16 \frac{f^2}{l^2}}. \quad (31.10)$$

Салқилиги кичик ип учун мустаҳкамлик шarti қуйидагича ёзилади:

$$\sigma = \frac{H}{F} \leq [\sigma];$$

H нинг ўрнига унинг қийматини (31.9) дан келтириб қўйсак,

$$\frac{ql^2}{8H} \leq [\sigma] \quad (31.11)$$

формулани ҳосил қиламиз. F , q ва $[\sigma]$ маълум бўлса, мустаҳкамлик шartини қаноатлантирувчи салқилик (1) ни аниқлашимиз мумкин. Агар q эгилувчан ипнинг хусусий оғирлигигина бўлса, масала анча осонлашади; $q = f \gamma$ бўлиб, ҳисоб тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$\frac{\gamma f^2}{8} \leq [\sigma]$$

бундан:

$$f \leq \frac{8[\sigma]}{\gamma}. \quad (31.12)$$

Энди ип ёйи L , ватари l ва салқилиги f орасидаги геометрик муносабатни чиқарамиз.

Ип салқилигини тасвирловчи параболанинг тенгламасини каноник кўринишда ёзамиз:

$$x^2 = 2py \quad \text{ёки} \quad y = \frac{x^2}{2p}, \quad (31.13)$$

бундан p — параболанинг параметри. Парабола ёйининг узунлиги қуйидагича аниқланади:

$$L = \int_{AOB} ds = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \sqrt{1 + y'^2} dx = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Ипнинг салқилиги кичик бўлса, y' ҳам кичик бўлади. $\sqrt{1+y'^2}$ радикални қаторга ёйиб, унинг тақрибий қийматини қуйидагича ёзамиз:

$$\sqrt{1+y'^2} \approx 1 + \frac{1}{2}y'^2.$$

Буни олдинги тенгликка қўйиб, ёйнинг узунлиги учун қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз:

$$L = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \left(1 + \frac{1}{2}y'^2\right) dx = l + \int_0^{\frac{l}{2}} y'^2 dx$$

ёки

$$L - l = \int_0^{\frac{l}{2}} y'^2 dx. \quad (31.14)$$

y' нинг қийматини (31.13) дан келтириб қўйиб, (31.14) интегрални ҳисобласак:

$$L - l = \frac{f^2}{24\rho^2}$$

келиб чиқади. Параметр (ρ) нинг қийматини (31.13) дан қуйидагича аниқлаймиз: $x = \frac{l}{2}$ бўлганда $y = f$.

Шунинг учун:

$$f = \frac{l^2}{8\rho}; \quad \frac{1}{\rho^2} = \frac{64 \cdot f^2}{l^4}.$$

Демак:

$$L - l = \frac{8f^2}{3l}. \quad (31.15)$$

Парабола ёйи, ватари ва салқилиги орасидаги тақрибий муносабатни чиқардик.

Эгилувчан ип эластик бўлса, тортилиш H таъсиридан

$$\Delta L = \frac{Hl}{EF} \quad (31.16)$$

га чўзилади. Салқилик кичкина бўлганидан, ипнинг узунлиги (L) ни маҳкамланган нуқталар оралиғи (l) билан алмаштирдик. Температура ҳам ўзгарса, қўшимча чўзилиш ҳосил бўлади:

$$\Delta L_t = \alpha t l. \quad (31.17)$$

Энди, чиқарилган формулалардан фойдаланиб, ипнинг мустаҳкамлигига оид амалий масалаларни ечамиз.

Ипнинг бошланғич узунлиги L_0 , боғланган нуқталарнинг оралиғи l бўлсин. Узунлик бирлигидаги оғирлиги $q = F\gamma$ бўлади; γ — ипнинг солиштирма оғирлиги. Ип тортилганда, унинг узунлиги ўзгаради, шунинг учун $L_0 - l = \delta$ айирмаси деформация натижасида $L - l = \delta + \Delta L$ га айланади. Бу тенгламани (31.15) ва (31.16) га мувофиқ қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{8}{3} \frac{f^2}{l} = \delta + \frac{Hl}{EF}. \quad (31.18)$$

Деформация шартидан чиқарилган мазкур тенгламани, статик тенглама (31.9) билан бирга ечиш мумкин. Учта миқдор H, δ ва f дан бирортаси маълум бўлса, қолган иккитасини бу тенгламалардан аниқлаш мумкин.

Масалан δ маълум бўлса, f ни аниқлаш учун қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\frac{8}{3} \frac{f^2}{l} = \delta + \frac{ql^3}{8EFf};$$

нинг ўрнига унинг қийматини келтириб қўйсак, f ни аниқлаш учун қуйидаги кубик тенгламани ҳосил қиламиз:

$$f^3 - \frac{3l}{8} \delta f - \frac{3ql^4}{64E} = 0. \quad (31.19)$$

Бу тенгламадан ипнинг салқилиги f аниқланса, кучланишни қуйидаги формуладан ҳисоблаш осон:

$$\sigma = \frac{H}{F} = \frac{ql^2}{8Ff} = \frac{\gamma l^2}{8f}. \quad (31.20)$$

Салқилик (f) ни аниқлаш учун чиқарилган (31.19) тенгламада температуранинг таъсири эътиборга олинмаган. Ундан ташқари, эгилувчан ипга ўзининг хусусий оғирлигидан бошқа юк ҳам қўйилган бўлиши мумкин. Бу факторлар ҳисобга олинганда (31.19) тенгламадаги ўрта ҳаднинг коэффициенти ўзгаради. Салқилик катта бўлса, ип парабола шаклини олмайди. Унинг салқилиги занжир чизиги билан тасвирланади.

МАСАЛАЛАР

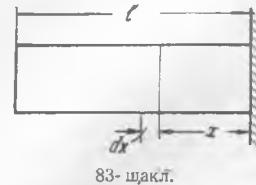
23. Қўндаланг кесим юзи F , солиштирма оғирлиги γ бўлган призматик стержень юқориги учи билан осилиб, хусусий оғирлигидан чўзилади. Чўзилишининг стержень бўйича қандай қонун билан ўзгариши топилисин (83- шакл).

Е ч и ш. Стерженнинг юқориги учидан x ораликдаги кесимда зўриқиш $N = F\gamma(l-x)$ бўлади. Гук қонунига мувофиқ:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{N}{EF} = \frac{\gamma}{E}(l-x).$$

Бирор чексиз кичик элемент (dx) нинг абсолют чўзилиши: $\Delta(dx) = \epsilon_x dx$ бўлади. x ораликдаги чўзилишни топиш учун қуйидаги интеграл ифодани ёзамиз.

$$\Delta l_x = \int_0^x \epsilon_x dx = \int_0^x \frac{\gamma}{E}(l-x) dx = \frac{\gamma}{E} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right)$$



Хусусий оғирлик таъсиридан ҳосил бўладиган чўзилиш парабола қонуни билан ифодаланар экан.

$$\text{Стерженнинг ўртасидаги чўзилиш } (\Delta l)_{x=l} = \frac{l}{2} = \frac{3}{8} \frac{\gamma l^2}{E} = \frac{3}{8} \frac{Ql}{EI},$$

бунда

$$Q = Fl\gamma.$$

Стержень учининг силжиши:

$$(\Delta l)_{x=l} = \frac{1}{2} \frac{\gamma l^2}{E} = \frac{Ql}{2EI}.$$

24. Юқориги учи билан осиб қўйилган призматик стержень хусусий оғирлиги таъсирдан чўзилади. Стерженнинг солиштирма оғирлиги $\gamma = 7,85 \text{ т/м}^3$, рухсат этилган кучланиши $[\sigma] = 1400 \text{ кг/см}^2$ бўлсин, унинг узунлиги l қанча бўлиши мумкин?

Жавоби.

$$\sigma_{\max} = l_{\max} \gamma \leq [\sigma]; \quad l_{\max} = \frac{[\sigma]}{\gamma} = 1784 \text{ м.}$$

25. Океаннинг чуқурлиги ўлчанадиган тигель пўлаги симиянинг солиштирма оғирлиги $\gamma = 7,85 \text{ т/м}^3$; хусусий оғирлигидан ҳосил бўладиган кучланиш эластиклик чегарасига тегишли $\sigma_e = 10000 \text{ кг/см}^2$ кучланишдан ошмаслиги учун, унинг энг катта узунлиги қанча бўлиши керак?

Жавоби. $l_{\max} = 14,6 \text{ км.}$

26. Тошдан ишланган устуннинг баландлиги $h = 10 \text{ м}$, устуннинг ўқи бўйлаб 50 т сиқувчи юк қўйилган, устун материалнинг солиштирма оғирлиги $\gamma = 2 \text{ т/м}^3$, рухсат этилган кучланиши $[\sigma] = 10 \text{ кг/см}^2$. Устуннинг қўндаланг кесим юзи топилсин.

Жавоби. $F = 625 \text{ см}^2$.

27. Шахта штангасининг узунлиги $l = 100 \text{ м}$, унинг юқориги учи маҳкамланиб, пастки учига $P = 2 \text{ т}$ юк осилган. Штанга материали учун рухсат этилган кучланиш $[\sigma] = 1000 \text{ кг/см}^2$, солиштирма оғирлиги $\gamma = 7,85 \text{ т/м}^3$; штангасининг диаметри аниқлансин.

Жавоби. $d = 1,66 \text{ см.}$

28. Баландлиги $h = 30 \text{ м}$ бўлган поғонали устуннинг қўндаланг кесими квадрат шаклида. Устун учта тенг қисмдан иборат. Унга $P = 60 \text{ т}$ сиқувчи куч қўйилган. Устуннинг материали учун рухсат этилган кучланиш $[\sigma] = 10 \text{ кг/см}^2$, солиштирма оғирлик $\gamma = 2 \text{ т/м}^3$, поғоналарнинг ўлчамлари ҳисоблансин.

Жавоби. $87 \times 87 \text{ см}^2$, $96 \times 96 \text{ см}^2$, $108 \times 108 \text{ см}^2$.

29. Мис сим $l = 50 \text{ м}$ ораликдаги A ва B нуқталарга осилган. Симнинг қўндаланг кесим диаметри $d = 5 \text{ мм}$, солиштирма оғирлиги $\gamma = 0,008 \text{ кг/см}^3$, рухсат этилган кучланиши $[\sigma] = 500 \text{ кг/см}^2$. Симда ҳосил бўладиган максимал ва минимал тортилишлар ҳамда салқилик (f) топилсин.

Ечиш. Максимал тортилиш ип осиб қўйилган нуқталарда ҳосил бўлади. Унинг қиймати:

$$T_{\max} = \frac{\pi d^2}{4} [\sigma] = 63 \text{ кг.}$$

Минимал тортилиш (H) ни қуйидаги формуладан топамиз:

$$H = \frac{T_{\max}}{\sqrt{1 + 16 \frac{l^2}{f^2}}}; \text{ амм} \sqrt{1 + 16 \frac{l^2}{f^2}} \approx 1 + 8 \frac{l^2}{f^2}.$$

Шунинг учун:

$$H = \frac{T_{\max}}{1 + 8 \frac{l^2}{f^2}}. \quad (a)$$

Бундан ташқари, H ва f қуйидаги муносабат билан боғланган:

$$H = \frac{ql^2}{8f} \quad (a)$$

$$q = F\gamma = 0,126 \cdot 0,008 \cdot 100 = 0,1 \text{ кг/м.}$$

Энди (a) ва (б) тенгламаларни ечиб, H ва f учун қуйидагиларни оламиз:

$$f = \frac{T_{\max}}{2q} \sqrt{\left(\frac{T_{\max}}{2q}\right)^2 - \frac{l^2}{8}} = 0,5 \text{ м} \quad H = \frac{0,1 \cdot 50^2}{8 \cdot 0,5} = 62,5 \text{ кг.}$$

$T_{\max}$ билан H нинг қийматини солиштириб, $T_{\max}$ ни H дан фақат $0,8\%$ га фарқ қилишини кураимиз.

30. Пулат симнинг тортилмагандаги узунлиги $l = 40 \text{ м}$, $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ ва $\gamma = 78 \text{ т/м}^3$; унда ҳосил бўладиган кучланиш билан салқилиги (f) топилсин.

Ечиш. Симнинг тортилишини $H = \frac{ql^2}{8f}$ формуладан аниқлаб, ундаги эластик чўзилишни ҳисоблаймиз:

$$\Delta l = \frac{Hl}{EF} = \frac{ql^3}{8fEF} = \frac{\gamma l^3}{8fF}. \quad (a)$$

Иккинчи томондан, эластик чўзилиш (31,15) формулага мувофиқ:

$$\Delta l = \delta = L - l = \frac{3}{8} \frac{f^2}{l} \quad (e)$$

булади, (a) ва (б) ифодаларни солиштириб, f учун

$$f = \frac{l^3}{4} \sqrt{\frac{3\gamma l}{E}} = \frac{4000^3}{4} \sqrt{\frac{3 \cdot 11,0078 \cdot 4000}{2 \cdot 10^4}} = 36,1 \text{ см}$$

қийматни ҳосил қиламиз.

Синда ҳосил буладиган кучланиш:

$$\sigma = \frac{H}{F} = \frac{\gamma l^2}{8f} = \frac{0,0078 \cdot 4000^2}{8 \cdot 36,1} = 432 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$$

□

V боб

КУЧЛАНИШЛАРНИНГ АНАЛИЗИ

32-§. Қия кесимлардаги кучланишлар

Бизни ҳозиргача призматик стерженларнинг қўндаланг кесимидаги кучланиш билан узунлигининг ўзгариши кизиқтирган эди.

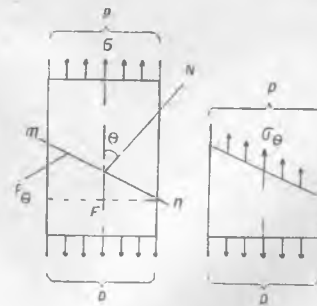
Энди текширишимизни бирмунча чуқурлаштириб, стерженнинг исталган қия кесимидаги кучланишларни қараб чиқамиз. Шунинг билан бирга, призматик стерженнинг чўзилиш ва сиқилишдаги деформациясини ҳам кенг-роқ равишда текшириб ўтамиз. Масалани бундай текширишимиз натижасида, призматик стержень оддий чўзилган ҳолда ҳам унинг қия кесимларида нормал кучланишдан ташқари, тангенциал кучланишлар ҳам бўлишини кўрсатиш билан баравар, унда чўзилиш деформациясидан ташқари, силжиш деформацияси ҳам бўлишини кўрсатиб ўтамиз.

Призматик стержень иккала учига қўйилган чўзувчи кучлар таъсирида бўлади, деб фараз қилайлик (84-шакл). Стерженнинг бундай кучланиш ҳолати *чизикли кучланиш* ҳолати дейилади. Бу ҳол учун призматик стерженнинг бирор қия кесимидаги кучланишларни текшира-
рамыз.

Материаллар қаршилигининг умумий усулидан фойдаланиб, стерженнинг бирор нуқтасидан битта текислик ўтказамиз. Стержень бу текислик билан икки қисмга ажратилган деб фараз қилиб, бир қисмининг мувозанатини текширамыз. Стерженнинг қия текислик билан кесилиши натижасида ҳосил бўлган m кесимнинг йўналишини θ бурчак орқали аниқлаймиз. Бу бурчак m кесимнинг ташқи нормали билан стерженнинг ўқи орасидаги бурчак бўлиб, стерженнинг ўқидан нормалга қараб, соат стрелкаси юрадиган томонга йўналган бўлса, *мусбат* деб, акс ҳолда *манфий* деб ҳисоблаймиз.

Стерженнинг қўндаланг кесим юзини F билан, қия кесим юзини F_θ билан белгиласак, унинг қиймати бундай ифодаланади:

$$F_\theta = \frac{F}{\cos \theta} \quad (32.1)$$



84-шакл.

Текширилаётган стерженнинг пастки қисмига юқориги қисмининг таъсирини алмаштирувчи эластик кучларни қўямиз: бу кучлар *тп* кесимга қўйилган бўлиб, уларнинг тенг таъсир этувчиси *P* кучга тенгдир. Юқорида биз стерженнинг ҳамма бўйлама элементлари бир хилда чўзилади деган эдик. Шунинг учун *тп* кесим бўйича эластик кучларни тенг тарқалган дейишимиз мумкин.

Бу кучланишни σ_0 билан белгилаб, унинг учун қуйидаги тенгликни ёзишимиз мумкин:

$$\sigma_0 = \frac{P}{F_0} = \frac{P \cos \theta}{F} = \sigma_y \cos \theta. \quad (32.2)$$

Бунда $\sigma_y = \frac{P}{F}$ у ўқига нормал бўлган кўндаланг кесимдаги нормал кучланишдир. (32.2) дан қия кесимдаги кучланишнинг миқдори кесимнинг йўналишига боғлиқ эканлиги кўриниб турибди.

Бу кучланишни *тп* кесимнинг нормали ва кесим текислигига уринма йўналишлар бўйича икки тузувчига ажратамиз. σ_0 нинг нормал бўйича йўналган тузувчисини σ билан белгилаб, уни *нормал кучланиш* деб атаймиз; кесим юзасига уринма бўйича йўналган тузувчисини τ билан белгилаб, уни *тангенциал кучланиш* деймиз.

85-шакл ва (32.2) тенгликни эътиборга олиб, σ ва τ учун қуйидаги ифодаларни ҳосил қиламиз:

$$\sigma = \sigma_0 \cos \theta = \sigma_y \cos^2 \theta, \quad (32.3)$$

$$\tau = \sigma_0 \sin \theta = \sigma_y \cos \theta \sin \theta = \frac{\sigma_y}{2} \sin 2\theta. \quad (32.4)$$

Бу формулалардан σ билан τ θ бурчагига боғлиқ функция эканлиги очикдан-очик кўриниб турибди. Демак, σ билан τ қия кесим йўналишининг ўзгариши билан ўзгарар экан.

Энди, θ бурчакнинг қандай қийматларида σ билан τ максимал ва минимал қийматларга эришишини толамиз.

$\cos \theta = 1$ ёки $\theta = 0$ бўлганда σ максимал қийматга эришади.

Демак:

$$\sigma_{\max} = \sigma_y.$$

$\cos \theta = 0$ ёки $\theta = \frac{\pi}{2}$ бўлганда σ минимал қийматга эришади.

Демак:

$$\sigma_{\min} = 0.$$

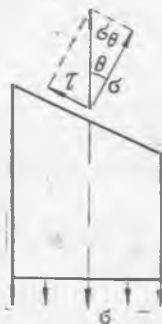
$\sin 2\theta = 1$ ёки $\theta = \frac{\pi}{4}$ бўлганда τ максимал қийматга эришади.

Демак:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_y}{2};$$

$\sin 2\theta = 0$, $\theta = 0$ ёки $\theta = \frac{1}{2}\pi$ бўлганда,

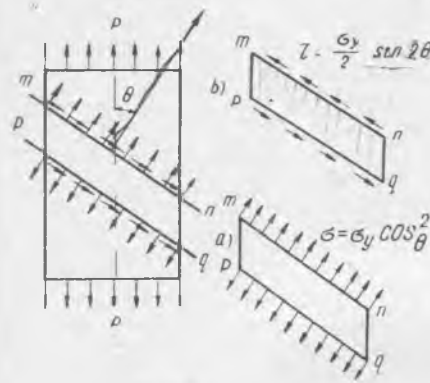
$$\tau_{\min} = 0$$



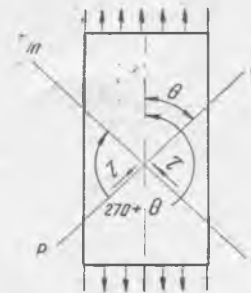
85-шакл.

бўлади. Оддий қўзилишда максимал нормал кучланиш стерженнинг кўндаланг кесимида бўлиб, унинг бўйлама кесимида ҳеч қандай нормал кучланиш бўлмайди; демак, стерженнинг бўйлама толалари бир-бирига ҳеч қандай босим бермас экан.

Бундан ташқари, оддий қўзилишдаги стерженнинг ўқига 45° қия бўлган кесимида тангенциал кучланиш максимал қийматга эришиб, у кўндаланг кесимдаги кучланишнинг ярмисига тенг бўлади.



86-шакл.



87-шакл.

Нормал ва тангенциал кучланишларни қўзилувчи стерженнинг элементларига кўрсатадиган таъсирини текшириш учун, ундан бир-бирига чексиз яқин икки параллел текислик билан $mprq$ элементни ажратамиз (86-шакл). Бу элементнинг mp ва rq кесимларига стерженнинг ташлаб юборилган қисмлари таъсирини алмаштирувчи эластик кучларни қўйиб, бу кучлар таъсиридан $mprq$ элементнинг мувозанатини текшираемиз. Бу кучлар кесим бўйича тенг тарқалган нормал ва тангенциал кучланишларга келтирилади.

Агар mp ва rq кесимларни бир-бирига яқинлаштирсак, лимитда бу икки кесим бирлашиб, уларга қўйилган нормал кучланишлар бу икки кесимни бир-биридан ажратишга интилади; тангенциал кучланишлар эса бу икки кесимни бир-бирига нисбатан силжитишга интилади (86-шакл, а, б). Шунинг учун, нормал кучланиш, кўпинча, *ажратувчи* ёки *узувчи* кучланиш деб, тангенциал кучланиш эса *силжитувчи* ёки *кесувчи* кучланиш деб аталади.

Энди, оддий қўзилишдаги стерженда олинган бир-бирига тик икки mp ва rq кесимдаги тангенциал кучланишларнинг ўзаро муносабатини текшираемиз (87-шакл).

Агар биз (32.3) ва (32.4) формулалардаги θ нинг ўрнига $(270^\circ + \theta)$ қўйсак, rq кесимдаги нормал кучланиш σ' ва тангенциал кучланиш τ' учун қуйидаги ифодаларни ҳосил қиламиз:

$$\sigma' = \sigma_y \cos^2(270^\circ + \theta) = \sigma_y \sin^2 \theta.$$

$$\tau' = \frac{\sigma_y}{2} \sin 2(270^\circ + \theta) = -\frac{\sigma_y}{2} \sin 2\theta.$$

Бу ифодаларни (32.3) ва (32.4) формулалар билан солиштириб, қуйидаги тенгликларни оламиз:

$$\sigma' + \sigma = \sigma_y, \quad \tau = -\tau'. \quad (32.5)$$

Ўзаро тик юзалардаги тангенциал кучланишлар сон жиҳатидан ҳамма вақт бир-бирига тенг, ишораси жиҳатидан эса тескаридир. Бу хулосага алоҳида аҳамият бериш керак. Бу ҳол тангенциал кучланишларнинг махсус хусусиятидир. Бу хусусият *тангенциал кучланишларнинг жуфтлик принципи* деб юритилади.

Келгусида биз бирор юзада тангенциал кучланишни учратар эканмиз, тўғридан-тўғри, бу юзага тик юзада ҳам 1-юзадаги тангенциал кучланишга сон жиҳатидан тенг ва тескари ишорали тангенциал кучланиш борлигини тасдиқлай оламиз.

Призматик стерженларнинг турли кесимларидаги кучланишларни график равишда тасвирлайдиган бир усул бор. (σ, τ) текисликда (32.3) ва (32.4) тенгламаларни бирор эгри чизиқнинг параметрик тенгламалари деб ҳисоблаб, унинг графигини чизамиз. Бунинг учун абсцисса ўқи бўйлаб σ ни, ордината ўқи бўйлаб τ ни қўямиз. У ҳолда θ бурчакнинг ҳар бир қиймати учун аниқланган σ ва τ мазкур (σ, τ) текисликдаги маълум D нуқтани аниқлайди. Бу тарзда аниқланган нуқталарнинг геометрик ўрни (σ, τ) текисликда бирор эгри чизиқни тасвирлайди. Бу эгри чизиқ ҳар қандай кучланиш ҳолати учун (биз текшираётган хусусий ҳолда ҳам) доира эканлигини исботлаймиз.

Бунинг учун (32.3) тенгламадаги θ бурчакнинг ўрнига қўш бурчак (2θ) ни қуйидаги формула воситаси билан киритамиз.

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}.$$

У ҳолда нормал ва тангенциал кучланишлар қуйидагича ёзилади:

$$\sigma = \sigma_y \frac{1 + \cos 2\theta}{2},$$

$$\tau = \sigma_y \frac{\sin 2\theta}{2}.$$

Бу тенгламалардан θ ни чиқариб ташласак, юқорида айtilган D нуқталарнинг геометрик ўрнини қаноатлантирувчи тенгламани оламиз:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2 = \frac{\sigma_y^2}{4}. \quad (32.6)$$

Бу — маркази абсцисса ўқида, координаталар бошидан $\frac{\sigma_y}{2}$ масофада ётувчи, радиуси $\frac{\sigma_y}{2}$ га тенг доиранинг тенгламасидир. Кучланишни бу тарзда тасвирлашни энг аввал Мор деган олим тавсия этгани учун бу доира *Мор доираси* ёки *кучланишлар доираси* дейилади.

θ бурчакка қия бўлган юзадаги σ ва τ ни аниқловчи D нуқта доира маркази билан туташтирилса, $\angle DCK = 2\theta$ бўлади (83-шакл). Ҳақиқатан ҳам, D нуқтанинг координаталари:

$$\sigma' = OK = OC + CK = \frac{\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_y}{2} \cos 2\theta = \sigma_y \frac{1 + \cos 2\theta}{2},$$

$$\tau' = DK = CD \sin 2\theta = \frac{\sigma_y}{2} \sin 2\theta.$$

Қўрамизки, бу координаталар (32.3) ва (32.4) тенгламалар билан ифодаланаётир.

Энди, Мор доирасидан фойдаланиб, σ ва τ ҳосил бўлган юзанинг йўналишини аниқловчи тенгламани чиқарамиз.

Бунинг учун 88- шаклдаги DCK учбурчакдан фойдаланамиз:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{DK}{CK} = \frac{\tau'}{\sigma' - \sigma_0} \quad (32.7)$$

Аммо θ нинг қийматини тўғридан-тўғри Мор доирасидан график равишда аниқлаш ҳам мумкин: $y \angle DOK$ бўлади.

Демак, бирор юзадаги (σ , τ) кучланиш маълум бўлса, яъни Мор доирасида D нуқта берилган бўлса, бу нуқтага тегишли юзанинг йўналишини график усулда аниқлаш осон экан.

Нормал ва тангенциал кучланишларнинг қандай юзаларда максимал ва минимал қийматларга эришиши ҳақидаги хулосаларни ҳам Мор доирасидан бевосита чиқариш мумкин.

33-§. Текис кучланиш ҳолати

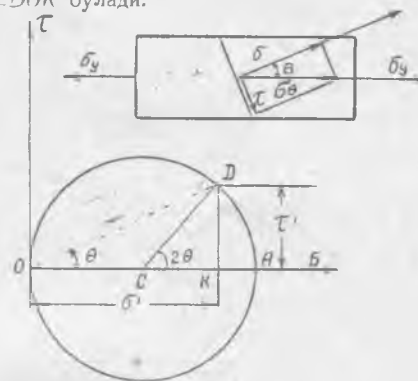
Тўғри бурчакли параллелепипед шаклидаги жисмнинг x ва y ўқларга тик бўлган ёқларига тенг тарқалган нормал кучлар таъсир қилаётган ва бу нормал кучларнинг тенг таъсир этувчилари тегишлича P_x ва P_y бўлсин (89-шакл). Бу кучлар қўйилган кесим юзлари F_x ва F_y бўлсин. y ҳолда, x ва y ўқларга тик бўлган юзалардаги нормал кучланишларни σ_x ва σ_y десак, улар учун:

$$\sigma_x = \frac{P_x}{F_x}, \quad \sigma_y = \frac{P_y}{F_y}$$

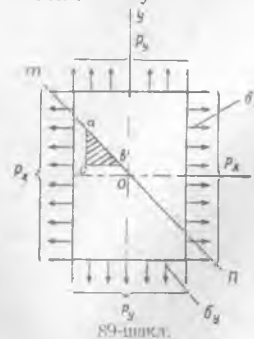
формулаларни ҳосил қиламиз. Мазкур кучланишлар ҳосил бўлган юзаларда тангенциал кучланишлар нолга тенгдир. Тангенциал кучланиш ноль бўлиб, фақат нормал кучланишгина таъсир қилувчи юзалар бош юзалар дейилади.

Биз юпқа параллелепипед шаклидаги призматик стерженни махсус равишда танладик ва унинг ёқларига фақат нормал кучлар қўйиб, бош юзаларга айлантирдик. Аммо, умуман, кучлар қандай қўйилса ҳам жисмнинг ҳар қандай нуқтасидан шундай учта ўзаро тик юзалар ўтказиш мумкинки, бу юзаларда фақат нормал кучланишларгина таъсир қилиб, тангенциал кучланишлар ноль бўлади. Бу ўзаро тик учта юза мазкур нуқта учун бош юзалар бўлиб, ундаги нормал кучланишлар бош кучланишлар дейиладди. Ҳозирча бу ҳақда берилган тушунчалар билан чекланиб, текис кучланиш ҳолатига оид масалаларни текширишга ўтамыз.

Жисмнинг турли юзаларидаги тўла кучланиш векторлари бир текисликда ётса, бундай кучланиш ҳолати текис кучланиш ҳолати дейилади.



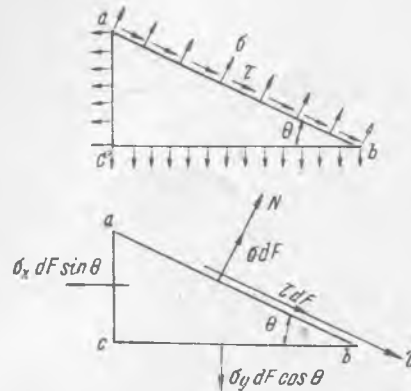
88-шакл.



89-шакл.

Биз текшираётган ҳолда σ_x ва σ_y бир текисликда ётганидан, у ҳам текис кучланиш ҳолатига кириди.

Энди P_x ва P_y кучлар таъсиридан стерженнинг қия кесимларида ҳосил бўладиган кучланишларни текшираемиз. Бунинг учун, θ бурчак билан аниқланадиган ва шакл текислигига тик mn текислик ҳамда x, y ўқларга тик текисликлар билан стержендан асоси abc тўғри бурчакли учбурчак бўлган бир призма ажратамиз (89- шакл).



90- шакл.

Лагарга тегишлича $\sigma_x dF \sin \theta$ ва $\sigma_y dF \cos \theta$ кучлар қўйилган. Бу кучлар таъсиридан abc призма мувозанатда бўлиб, бу кучларнинг мувозанат шартини тузамиз. Бунинг учун бутун кучларни N ва T ўқлардаги проекцияларининг йиғиндиларини нолга тенглаштирамиз:

$$\begin{aligned} \sigma dF - \sigma_y dF \cos^2 \theta - \sigma_x dF \sin^2 \theta &= 0, \\ \tau dF + \sigma_y dF \cos \theta \sin \theta - \sigma_x dF \sin \theta \cos \theta &= 0. \end{aligned}$$

Бу икки тенгликдан стерженнинг қия кесимидаги нормал ва тангенциал кучланишларни толамиз:

$$\sigma = \sigma_y \cos^2 \theta + \sigma_x \sin^2 \theta, \quad (33.1)$$

$$\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta. \quad (33.2)$$

Бу σ ва τ кучланишлар кесимнинг абсцисса ўқи билан тузган бурчаги (θ) нинг функцияси бўлар экан.

Энди, бу кучланишлар қандай кесимларда, яъни θ нинг қандай қийматларида максимал ва минимал қийматларга эришишини толамиз. Бунинг учун (33.1) ва (33.2) тенгламалардан θ га нисбатан ҳосила оламиз:

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta = 0(*).$$

Бу ифода (33.2) тенгликнинг ўнг томонига мос келади. Демак, нормал кучланиш максимал ва минимал қийматларга эришган юзаларда тангенциал кучланиш ноль бўлар экан.

Нормал кучланишнинг максимал ва минимал қийматларини топиш учун, $\sigma_y > \sigma_x$ деб фараз қилиб, (*) тенгламани ечамиз ва θ бурчак учун қуйидаги қийматларни оламиз:

$$\sin 2\theta = 0, \text{ бундан } 2\theta = 0 \text{ ёки } 2\theta = \pi,$$

демак, $\theta_1 = 0$ ва $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ бўлади.

θ нинг қандай қийматида σ максимал бўлишини билиш учун (*) дан яна ҳосила оламиз:

$$\frac{d^2\sigma}{d\theta^2} = -2(\sigma_y - \sigma_x) \cos 2\theta$$

$$\theta = 0 \text{ бўлганда } \frac{d^2\sigma}{d\theta^2} < 0 \text{ бўлади,}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ бўлганда } \frac{d^2\sigma}{d\theta^2} > 0 \text{ бўлади}$$

Демак, $\theta = 0$ бўлганда σ максимал қийматга эришиб, у σ_y га тенг:

$$\sigma_{\max} = \sigma_y, \quad (33.3)$$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ бўлганда σ минимум бўлиб, у σ_x га тенгдир:

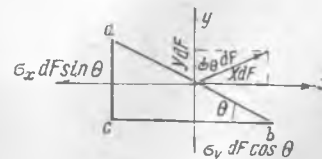
$$\sigma_{\min} = \sigma_x. \quad (33.4)$$

Шунга ўхшаш, тангенциал кучланиш τ нинг ҳам максимал ва минимал қийматларини топамиз. $\sin 2\theta = 1$ ёки $\theta = \frac{\pi}{4}$ бўлганда τ нинг максимал қийматга эришиши (33.2) тенгликдан очиқ кўриниб турибди:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}. \quad (33.5)$$

Демак, призматик стержень бир-бирига тик йўналган кучлар таъсирида текис кучланиш ҳолатида бўлса, унинг кесимларидаги нормал кучланишларнинг максимал қиймати катта бош кучланишга тенг бўлиб, минимал қиймати эса кичик бош кучланишга тенг бўлар экан. Бу ҳол учун тангенциал кучланишлар стерженнинг кўндаланг кесимида 45° қия бўлган юзаларда максимал бўлиб, миқдори бош кучланишлар айирмасининг ярмига тенг бўлади.

Биз σ_x билан σ_y ни чўзувчи кучланиш деб фараз қилдик. Аммо буларнинг иккаласи сиқувчи бўлиб ёки бири чўзувчи, иккинчиси сиқувчи бўлганда ҳам, чиқарилган муносабатлар ўз кучини сақлайди. Кучланиш сиқувчи бўлса, фақат унинг ишорасини тескарига алмаштириш керак. Биз қия кесимдаги нормал кучланиш билан тангенциал кучланишни топдик, бошқача қилиб айтганда, қия кесимдаги тўла кучланиш p_θ нинг кесим нормали ва уринмаси йўналишидаги проекцияларини топдик. Бироқ θ бурчак ўзгариши билан бу ўқлар ҳам ўз йўналишларини ўзгартиради. Шунинг учун баъзи вақтларда тўла кучланиш p_θ нинг стерженнинг симметрия ўқлари билан бир хил йўналган ўқлардаги проекцияларини олиш қулайроқдир (91-шакл). Бу ўқлар стерженнинг қия кесимларига нисбатан маълум бир ҳолатда бўлиб, қия кесим ўзгарса ҳам, бу ўқларнинг йўналиши ўзгармайди. Бу ўқларни



91-шакл.

ox ва oy билан, кучланиш p нинг бу ўқлардаги проекцияларини эса X ва Y билан белгиласак, abc призмага қўйилган кучларнинг мувозанат шарти қуйидаги тенгликларни беради:

$$\begin{aligned} -\sigma_y dF \cos \theta + Y dF &= 0, \\ \sigma_x dF \sin \theta + X dF &= 0; \end{aligned}$$

булардан:

$$\begin{aligned} X &= \sigma_x \sin \theta, \\ T &= \sigma_y \cos \theta. \end{aligned} \quad (33.6)$$

Бу тенгламалар (33.1) ва (33.2) тенгламаларга қараганда анчагина соддадир.

Биз (33.1) ва (33.2) тенгламалардан фойдаланиб, қия кесимлардаги кучланишларни аналитик равишда текширдик. (33.6) тенгламалардан фойдаланиб, бу кесимлардаги кучланишларнинг ўзгариш қонунларини график равишда тасвирлаймиз.

34-§. Кучланиш эллипси

θ бурчакнинг ўзгариши билан қия кесимдаги тўла кучланиш (p) нинг миқдори ва йўналиши ўзгаради. Бу ўзгаришни геометрик тасвирлаш учун $хоу$ координата ўқларини олиб (92-шакл), координаталар бошидан тўла кучланиш (p) ни $ор$ вектор тарзида (маълум масштабда) чизамиз. Бу вектор учининг координаталари x , y бўлиб, (33.6) тенгламалар билан аниқланади. θ бурчак ўзгариши билан p векторнинг p ўчи бирор эгри чизик чизади.



92-шакл.



93-шакл.

Бу эгри чизикнинг параметрик тенгламаси (33.6) тенгламалар билан ифодаланади, яъни:

$$\begin{aligned} x &= \sigma_x \sin \theta, \\ y &= \sigma_y \cos \theta \end{aligned} \quad (34.1)$$

бўлади.

Аммо бу тенгламалар эллипснинг параметрик тенгламалари бўлиб, бу ерда θ параметр ўрнидадир.

Агар биз (34.1) тенгламадан параметр (θ) ни чиқариб юборсак, эллипснинг каноник тенгламаси ҳосил бўлади:

$$\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} = 1. \quad (34.2)$$

Бу эллипсни *кучланиш эллипси* деб атаймиз. Демак, қия юзадаги кучланишни тасвирловчи $ор$ векторининг ўчи ярим ўқлари σ_x ҳамда σ_y га тенг бўлган эллипс чизар экан (92-шакл).

Агар бу кучланишлардан бири, масалан, $\sigma_y = 0$ бўлса, x ўқига томон йўналган оддий қўзилиш содир бўлади. Бу ҳол учун кучланиш эллипси

туғри чизикқа айланади (93-а шакл). Агар $\sigma_x = \sigma_y$ бўлса, яъни призматик стерженнинг узаро тик яккала томонига бир хилда чузувчи ёки сиқувчи кучланишлар қўйилган бўлса, кучланиш эллипси доирага айланади (93-в шакл). Бу ҳолда кучланиш ҳамма йўналишлардаги юзалар учун бир хил қийматга эга бўлиб, стерженда тангенциал кучланиш бўлмайди, чунки:

$$\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta = 0.$$

35-§. Текис кучланиш ҳолати учун Мор усули (Мор доираси)

Энди кучланиш ҳолатини текшириш учун Мор усулини татбиқ этамиз. Ихтиёрий қия кесимдаги кучланишларни геометрик тасвирлаш ва график усулда аниқлашни Мор таклиф қилганлиги бизга маълум. Абсцисса ўқи бўйлаб σ_x ва σ_y бош кучланишларни маълум масштабда қўямиз. Улар OA ва OB кесмалар билан тасвирлансин.

AB кесмани диаметр деб қабул қилиб, бу диаметро учун доира чизамиз (94-шакл). Бу доиранинг радиуси $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ га тенг бўлиб, марказининг координаталари $\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)$ дир. Стерженнинг бирор қия кесимидаги кучланишлар бу доирада ётувчи нуқтанинг координаталари билан ифодаланишини кўрсатамиз.

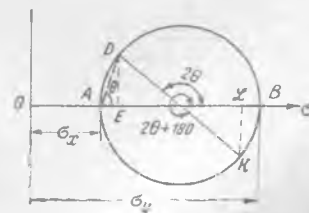
(33.1) ва (33.2) тенгламаларни 2θ бурчак орқали ифодалаймиз. Бунинг учун қуйидаги тригонометрик формулалардан фойдаланамиз:

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2},$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}.$$

Буни кузда тутсак, σ ва τ ифодаси қуйидагича ёзилади.

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta, \\ \tau &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (35.1)$$



94-шакл.

Бу тенгламалардан θ ни чиқариб юбориб, σ билан τ орасидаги муносабатни боғловчи қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2. \quad (35.2)$$

Бу тенглама, ҳақиқатан ҳам, маркази абсцисса ўқида, координаталар бошидан $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ масофада ётувчи ва радиуси $\left|\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right|$ га тенг доиранинг тенгламасидир. Текширилаётган ҳол учун θ бурчак остида қия бўлган бирор кесимдаги нормал ва тангенциал кучланиш Мор доирасининг D нуқтаси билан аниқланса, унга тик юзадаги кучланиш, яъни $\theta + 90^\circ$ бурчак остида бўлган юзадаги кучланиш DK диаметрининг K нуқтаси координаталари билан аниқланади. 94-шаклдан $DE = -LK$ ёки $\tau = -\tau'$, яъни узаро тик юзалардаги тангенциал кучланишлар текис кучланиш ҳолатида ҳам тенг ва йўналиши қарама-қарши бўлар экан. Бу натижа умумий кучланиш ҳолати учун ҳам ўринли эканини исботласа бўлади. Тангенциал кучланиш $2\theta = 90^\circ$ ёки $\theta = 45^\circ$ бўлганида максимал бўлиши 94-шаклдан аниқ кўриниб турибди.

Нормал кучланиш ҳам $\theta = 0$ ёки D нуқта B устига, K нуқта A устига келганда максимал ва минимал қийматларга эришиб, улар тегишлича:

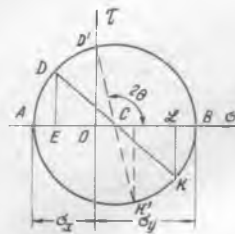
$$\sigma_{\max} = \sigma_y, \quad \sigma_{\min} = \sigma_x$$

бўлади.

Текширилаётган кесим ox ўқи билан 0° бурчак ташкил қилганда, нормал кучланиш (σ) максимум бўлиб, 90° бурчак ташкил қилганда нормал кучланиш (σ) минимум бўлади, демак бир юзада нормал кучланиш максимал кийматга эришса, унга тик юзада бу кучланиш минимал бўлар экан.

Нормал кучланишлар максимум ва минимумга эришган юзаларда, тангенциал кучланишлар ноль бўлганидан, бу юзалар бош юзалар дейилади.

Демак, 94-шаклда тасвирланган Мор доираси бош кучланишлар асосида чизилган. Нормал ва тангенциал кучланишлар ҳисил бўлаётган юзаларнинг ҳолатини бош юзаларга нисбатан график равишда, яъни бевосита Мор доирасидан аниқлаш мумкин. A нуқтани D билан туташтирувчи кесманинг йўналиши абсцисса ўқи билан θ бурчак ҳосил қилади. Бу бурчак эса қия юза нормалининг Oy ўқи билан тузган бурчагидир (94-шакл).



95-шакл.

Биз текис кучланиш ҳолатидаги бош кучланишларнинг мусбат бўлган ҳоли учун Мор доирасини чиздик. Агар бош кучланишлардан бири ёки иккаласи ҳам сиқувчи бўлса, у ҳолда манфий бош кучланишни координаталар бошидан чапга, манфий томонга қараб қўйиш керак. Масалан, ox ўқига тик бўлган юзадаги σ_x кучланиш манфий бўлсин. Бу ҳол учун чизилган Мор доирасида 2θ бурчакни шундай таяллаймизки, D нуқта τ ўқидаги D' нуқтада бўлсин (95-шакл). D нуқтага оид юзада нормал кучланиш нолга тенг бўлиб, унга тик юзада, яъни K' нуқтага оид юзада нормал кучланиш чўзувчи ва сиқувчи кучланишларнинг айирмасига тенг бўлади:

$$\sigma = 2OC = 2 \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sigma_x \right) = \sigma_y - \sigma_x.$$

$\lambda\sigma_y = -\sigma_x$ бўлган ҳол учун, $\theta = 45^\circ$ бўлганда, нормал кучланиш нолга тенг бўлиши 96-шаклдан кўриниб турибди. Бу ҳол учун тангенциал кучланиш энг катта қийматга эришиб, $\tau_{\max} = \sigma_x = \sigma_y$ бўлади. 45° бурчак қияланган кесимларда соф силжиш деформацияси юз беради.

$\sigma_x = \sigma_y$ бўлса, яъни призматик стержень ўзаро тик йўналган бир хилда чўзувчи ёки сиқувчи кучланишлар таъсирида бўлса, Мор доираси нуқтага айланиб, ҳар қандай қия кесимлар учун $\tau = 0$, $\sigma = \sigma_x = \sigma_y$ бўлади. Бундай кучланишлар бир жинсли кучланишлар дейилади.

36-§. Текис кучланиш ҳолати учун бош юзалар ва бош кучланишлар

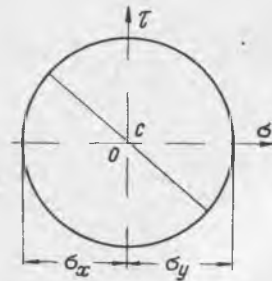
Призматик стержень текис кучланиш ҳолатида бўлсин. Ундан ёқлари бир-бирига тик бўлган тўғри бурчакли куб ажратамиз (97-шакл). x ва y ўқларни кубнинг томонларига тик қилиб йўналтирсак, унинг томонларидаги нормал кучланишлар тегишлича σ_x ва σ_y бўлади. x ва y ўқларига тик бўлган юзалардаги тангенциал кучланишларни қуйидагича ишоралаймиз: x ўқига тик бўлган юзадаги y ўқи бўйлаб йўналган тангенциал кучланишини τ_{xy} билан,

шунингдек, y ўқига тик бўлган юзадаги x ўқи бўйлаб йўналган тангенциал кучланишни τ_{xy} билан белгилаймиз.

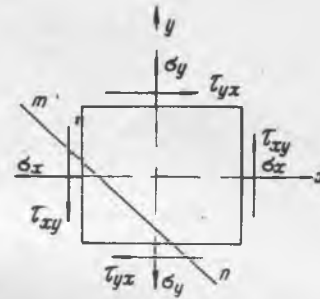
Биринчи ишора тангенциал кучланишнинг қайси юзада эканини, иккинчиси эса унинг йўналишини кўрсатади. Ўзаро тик юзалардаги тангенциал кучланишлар сон жиҳатдан тенг бўлиб, тўғри бурчак қиррадан қарама-қарши томонларга қараб йўналгани учун (98-шакл):

$$\tau_{xy} = -\tau_{yx} \quad (36.1)$$

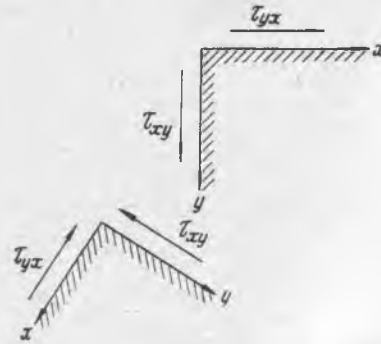
бўлади.



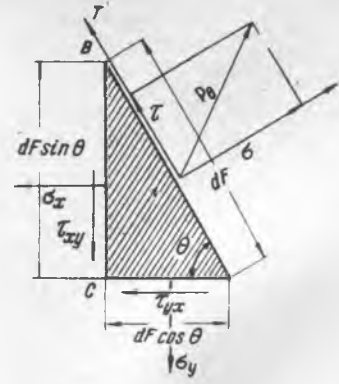
96-шакл.



97-шакл.



98-шакл.



99-шакл.

Демак, текис кучланиш ҳолати учта σ_x , σ_y , τ_{xy} кучланишлар билан аниқланар экан. Энди юқоридаги кубнинг бирор қиррасига чексиз яқин ва томонларига ихтиёрий равишда қиялатилган mn текисликни ўтказамиз. Ажратилган чексиз кичик ABC уч бурчакли призманинг мувозанатини текшираемиз (99-шакл). Ўзаро тик AC ва BC юзларга ихтиёрий бурчак остида қиялатилган AB юзадаги σ ва τ кучланишларни ҳалиги σ_x , σ_y ва τ_{xy} кучланишлар орқали ифодалаймиз.

AB юзни dF десак, AC ва BC юзлар тегишлича $dF \sin \theta$ $dF \cos \theta$ бўлади.

Призмага таъсир қилувчи кучларнинг қия юза нормали (N) билан уринмаси (T) даги проекциялари йиғиндисини нолга тенглаштирсак, ҳосил бўлган тенгламадан dF ни қисқартиб, σ ва τ учун қуйидагиларни оламиз:

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta, \\ \tau &= (\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta).\end{aligned}$$

θ нинг ўрнига қўш бурчак (2θ) ни $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$, $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$ формулалар воситаси билан киритсак,

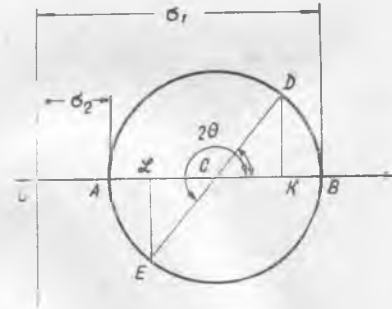
$$\left. \begin{aligned}\sigma &= \frac{\sigma_y + \sigma_x}{2} + \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta, \\ \tau &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta.\end{aligned} \right\} \quad (36.2)$$

тенгламаларни ҳосил қиламиз. Бу тенгламалардан θ ни чиқариб ташласак, σ ва τ орасидаги муносабат қуйидаги тенглама билан ифодаланади:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2. \quad (36.3)$$

Демак, σ ва τ кучланишлар маркази абсцисса ўқида, координаталар бошидан $\frac{\sigma_y + \sigma_x}{2}$ масофада ва $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$

радиусли доира устида ётадиган нуқталарнинг координаталари билан аниқланар экан. Текис кучланиш ҳолати ўзаро тик юзалардаги σ_x , σ_y ва $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ кучланишлар билан аниқлангани учун, бу кучланишларга тегишли нуқталарни (σ, τ) текислигида аниқлаш қийин эмас. Улар D ва E бўлсин. Бу нуқталар Мор доирасининг диаметрини аниқлайди. Доиранинг маркази DE диаметр билан абсцисса ўқининг кесишган нуқтасида ётади. Бу ҳол учун чизилган Мор доираси 100-шаклда тасвирланган.



100-шакл.

Текширилаётган текис кучланиш ҳолати учун нормали y бўлган юзага θ бурчак остида қия бўлган юзадаги σ ва τ мазкур бурчакнинг қандэй қийматларида максимум ва минимум бўлишини текшираемиз. Бу масаланинг жавобини 100-шаклдаги Мор доирасидан бевосита олишимиз мумкин. D нуқтага тегишли юзага θ_0 бурчак остида, E нуқтага тегишли юзага $\theta_0 + \frac{\pi}{2}$ бурчак остида қия бўлган юзаларда нормал кучланишларнинг максимум ва минимум бўлиши доирадан куриниб турибди. Бу максимал ва минимал қийматлар доиранинг B ва A нуқталарига мос келади. Уларни тегишлича σ_1 ва σ_2 билан белгилаймиз.

Бу кучланишларни аниқловчи A ва B нуқталар абсцисса ўқида ётгани учун, у юзалардаги тангенциал кучланишлар нолга тенг бўлади. Демак, нормал кучланишлар максимум ва минимумга эришган юзалар бош юзала экан. Ана шу бош юзаларнинг йўналишини нормали y бўлган юзага нис-

бу кучланишларга тегишли нуқталарни (σ, τ) текислигида аниқлаш қийин эмас. Улар D ва E бўлсин. Бу нуқталар Мор доирасининг диаметрини аниқлайди. Доиранинг маркази DE диаметр билан абсцисса ўқининг кесишган нуқтасида ётади. Бу ҳол учун чизилган Мор доираси 100-шаклда тасвирланган.

батан аниқлайдиган тенгламани чиқарамиз 100- шаклда тасвирланган куч ланиш доирасидаги CDK учбурчакдан:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{DK}{CD} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_x}. \quad (36.4)$$

Бу тенгламани θ_0 билан бирга $\theta_0 + \frac{\pi}{2}$ ҳам қаноатлантиради, чунки:

$$\operatorname{tg}(2\theta_0 + \pi) = \operatorname{tg} 2\theta_0.$$

Демак, нормали y бўлган юзага нисбатан ўзаро тик иккита бош юзларни аниқладик. Энди, бу юзалардаги бош кучланишларни ҳисоблаш учун формулалар чиқарамиз.

100- шаклдаги кучланиш доирасидан:

$$OB = OC + CB; OA = OC - CA, OB = \sigma_1, OA = \sigma_2; CB = CA \pm CD$$

бўлгани учун, уларни қуйидагича ёзамиз:

$$\sigma_{1,2} = OC \pm CD.$$

бунда:

$$OC = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}; CD = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}.$$

Булар кўзда тутилса, бош кучланишлар учун қуйидаги формулалар ҳосил қилинади:

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2} \{ (\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \}. \quad (36.5)$$

Бу бош кучланишлар ҳосил бўлган юзаларнинг нормали y ўқи билан θ_0 ва $\theta_0 + \frac{\pi}{2}$ бурчаклар ҳосил қилади. Аммо (36.4) тенглама σ_1 кучланиш ҳосил бўладиган юзани аниқловчи θ_0 бурчакнинг қайси чоракда ётишини аниқлай олмайди. Чунки, $2\theta_0$ бурчакни аниқловчи тангенс бир қийматлик эмас. Шунинг учун тангенснинг ўрнига синус ва косинусни олишга тўғри келади. (36.4) тенгламадан фойдаланиб, $\sin 2\theta_0$ ва $\cos 2\theta_0$ учун қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} \sin 2\theta_0 &= \frac{2\tau_{xy}}{\pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \\ \cos 2\theta_0 &= \frac{2(\sigma_x - \sigma_y)}{\pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}; \end{aligned} \quad (36.6)$$

Бош кучланиш σ_1 учун $\sin 2\theta_0$ ва $\cos 2\theta_0$ ифодасидаги радикал олдига мусбат белги, σ_2 учун эса манфий белги қўйиб, θ_0 ва $\theta_0 + \frac{\pi}{2}$ учун маълум йўналишларни оламиз. Масалан, τ_{xy} ва $\sigma_x - \sigma_y$ мусбат бўлса, бурчак θ_0 , яъни σ_1 кучланишнинг йўналиши биринчи чоракда, бурчак $\theta_0 + \frac{\pi}{2}$, яъни σ_2 кучланишнинг йўналиши иккинчи чоракда бўлади.

$$\sigma_1 = OB = OC + CB \text{ ва } \sigma_2 = OA = OC - CB$$

эди. Буларни қўшсак, $\sigma_1 + \sigma_2 = 2OC = \sigma_x + \sigma_y$ чиқади; демак, ўзаро тик юзалардаги нормал кучланишнинг йиғиндиси ўзгармас сон булар экан.

Энди, тангенциал кучланиш максимал ва минимал қийматларга эришадиган юзаларни ва унинг бу юзалардаги қийматини аниқлаймиз. Бунинг учун (36.2) нинг иккинчи қисмидан θ га нисбатан ҳосила оламиз:

$$\frac{d\tau}{d\theta} = -2 \left(-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \right) = 0.$$

Тангенциал кучланиш максимум ёки минимум қийматга эришган юзанинг нормали y бўлган юзага нисбатан қиялигини θ_1 деймиз. У ҳолда ҳозиргина чиқарилган тенгламадан θ_1 ни аниқлаш учун қуйидаги тенгламани оламиз:

$$\operatorname{tg} 2\theta_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}. \quad (36.7)$$

Бу тенгламани (36.4) билан солиштириб, қуйидаги муносабатни чиқарамиз:

$$\operatorname{tg} 2\theta_0 \operatorname{tg} 2\theta_1 = -1. \quad (36.8)$$

Бу тенглама қиялиги $2\theta_0$ ва $2\theta_1$ бўлган икки тўғри чизиқнинг ўзаро тиклик шартини ифодалаши аналитик геометриядан маълум.

Бу ҳулосадан фойдаланиб, бош юзалар билан максимал тангенциал кучланишлар ҳосил бўладиган юзаларнинг орасидаги бурчакларни аниқловчи қуйидаги муносабатларни ҳосил қиламиз:

$$2\theta_1 = 2\theta_0 \pm \frac{\pi}{2};$$

бундан:

$$\theta_1 = \theta_0 \pm \frac{\pi}{4}. \quad (36.9)$$

Тангенциал кучланиш икки йўналишдаги юзаларда максимал ёки минимал қийматга эришади. Бу йўналишлар бош кучланишлар таъсир этувчи юзалар орасидаги бурчакларни тенг икки қисмга бўлиб ўтади.

(36.7) дан $\sin 2\theta_1$ ва $\cos 2\theta_1$ ни аниқлаб, (36.2) га қўйсак, максимал ва минимал тангенциал кучланишлар учун қуйидаги формулани ҳосил қиламиз:

$$\tau_{\max} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (36.10)$$

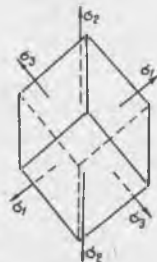
Демак, максимал ва минимал тангенциал кучланишлар сон жиҳатидан тенг бўлиб, ишоралари тескаридир. Максимал тангенциал кучланишлар доирасининг радиусига тенг эканлиги (36.3) дан кўриниб турибди.

37-§. Фазовий кучланиш ҳолати

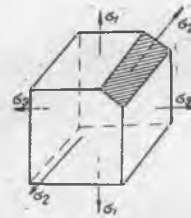
Жисмдан ажратилган параллелепипед шаклидаги элемент ўзаро тик уч йўналиш бўйича чўзувчи ёки сиқувчи кучланишлар таъсирида бўлиши мумкин. Бундай шароитдаги элемент фазовий ёки ҳажмий кучланиш ҳолатида деб юргизилади. Бундай ҳоллар амалда кўп учрайди. Масалан, темир-бетон ёки ер тўғонларидан, кўприкларнинг таянчидан ва шунга ўхшаш иншоот қисмларидан ажратилган ҳар қандай элемент худди юқорида айtilган кучланиш ҳолатида бўлади. Фазовий кучланиш ҳолатидаги жисмнинг ҳар қандай нуқтасидан ўзаро тик шундай учта юза ўтказиш мумкинлиги, бу юзаларда тангенциал кучланишлар нолга тенг бўлиб, фақат нормал кучланиш

ларгина таъсир қилади. Бундай юзаларни *бош юзалар* деган эдик. Бу ҳол эластиклик назариясида исбот қилинади. Бош юзалардаги нормал кучланишлар *бош кучланишлар* дейилади (бу таърифлар текис кучланиш ҳолати учун берилган эди). Уларни тегишлича $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ билан белгилаймиз. Булардан энг каттаси σ_1 , энг кичиги σ_3 , яъни $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ деб фараз қилайлик. Бирор нуқтадан ўтказилган бир қанча юзалардаги нормал кучланишлардан энг каттаси ва энг кичиги бош кучланишлар эканлигини текис кучланиш ҳолати учун исбот этган эдик. Фазовий кучланиш ҳолати учун ҳам бирор нуқтадан ўтказилган барча юзалардаги нормал кучланишлардан энг каттаси ва энг кичиги бош юзаларда осил бўладиган максимал ва минимал бош кучланишлар бўлишини исботлаш мумкин. Биз бу ҳолни кейинроқ исботлаймиз.

Фазовий кучланиш ҳолатидаги жисмнинг бирор нуқтасида бош юзаларга параллел ўзаро тик уч текислик билан чегараланган чексиз кичик бир куб ажратамиз, бу куб ўзаро тик уч йўналиш бўйича чўзилиш ёки сиқилиш ҳолатида бўлади (101-шакл).



101-шакл.



102-шакл.



103-шакл.

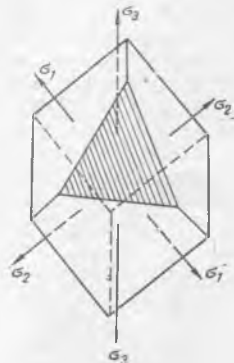
Энди, ҳалиги кубнинг турли кесимларидаги кучланишларни аниқлашга ўтамиз. Учта бош кучланишдан бирортасига параллел бўлиб, қолган иккитасига қия юзадаги нормал ва тангенциал кучланишларни аниқлаймиз. Бундай юзалардаги кучланишлар мазкур юзага параллел бош кучланишга боғлиқ бўлмаслиги бизга маълум. Масалан, σ_2 кучланишга параллел юзалардаги нормал ва тангенциал кучланишлар σ_1 билан σ_3 га боғлиқ (102-шакл). Бу юзалардаги нормал ва тангенциал кучланишлар (35.1) га мувофиқ қуйидаги тенгламалардан аниқланади:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\theta, \\ \tau &= \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (37.1)$$

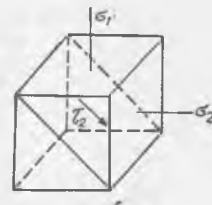
Худди шундай тенгламаларни σ_1 ва σ_3 га параллел юзалардаги нормал ва тангенциал кучланишлар учун ҳам ёзишимиз мумкин.

Бу уч гуруҳ қия юзалардаги нормал ва тангенциал кучланишларни график равишда тасвирловчи Мор доираларини чизамиз. Улар 103-шаклда AC, AB ва BC диаметрлар асосида чизилган 1, 2, 3 доиралар билан тасвирланган. Бу уч доира билан чегараланиб, штрихлаб қўйилган юза нуқталарининг координаталари бош юзалардан бирига ҳам параллел бўлмаган юзалардаги (104-шакл) нормал ва тангенциал кучланишларни аниқлаш эластиклик назариясида исбот қилинади.

АС диаметр асосида чизилган 1-доиранинг С нуқтасига мос юзадаги нормал кучланиш барча юзаларда ҳосил бўлиши мумкин бўлган нормал кучланишлардан энг каттасидир. Шунингдек, А нуқтасига тегишли юзадаги нормал кучланиш барча юзаларда ҳосил бўладиган нормал кучланишлардан энг кичигидир. Юқорида максимал бош кучланиш маълум нуқтадан ўтказилган барча юзалардаги нормал кучланишлардан энг каттаси бўлади деган эдик. Ҳозиргина чиқарган хулосамиз бу фикрнинг тўғрилигини тасдиқлайди. Энди, максимал тангенциал кучланишни аниқлашга ўтамиз. 103- шаклдан энг катта тангенциал кучланиш 1- доиранинг радиуси билан тасвирланишини кўрамиз:



104- шакл.



105- шакл.

$$\tau_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (37.2)$$

Бу кучланиш σ_1 ва σ_3 таъсир этувчи юзаларга 45° бурчак остида қияланган юзада бўлади (105-шакл). Шунингдек, σ_1 ва σ_2 ҳамда σ_2 ва σ_3 кучланишлар таъсир этаётган юзаларга 45° бурчак остида қияланган юзалардаги тангенциал кучланишларнинг ифодасини ҳам ёзишимиз мумкин. Улар 103- шаклдаги 2 ва 3- Мор доираларининг радиуслари билан ифодаланади.

$$\left. \begin{aligned} \tau_2 &= \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \\ \tau_3 &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (37.3)$$

Агар учта бош кучланишдан биттаси нолга тенг, масалан, $\sigma_3 = 0$ бўлса, текис кучланиш ҳолати вужудга келади.

$$\sigma_1 > \sigma_2 > 0$$

бўлсин. У ҳолда (37.2) ва (37.3) қуйидагича ёзилади:

$$\tau_1 = \frac{\sigma_1}{2}, \quad \tau_2 = \frac{\sigma_2}{2}, \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (37.4)$$

Булардан энг каттаси τ_1 бўлади.

Текис кучланиш ҳолати турли ишорали бош кучланишлар билан берилган бўлса,

$$\sigma_1 > 0, \quad \sigma_2 < 0.$$

бўлади, у ҳолда максимал тангенциал кучланиш:

$$\tau_3 = \frac{\sigma_1 - (-\sigma_2)}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$

бўлади.

38- §. Чўзилишдаги ва сиқилишдаги стерженларнинг кўндаланг деформацияси (Пуассон коэффициент)

Призматик стерженлар ўқи бўйлаб чўзилганда, кўндаланг кесимларининг ингичкаланиши 11- параграфда айтиб ўтилган эди. Умуман, бўйлама деформация кўндаланг деформацияни ҳосил қилади. Пропорционаллик чегарасида кўндаланг деформация (ϵ_q) нинг бўйлама деформация (ϵ) га нисбати берилган материал учун ўзгармас сон эканлигини тажрибалар тасдиқлаб берди. Бу ўзгармас сон μ билан белгиланади ва *Пуассон коэффициенти* дейилади. Пуассон бу масала билан биринчи марта шуғулланиб, материалларнинг молекуляр тузилиши назарияси асосида, бу коэффициентнинг ўзгармас сон эканлигини кўрсатган ва у барча материаллар учун 0,25 га тенг, деган хулоса чиқарган эди. Иншоотларда ишлатиладиган материаллар билан ўтказилган тажрибалар μ нинг қиймати Пуассон чиқарган хулосадан кам фарқ қилишини кўрсатди. Масалан, пўлат учун $\mu = 0,30$. Берилган материал учун Пуассон коэффициенти маълум бўлса, деформация натижасида жисм ҳажмининг ўзгаришини ҳисоблаб топиш мумкин.

Чўзилувчи стержендан, унинг ўқи ва кўндаланг кесимга параллел текисликлар ёрдамида ўлчамлари бирга тенг бўлган кубик ажратамиз.

Призматик стержень деформацияланганда кубик ҳам деформацияланади. Унинг чўзилиши призматик стерженнинг нисбий чўзилиши (ϵ) га тенг, кўндаланг деформацияси эса, (11.4) га мувофиқ, $\epsilon_q = \mu \epsilon$ дир. Кубикнинг деформациядан кейинги ўлчамлари $(1 + \epsilon)$, $(1 - \mu\epsilon)^2$ бўлади. Кубикнинг деформациядан олдинги ҳажми $V = 1 \text{ см}^3$ бўлса, деформациядан кейинги ҳажми $V' = (1 + \epsilon)(1 - \mu\epsilon)^2 \text{ см}^3$ бўлади. Бу ифодадаги ϵ нинг 2- ва юқори даражаларини эътиборга олмай, V' учун қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз:

$$V' = 1 + \epsilon - 2\mu\epsilon = 1 + \epsilon(1 - 2\mu). \quad (38.1)$$

Ҳажмнинг нисбий ўзгаришини аниқлаймиз:

$$\eta = \frac{V' - V}{V} = \epsilon(1 - 2\mu). \quad (38.2)$$

Деформациядан кейин стерженнинг ҳажми албатта ўзгаради. Чўзилиш вақтида ҳажм камаймай, бирмунча ортади, шунинг учун:

$$\eta = \epsilon(1 - 2\mu) > 0;$$

$\epsilon > 0$, ҳажмнинг нисбий ўзгариши $\eta > 0$ бўлиши учун, $1 - 2\mu > 0$ ёки $\eta < \frac{1}{2}$ бўлиши керак.

Пуассон коэффициенти ҳазма вақт 0,5 дан кичик бўлиб, у қуйидаги ораликда ўзгаради: $0 \leq \mu \leq 0,5$. Агар $\mu > 0,5$ бўлса, деформация натижасида $\eta < 0$, яъни ҳажм камайдиган бўлар эди. Пропорционаллик чегарасида кўндаланг кесим жуда оз ўзгаради. Масалан, пўлат учун нисбий чўзилиш пропорционаллик чегарасида $\epsilon = 0,008$ га тенг; $\mu = 0,28$; кўндаланг кесимнинг нисбий ингичкаланиши:

$$\varphi = \frac{F - F'}{F} 100 \% = \frac{F - F(1 - \mu\epsilon)^2}{F} 100 \% = 0,04 \%.$$

Бундан кўринадики, пропорционаллик чегарасигача кўндаланг кесим юзи ўзгармайди, деган хулоса чиқариш мумкин экан.

39-§. Кучланиш билан деформациянинг умумий муносабати

Фазовий кучланиш ҳолатидаги жисмдан унинг бирор нуқтасидаги бош юзаларга параллел бўлган уч жуфт текислик билан чегараланган чексиз кичик параллелепипед ажратамиз. У ҳолда бу параллелепипеднинг томонларига фақат бош кучланишлар қўйилган бўлади. Ана шу бош кучланишлар таъсиридан ҳосил бўлган деформацияларни ҳисоблаймиз. Параллелепипеднинг σ_1 кучланишга параллел қиррасини 1, σ_2 ва σ_3 га параллел қирраларини 2, 3 деб белгилаймиз ва мазкур қирраларга параллел йўналишлардаги бўйлама деформацияларини аниқлаймиз. Ҳар қайси қиррага параллел деформация учала бош кучланиш σ_1 , σ_2 , σ_3 га боғлиқ бўлгани учун, уларнинг таъсири алоҳида текшираемиз.

Бош кучланиш σ_1 таъсиридан 1-қиррага параллел деформация:

$$\epsilon_1' = \frac{\sigma_1}{E}$$

бўлади. Шу билан бирга, бу 1-қирра σ_2 ва σ_3 кучланишларга нисбатан кўндаланг ўлчам бўлади. Демак, σ_2 , σ_3 кучланишлар таъсиридан 1-қирра йўналишида кўндаланг деформация ҳосил бўлади. Улар мос равишда:

$$\epsilon_1'' = -\mu \frac{\sigma_2}{E}; \quad \epsilon_1''' = -\mu \frac{\sigma_3}{E}$$

дир. 1-қирра йўналиши бўйича ажратилган элементнинг тўла деформацияси қуйидаги йиғинди билан ифодаланади:

$$\epsilon = \epsilon_1' + \epsilon_1'' + \epsilon_1''' = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E}.$$

Худди шундай ифодани қолган икки йўналишдаги деформациялар учун ҳам ёзишимиз мумкин. Бинобарин, бош кучланишлар йўналишидаги деформациялар учун қуйидаги ифодаларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3)], \\ \epsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu (\sigma_1 + \sigma_3)], \\ \epsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu (\sigma_2 + \sigma_1)]. \end{aligned} \quad (39.1)$$

Учта σ_1 , σ_2 , σ_3 бош кучланишдан бири сиқувчи бўлса, (39.1) формулаларда унинг ишорасини манфийга алмаштириш керак.

Текис кучланиш ҳолати учун бош кучланишлар йўналишдаги деформациялар ифодасини (39.1) дан олса бўлади. Масалан, текис кучланиш σ_1 ва σ_2 бош кучланишлар билан берилган бўлсин ($\sigma_3 = 0$), у ҳолда:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu \sigma_2), \\ \epsilon_2 &= \frac{1}{E} (\sigma_2 - \mu \sigma_1), \\ \epsilon_3 &= \frac{\mu}{E} (\sigma_2 + \sigma_1) \end{aligned} \quad (39.2)$$

Бу ҳол учун бош кучланишлар σ_1 ва σ_2 ни, ϵ_1 ва ϵ_2 деформациялар орқали ифодалаймиз:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_1 + \mu \epsilon_2), \\ \sigma_2 &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_2 + \mu \epsilon_1). \end{aligned} \quad (39.3)$$

Жисмдан ажратилган параллелепипед ҳажмининг нисбий ўзгаришини топамиз. Деформациягача унинг ҳажми:

$$V = \alpha x \alpha y \alpha z$$

бўлсин.

Деформациядан кейинги ҳажми:

$$V_1 = (1 + \epsilon_1) (1 + \epsilon_2) (1 + \epsilon_3) dx dy dz$$

бўлади. Ҳажмнинг нисбий ўзгариши бундай ёзилади:

$$\epsilon_v = \frac{V_1 - V}{V} = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3. \quad (39.4)$$

Қавс очилганда, деформациянинг иккинчи ва учинчи даражаларига эга бўлган ҳадларни эътиборга олмадик, ϵ_1 , ϵ_2 , ва ϵ_3 нинг қийматларини қўйсак,

$$\epsilon_v = \frac{1}{E} (1 - 2\mu) (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

келиб чиқади; агар

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$$

десак,

$$\epsilon_v = \frac{1 - 2\mu}{E} \theta. \quad (39.5)$$

бўлади.

Энг умумий ҳолда ҳажмнинг нисбий ўзгариши (ҳажм деформацияси) учта бош кучланиш йиғиндисига пропорционал бўлар экан. Бу тенглама ҳажм учун Гук қонунини ифодалайди.

Пропорционаллик коэффициенти:

$$\frac{E}{1 - 2\mu} = K \quad (39.6)$$

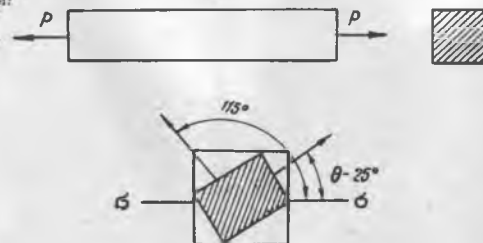
ҳажм учун *эластиклик модули* дейилади. Ҳажм учун эластиклик модули (K) нинг Юнг модули (E) дан катталиги (39.6) дан кўриниб турибди. Масалан, пўкак учун $\mu = 0$, бу ҳолда $K = E$, агар $\mu = \frac{1}{2}$ бўлса: $\epsilon_v = 0$, яъни бош кучланишлар йиғиндисининг қиймати ҳар қандай бўлганда ҳам, ҳажм ўзгармайди.

Жисмнинг сиртига бир хилда p кг/см² босим таъсир этса, яъни $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p$ бўлса, $\theta = \pm 3p$ бўлади. Бу ҳолда (39.5) қуйидагича ёзилади:

$$\epsilon_v = \pm \frac{3(1 - 2\mu)}{E} p. \quad (39.7)$$

МАСАЛАЛАР

31. Асосининг ўлчамлари 3×3 см² бўлган призматик стержень ўз ўқи бўйлаб йўналган $P = 11$ т куч таъсирида чўзилади (106-шакл). Нормали стержень ўқи билан $\theta_1 = 25^\circ$ ва $\theta_2 = 25^\circ + 90^\circ = 115^\circ$ бурчак ҳосил қилган юзлардаги кучланишлар аниқлансин. θ нинг қандай қийматида шв бурчак билан аниқланган элементнинг нисбий чўзилиши нолга тенг бўлади?



106-шакл.

Ечиш. Призматик стерженнинг қўндаланг кесимидаги кучланиш:

$$\sigma_y = \frac{P}{F} = \frac{11000}{9} \cong 1122 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}.$$

$\theta = 25^\circ$ бурчак билан аниқланадиган юзадаги кучланишлар:

$$\sigma = \sigma_y \cos^2 \theta = 1122 \cos^2 25^\circ = 1122 \cdot 0,825 = 1008 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$$

$$\tau = \frac{\sigma_y}{2} \sin 2\theta = 611 \cdot \sin 50^\circ = 611 \cdot 0,765 = 468 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}.$$

$\theta = 115^\circ$ бурчак билан аниқланадиган юзадаги кучланишлар:

$$\sigma^1 = 1122 \cdot \sin^2 25^\circ = 1122 \cdot 0,175 = 214 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2},$$

$$\epsilon^1 = 611 \sin 230^\circ = -611 \cdot 0,765 = -468 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2},$$

$$\sigma + \sigma^1 = 1008 + 214 \approx 1222, \tau = -\tau.$$

Масаланинг иккинчи қисмини ечиш учун призматик стержендан ўзаро тик юзалар билан чегараланган бир куб ажратамиз. Бу кубнинг томонларидаги нормал кучланишлар σ_θ ва $\sigma_{\theta+90^\circ}$ бўлсин. У ҳолда σ_θ йўналишидаги нисбий чўзилиш қуйидагича ёзилади:

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \mu \sigma_{\theta+90^\circ}].$$

Масала шартига мувофиқ, $\epsilon_\theta = 0$ бўлиши керак, демак:

$$\sigma_\theta = \mu \sigma_{\theta+90^\circ}; \text{ аммо } \sigma_\theta = \sigma_y \cos^2 \theta, \sigma_{\theta+90^\circ} = \sigma_y \sin^2 \theta.$$

Шунинг учун:

$$\text{tg}^2 \theta = \frac{1}{\mu}; \text{tg} \theta = \pm 1,83, \theta = \pm 61^\circ 20', \theta + 90^\circ = 151^\circ 20'.$$

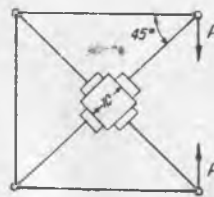
32. Қия юзадаги нормал кучланиш $\sigma = 840 \text{ кг/см}^2$, тангенциал кучланиш $\tau = 280 \text{ кг/см}^2$ бўлса, бу юза нормали чўзувчи куч йўналиши билан қандай θ бурчак ҳосил қилади ва σ_y нинг миқдори қанча бўлади?

Жавоби.

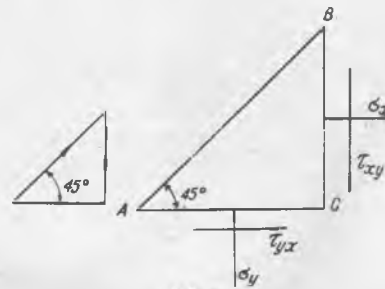
$$\theta = \arctg \frac{1}{3}, \sigma_y = \frac{\sigma}{\cos^2 \theta} = 911 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}.$$

33. Қўндаланг кесим юзаси $20 \times 20 \text{ см}^2$ бўлган калта бетон стержень P куч билан сиқилади. 45° қия бўлган юзадаги сиқувчи кучланиш 15 кг/см^2 га тенг; сиқувчи P кучнинг миқдори топилсин.

Жавоби. $P = 12 \text{ т}$.



107-шакл.



108-шакл.

34. Бетон куб, 107-шаклда кўрсатилгандек, ўзаро тик икки томондан сиқилади. Кубнинг томонлари 10 см га тенг; сиқувчи кучланишларни куб томонлари бўйича тенг тарқалган деб фарз қилиб, куб ҳажмининг камаيшини аниқланг.

$$\mu = 0,1; P = 9 \text{ т}.$$

Е ч и ш. Жорпорнинг мувозанатини текшириб, бетон кубни узара тик йўналишлар бўйича сиқувчи кучни топамиз: $N = P\sqrt{2} = 12,7 \text{ т}$. N куч қўйилган томонлардаги деформациялар:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\frac{1}{EF} N (1 - \mu) = -\frac{12700 (1 - 0,1)}{10^3 \cdot 280000} = 0,00041.$$

Учинчи томондаги деформация:

$$\varepsilon_3 = -\frac{\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2) = 2 \frac{0,1 \cdot 12700}{10^3 \cdot 280000} = 0,00009;$$

куб ҳажмининг нисбий камайиши:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 2 \cdot 0,00041 + 0,00009 = 0,00091.$$

35. Асоси ABC бўлган тўғри бурчакли призманинг қия юзаси AB ва асоси ABC га юк қўйилмаган (108-шакл). AC ва BC юзалардаги нормал кучланишлар: $\sigma_x = \sigma_y = 150 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$.

AB ва BC юзаларда ҳосил бўладиган тангенциал кучланишлар, бу кучланиш ҳолати учун бош юзалар ҳамда бош кучланишлар топилсин.

Қўрсатма. AB юзада $\sigma = 0$, $\tau = 0$ бўлгани учун, τ_{xy} нинг қиймати

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta = 0$$

тегламадан аниқланади:

$$\tau_{xy} = 150 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}.$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2} \left((\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \right).$$

Демак, $\sigma_1 = 300 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$;

$$\tan 2\theta_0 = \frac{2 \cdot 150}{150 - 150} = \infty. \theta_0 = 45^\circ \text{ ёки } \theta^\circ = 135^\circ.$$

Бу юзалардан бири AB бўлса, иккинчиси AB га тикдир.

□

VI боб

МУСТАҲКАМЛИК НАЗАРИЯЛАРИ

40-§. Мустаҳкамлик назариялари ҳақида тушунча

Оддий чўзилиш ёки сиқилишдаги стерженларнинг мустаҳкамлик шартини қуйидагича тузган эдик:

$$\sigma \leq [\sigma]; \quad (40.1)$$

бунда $[\sigma]$ — чўзилиш ёки сиқилиш учун рухсат этилган кучланиш. Пластик материаллар учун рухсат этилган кучланиш чўзилишда ва сиқилишда бир хил бўлиб, мўрт материаллар учун ҳар хил бўлиши бизга маълум. Рухсат этилган кучланиш хавфли ҳолат бошланиш олдидаги кучланишнинг бир қисмига тенг. Хавфли ҳолат пластик материаллар учун қолдиқ деформациянинг мавжуд бўлиши билан, мўрт материаллар учун эса материалнинг дарз кетиши билан характерланади. Рухсат этилган кучланиш бу икки ҳол учун қуйидагича ёзилади:

$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n}$ пластик материаллар учун,

$[\sigma] = \frac{\sigma_b}{n}$ мўрт материаллар учун.

Оддий чўзилиш ёки сиқилишда материалдаги хавфли ҳолатнинг бошланишига оид кучланишлар лаборатория тажрибаларидан аниқланади. Чўзилиш ёки сиқилиш каби таъсирларни синов машиналарида бажариш мумкин; шу сабабли синалаётган материал учун оқиш чегарасига ёки мустаҳкамлик чегарасига оид кучланишларни аниқлаш жуда осон.

Иншоот элементлари кучларнинг мураккаб таъсирида бўлса, унинг бирор нуқтасида бош юзаларга параллел қилиб ўтказилган уч жуфт текислик билан чегараланган параллелепипеднинг томонларига учта σ_1 , σ_2 , σ_3 бош кучланиш таъсир қилади. Бу ҳолда ажратилган элемент учун хавфли ҳолатнинг бошланиши шу учта бош кучланишнинг қийматларига ва уларнинг турли комбинациядаги нисбатларига боғлиқдир. Бу комбинацияларнинг ҳаммасини олдиндан маълум схемага солиш мумкин бўлмагани учун, лаборатория шароитида тегишли тажрибалар ҳам ўтказиб бўлмайди. Шунинг учун, мураккаб кучланиш ҳолатидаги иншоот элементларининг мустаҳкамлик шартларини бошқа усуллар билан тузиш зарурати туғилади.

Мураккаб кучланиш ҳолатидаги элемент материали учун σ_T билан σ_b нинг оддий чўзилиш ёки сиқилишга оид қийматларини тажриба ёрдамида аниқлаш мумкин.

Мураккаб кучланиш ҳолатидаги элементнинг мустаҳкамлик шартини оддий кучланиш ҳолатидаги стержень учун аниқланган σ_T ва σ_b га боғлаб аниқлашга тўғри келади.

Қўйилган масала материалнинг мустаҳкамлигини ифодаловчи факторлар бош кучланишлар билан қандай боғланганлигига қараб, турли гипотезалар асосида ечилади. Материал учун хавфли ҳолатнинг бошланишини характерловчи факторлар бир қанчадир.

Масалан, оддий чўзилишдаги пластик стерженда ҳосил бўладиган оқиш процесси қандай сабабга боғлиқ, деган саволга турли гипотезалар асосида жавоб берса бўлади. Оқиш процесси нормал кучланиш (σ) оқиш чегараси (σ_T) га эришганда бошланади, деб фараз қилиш мумкин. Аммо бу ҳолни бошқа нуқтаи назар асосида тушунтириш ҳам мумкин. Чунончи, нисбий чўзилиш (ϵ) ёки тангенциал кучланиш (τ) маълум кийматга эришганда бошланади деб фараз қилса ҳам бўлади. Курамински, хатто шундай оддий ҳолда ҳам, тажрибада кузатилаётган ходиса бир қанча мулоҳазаларга олиб келади. Материалнинг мустаҳкамлигига оид масалаларни ечишда шу материалда ҳосил бўладиган турли кучланиш ва деформацияларни айрим-айрим олиб қараб бўлмайди; улар маълум муносабатда бўлиб, кучланиш ҳолатидаги жисмда улардан бирортасининг мавжуд бўлиши қолганларини вужудга келтиради. Аммо айтилган бу факторлардан қайси бири материалнинг емирилишида асосий аҳамиятга эга бўлади, деган савол туғилади. Ҳозиргача бу соҳада ўтказилган текширишлар, тажриба ва кузатишларга асосланган гипотезаларга суяниб, материалнинг емирилишини маълум бир факторга боғлаб кўрсатади.

Материалларда хавфли ҳолатнинг бошланишини гипотезалар асосида турли факторларга боғлаб текширувчи назариялар *мустаҳкамлик назариялари* дейилади.

Мустаҳкамлик назарияларини баён этишдан аввал қуйидаги изоҳни эслатиб ўтамиз. Пластик ва мўрт материаллар учун хавфли ҳолатнинг бошланишига оид кучланиш ва деформациялар Гук қонунининг бажарилиш

чегарасида ётади, деб фараз қиламиз. Бу ҳол мустаҳкамлик назарияларини Гук қонуни асосида тузиб, мураккаб кучланиш ҳолати учун тегишли ҳисоб тенгламаларини чиқаришга имкон беради.

41-§. Мураккаб кучланиш ҳолатидаги жисмларнинг мустаҳкамлигини турли мустаҳкамлик назариялари асосида текшириш

Мураккаб кучланиш учун хавфли ҳолатнинг бошланишини аниқлайдиган бир канча мустаҳкамлик назариялари бор; булардан учтаси классик назария ҳисобланади. Биз олдин ана шу классик назарияларни баён этамиз.

Биринчи мустаҳкамлик назарияси

Биринчи мустаҳкамлик назариясини XVII асрдаёқ Галилей таърифлаган бўлиб, ундан кейин ҳам бу назарияни бир неча йирик олимлар тавсия этган. Бу назарияга мувофиқ, *мураккаб кучланишдаги жисмнинг хавфли ҳолати унда ҳосил бўладиган энг катта нормал кучланиш шу жисм материалидан ясалган намунанинг оддий чўзилиши ёки сиқилишидаги хавфли ҳолатига тегишли нормал кучланишга эришганда бошланади.*

Мураккаб кучланишдаги бош кучланишлар $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ бўлса, сон жиҳатидан энг катта нормал кучланиш σ_1 га тенг бўлади. Биринчи назариянинг таърифига кўра, хавфли ҳолат бошланиш олдида:

пластик материаллар учун: $\sigma_1 = \sigma_T$,

мўрт материаллар учун: $\sigma_1 = \sigma_b$.

Мураккаб кучланиш ҳолатидаги жисмда хавфли ҳолат бошланмаслиги учун, ундаги энг катта нормал кучлаш σ_1 шу жисм намунасининг оддий кучланиш ҳолатига тегишли рухсат этилган кучланишдан ошмаслиги керак, яъни мустаҳкамлик коэффициенти (n) ни иккала ҳол учун ҳам бир хилда олсак:

$$\sigma_1 \leq [\sigma]. \quad (41.1)$$

шарт келиб чиқади. Бу назарияга мувофиқ, мураккаб ва оддий кучланишдаги жисмларнинг фарқи бўлмай қолди, чунки мураккаб кучланишдаги бош кучланишлардан σ_2 ва σ_3 нинг жисмда хавфли ҳолат бошланишда ҳеч қандай аҳамияти қолмади. Ундан ташқари, бу назарияга мувофиқ, ҳар томонлама сиқилаётган жисм босимнинг қиймати шу жисм намунасининг бир томонга қараб сиқилишидаги мустаҳкамлик чегарасига етганда емирилиши керак. Аммо ўтказилган тажрибалар шунини кўрсатадики, босимнинг қиймати бир гомонлама сиқилаётган намунанинг мустаҳкамлик чегарасига қараганда бир канча катта бўлганда ҳам ҳар томонлама сиқилаётган жисм бардош бериб туради. Бу ҳолда жисмнинг қаршилик кўрсатиш қобилияти биринчи назария билан аниқланишига қараганда анча юқоридир. Бу мисол ва σ_2 билан σ_3 нинг эътиборга олинмаслиги биринчи назариянинг қатъий эмаслигини кўрсатади.

Аммо бу назария чўзилишга қаршилик кўрсатувчи мўрт материаллар учун тажрибага мос келади.

Иккинчи мустаҳкамлик назарияси

Бу назарияни биринчи марта 1682 йилда Мариотт таклиф қилган бўлиб, у мураккаб кучланиш ҳолатидаги жисмнинг энг катта нисбий чўзилиши асосида ҳисоб юргизиш керак, деган фикрни баён этган эди. Ўз вақтида бу назариянинг тўғрилигини бир нечта олимлар ўз текширишлари билан

тасдиқладилар. Масалан, Сен-Венан мураккаб кучланиш ҳолатидаги жисмни шу назария асосида ҳисоблашни қатъий тавсия этди. Бу назарияга мувофиқ, мураккаб кучланиш ҳолатидаги жисмда ҳавфли ҳолат унинг энг катта нисбий чўзилиши (сиқилиши) шу жисм материалидан ясалган намунанинг оддий чўзилишидаги (сиқилишидаги) ҳавфли ҳолатига тегишли нисбий чўзилишга (сиқилишга) эришганда бошланади.

Мураккаб кучланишдаги энг катта нисбий деформация ϵ_1 бўлсин. Иккинчи назарияга кўра, ҳавфли ҳолат бошланганда:

$\epsilon_1 = \epsilon_T$ пластик материал учун,

$\epsilon_1 = \epsilon_b$ мўрт материал учун.

Мустаҳкамлик коэффициенти (n) ни мураккаб ва оддий кучланиш ҳолатлари учун бир хилда деб қабул қилсак, иккинчи назарияга мувофиқ, ҳисоб тенгламасини тузиш учун қуйидаги шартни оламиз:

$$\epsilon_{\max} = \epsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \leq [\epsilon] \quad (41. 2)$$

Бунда, $[\epsilon]$ — намунанинг оддий чўзилишдаги (сиқилишдаги) рухсат этилган кучланиши $[\sigma]$ га тегишли нисбий деформацияси. Шунинг учун у:

$$[\epsilon] = \frac{[\sigma]}{E}$$

бўлади. Буни кўзда тутиб, (41. 2) ни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]. \quad (41. 3)$$

Бу формулада бош кучланишларнинг учаласи қатнашган. Бу жиҳатдан мазкур назария биринчи назарияга қараганда мувофиқлашганга ўхшаб кўринади. Аммо бу назариянинг нат жалари ҳам баъзи тажрибаларнинг оқибатига зиддир. Масалан, бу назарияга мувофиқ, ўзаро тик икки йўналишдаги сиқувчи кучлар таъсирига дуч келган кубикнинг мустаҳкамлиги бир томонга қараб сиқилаётган кубикнинг мустаҳкамлигидан юкори бўлиши керак. Аммо тажриба бу ҳўлосанинг айнан тескарисини тасдиқлайди. Мўрт материаллар учун бу назария тажриба билан мос келадиган натижаларни беради.

Бош кучланишларнинг ишораси ҳар хил бўлса, масалан, кубик иккита ўзаро тик томондан сиқилиб, бу томонларга тик йўналиш бўйича чўзилса, у ҳолда энг катта нисбий чўзилиш оддий ҳолдаги нисбий чўзилишдан каттарок бўлади. Ана шундай шароитда ишлайдиган ишлоот элементлари бу назария асосида ҳисобланса, у ҳақиқий ҳолатга анча яқинлашади. Шунинг учун юкорида айтилган шароитда ишлайдиган машина ва ишлоот элементлари иккинчи назария асосида тузилган тенгламалар асосида ҳисобланади.

Учинчи мустаҳкамлик назарияси

Бу назарияга мувофиқ, мураккаб кучланишда ҳавфли ҳолатнинг бошланишга асосий сабаб қилиб энг катта тангенциал кучланиш олинади. Учинчи назарияни 1773 йилда Кулон киритган бўлиб, бу назария кўп вақтлар тан олинмади, чўнки ўша вақтларда ишлатилган материаллар учун, яъни сиқилишга яқин қаршилик кўрсатувчи материаллар учун бу назарияни татбиқ этишнинг зарурати йўқ эди. Аммо олдинги икки назариянинг кўпгина ҳолларда тажриба оқибати билан мос келмаслиги, бундан ташқари, чўзилиш ва сиқилишга бир хилда қаршилик кўрсатувчи пластик материалларнинг вужудга келиши, Кулон назариясидан яна фойдаланишга мажбур этди.

Масалан, ҳамма томонлари бир хилда босим билан сиқилаётган материалнинг, сиқувчи босим қанча бўлишидан қатъи назар, емирилмаслигини Кулон назарияси ёрдамида изоҳлаш мумкин.

Бу назарияга кўра, мураккаб кучланиш ҳолатидаги жисмда хавфли ҳолат ундаги максимал тангенциал кучланиш шу жисм материалдан ясалган намунанинг оддий чўзилишдаги хавфли ҳолатига тегишли тангенциал кучланишга эришганда бошланади.

Оддий чўзилишда пластик материаллар учун хавфли ҳолат кучланиш оқиш чегарасига эришганда бошланади. Биз уни τ_T десак, учинчи назарияга мувофиқ, хавфли ҳолат бошланганда

$$\tau_{\max} = \tau_T$$

бўлади. Хавфли ҳолат бошланмаслиги учун τ_T ўрнига $[\tau]$ ни қўйишимиз керак:

$$\tau_{\max} \leq [\tau] \quad (41.4)$$

Бу ҳолда ҳам мустаҳкамлик коэффициенти (n) мураккаб кучланиш билан оддий кучланиш учун бир хилда олинди. Мураккаб кучланишда энг катта ва энг кичик бош кучланишлар тегишлича σ_1 ва σ_3 бўлса,

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

бўлади. Оддий кучланиш ҳолати учун: $[\tau] = \frac{[\sigma]}{2}$.

Буларни (41.4) га қўйсак, унинчи назарияга мувофиқ, мустаҳкамлик шарти қуйидагича ёзилади:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]. \quad (41.5)$$

Бу назариянинг натижалари тажрибалардан чиқарилган натижаларга анчагина яқин келади. У, айниқса пластик материаллар учун яхши натижалар беради. Бу назария асосида ҳисобланган конструкция элементларининг мустаҳкамлиги, баъзан керагидан ортиқроқ бўлади. Учинчи назариянинг асосий камчилиги ўртача бош кучланишнинг, яъни σ_2 нинг қийматини эътиборга олмасликдир. Бунинг натижасида фазовий ва текис кучланиш ҳолатлари орасида ҳеч қандай фарқ қолмайди.

Ўтказилган тажрибалар жисмнинг қаршилиқ кўрсатиш қобилиятига σ_2 нинг таъсири борлигини тасдиқлайди. Аммо текис кучланиш ҳолатидаги иншоот ва машина қисмларининг мустаҳкамлигини текширишда бу назариянинг юқоридаги икки назарияга қараганда афзаллиги шубҳасиздир.

42-§. Энергетик назария

Юқорида келтирилган классик назарияларнинг бир қанча камчиликлари бор, шунинг учун мураккаб кучланишдаги иншоот элементларида хавфли ҳолатнинг бошланишига қандай факторлар сабаб бўлиши ҳақида янги фикрлар туғилди. Кўп олимлар хавфли ҳолатнинг бошланишига турли кучланишлар ёки деформацияларнинг айрим таъсири эмас, балки уларнинг бирга қўшилиб таъсир этиши сабаб бўлади, деган фикрни баён этдилар. Бу фикрга кўра, хавфли ҳолатнинг бошланиши ҳажм бирлигида тўпланган деформация потенциал энергиясининг миқдорига боғлиқдир. Бу миқдор учала бош кучланиш орқали ифодаланади. Хавфли ҳолатнинг бошланиши деформациянинг солиштирма энергиясига боғлиқ бўлгани учун бу назария *энергетик назария* дейилади.

Энергетик назарияга кўра, мураккаб кучланиш ҳолатидаги жисмда хавфли ҳолат ундаги деформациянинг солиштирма потенциал энергияси шу жисм материалидан ясалган намунанинг оддий чўзилишдаги хавфли ҳолатига тегишли деформациянинг солиштирма потенциал энергиясига яринганда бошланади.

Мураккаб кучланиш ҳолатидаги хавфли ҳолатга оид солиштирма потенциал энергияни $a_{\max}$, оддий кучланишдагисини эса a_T десак, энергетик назарияга кўра қуйидаги тенгламани ёзамиз:

$$a_{\max} = a_T.$$

Хавфли ҳолат бошланмаслиги учун a_T нинг ўрнига, рухсат этилган кучланишга тегишли солиштирма потенциал энергияни олиб, мустаҳкамлик шартини қуйидагича ёзамиз:

$$a_{\max} \leq [a]. \quad (42.1)$$

Бунда $[a]$ — рухсат этилган кучланишга тегишли солиштирма потенциал энергия.

Солиштирма потенциал энергиянинг оддий кучланиш ҳолати учун қуйидагича ёзилиши бизга маълум:

$$a = \frac{\sigma^2}{2} = \frac{\sigma^2}{2E}. \quad (42.2)$$

Мураккаб кучланиш ҳолатидаги жисмнинг солиштирма потенциал энергиясини ҳисоблаш учун, унинг энг катта кучланишларга эга бўлган нуқта-сида бош юзаларга параллел уч жуфт текислик воситасида, қирраларининг узунлиги бирга тенг бўлган куб ажратиб, унинг томонларига қўйилган ҳар бир кучланиш бажарган ишни ҳисоблаймиз. σ_1 кучланиш таъсирида куб бу йўналиш бўйича ϵ_1 га чўзилади, бу чўзилишда σ_1 нинг бажарган иши:

$$a_1 = \frac{\sigma_1 \epsilon_1}{2} = \frac{\sigma_1}{2E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

ёки:

$$a_1 = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 - \mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3)]$$

бўлади. σ_2 ва σ_3 кучланишларнинг бажарган ишлари учун ҳам худди шундай ифодаларни оламиз:

$$a_2 = \frac{1}{2E} [\sigma_2^2 - \mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3)],$$

$$a_3 = \frac{1}{2E} [\sigma_3^2 - \mu(\sigma_3\sigma_2 + \sigma_3\sigma_1)].$$

Ҳажм бирлигида бажарилган тўла иш ёки деформациянинг солиштирма потенциал энергияси:

$$a = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] \quad (42.3)$$

бўлади.

Оддий кучланиш ҳолатидаги солиштирма потенциал энергияни рухсат этилган кучланиш орқали ифодаласак,

$$[a] = \frac{[\sigma]^2}{2E}$$

келиб чиқади. Энергетик назарияга мувофиқ, мустаҳкамлик шarti қуйидагича ёзилади:

$$\frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] \leq \frac{[\sigma]^2}{2E}$$

ёки

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} \leq [\sigma]. \quad (42.4)$$

Бу шartни чиқаришда деформация потенциал энергиясининг ёки деформацияланиш натижасида бажарилган ишнинг ҳажм бирлигидаги тўла қийматини ҳисобга олдик. Кубнинг деформацияси икки қисмдан иборат: куб ҳажмининг ўзгариши ва куб шаклининг ўзгариши. Деформацияга мослаб, солиштирма ишни ҳам икки қисмга ажратамиз: куб ҳажмининг ўзгаришида ва куб шаклининг ўзгаришида бажарган ишлар ўтказилган тажрибалар материалда хавфли ҳолат шаклининг ўзгариши натижасида бошланишини кўрсатади. Пластик материаллар билан ўтказилган тажрибалар бу ҳулосани аниқсаяққол тасдиқлайди.

Шунинг учун энергетик назарияга мувофиқ мустаҳкамлик шartини тузишда, солиштирма потенциал энергиянинг ёки солиштирма ишнинг шакл ўзгаришига оид қисмини олиш кифоя. Солиштирма ишнинг шакл ўзгаришига оид ифодасини чиқариш учун, солиштирма ишнинг тўла ифодасидан фойдаланамиз. Тўла солиштирма ишни ифодаловчи (42.3) формулага $\mu = 0,5$ ни қўйсак, ҳажм ўзгаришига тегишли тўла деформацияни, шунинг билан бирга, ҳажм ўзгариши натижасида ҳосил бўлган солиштирма ишни эътиборга олмаган бўламиз. Бу ҳолда мустаҳкамлик шartи қуйидагича ёзилади:

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \leq [\sigma]. \quad (42.5)$$

Бу формулани бундан кўра қулайроқ кўринишда ёзиш мумкин. Бунинг учун (42.5) формуланинг радикал остидаги ифодасини 2 га кўпайтириб, сўнг 2 га тақсим қилсак, қуйидаги ифода ҳосил бўлади:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq [\sigma]. \quad (42.6)$$

Бу тенглама шакл ўзгаришига тегишли энг катта потенциал энергия асосида тузилган ҳисоб тенгламаси дейилади. Радикал остидаги бош кучланишлар айирмаси бош юзаларга 45° қия юзалардаги максимал тангенциал кучланишларга пропорционал бўлгани учун, бу назария, пластик материалларнинг мустаҳкамлигини текширишда қўлланиладиган учинчи назария каби максимал тангенциал кучланишга асосланган.

Дарҳақиқат:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_1, \quad \sigma_2 - \sigma_3 = 2\tau_2, \quad \sigma_3 - \sigma_1 = 2\tau_3$$

бўлгани учун, (42.6) ни қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$\frac{2}{\sqrt{2}} \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2} \leq [\sigma]$$

ёки

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2} \leq [\tau]. \quad (42.7)$$

Пластик материаллар учун бу назария асосида ўтказилган ҳисобларнинг туғрилигини тажрибалар жуда яхши тасдиқлаб беради.

Мустаҳкамлиги текширилатган иншоот ёки машина элементи оддий чўзилиш ҳолатида бўлса, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ бўлиб, $\sigma_1 = \sigma$ бўлади ва келтирилган

тўртала назария ҳам бир хил кўринишдаги қуйидаги мустаҳкамлик шартини беради:

$$\sigma \leq [\sigma].$$

Шундай бўлиши ҳам керак, чунки мураккаб кучланиш ҳолатидаги жисм мустаҳкамлигининг ўлчови деб қабул қилинган катталиқ, оддий кучланиш ҳолатидаги намунанинг хавфли ҳолатидаги тегишли катталиги билан солиштирилади.

Бу тўртала назарияда муҳим бир камчилик бор: тўртала назарияга мувофиқ чиқарилган ҳисоб тенгламаларида Гук қонунига асосландик, ҳолбуки мустаҳкамлик чегараси эластиклик чегарасидан анча кейинда туради. Аммо мустаҳкамлик шартини ифодаловчи формулалар, хусусан (41. 5) ва (42. 6) формулалар, материалнинг эластиклик хусусиятини характерловчи ҳеч қандай катталиққа боғлиқ эмас. Шунга қўра, бу ҳолни кўзда тутиб, мазкур формулалардан пластик деформация шароитида ишловчи иншоот қисмларини ҳисоблаш учун ҳам тегишли формулаларни чиқариш мумкин. Бу ҳақда курсимизнинг охирида тегишли маълумотлар берилади.

МАСАЛАЛАР

36. Поезд юрадиган рельс мураккаб кучланиш ҳолатида бўлиб, унинг энг катта кучланишга эга бўлган нуктасидаги бош юзаларга параллел уч текислик воситасида қирралари 1 мм га тенг куб ажратилган. Кубнинг томонларидаги бош кучланишлар тегишлича:

$$\sigma_1 = -80 \text{ кг/мм}^2, \quad \sigma_2 = -90 \text{ кг/мм}^2, \quad \sigma_3 = -110 \text{ кг/мм}^2 \text{ дир.}$$

Тўртала назария бўйича ҳисоблаш кучланиши аниқланиб, рухсат этилган кучланиш билан таққослансин.

Е ч и ш. Биринчи назарияга мувофиқ, энг катта бош кучланиш σ_3 бўлгани учун, ҳисоблаш кучланиши учун ушани оламиш:

$$[\sigma_3] = -11000 \text{ кг/см}^2.$$

Иккинчи назарияга мувофиқ ҳисоблаш кучланиши:

$$[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] = -11000 + 0,3(9000 + 8000) = -5900 \text{ кг/см}^2.$$

Учинчи назарияга мувофиқ ҳисоблаш кучланиши:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = -8000 + 11000 = 3000 \text{ кг/см}^2.$$

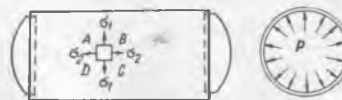
Нихоят, энергетик назарияга мувофиқ:

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} = 2640 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}.$$

Рельс учун ишлатиладиган пўлатнинг оқиш чегараси, $\sigma_T = 4000 \text{ кг/см}^2$ га ёқин бўлиб, эластиклик чегараси $\sigma_e = 3000 \text{ кг/см}^2$ бўлгани учун, кейинги икки назария асосида чиқарилган натижалар қўйилиши мумкин бўлган кучланиш чегарасига мос келади.

37. Буг қозони цилиндр шаклида бўлиб, ички босим таъсиридан мураккаб кучланиш ҳолатида туради. Қозоннинг мустаҳкамлик шarti тўртала назария бўйича текширилсин (109-шакл).

Е ч и ш. Цилиндр қозоннинг ички босими $p \text{ кг/см}^2$ деб фарз қилайлик. Қозоннинг ён деворлари ва туби тенг тарқалган босим (p) таъсирида бўлади. Қозоннинг тубидаги босим уни қўндаган кесими (йўналтирувчи доира) бўйича ўзишга интилади. Ён



109-шакл.

томонлардаги босим эса цилиндри ясовчиси бўйича ёришга интилади. Агар биз цилиндр сиртидан йўналтирувчи ва ясовчилар орқали ўтказилган икки жуфт текислик воситасида ABCD тўғри тўрт бурчакли элементни ажратсак, у икки ўзаро тик томонга қараб йўналган чўзувчи кучланишлар таъсирида бўлади. Бу кучланишлар таъсир қилаётган юзаларда тангенциал кучланишлар бўлмагани учун, улар бош юзалардир. Ясовчига тик юзадаги бош кучланишни σ_2 орқали, у билан бир йўналишда бўлган юзадаги бош кучланишни эса σ_1

орқали белгилаймиз. Козоннинг цилиндри қисми диаметрини D , деворининг қалинлигини t ($t < \frac{D}{20}$ бўлиши керак), узунлигини l деймиз. Цилиндрни чўзувчи, шу билан бирга, қозоннинг тубига таъсир қилувчи куч:

$$P = p \frac{\pi D^2}{4}$$

бўлади. Бу кучни қабул қилувчи юз қалинлиги t , диаметри эса D га тенг ҳалқа бўлиб, унинг юзи мана бундай:

$$F = \pi D t$$

(цилиндр кўндаланг кесимининг юзи). У ҳолда σ_2 кучланиш учун қуйидаги қийматни оламиз:

$$\sigma_2 = \frac{P}{F} = \frac{p \frac{\pi D^2}{4}}{\pi D t} = \frac{p D}{4t} \quad (a)$$

σ_1 ни ҳисоблаш учун (25. 5) формуладан фойдаланамиз:

$$\sigma_1 = \frac{N}{t} = \frac{p D}{2t} \quad (b)$$

Яъни параллел юзалардаги бош кучланишлар унга тик юзалардаги бош нормал кучланишларга караганда икки хисса катта бўлади.

Демак юзга деворли цилиндрик қозондан ажратилган $ABCD$ элемент текис кучланиш ҳолатида бўлар экан ($\sigma_3 = 0$ деб ҳисобланади).

Биринчи назарияга мувофиқ:

$$\sigma_1 < [\sigma] \text{ ёки } \frac{p D}{2t} < [\sigma].$$

Иккинчи назарияга мувофиқ:

$$\sigma_1 - \mu \sigma_2 < [\sigma] \text{ ёки } \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \frac{p D}{2t} < [\sigma].$$

Учинчи назарияга мувофиқ:

$$\sigma_1 - \sigma_3 < [\sigma] \text{ ёки } \frac{p D}{2t} < [\sigma].$$

Энергетик назарияга мувофиқ:

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} - \sigma_1 \sigma_2 < [\sigma] \text{ ёки } \sqrt{\frac{p D}{2t}} < [\sigma].$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{p D}{2t}} \approx 0,86 \text{ бўлгани учун: } 0,86 \cdot \frac{p D}{2t} < [\sigma].$$

Бу назариянинг натижаси 1 ва 3- назариялар натижасидан 14% фарқ қилаётир. Ўзинча чўзилишга бардош берадиган пулат учун $\mu = 0,3$ қилиб олинса, иккинчи назария энергетик назария билан деярли бир хил натижа беради.

Ечиш. Оддин берилган текис кучланиш ҳолати учун бош кучланишларни ҳисоблаймиз:

$$\sigma_1 = -\frac{\sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_y^2 + 4\tau_{xy}^2} = -450 + \frac{1}{2} \sqrt{81 \cdot 10^4 + 4 \cdot 36 \cdot 10^4} = 300 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$$

$$\sigma_2 = -\frac{\sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_y^2 + 4\tau_{xy}^2} = -450 - \frac{1}{2} \sqrt{81 \cdot 10^4 + 4 \cdot 36 \cdot 10^4} = -1200 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$$

Биринчи назарияга мувофиқ, энг катта нормал кучланиш:

$$[\sigma_2] = 1200 \text{ кг/см}^2.$$

Мустаҳкамлик коэффициенти:

$$n_1 = \frac{3000}{1200} = 2,5.$$

Иккинчи назарияга мувофиқ:

$$\sigma_1 - \mu\sigma_2 = 300 + 0,3 \cdot 1200 = 660 \text{ кг/см}^2,$$

$$\sigma_2 - \mu\sigma_1 = -1200 - 0,3 \cdot 300 = -1290 \text{ кг/см}^2.$$

Энг катта деформация — 1290 кг/см^2 кучланишга мос келади, шунинг учун тегишли мустаҳкамлик коэффициенти:

$$n_{II} = \frac{3000}{1290} = 2,325$$

булади.

Учинчи назарияга кўра, энг катта тангенциал кучланиш:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{300 + 1200}{2} = 750 \text{ кг/см}^2.$$

Оддий кучланиш ҳолатида оқиш чегарасига тегишли энг катта тангенциал кучланиш:

$$\frac{\sigma_T}{2} = \frac{3000}{2} = 1500 \text{ кг/см}^2.$$

Мустаҳкамлик коэффициенти:

$$n_{III} = \frac{1500}{750} = 2.$$

Энергетик назарияга мувофиқ:

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \cdot (-\sigma_2)} = \sqrt{9 \cdot 10^4 + 144 \cdot 10^4 + 36 \cdot 10^4} = 1375 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}.$$

Мустаҳкамлик коэффициенти:

$$n_{IV} = \frac{3000}{1375} = 2,26.$$

Бу ҳолда, иккинчи назария билан энергетик назария деярли бир хил натижа бераётир.

□

VII БОБ

СИЛЖИШ

43-§. Соф силжиш

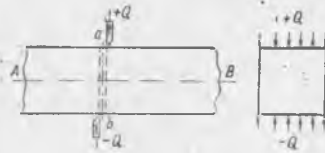
Биз ўтган параграфда, оддий чўзилувчи ёки сиқилувчи стерженларнинг кия кесимларидаги кучланишларни текширганимизда, уларда узувчи нормал кучланишлардан ташқари, силжитувчи тангенциал кучланишларнинг ҳам ҳосил бўлишини кўрсатиб ўтган эдик.

Кўпинча, машина қисмлари ва конструкция элементлари шундай шароитда ишлайдики, уларга қўйилган кучлар конструкция элементларининг алоҳида қисмларини бир-бирига нисбатан силжитиб, натижада уларни ишдан чиқаради. Силжишга қаршилик кўрсатувчи конструкция элементларининг мустаҳкамлиги текширилганда, биринчи навбатда, силжиш деформацияси натижаида ҳосил бўладиган тангенциал кучланишни аниқлаш масаласини қўйиш лозим. Шунинг учун биз бу бобда силжиш деформацияси билан унга тегишли тангенциал кучланиш устида тўхталиб ўтамиз.

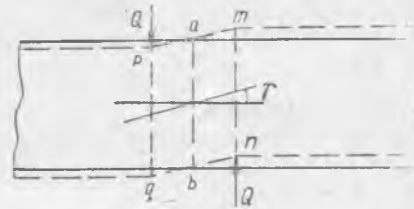
AB призматик стержень бир-бирига тенг ва қарама-қарши томонларга қараб, стерженнинг ўқиға тик йўналган иккита Q ва —Q кучларнинг таъсирида бўлади, деб фарз қилайлик (110-шакл).

Бу кучлар етарли даражада катта бўлса, стерженни ab чизик бўйича икки қисмга ажратиш мумкин. Бу ҳодиса *кесишиш* дейилади. Темирнинг қайчи билан кесирилиши бунга мисол бўла олади.

Бу кучлар бир-бирига қарама-қарши бўлса ҳам бир чизик билан йуналмасликлари керак. Чунки кесувчи асбобнинг ничоқлари унчалик ўткир бўлмаса ҳам, улар бир-бирига яқин икки параллел текисликларда жойлашган бўлиши керак. Биз бу текисликларни pq ва mnp билан белгиласак, бу текис-



110- шакл.



111- шакл.

ликлар Q ва $-Q$ кучлар таъсирида бир-бирига нисбатан силжиб, уларда бу силжишга қаршилик кўрсатувчи тангенциал кучланишлар пайдо бўлади (111-шакл).

Бу кучланишларни кесим юзаси бўйича тенг тарқалган деб фараз қиламиз ва уни τ билан белгилаймиз. У ҳолда:

$$\tau = \frac{Q}{F} \quad (43.1)$$

бўлади.

Эластиклик чегарасигача, силжиш деформацияси 111-шаклда пунктирли чизик билан кўрсатилганидек, $mnpq$ элементнинг қийшайиши билан тасвирланади.

$mnpq$ тўғри бурчакли элементар параллелепипеднинг силжиш деформацияси тўғри бурчагининг қийшайиши билан тасвирланади, бу қийшайиш ни эса γ бурчак ифодалайди. Шунинг учун бу бурчак *силжиш бурчаги* дейилади.

Умуман, силжиш деформацияси соф силжиш тарикасида ҳеч қачон учрамайди. Тангенциал кучланишнинг кесилувчи кесим юзаси бўйича қандай тарқалганлиги ҳам бизга маълум эмас. Аммо силжиш деформациясига дуч келган элементларнинг чўзилиши ёки сиқилиши жуда кичик бўлгани учун, уларни амалий ҳисобларда эътиборга олмаса ҳам бўлади. Шунинг учун фақат тангенциал кучланиш таъсирида бўлган элементларни соф силжишда деб қараймиз.

Агар $mnpq$ элементни ажратиб, унинг mn томонини қўзғалмас қилиб маҳкамласак ва pq томонига силжитувчи куч қўйсак бу куч таъсиридан pq томони mn га нисбатан бирор $pp' = \delta$ миқдорга силжийди. Биз буни *абсолют силжиш* деймиз. Бунинг натижасида $mnpq$ элемент қийшайиб, унинг тўғри бурчаклари γ бурчакка ўзгаради (112-шакл).

pp' нинг pn га нисбатини *нисбий силжиш* деймиз. $pn = qn = a$ бўлса, у нисбий силжиш қуйидагича ёзилади:

$$\frac{pp'}{pn} = \frac{\delta}{a} = \operatorname{tg} \gamma. \quad (43.2)$$

Жуда кичик деформацияни текшираётганимиз учун, γ бурчак ҳам жуда кичик миқдор бўлади. Шунинг учун:

$$\lg \gamma = \gamma.$$

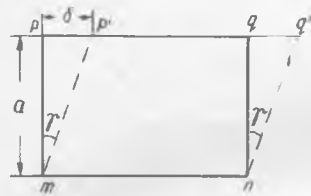
Демак:

$$\frac{\delta}{a} = \gamma \quad (43.3)$$

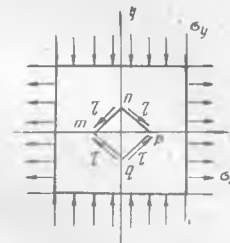
бўлади, яъни нисбий силжиш тўғри бурчакнинг торайишига ёки кенгайишига тенг бўлар экан. Бу бурчак соф силжишдаги жисм деформациясини тўла аниқлайди. Оддий чўзилишдаги нисбий чўзилиш билан унга тегишли нормал кучланишни боғловчи оддий муносабатга ўхшаш муносабат соф силжишдаги нисбий силжиш билан тангенциал кучланиш орасида ҳам бор. Шу муносабатни чиқарамиз.

Нисбий силжиш γ билан унга тегишли тангенциал кучланиш τ орасидаги муносабат қуйидагича ёзилади:

$$\tau = G \cdot \gamma. \quad (43.4)$$



112- шакл



113- шакл.

Бу ерда G пропорционаллик коэффициентини бўлиб, у *силжиш модули* ёки *иккинчи хил эластиклик коэффициентини* дейилади. У физик маъноси жиҳатидан E га ўхшашди. G ни E каби бевосита (43.3) дан аниқлаш қийин, чунки силжиш бурчаги γ ни тажрибадан аниқлаш осон эмас. Бироқ G билан E нинг муносабатини аналитик усулда топиш мумкин.

Ўзаро тик йўналган чўзувчи ва сиқувчи кучлар таъсиридаги призматик стержендан, унинг томонларига параллел икки жуфт текислик воситаси билан битта параллелепипед ажратамиз. Бу параллелепипеднинг томонларидаги сиқувчи ва чўзувчи кучланишлар сон жиҳатидан тенг бўлсин. Бу томонларда тангенциал кучланишлар таъсир этмагани учун, ундаги нормал кучланишлар бош кучланишлар бўлади.

Биз бу бош кучланишларни σ_1 ва σ_2 орқали белгилаймиз. Масала шартига мувофиқ:

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma$$

бўлади.

Энг катта тангенциал кучланиш бош юзаларга 45° қия юзаларда ҳосил бўлиши бизга маълум. Ҳалиги параллелепипеддан унинг томонларига 45° қия текисликлар ўтказиб, $mnpq$ элементни ажратамиз (113-шакл). Бу элементнинг томонларида ҳосил бўладиган кучланишларни аниқлаймиз. (33.1) ва (33.2) формулаларга мувофиқ:

$$\sigma_n = \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta = \sigma \cos^2 45^\circ - \sigma \sin^2 45^\circ = 0.$$

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\theta = \frac{\sigma - (-\sigma)}{2} \sin 90^\circ = \sigma.$$

mn , np , pq ва qm юзалардаги нормал кучланишлар ноль бўлгани учун улардаги толалар фақат силжийди, холос, шунинг учун улардаги деформация соф силжиш деформацияси бўлади.

Бу $mnpq$ даги тўғри бурчакларнинг деформациядан кейин торайиши ва кенгайиши натижасида mp диагональ узайиб, qn диагональ шу миқдорга қисқаради (114-шакл).

Бу чўзилиш ва сиқилиш (39.2) формулага мувофиқ, биз текшираётган ҳол учун қуйидагича ёзилади:

$$\epsilon_1 = -\epsilon_2 = \epsilon = \frac{\tau}{E}(1 + \mu); \quad (a)$$

ϵ билан γ орасидаги муносабатни 114-шаклдан топамиз:

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{Op'}{Oq'} = \frac{Op(1 - \epsilon)}{Oq(1 + \epsilon)} = \frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon}.$$

ϵ ва γ нинг кичиклигини эътиборга олиб, бу ифоданинг ўнг ва чап томонларини қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon} &= 1 - 2\epsilon; \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \right) = \\ &= \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}} = \frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}} = 1 - \gamma \end{aligned}$$

Демак:

$$1 - \gamma = 1 - 2\epsilon,$$

бундан:

$$\gamma = 2\epsilon. \quad (b)$$

Бу ҳолда нисбий силжиш, сон жиҳатидан олганда, нисбий чўзилишнинг икки ҳиссасига тенг бўлади.

ϵ нинг қийматини (b) дан (a) га олиб бориб қўйсак, τ билан γ орасидаги муносабатни топамиз:

$$\tau = \frac{E}{2(1 + \mu)} \cdot \gamma. \quad (43.5)$$

Чиққан натижани (43.4) формула билан солиштириб, G учун қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз:

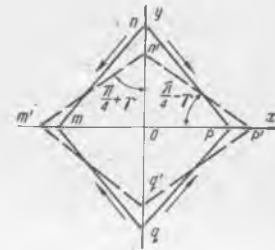
$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (43.6)$$

Материал учун E билан μ маълум бўлса, G ни (43.6) формуладан топиш жуда осон.

Агар $\mu = \frac{1}{3}$ бўлса, $G = \frac{3}{8}E$ бўлади.

44-§. Силжишга қаршилик кўрсатувчи призматик стерженлар учун рухсат этилган кучланиш

Силжишга қаршилик кўрсатувчи иншоот ва машина элементларининг мустаҳкамлигини ҳисоблаш учун, тегишли рухсат этилган кучланишлар маълум бўлиши керак. Аммо силжишдаги эластик деформацияни ва унга тегишли эластиклик чегарасини тажриба воситаси билан аниқлаш қийин бўлгани учун, рухсат этилган кучланишни мустаҳкамлик назарияларидан фойдаланиб аниқлаймиз. Силжишга қаршилик кўрсатувчи материал учун чўзилиш ва сиқилишдаги рухсат этилган кучланиш $[\sigma]$ маълум бўлса, мустаҳ-



114-шакл.

камлик назарияларидан фойдаланиб ҳисоб тенгламаларини тузиш осон. Соф силжишда:

$$\sigma_1 = \tau, \quad \sigma_3 = -\tau$$

бўлади. Энг катта нормал кучланиш назариясининг пулат каби материаллар учун татбиқ этилмаслиги ҳақида юқорида айтиб утган эдик. Шунинг учун, силжишга қаршилиқ кўрсатувчи элементларнинг мустаҳкамлик шартини энг катта деформация назарияси асосида тузишдан бошлаймиз. Пластик материаллар учун бу назарияни татбиқ қилиш тўғри бўлмаса ҳам, кейинги ярим аср мобайнида машинасозлик соҳасида бу назария кенг татбиқ этилмоқда.

$$[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \geq [\sigma];$$

биз текшираётган ҳол учун:

$$[\tau - \mu(-\tau)] \leq [\sigma] \text{ ёки } \tau(1 + \mu) \geq [\sigma].$$

Бу тенгламадан мустаҳкамлик шартини қаноатлантирувчи тангенциал кучланишнинг миқдорини аниқлаймиз:

$$\tau \leq \frac{[\sigma]}{1 + \mu} = [\tau]. \quad (44.1)$$

Мазкур тенгсизлиكنинг ўнг томонидаги каср соф силжишдаги рухсат этилган кучланишдир. Пулат учун $\mu \approx 0,3$ бўлганидан:

$$[\tau] = 0,8[\sigma]. \quad (44.2)$$

Мустаҳкамлик шартини энг катта тангенциал кучланиш назариясига мувофиқ ёзамиз:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \geq [\sigma] \text{ ёки } \tau - (-\tau) \geq [\sigma];$$

бундан:

$$\tau \geq \frac{[\sigma]}{2} = [\tau],$$

демак:

$$[\tau] = 0,5[\sigma] \quad (44.3)$$

бўлади. Ниҳоят, энергетик назарияга мувофиқ:

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2} - \sigma_1\sigma_3 \leq [\sigma] \text{ ёки } \sqrt{\tau^2 + \tau^2} \leq [\sigma].$$

Бундан:

$$\tau \geq \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} = [\tau],$$

демак:

$$[\tau] = 0,57[\sigma] \approx 0,6[\sigma]. \quad (44.4)$$

Кўрамизки, ҳар хил назариялар асосида чиқарилган натижалар бир-биридан фарқ қилмоқда. Шунинг учун, бу ҳолда, қайси назариянинг мустаҳкамлик шартига асос бўлиши муҳим аҳамиятга эгадир.

Илгари вақтларда ҳисоб тенгламаси энг катта деформация назарияси асосида тузилиб, силжишдаги рухсат этилган кучланиш учун $[\tau] = 0,8[\sigma]$ қиймат қабул қилинар эди. Ҳозирги вақтда пластик материаллар учун энг ишончли назария энергетик назария бўлгани сабабли, силжишдаги рухсат этилган кучланиш учун қуйидаги ифоданинг олинishi тавсия этилади:

$$[\tau] = 0,6[\sigma].$$

Янги назария татбиқ этилиб чиқарилган натижа рухсат этилган кучланишни камайтириб, материални ортиқча сарф қилишга сабаб бўлаётгандек кўринади, чунки $[\sigma]$ олдидаги коэффициент эски назарияга кўра 0,8 га, янги назарияга кўра эса 0,6 га тенг бўлиб, бу сон олдиндаги сондан 25% фарқ қилади. Аммо ҳақиқатда бундай эмас. Аксинча, янги назарияни тўғри татбиқ қилиш рухсат этилган кучланиш қийматини ошириб, материалнинг қаршилиқ кўрсатиш қобилиятидан яна ҳам яхшироқ фойдаланишга имкон беради. Бу хулосани исботлаш учун, энг катта деформация назариясини татбиқ қилиш давридаги, яъни 1910—1914 йиллардаги металл конструкциялар учун белгиланган рухсат этилган кучланиш нормаси билан ҳозирги давр нормасини таққослаймиз.

1910—1914 йилларда Ст. 3 пўлати учун рухсат этилган нормал кучланиш $[\sigma] = 1000 \text{ кг/см}^2$, иккинчи назарияга мувофиқ рухсат этилган тангенциал кучланиш эса $[\tau] = 0,8[\sigma] = 800 \text{ кг/см}^2$ қилиб олинар эди. Бу нормани ҳозирги замон энергетик назариясидан фойдаланиб қандай ўзгартириш мумкин?

Агар эски норма олинса, рухсат этилган тангенциал кучланиш учун янги энергетик назария $[\tau] = 600 \text{ кг/см}^2$ қийматни беради. Бу миқдор асосида ҳисоб юритилса, конструкциянинг силжишга қаршилиқ кўрсатадиган ҳар бир элементи учун илгаригига қараганда 25% кўп материал сарф қилиш керак бўлади. Янги назарияни бундай механик равишда татбиқ этиш қўпол хатоларга олиб келиши шубҳасиздир. Рухсат этилган тангенциал кучланиш учун $[\tau] = 800 \text{ кг/см}^2$ нинг тўғрилиги тажрибаларда тасдиқланган; бу сон асосида лойиҳаланган конструкция элементларининг тўғри ҳисобланганлиги уларнинг ўтаётган хизмати билан исботланган ва исботланмоқда. Шунинг учун бу сонни камайтиришга ҳеч қандай асос йўқ. Модомики шундай экан, рухсат этилган нормал кучланиш $[\sigma]$ учун аниқланган сон анча кичик олинган деган хулоса чиқариш мумкин. Янги энергетик мустаҳкамлик назариясига ўтиш билан материални нормал кучланишга қаршилиқ кўрсатиш қобилияти анча юқори эканлиги маълум бўлди. Бунинг натижасида рухсат этилган асосий кучланиш $[\sigma]$ нинг миқдори анча ошди. Ҳозирги вақтда чўзилиш ва сиқилишдаги элементларнинг рухсат этилган кучланиши Ст. 3 пўлати учун $[\sigma] = 1600 \text{ кг/см}^2$ га, силжиш учун рухсат этилган кучланиш эса $[\tau] = 1000 \text{ кг/см}^2$ га борди; бу сон $[\sigma]$ нинг 0,6 қисмини ташкил этади.

Демак, тажрибага асосланган янги, тўғри назария рухсат этилган кучланишни пасайтиришга эмас, балки материалнинг қаршилиқ кўрсатиш қобилиятидан яна яхшироқ фойдаланишга имкон беради.

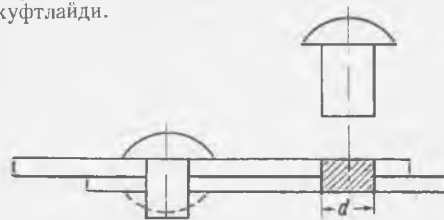
45-§. Силжишга ишловчи конструкция элементларининг ҳисоби

Юқорида биз силжишга ишловчи конструкция элементларининг тажрибада жуда кўп учрашини айтиб ўтган эдик.

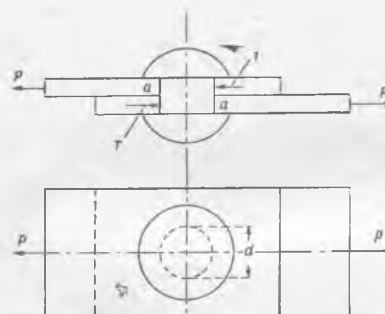
Силжишга ишловчи конструкция элементларининг энг оддий мисоллари қилиб болтли бирикма билан парчин михли бирикмани олиш мумкин. Ҳозирги вақтда парчин михли бирикма ўрнига лайванд бирикма кўпроқ ишлатилаётган бўлса ҳам, аммо купгина ҳолларда, парчин михли бирикма ўз аҳамиятини сақлаб келмоқда. Чунончи, металл қисмларни: стропило фермаларнинг стерженларини, куприк фермаларининг стерженларини, қозонларни ҳосил қилувчи листларни ва шунга ухшашларни улашда парчин михли бирикма ишлатилади. Икки листни парчин мих билан улаш учун уларнинг иккаласи ҳам бир хилда тешилиб, тешиқларга қизаргунча қиздирилган ва

бир томони қалпоқли парчин мих стержени кийгизилади. Унинг учи гидравлик пресс ёки махсус болға билан парчинланиб, қалпоқ ҳосил қилинади (115-шакл).

Листларнинг тешигини парчин мих стержени тўла қоплайди ва бу стержень совиганда қисқариб, уланувчи листларни бир-бирига маҳкам жуфтлайди.



115-шакл.



116-шакл.

қабул қилади. Бу кучлар таъсиридан парчин мих, 117-шаклда кўрсатилганидек, $a-a$ кесим бўйича кесилишга, яъни парчин михнинг юқори қисми ўнг томонга, пастки қисми эса чап томонга силжишга интилади.

Парчин михнинг $a-a$ кесимида бу кесувчи куч таъсиридан пайдо бўладиган кучланиш (τ) ни қуйидаги формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\tau = \frac{T}{F} \leq [\tau]; \quad (45.1)$$

T —битта парчин михга тушадиган кесувчи куч, $[\tau]$ —рухсат этилган тангенциал кучланиш, $F = \frac{\pi d^2}{4}$ —парчин михнинг кўндаланг кесим юзи.

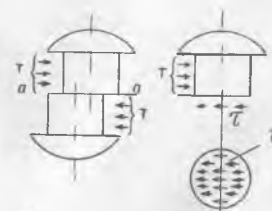
Демак:

$$[\tau] \leq \frac{T}{\frac{\pi d^2}{4}} \quad (45.2)$$

Парчин мих билан маҳкамланган листларнинг орасида пайдо бўладиган ишқаланиш кучи етарли даражада катта қийматга эга бўлса ҳам, ҳисоб вақтида бу куч эътиборга олинмай, фақат парчин михнинг кесилишга кўрсатилган қаршилик кучигина эътиборга олинади.

Парчин михнинг қандай ишлашини кўрсатиш учун икки темир листнинг бири иккинчиси устига қўйилиб, парчин мих билан уланган ҳолини текширамыз (116-шакл). Уланган листларга чўзувчи куч таъсир эттириб, уланишнинг қандай сабаблардан бўзилишини текширамыз.

P куч бу листларни бир-бирига нисбатан силжитишга уринади, листларнинг бу силжишга парчин мих қаршилик кўрсатиб, бу листларнинг шаклда кўрсатилганидек таъсир этадиган кучларини ўзига



117-шакл.

бўлади. Бироқ парчин михга листнинг таъсир этадиган кучи парчин михни кесиш билан бирга, уни эзиши ҳам мумкин, яъни листнинг тешиги парчин мих стерженини цилиндрик сирти бўйича эза бошлайди. Еки парчин мих таъсирдан тешик деворининг сирти эзилиши ҳам мумкин. Шу сабабли, парчин мих стержени ва лист тешигининг девори эзилмаслиги учун, хисоб вақтида буни ҳам текшириш керак бўлади.

118-шаклда парчин мих стерженига эзувчи куч таъсир этиши тахминан тасвирланган. Эзувчи кучнинг парчин мих сирти бўйича тарқалиш қонуни бизга маълум эмас.

Фақат бу куч A нуқтада энг катта қийматга эга бўлиб, бу нуқтадан узоқлашган нуқталарда озаяди ва B ҳамда C нуқталарда нолга айланади.

Парчин мих сирти бўйича тенг тарқалмаган босимнинг юз бирлигидаги қийматини p десак, мувозанат шарти қуйидагича ёзилади:

$$T = \int p dF. \quad (45.3)$$

Аммо p парчин михнинг цилиндрик сирти бўйича қандай қонун билан тарқалганлиги бизга маълум бўлмагани учун, эзувчи босимларнинг йиғиндисини ифодаловчи интегрални унга эквивалент бўлган ифода билан алмаштирамиз. Парчин мих сирти бўйича қуйилган эзувчи босимни унинг диаметрал кесим юзаси бўйича тенг тарқалган деб оламиз (119-шакл). Бу ҳолда (45.3) интеграл қуйидагича ёзилади:

$$T = \int p dF = \sigma_c \delta d, \quad (45.4)$$

бунда σ_c — парчин михнинг диаметрал кесимидаги эзувчи кучланиш. Унинг қийматини (45.4) дан аниқлаймиз:

$$\sigma_c = \frac{T}{\delta d}. \quad (45.5)$$

Бу ҳолда диаметрал кесимдаги эзувчи кучланишни тахминан A нуқтадаги энг катта сиқувчи кучланишга тенг қилиб олиш керак.

Диаметрал кесим юзаси тўғри бурчакли бўлиб, унинг бир томони парчин мих диаметрига, иккинчи томони эса парчин мих сиртига эзувчи босим бераётган листнинг қалинлигига тенгдир.

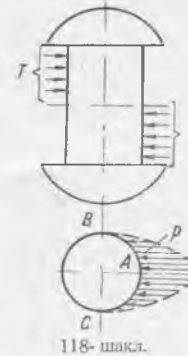
Эзилиш учун рухсат этилган кучланишни $[\sigma_c]$ десак, мустақкамлик шарти:

$$\sigma_c = \frac{T}{\delta d} \leq [\sigma_c]. \quad (45.6)$$

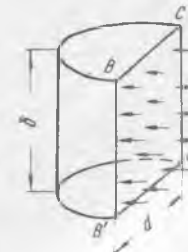
Эзилиш учун рухсат этилган кучланиш оддий чўзилиш учун рухсат этилган кучланишдан 2—2,5 марта катта қилиб олинади, яъни:

$$[\sigma_c] = (2 \div 2,5) [\sigma].$$

Листлар бир-бирига устма-уст қўйиб бириктирилганда парчин михлар фақат кесилиш билан эзилишгагина ишламасдан, эгилишга ҳам ишлайди, чунки қуйилган кучларнинг таъсир чизиқлари бир-биридан уланувчи листнинг қалинлигига тенг масофада бўлгани учун, жуфт куч ҳосил бўлади, бу жуфт куч эса бирикмани 120-шаклда кўрсатилганидек эгади.



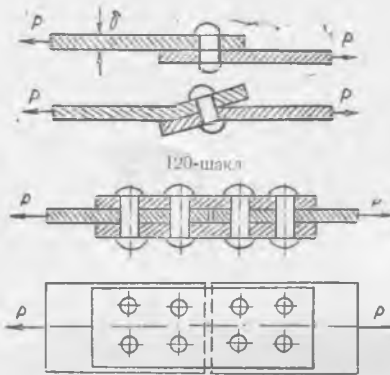
118-шакл.



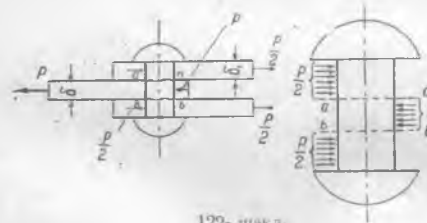
119-шакл.

Бундай эгилиш бўлмасин учун, листлар устма-уст қўйилмай, учма-уч қўйилиб бириктирилади. Бу ҳолда листларнинг устидан ва остида тахтакач қўйилади (121-шакл).

Бу тахтакачлар ёрдами билан бириктириш натижасида парчин михлар икки текисликда кесилишга қаршилиқ кўрсатади. Шунинг учун, бундай бирикмада ишловчи парчин мих *икки кесилишли* парчин мих дейилади.



121-шакл.



122-шакл.

ўзига олгани учун уларнинг қалинлиги δ_1 асосий лист қалинлигининг ярмисидан кам бўлмаслиги керак. Одатда, конструкциянинг қулайлиги нуқтаи

назаридан тахтакачларнинг қалинлиги $\frac{\delta}{2}$ дан кўра каттароқ олинади; бироқ

δ дан катта бўлмаслиги шарт, яъни $\frac{\delta}{2} \leq \delta_1 \leq \delta$ бўлиши керак.

Листларни ва ҳар хил конструкцияларнинг қисмларини улашда улар биргина парчин мих билан уланмай, кўпинча, бир канча парчин мих билан уланганлиги сабабли, улаш учун зарур бўлган парчин михларнинг сонини аниқлаш катта аҳамиятга эга бўлади.

Бунинг учун, уланувчи конструкцияга қўйилган кучлар ўловчи парчин михлар ўртасида тенг тақсимланади, деб фараз қиламиз. У вақтда, битта парчин михга туғри келадиган кесувчи кучни $T_{\text{кесувчи}}$ деб белгиласак, улаш учун зарур бўлган парчин михлар сони (n) қуйидаги формуладан аниқланади:

$$n = \frac{P}{T_{\text{кесувчи}}} \quad (45.8)$$

Икки кесилишли битта парчин михнинг ишини текшира-миз (122-шакл).

Тахтакачлар парчин михни $\frac{T}{2}$ куч билан ўрта листга нисбатан ўнг томонга силжитишга интилади. Бунинг натижасида парчин мих $a-a$ ва $b-b$ текисликларда кесилиши мумкин.

Бу ҳол учун, парчин мих икки текисликда кесилганлигидан, ҳисоб тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$\frac{T}{2} \leq [\sigma]; \quad (45.7)$$

бу ерда T — битта парчин михга тушадиган куч. Бу ҳолда парчин мих асосий листлар таъсирида ёки иккала тахтакач таъсирида эзилиши мумкин.

Эзилишга ҳисоб қилиш вақтида бу листлар ва тахтакачларнинг қайси бири юпқароқ бўлса, (45.5) ҳисоб тенгламадаги δ ўрнига шунисининг қалинлиги олинади. Бироқ иккала тахтакач асосий листдан бутун P кучни

Улаш учун зарур бўлган парчин михлар сони эзувчи кучга нисбатан ҳам аниқланади:

$$n = \frac{P}{T_{\text{эзувчи}}} \quad (45.9)$$

$T_{\text{кесувчи}}$ билан $T_{\text{эзувчи}}$ нинг илгари чиқарилган қийматларини (45.8) ва (45.9) формулаларга қўйиш билан улаш учун зарур бўлган парчин михлар сонини топишнинг қуйидаги формулаларини ҳосил қиламиз:

Кучланиш турлари	Бир кесимли парчин мих учун	Икки кесимли парчин мих учун
Кесувчи	$n = \frac{P}{[\tau] \frac{\pi d^2}{4}}$	$n = \frac{P}{2[\tau] \frac{\pi d^2}{4}}$
Эзувчи	$n = \frac{P}{[\sigma_c] \cdot d \cdot \delta}$	$n = \frac{P}{[\sigma_c] \cdot d \cdot \delta}$

Парчин михлар учун қилинган тешиклар уланувчи конструкция қисмларининг чўзилишга ёки сиқилишга кўрсатадиган қаршилигини анчагина заифлаштиради. Шунинг учун, парчин михларни ҳисоблаб, тегишлича ўрнаштиргандан кейин, уланувчи конструкцияни чўзилишга ёки сиқилишга текшириб кўриш керак.

Уланувчи лист кўндаланг кесимининг тула юзини $F_{\text{брутто}}$ деб, парчин михлар учун қилинган тешикларни ҳисобга олиб чиқарилган юзини $F_{\text{нетто}}$ деб белгилаймиз (123-шакл).

Уланувчи листларни чўзилишга ёки сиқилишга текшириб кўриш учун ҳисоб тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$\frac{P}{F_{\text{нетто}}} \leq [\sigma]. \quad (45.10)$$

Бу ерда P — уланувчи листларни чўзувчи куч, $[\sigma]$ — чўзилиш учун рухсат этилган кучланиш ва $F_{\text{нетто}} = (b - 2d) \cdot l$.

Энди, уланувчи конструкция қисмларида парчин михларнинг қандай тартибда жойлаштирилиши тўғрисида тўхталиб ўтамиз.

Агар уланувчи листларнинг эни $b = 120$ мм гача бўлса, парчин михлар бир қатор жойлаштирилади, листлар эни 120 мм дан ортиқ бўлса, икки қатор қўйилиши мумкин. Бир қаторга жойлаштирилган парчин михларнинг сони 4 дан ошмаслиги керак. Айрим ҳолларда 5 гача рухсат этилади.

Бирикманинг ҳамма ўлчамлари парчин мих диаметрига нисбатан ҳисобланади. Парчин мих диаметри бирикмани ҳисоблашда асосий фактор бўлиб, уланувчи лист ёки полосанинг қалинлигига боғлиқ ҳолда аниқланади.

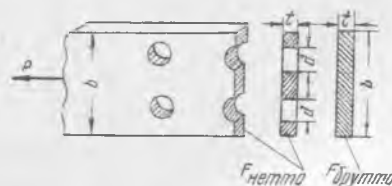
Бир кесимли парчин мих учун $d = \delta + 10$ мм.

Икки кесимли парчин мих учун $d = \delta + 7$ мм.

Умуман, парчин мих диаметри қуйидаги шартни қанотлантириши керак:

$$d \leq \frac{b - \delta}{3}. \quad (45.11)$$

Бироқ, парчин мих диаметри учун ГОСТ қуйидаги сонларни тавсия этади: 10, 12, 14, 17, 20, 23, 28, 30, 32, 34, 36 ва 38 мм ва ҳоказо.

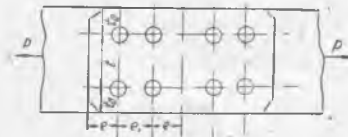


123-шакл.

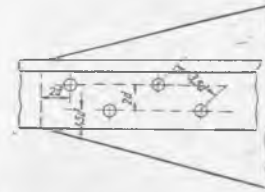
Парчин михли бирикмада ишлатиладиган ўлчамлар қаторлар билан жойлаштирилган ва шахмат тартибида жойлаштирилган парчин михлар учун 124 ва 125-шаклларда кўрсатилган

Параллел жойлаштирилган парчин михлар учун:

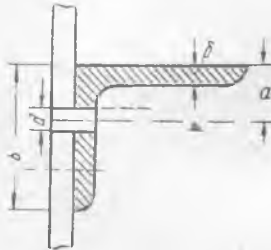
$$\begin{aligned} e &= (1,5 \div 2)d, & t_0 &= (1,5 \div 2)d, \\ e_1 &= (3 \div 4)d, & t &= (3 \div 7)d. \end{aligned}$$



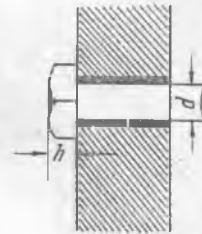
124- шакл.



125- шакл.



126- шакл.



127- шакл.

Парчин михлар бурчакларнинг деворига яқинроқ жойлаштирилади (126-шакл). Бурчакларнинг номерига қараб $a = 30:70$ мм гача олинади.

МАСАЛАЛАР

38. Болт P куч билан чўзилади (127-шакл). Болт чўзилишга, унинг қалпоғи кесилишга бир хилда қаршилик кўрсатса, болтнинг диаметри (d) билан қалпоғининг баландлиги (h) орасидаги муносабат қандай бўлиши керак?

$$[\tau] = 0,8 [\sigma].$$

Е чи ш. Болтни чўзувчи куч: $P = \frac{\pi d^2}{4} [\sigma]$. Болт қалпоғини кесувчи куч $P = \pi dh [\tau]$. Масала шартига мувофиқ:

$$\pi dh [\tau] = \frac{\pi d^2}{4} [\sigma], \text{ бундан } h = 0,32.$$

39. Қалинлиги 2 мм бўлган квадрат шаклидаги дюрал пластинканинг қирғоғи шарнирлар ёрдамида туташтирилган абсолют қаттиқ стерженлардан ҳосил бўлган рамка билан ўралган (128-шакл). Рамканинг C шарнирига $P = 2,5$ т куч қўйилган. 1) Пластинканинг A учидagi силжиш бурчаги γ ; 2) C нуктасининг пасайиши δ ; 3) бош кучланишларнинг миқдори ва 4) AC ва BD диагоналлари узунлигининг ўзгариши Δl топилсин. $E = 7 \cdot 10^5$ кг/см², $\mu = 0,34$.

Е чи ш. Пластика контуридаги (қирғоғидаги) тангенциал кучланиш:

$$1) \tau = \frac{P}{F} = \frac{2500}{25 \cdot 0,2} = 500 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}.$$

Силжиш бурчаги:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{2\tau(1+\mu)}{E} = \frac{2 \cdot 500(1+0,34)}{7 \cdot 10^5} \approx 1,9 \cdot 10^{-3}$$

2) Абсолют силжиш:

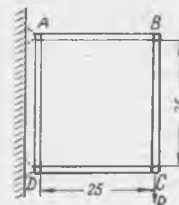
$$\delta_c = l\gamma = 25 \cdot 1,9 \cdot 10^{-3} \approx 10,5 \text{ мм.}$$

3) Бош кучланишлар: квадрат қирғоғига фақат тангенциал

$$\text{кучланиш } \tau_{xy} = \tau = 500 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$$

таъсир қилгани учун: $\sigma_{B2} = \pm \tau$.

4) AC диагоналининг узайиши: $\Delta l = \epsilon l \sqrt{2} = \gamma l \frac{\sqrt{2}}{2}$, чунки $\epsilon = \frac{\gamma}{2}$ эди.



128-шакл.

40. Кенглиги $b = 27 \text{ см}$, қалинлиги $\delta = 1,6 \text{ см}$ бўлган икки лист диаметри $d = 2,5 \text{ см}$ бўлган 8 та парчин мих билан устма-уст бириктирилган (129-шакл). Бу бирикманинг хавфсизлиги таъминланган ҳолда листларга қўйилиши мумкин бўлган куч (P) нинг энг катта қиймаги топилсин. Листларнинг мустаҳкамлигини парчин михлар неча процентга пасайтириши ҳам ҳисоблансин. Рухсат этилган кучланишлар $[\sigma] = 1200 = \text{кг/см}^2$, $[\tau] = 800 \text{ кг/см}^2$, $[\sigma_c] = 2400 \text{ кг/см}^2$.

Е чи ш. P кучининг қиймагини, листларнинг биринчи ва иккинчи қатор парчин мих ўрнатилган кесимларининг мустаҳкамлик шартидан аниқлаймиз.

1) $P_1 = [\sigma] (b - 2d) \delta = 42240 \text{ кг}$. Парчин михли бирикмага таъсир қилувчи куч уланиш бўйича бир хилда бўлмайди. Масала, иккинчи қатордаги парчин михларга биринчи қатордагига қараганда озроқ юк тушади. Одатда, иккинчи қатор кучининг 0,75 қисмини қабул қилади. Шунинг учун, иккинчи қатор парчин мих ўрнатилган кесимнинг мустаҳкамлик шартини тузишда қўзувчи кучнинг 0,75 қисмини олиш лозим:

$$0,75P_2 = [\sigma] (b - 4d) \delta,$$

$$P_2 = 43520 \text{ кг.}$$

2) Парчин михларининг кесилишга қаршилик кўрсатиш шартидан:

$$P_3 = [\tau] n \frac{\pi d^2}{4} = 31400 \text{ кг.}$$

3) Эзилишга қаршилик кўрсатиш шартидан:

$$P_4 = [\sigma_c] n \delta d = 77000 \text{ кг.}$$

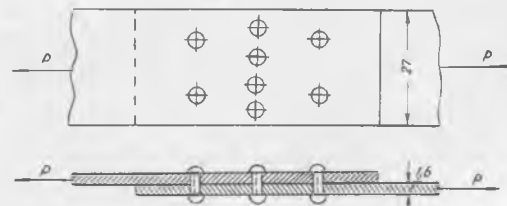
Демак, қўйилиши мумкин бўлган куч:

$$P_{\max} = 31400 \text{ кг}$$

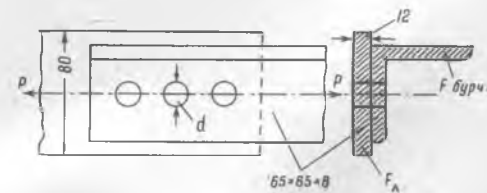
бўлади.

Листларнинг мустаҳкамлиги $\frac{2d}{b} 100 = 18,5\%$ камаяди.

41. Бурчакликини листга туташтириш учун зарур бўлган парчин михлар сопи аниқлансин (130-шакл). Қўйилган юк $P = 7,5 \text{ т}$. Парчин мих диаметри $d = 1,7 \text{ см}$; $[\sigma] = 1400 \text{ кг/см}^2$, $[\tau] = 1100 \text{ кг/см}^2$, $[\sigma_c] = 2800 \text{ кг/см}^2$. Лист ва бурчакликининг узилмаслиги ҳам текширилсин. Бошқа улчамлар 130-шаклда берилган.



129-шакл.



130-шакл.

Ечиш. Парчин михларнинг кесилмаслик шартидан:

$$n > \frac{P}{[\tau] \frac{\pi d^2}{4}}, \quad n = 3.$$

Эзилмаслик шартидан:

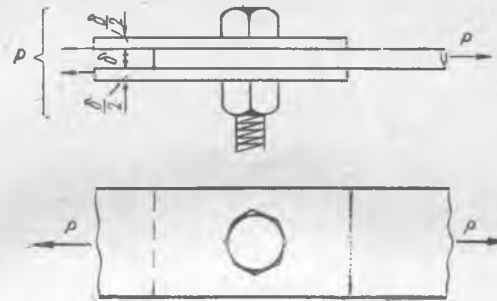
$$n > \frac{P}{[\sigma_c] \sigma d}, \quad n = 2.$$

Учта парчин мих қўямиз. Бурчак билан листнинг узилмаслик шартини текшираимиз:

$$F_{y\tau} = 9,87 \text{ см}^2, \quad \sigma_{y\tau} = \frac{P}{F_{y\tau} \delta d} = 880 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} < [\sigma],$$

$$F_A = 9,6 \text{ см}^2, \quad \sigma_A = \frac{P}{F_A \delta d} = 990 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} < [\sigma].$$

Демак, мустаҳкамлик таъмин этилади.



131-шакл.

42. 131-шаклда кўрсатилган боғланиш учун болтнинг диаметри (d) ни аниқлаш лозим. Чувств. куч $P = 12 \text{ т}$, $[\tau] = 800 \text{ кг/см}^2$, $[\sigma_c] = 2000 \text{ кг/см}^2$; листнинг қалинлиги $\delta = 2 \text{ см}$.
Жавоби. $d = 31 \text{ мм}$.

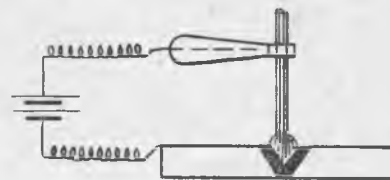
43. Қалинлиги $\delta = 12 \text{ мм}$ бўлган листдан диаметри $d = 20 \text{ мм}$ ли тешик очиш учун қанча куч қўйилиши керак? Листнинг мустаҳкамлик чегарасидаги кесувчи кучланиши 40 кг/мм^2 га тенг. Листнинг тешилиши олдидаги эзувчи кучланиш ҳисоблансин.
Жавоби: $P = 31,15 \text{ т}$; $\sigma_c = 9620 \text{ кг/см}^2$.

46-§. Пайванд бирикманинг ҳисоби

Металл конструкциялар тайёрлашда, қўпинча, пайвандлашдан фойдаланилади. Металлни электр ёйи воситаси билан эритиш усулини даставвал (1802 йилда) рус олими проф. В. В. Петров ихтиро этиб, ундан техникада фойдаланишни тавсия қилди. Аммо электр ёрдамида пайвандлаш XIX асрнинг охирига келгандагина рус инженерлари Н. Н. Бенардос ва Н. Г. Славянов томонидан йўлга қўйилди, кейинчалик эса бутун дунёда тараққий этиб кетди.

Электр ёйи ёрдами билан пайвандлашнинг моҳияти шундан иборат: бириктирилувчи элементларнинг учлари маълум ораликкача яқинлаштириб эриш даражасигача электр ёйи алангаси билан қиздирилган ҳолда, шу оралик электроднинг материали билан тўлдирилади. Электрод сифатида пўлат ишлатилади. Пайвандланаётган элементларнинг электрод билан тўлдирилган оралиги совиши биланоқ мустаҳкам чок ҳосил бўлади.

Электр ёйи билан зритиш схемаси 132-шаклда тасвирланган. Электр ёйи алангаси бириктириладиган металл элементларнинг қирраси билан улар орасидаги электродни эритмоқда. Пайвандланаётган металлга ҳаводан зарарли элементлар ўтмаслиги учун, электроднинг сирти махсус модда билан қопланади. Электрод эриганда бу модда кўп миқдорда газ чиқаради, бу газ эса ҳавони тўсади. Бундай тадбир қўрилмаса, пайвандланаётган қисмларга ҳавонинг кислороди билан азоти ёмон таъсир этиб, чокнинг сифатини пасайтириб юборади. Пайвандлаб бириктириладиган конструкция элементларининг материаллари ва электрод мослаб танланса ва бириктириш процесси тўғри бажарилса, бу тарздаги бирикманинг мустаҳкамлиги парчин михли бирикманинг мустаҳкамлигидан қолишмайди. Шунинг билан бирга, пайвандлаб бириктириш парчин мих билан бириктиришга қараганда анча осондир. Ундан ташқари, парчин мих учун қилинган тешик элементларни анчагина заифлаштиради. Бу мулоҳазалар пайванд бирикманинг аҳамияти нақадар катталигини аниқ кўрсатади. Кейинги 10—15 йил ичида парчин мих билан бириктириш анчагина чекланган. Аммо пайвандлаш усули пўлатнинг турли хиллари учунгина қўлланиши мумкин, холос. Дюрал каби енгил, мустаҳкамлиги пўлагдан қолишмайдиган материалларни бириктириш учун парчин мих ишлатилади. Пайвандланган чокнинг мустаҳкамлиги пайвандлаш технологиясига боғлиқдир. Пайвандланган чокларнинг мустаҳкамлигини ҳисоблаш усули ҳозирга қадар қатъий бир тус олган эмас. Шундай бўлишига қарамай, чок бириктирувчи элементлар билан бир бутунни ҳосил қилади деб олиниб, унинг мустаҳкамлиги текширилади. Чок материали учун рухсат этилган кучланиш нормаси элементларни бириктириш усулига боғлиқдир. Масалан, бириктириладиган элементлар 1 Ст. 3 маркали пўлатдан ясалган бўлса, чокнинг рухсат этилган кучланиши қуйидаги жадвалдан олиниши мумкин (ГОСТ 96-46.)



132-шакл.

Пайванд бирикма учун рухсат этилган кучланишлар

Кучланиш турлари	Кучланишнинг белгиланали	Қўлда пайвандланган бирикма		Автоматик пайвандланган бирикма учун
		электрод юпқа қопланган ҳолда	электрод қалин қопланган ҳолда	
Чўзувчи	$\left[\sigma_y \right]$	1000 кг/см ²	1300 кг/см ²	1300 кг/см ²
Сиқувчи		1100 кг/см ²	1450 кг/см ²	1400 кг/см ²
Кесувчи		800 кг/см ²	1100 кг/см ²	1100 кг/см ²

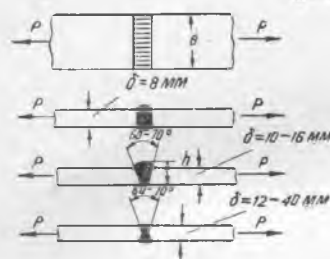
Чокнинг бошида ёки охирида ёпишмай қолган жойи бўлиши мумкин: чокнинг мустаҳкамлигини ҳисоблашда бу ҳолни кўзда тутиш лозим. Масалан, кўндаланг чок учун, чок узунлигини уланаётган элементнинг кенлигидан камроқ қилиб олиш керак. Учма-уч пайвандлаш энг осон ва ишончли бўлганидан, бу усул кўп қўлланилади. Учма-уч пайвандлаш, бириктириладиган элементларнинг калинлигига қараб, 133-шаклда тасвирланган схемалардан бири бўйича бажарилади. Кўндаланг чокнинг мустаҳкамлиги

чўзилиш ёки сиқилишга текширилганда қуйидаги формуладан фойдаланилади:

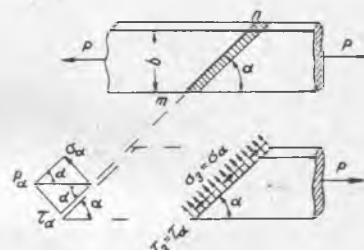
$$\sigma_s = \frac{P}{lh} \leq [\sigma_s].$$

Бундан $F_s = l \cdot h$ — чўзилиш ёки сиқилишга қаршилик кўрсатувчи чокнинг шартли юзи. Ҳисоб учун чокнинг узунлиги $l = b - 10$ мм қилиб олинади. Чокнинг қалинлиги (h) эса уланувчи элементнинг қалинлиги (δ) га тенг қилиб олинади: $h = \delta$. Рухсат этилган кучланиш уланиш чокида асосий элементларга қараганда бирмунча қамроқ бўлганидан, чок билан уланувчи элементлардаги рухсат этилган кучланишни тенглаштириш учун, чокнинг узунлигини бирмунча кўпайтириш зарур бўлади. Шунинг учун учма-уч уланадиган элементлар қийшиқ чок билан пайвандланади (134-шакл). Қийшиқ чокларнинг мустаҳкамлиги чок кесимларида ҳосил бўладиган нормал ва тангенциал кучланишлар орқали текширилади:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s &= \frac{P}{F_s} \sin \alpha, \\ \tau_s &= \frac{P}{F_s} \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (46.2)$$



133-шакл.



134-шакл.

F_s нинг қийматини кўзда тутиб, бу ҳол учун ҳисоб тенгламасини қуйидагича ёзамиз:

$$\left. \begin{aligned} [\sigma_s] &\geq \frac{P}{l\delta} \sin \alpha, \\ [\tau_s] &\geq \frac{P}{l\delta} \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (46.3)$$

Бу ҳолда чокнинг узунлиги (l) қуйидагича олинади:

$$l = \frac{b}{\sin \alpha} + 10 \text{ мм.}$$

Ўтказилган тажрибалар қиялик бурчагининг рационал қиймати $\alpha = 45^\circ - 50^\circ$ эканлигини тасдиқлайди. Қийшиқ чок қилишда уланаётган элементларнинг марказларини бир-бирига тўғрилаш анчагина қулайсизлик туғдиргани учун бу тарздаги уланиш кам ишлатилади.

Кўпинча, учма-уч уланаётган элементларга тахтакач қўйилади ёки элементлар устма-уст қўйиб уланади. Бундай улашда чок уланаётган элементларга таъсир этадиган чўзувчи ёки сиқувчи кучларга тик ёки параллел бўлади.

Чок куч йўналишига тик бўлса, қўндаланг ёки валиксимон чок деб, параллел бўлса бўйлама ёки ёнбош чок деб аталади. Валиксимон чок 135-шаклда кўрсатилган. Тажрибаларнинг кўрсатишича, уланиш AB кесим бўйича емирилади. Демак, ана шу AB кесим мазкур уланиш учун энг заиф

кесим ҳисобланади. Ҳисоб тенгламасини мазкур AB кесимнинг кесилмаслиги шартидан фойдаланиб тузамиз. AB кесимнинг юзаси бўйича кесувчи куч тенг тарқалган деб фараз қилинса, ҳисоб тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$\tau = \frac{P}{2F}.$$

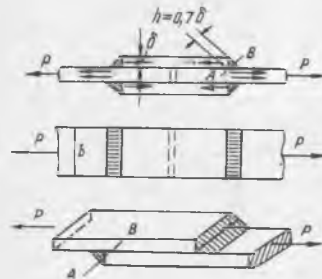
Валиксимон чок иккита бўлганидан, кесилиш юзасининг икки хисса қиймаги олинади.

Бу кесимнинг юзи $F = hb = l\delta \cos 45^\circ = 0,7l\delta$ бўлгани учун, чокнинг AB кесим юзаси бўйича кесилмаслик шarti қуйидагича ёзилади:

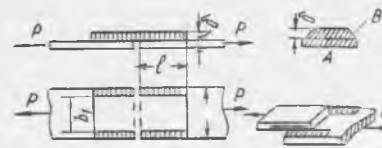
$$\tau_s = \frac{P}{1,4l\delta} \leq [\tau_s]. \quad (46.4)$$

Бунда $l = b \approx 10 \text{ мм}$.

Ҳақиқатда чокнинг материали мураккаб кучланиш ҳолатида бўлиб, AB кесим юзаси бўйича кучланиш тенг тарқалмайди. Эластиклик назарияси



135- шакл.



136- шакл.

асосида ўтказилган текширишлар ва тегишли тажрибалар AB кесимнинг бурчакларида катта кучланишлар тўпламининг ҳосил бўлишини кўрсатди. Ундан ташқари, бирикма совуганда чокнинг кескин қисқариши натижасида, уланувчи элементларда қўшимча ички кучланишлар ҳосил бўлади, бу кучланишлар натижасида чок материали мўрт бўлиб қолади. Мўрт материалда кучланишлар тўплами мавжуд бўлишининг хавфли эканлиги бизга маълум. Кучланишлар тўплами ва температуранинг кескин ўзгариши мўрт чокда дарз ҳосил қилади. Шунинг учун ҳам бундай бирикмалардан фойдаланиш хусусан конструкция элементлари зарбали ёки ўзгарувчан кучлар таъсирига дуч келадиган ҳолларда тавсия этилмайди.

Ёнбош чок 136-шаклда тасвирланган. Ёнбош чокнинг AB кесими энг заиф бўлганидан, мазкур кесим бўйича анчагина ораликда кесилиш оқиба-тида чок ишдан чиқади. Симметрик жойлашган иккита чок учун мустаҳкамлик шarti бундай ёзилади:

$$\tau = \frac{P}{2 \cdot 5,7l\delta} \leq [\tau_s]. \quad (46.5)$$

Учма-уч уланувчи элементлар тахтакач билан икки томонлама қопланган бўлса, чокларнинг сони икки ҳисса кўпаяди, бунда мустаҳкамлик шarti қуйидагича ёзилади:

$$\tau_s = \frac{P}{4 \cdot 0,7l\delta} \leq [\tau_s]. \quad (46.6)$$

Мазкур формулалардан ёнбош чокларнинг узунлиги l аниқланади. Ҳар қайси чокнинг лойиҳа узунлиги $l_0 = l + 10$ мм деб қабул қилинади.

Ўтказилган тажрибалар ёнбош чокларнинг ишдан чиқиши пластик материалларникидек катта деформация билан содир бўлишини кўрсатади. Бу хулоса ёнбош чокнинг кўндаланг чокка қараганда анчагина қулайлигини кўрсатади. Аммо ёнбош чоклар этагида ҳам кучланишлар тўплами ҳосил бўлади.

Металл конструкцияларни лойиҳалашда, учма-уч уланадиган қисмлар ишончли бўлиши учун, улар қўшимча тахтакач билан қопланиб, валиксимон ҳолда ёнбош чоклар билан таъминланади. Аммо бундай тадбирларнинг, баъзи фойдасидан кўра зарари кўпроқ бўлади. Шундай бўлишига қарамай, бундай комбинацияли чоклардан фойдаланилгани учун, уларга оид шартли ҳисоб тенгламаларини чиқарамиз. Ёнбош ва кўндаланг чокларнинг қаршилигини тегишлича P_ϕ ва P_a билан белгиласак, бирикманинг умумий қаршилиги:

$$P = P_\phi + P_a \quad (46.7)$$

бўлади. P_ϕ билан P_a нинг қийматларини қуйидагича аниқлаймиз:

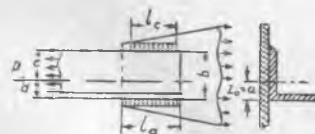
$$\left. \begin{aligned} P_\phi &= 2 \cdot 0,7 \delta [\tau_s], \\ P_a &= 0,7 l_a \delta [\tau_s]. \end{aligned} \right\} \quad (46.9)$$

Бунда l_a ёнбош, l_a эса кўндаланг чокларнинг узунлигидир. (46.7) ва (46.8) кўзда тутилса, текшириладиган ҳол учун ҳисоб тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$P = (l_a + 2l_\phi) 0,7 \delta [\tau_s]. \quad (46.9)$$

Кўндаланг чокнинг узунлиги маълум бўлса, бўйлама чокнинг узунлигини таъсир қилаётган кучга боғлаб, бу формуладан аниқлаш мумкин.

Тахтакач икки томонлама қўйилса, чокларнинг сони икки ҳисса кўпаяди, яъни (46.9) формуланинг ўнг томони икки марта кўпайтирилади.



137-шакл.

Баъзан, металл конструкцияларнинг элементларини бириктиришда элементнинг маркази кучнинг йўналишига мос келмай қолади. Масалан, бурчаклик листга бириктирилганда шундай бўлади. Бундай ҳолларда узунлиги ҳар хил бўлган иккита ёнбош чокдан фойдаланишга тўғри келади. Чокнинг умумий узунлиги унинг кесилмаслиги шартидан аниқланади. Чоклар узунлигининг

нисбати эса куч таъсир чизигининг ҳолатига боғлиқдир. 137-шаклда бурчакнинг листга бириктирилиши тасвирланган. Ёнбош чокларнинг узунлигини тегишлича l_a ва b_c десак, буларнинг йиғиндиси қуйидаги шартдан аниқланади:

$$\tau = \frac{P}{0,7 \delta (l_a + l_c)} \leq [\tau_s]; \quad (47.10)$$

бундан:

$$l_c + l_a \geq \frac{P}{0,7 \delta [\tau_s]} = l.$$

Иккинчи томондан, ҳар қайси чокдаги зўриқиш бурчакликнинг марказдан ўтувчи P куч таъсир чизигигача бўлган ораликларга тескари пропорционал бўлиши керак. Шунинг учун:

$$\frac{l_a}{l_c} = \frac{c_1}{a}. \quad (46.11)$$

(46.10) ва (46.11) дан ҳар қайси чокнинг узунлигини аниқлаш қийин эмас.

Бурчаклик учун одатда $\frac{c}{a} = 2-3$ бўлади.

МАСАЛАЛАР

44. Қўндаланг кесим юзи 12×250 мм ли листлар иккита тахтакач орасига олиниб, учма-уч бириктирилган (138-шакл). Бириктирилган элемент билан асосий листнинг мустаҳкамлиги бир хил бўлиб, рухсат этилган кучланишлар қуйидагича:

асосий лист учун рухсат этилган нормал кучланиш $[\sigma] = 1600 \text{ кг/см}^2$, чок учун рухсат этилган тангенциал кучланиш $[\tau_s] = 1100 \text{ кг/см}^2$.

Бу листларга қўзувчи P юк таъсир қилади. Шу пайванд бирикма ҳисоблансин.

Е ч и ш. Асосий листнинг қўзилишига кўрсатадиган қаршилигига мувофиқ қўзувчи кучни топамиз:

$$P = 1,2 \times 22 \cdot 1600 = 48000 \text{ кг.}$$

Тахтакачларни ёнбош чоклар воситаси билан бириктириш қулайдир. Ёнбош чокларни ўрнатиш учун тахтакачнинг кенглигини 220 мм $b_1 = 20$ мм қилиб оламиз. Тахтакачлар билан асосий листнинг бир хилда қаршилиқ кўрсатиш шартига мувофиқ, иккита тахтакачнинг қўндаланг кесим юзи асосий листнинг қўндаланг кесим юзидан кам бўлмаслиги, яъни:

$2b_1\delta_1 \geq F$ бўлиши керак, бундан:

$$\delta_1 \geq \frac{F}{2b_1} = \frac{1,2 \cdot 25}{2 \cdot 22} = 0,68 \text{ см.}$$

δ_1 ни 8 мм деб қабул қиламиз. Ёнбош чокларнинг тўла узунлиги (46.7) га мувофиқ:

$$l \geq \frac{P}{4 \cdot 0,7 \cdot \delta \cdot [\tau_s]} = \frac{48000}{2,8 \cdot 0,8 \cdot 1100} = 19,5 \text{ см}$$

бўлади.

Техник шартларга мувофиқ, ёнбош чокнинг тўла узунлиги $l = l_0 + 10 = 205$ мм бўлиши керак. Биз $l_0 = 200$ мм қилиб оламиз.

45. Ферма стержени тенг ёнли иккита $75 \times 75 \times 8$ бурчақдан иборат; уларни бириктириш учун зарур бўлган ёнбош чокларнинг узунлиги аниқлансин (139-шакл). Стерженни қўзувчи куч $S = 32 \text{ т}$; чокларнинг кесилиши учун рухсат этилган кучланиш $[\tau_s] = 1100 \text{ кг/см}^2$.

Е ч и ш. Битта бурчақликка тўғри келган зўриқиш:

$$P = \frac{S}{2} = 16000 \text{ кг.}$$

Чоклар билан бурчақликнинг оғирлик маркази оралиги:

$$a = z_0 = 21 \text{ см} \quad c = b - z_0 = 7,5 - 2,1 = 5,4 \text{ см.}$$

Ҳар бир бурчақликни бириктириш учун зарур бўлган ёнбош чокларнинг узунлиги қуйидаги муносабатлардан топилади:

$$l_a + l_c = \frac{P}{0,7\delta[\tau_s]} = \frac{1600}{0,7 \cdot 0,8 \cdot 1100} = 26 \text{ см.}$$

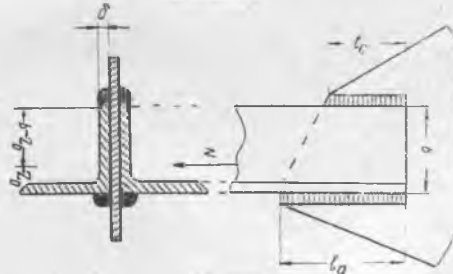
$$\frac{l_a}{l_c} = \frac{c}{a} = 2,58.$$

Бу икки тенгламадан: $l_a = 18,75 \text{ см}$, $l_c = 7,25 \text{ см}$.

□



138-шакл.



139-шакл.

VIII боб

БУРАЛИШ

Призматик стерженнинг бир учи маҳкамланиб, бошқа учига унинг кўндаланг кесимида ётувчи жуфт куч қўйилса, стерженнинг кўндаланг кесимлари маҳкамланган кесимга нисбатан айланиб, стержень буралади. Буралиш деформацияси тажрибада жуда кўп учрайди. Масалан, вагоннинг ўқи, трансмиссион ва тирсакли валлар, фазовий конструкция элементлари, пружиналарнинг урамлари, болт ва шунга ўхшашлар, асосан, буралиш деформациясига қаршилиқ кўрсатади.

Буралишдаги стерженларда ҳосил бўладиган кучланиш ва деформацияларини элементар усул билан фақат доиравий кўндаланг кесимга эга стерженлар учунгина аниқлаш мумкин. Бошқа барча хил кесимли стерженларнинг буралиши деформацияланувчи жисмлар механикасида текширилади. Шунинг учун, текширишни доиравий кўндаланг кесимли стерженнинг буралишидан бошлаймиз.

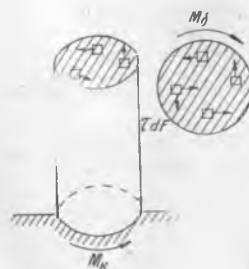
47-§. Доиравий кесимли стерженнинг буралиши

Бир учи маҳкамланган ва кўндаланг кесими доиравий бўлган стерженнинг бошқа учига моменти M га тенг жуфт куч қўйилган. Бу жуфт куч стерженнинг кўндаланг кесим юзасида ётади (140 шакл). Мазкур жуфт куч таъсиридан стерженнинг эркин кўндаланг кесими маҳкамланган кесимга нисбатан айланиб натижада стержень буралгани учун, у *буровчи момент* дейилади ва M_6 орқали белгиланади.

Агар биз текшириладиган стерженни унинг ўқиға тик ўтказилган mn текислик билан икки қисмга ажратиб, бир қисмини, масалан, юқори қисмини ташлаб юборсак, қолган пастки қисмининг юқори учига ташлаб юборилган қисмининг таъсирини алмаштирувчи кучлар қўйишимиз зарур. Бу кучлар ташлаб юборилган қисмининг тепа учига қўйилган жуфт кучга эквивалент бўлиши керак, акс ҳолда мувозанат шарти таъминланмаган бўлади. Шунинг учун, биз текширадиган қисмининг тепа учигаги кесим юзаси бўйича



140- шакл.



141- шакл.

тарқалган ички кучлар M_6 моментли жуфт кучга келтирилади. Бу ички кучлардан ҳосил бўлган жуфт куч кесим юзасида ётгани учун бунга тегишли кучланишлар тангенциал кучланишлар бўлади (141- шакл).

Энди, шу текшириладиган пастки қисм учун мувозанат тенгламасини тузамиз. Кесим юзасидан бирор элементар dF юзачани ажратсак, ундаги ички куч τdF бўлади. Бу куч-

нинг цилиндр ўқиға нисбатан олинган моментини dM_r десак, мувозанат тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$\int_F dM_r = M_0.$$

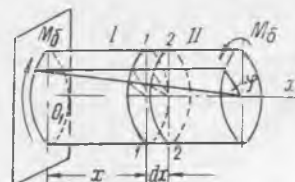
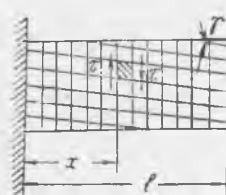
Элементар юзача (dF) га қўйилган τdF кучнинг елкасини r десак (141-шакл), $dM_r = r\tau dF$ бўлади. Бунн юқоридаги мувозанат тенгламасига қўйсак:

$$\int_F r\tau dF = M_0 \quad (47.1)$$

тенглик келиб чиқади. Аммо кесим юзаси бўйича тангенциал кучланишнинг қандай қонун билан тарқалганлиги бизга маълум бўлмагани учун, бу (47.1) тенгламадан ҳозирча буралишдаги тангенциал кучланишни аниқлаб бўлмайди. Буралишдаги кучланишни аниқлаш масаласини статика тенгламаларидан фойдаланиб охирига етказиш мумкин эмас. Демак, масала статик аниқмас экан. Қўшимча тенгламани буралувчи цилиндрнинг деформациясини текшириш йўли билан тузамиз.

Буралишда ҳосил бўладиган деформацияларни аниқлашдан олдин, бу соҳада ўтказилган тажрибаларнинг натижалари билан танишиб чиқамиз. Доиравий цилиндр буралишга синалганда, қуйидаги ҳулосалар чиқарилган.

1. Бураляётган цилиндрнинг барча ясовчилари бир хилда γ бурчакка оғади ва цилиндр сиртида чизилган квадратлар бир хилда қийшайиб, ромб шаклини олади (142 шакл).



142-шакл.

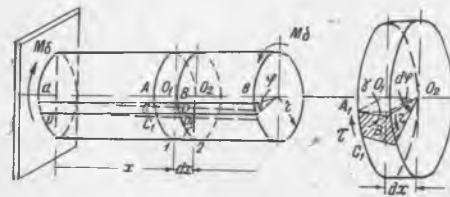
2. Ҳар бир кўндаланг кесим қўшни кесимга нисбатан цилиндр ўқи атрофида маълум бурчакка айланади. Бу бурчак *буралиш бурчаги* дейилади. Буралиш бурчаги бурувчи моментга ва кўндаланг кесимлар оралиғига пропорционалдир.

3. Деформациягача текис бўлган кўндаланг кесим юзаси цилиндр буралгандан кейин ҳам текислигича, кесим гардиши (контури) айланалигича, радиуси эса тўғри чизиқлигича қолади (142 шакл). Бураляётган цилиндрик стержень схематик равишда, марказлари билан битта умумий ўққа ўрнатилган каттиқ тангалар тўпламидан тузилган деб тасаввур қилинса, цилиндр буралганда тангаларнинг кўрениши ва ўлчамлари ўзгармасдан, улар бир-бирига нисбатан умумий ўқ атрофида айланади.

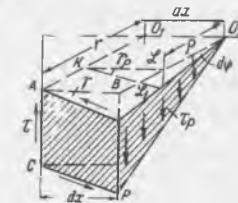
Келтирилган бу тажрибаларнинг натижаларидан фойдаланиб, доиравий кесимли цилиндр учун буралишда ҳосил бўладиган деформация ва кучланишларнинг кўндаланг кесим юзаси бўйича қандай қонун билан ўзгаришини аниқлашимиз мумкин.

Бураляётган цилиндрик стержень сиртидаги иккита қўшни ab ва cd ясовчи ва иккита бир-бирига чексиз яқин кўндаланг кесимлар $I-I$ ва $2-2$ билан чегараланган $ABCD$ тўғри тўрт бурчакликни ажратамиз (143-шакл). Стерженьнинг деформацияланиши натижасида $I-I$ кесим φ ва $2-2$ кесим $\varphi + d\varphi$ бурчакларга айланади. Юқорида келтирилган тажриба нати-

жаларига мувофиқ, бу кесимларнинг юзаси текислигича қолади, O_1A_1 , O_2B_1 , O_1C ва O_2D_1 радиуслар тўғри чизик бўлиб, кесимлар оралиғи dx ўзгармайди. 2—2 кесим 1—1 кесимга нисбатан $d\varphi$ бурчакка айлангани учун, юқорида айтилган $ABCD$, O_1O_2 элемент қийшайиб, $A_1B_1C_1D_1O_1O_2$ га айланади (144-шакл). Бу қийшайиш натижасида $ABCD$ нинг тўғри бурчаклари тораяди ва кенгаяди. Ажратилган элементимизнинг материалли силжиш деформациясига дуч келиб, бу деформация қийшайиш бурчаги билан, яъни нисбий силжиш билан характерланади. Бу бурчак стержень сиртидаги A_1BDC_1 тўғри бурчакдаги $BA_1B_1 = \gamma$ бурчакка тенгдир. Силжиш деформацияси қийшайган элемент томонларида ҳосил бўладиган тангенциал кучланишлар таъсирида вужудга келиши бизга маълум. 144-шаклда B нуқта олдида ажратилган юзалардаги тангенциал кучланишлар тасвирланган. Бу кучланишларни силжиш деформацияси (γ) орқали ифодалашимиз мумкин. Бунинг учун $\tau = G\gamma$ тенгламадан фойдаланамиз. AB элементнинг абсолют силжиши $BB' = r d\varphi$ бўлади. Нисбий силжиш γ учун қуйидаги ифодани оламиз:



143-шакл.



144-шакл.

$$\gamma = \frac{BB_1}{A_1B} = r \frac{d\varphi}{dx}. \quad (47.2)$$

Демак, B нуқтадаги тангенциал кучланиш бундай ёзилади:

$$\tau_B = G\gamma = Gr \frac{d\varphi}{dx}. \quad (47.3)$$

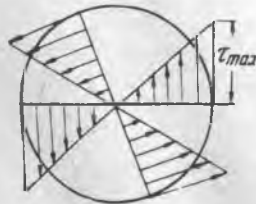
Энди, кўндаланг кесимнинг бирор бошқа L нуқтасидаги кучланишни топамиз. Бу L нуқта кесим марказидан ρ ораликда бўлсин. Дастлаб L нуқтадаги нисбий силжиш (γ_ρ) ни аниқлашимиз лозим. Унинг қиймати:

$$\gamma_\rho = \rho \frac{d\varphi}{dx}$$

эканлиги 144-шаклдан яққол кўриниб турибди. Демак, бу L нуқтадаги кучланиш:

$$\tau_\rho = Gr \frac{d\varphi}{dx} \quad (47.4)$$

бўлади. Бураляётган стержень кўндаланг кесимининг ҳар бир нуқтасидаги нисбий силжиш ва тангенциал кучланиш мазкур нуқтадан кесим марказигача бўлган оралик (ρ) га тўғри пропорционал бўлар экан. Шундай қилиб, буралувчи стерженьнинг кўндаланг кесими бўйича тангенциал кучланишнинг ўзгариш қонуни тўғри чизик билан тасвирланар, унинг графиги эса 145-шаклда кўрсатилгандек бўлар экан. Бу кучланишнинг энг катта қиймати кесимнинг марказида бўлиб, марказида нолга айланади.



145-шакл.

Энди, бу кучланишни буровчи момент орқали ифодалаш керак. Бунинг учун τ_p нинг қийматини (47.4) дан (47.1) га олиб бориб қўямиз:

$$\int_F G \rho \frac{d\varphi}{dx} \rho dF = M_k.$$

Бу интеграл остидаги $G \frac{d\varphi}{dx}$ миқдор интеграллаш ўзгарувчисига боғлиқ бўлмагани учун, уни интегралдан ташқарига чиқариш мумкин:

$$G \frac{d\varphi}{dx} \int_F \rho^2 dF = M_k.$$

Элементар dF юзача билан мазкур юзачадан кесим марказигача бўлган ρ ораликнинг квадрати кўпайтмаларидан кесимнинг бутун юзаси бўйича олинган $\int_F \rho^2 dF$ йиғинди кесим юзасининг поляр инерция моменти дейилади ва I_p орқали белгиланади:

$$I_p = \int_F \rho^2 dF. \quad (47.5)$$

Бу интеграл ифода кўзда тутилса, юқоридаги тенглик қуйидагича ёзилади:

$$G I_p \frac{d\varphi}{dx} = M_0. \quad (47.6)$$

Бу тенгликдан цилиндрик стерженнинг узунлик бирлигига тўғри келадиган буралиш бурчаги (нисбий буралиш бурчаги) учун қуйидаги формулани ҳосил қиламиз:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_0}{G I_p}. \quad (47.7)$$

Буни (47.4) га қўйсак, буралишдаги тангенциал кучланишни топган бўламиз:

$$\tau_p = \frac{M_0}{I_p} \rho. \quad (47.8)$$

Бу кучланиш стержень кесимининг гардишида, яъни $\rho_{\max} = r$ бўлганда, энг катта қийматга эришади:

$$\tau_{\max} = \frac{M_0 \rho_{\max}}{I_p} = \frac{M_0 r}{I_p}. \quad (47.9)$$

Бу формулани қуйидаги кўринишда ҳам ёзиш мумкин:

$$\tau_{\max} = \frac{M_0}{\left| \frac{I_p}{\rho_{\max}} \right|} = \frac{M_0}{W_0} \quad (47.10)$$

$\frac{I_p}{\rho_{\max}} = W_0$ — буралишдаги қаршилиқ моменти. Поляр инерция моменти (I_p) узунликнинг тўртинчи даражасида ўлчангани учун, қаршилиқ моменти (W_0) узунликнинг учинчи даражасида ўлчанади.

Мустақкамлик шартига мувофиқ, максимал тангенциал кучланиш ($\tau_{\max}$) тегишли рухсат этилган кучланиш $[\tau]$ дан ошмаслиги, яъни:

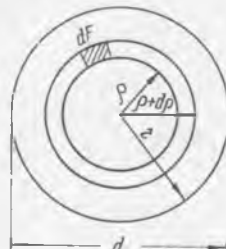
$$\tau_{\max} = \frac{M_0}{W_0} \leq [\tau] \quad (47.11)$$

бўлиши керак.

Буровчи момент M_0 маълум ва материал учун рухсат этилган кучланиш $[\tau]$ танланган бўлса, бу тенгламадан фойдаланиб, мустақкамликни таъмин этувчи қаршилиқ моменти (W_0) ни ва у орқали буралувчи цилиндрнинг диаметрини аниқлашимиз мумкин. Валнинг қўндаланг кесим ўлчами ва materiali, яъни d ва $[\tau]$ маълум бўлса, қўйилиши мумкин бўлган буровчи момент (M_0) ни аниқлаш мумкин,

48- §. Доиравий цилиндр кўндаланг кесимининг поляр инерция моменти ва қаршилик моменти

Поляр инерция моменти $I_p = \int \rho^2 dF$ ни ҳисоблаш учун кўндаланг кесим юзасидан ρ ва $\rho + d\rho$ радиуслар билан чегараланган ҳалқа ажратамиз (146- шакл). Бу ҳалқадан dF_i элементар юзачани олиб, олдин ҳалқа юзи учун $\rho^2 dF_i$ кўпайтмаларнинг йиғиндисини ҳисоблаймиз. Уни dI_p десак:



146- шакл.

$$dI_p = \sum_{i=1}^n \rho^2 dF_i$$

бўлади. Ҳалқанинг барча элементар юзачалари доира марказидан бир хил масофада тургани учун ρ^2 ни йиғинди ишорасидан ташқарига чиқаришимиз мумкин, у ҳолда:

$$dI_p = \rho^2 \sum_{i=1}^n dF_i.$$

бўлади.

Ҳалқанинг юзи асоси $2\pi\rho$ ва баландлиги $d\rho$ бўлган ингичка тўғри тўртбурчак юзига тенг, яъни:

$$\sum_{i=1}^n dF_i = 2\pi\rho d\rho.$$

Бу кўзда тутилса, кесимнинг поляр инерция моменти учун қуйидаги интеграл ҳосил бўлади:

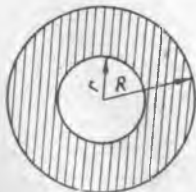
$$I_p = \int_0^r 2\pi\rho^3 d\rho = \frac{\pi r^4}{2}. \quad (48.1)$$

Поляр инерция моментини доиравий кесимнинг диаметри орқали ифодаласак, (48.1) қуйидагича ёзилади:

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1 d^4. \quad (48.2)$$

Доиравий кўндаланг кесим учун, буралишдаги қаршилик моменти қуйидагича ёзилади:

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}} = \frac{\pi r^4}{2r} = \frac{\pi r^3}{2} = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2 d^3. \quad (48.3)$$



147- шакл.

Буралишга ишлаётган цилиндрик стержень вал вазифасини ўтаса, уни енгиллаштириш мақсадида ўрта қисми ўйиб ташланади; у ҳолда вал труба шаклига киради. Бу тадбир валнинг буралишга қаршилик кўрсатиш қобилиятини кўп камайтирмайди, чунки асосий кучланиш кўндаланг кесимнинг гардишида бўлиб, ўрта қисмларида озаяди ва марказда нолга тенг бўлади.

Ковак валнинг кўндаланг кесими учун поляр инерция моменти билан буралишдаги қаршилик моментини ҳисоблаймиз. Кесимнинг ташқи радиусини R , ички радиусини r десак, I_p ни аниқловчи интеграл қуйидагича ёзилади (147- шакл):

$$I_p = 2\pi \int_r^R \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{2} (R^4 - r^4)$$

ёки

$$I_p = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) \approx 0,1 (D^4 - d^4); \quad (48.4)$$

қаршилик momenti:

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}} = \frac{\pi (R^4 - r^4)}{2R} = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{16D}. \quad (48.5)$$

Қўрамызки, поляр инерция momenti ва қаршилик momenti ҳар бир кесим учун маълум бир қийматга эга бўлиб, қўндаланг кесимнинг ўлчамларига боғлиқ экан.

49-§. Буралишдаги деформацияни аниқлаш

Доиравий кесимли цилиндрик стержень ўз учларига қўйилган буровчи моментлар таъсиридан буралиб, унинг қўндаланг кесимлари бир-бирига нисбатан айланиши 47-параграфда айтиб ўтилган эди. Стерженнинг бир учи маҳкамланган бўлсин, шу учидан x масофадаги кесимнинг айланиш бурчаги (φ_x) ни буралиш бурчаги деган эдик. Буралиш бурчагини (47.7) тенгламадан, яъни:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_6}{GI_p}$$

дан аниқлашимиз мумкин. Бу тенгламани x бўйича интегралласак:

$$\varphi_x = \frac{M_6}{GI_p} x + c$$

келиб чиқади Ихтиёрий ўзгармас (c) ни стерженнинг маҳкамланган кесими қўзғалмаслигини ифодаловчи шартдан топамиз: $x = 0$ бўлганда кесим қўзғалмайди, яъни $\varphi = 0$ бўлади. Шунинг учун $c = 0$; демак:

$$\varphi_x = \frac{M_6}{GI_p} x. \quad (49.1)$$

Стерженнинг узунлиги l бўлса, энг катта буралиш бурчаги шу узунлик билан аниқланган кесимда бўлади:

$$\varphi = \frac{M_6 l}{GI_p}. \quad (49.2)$$

Бу формула қўзиловчи стерженнинг абсолют қўзилишини аниқлаш учун чиқарилган формулага ўхшайди:

Буралиш бурчаги (φ), маълум буровчи момент (M_6) учун, GI_p купайтманинг миқдорига боғлиқ бўлади. Бу миқдорни буралишдаги бикрлик деб айтамыз. Бунда GI_p буралувчи стержень материалнинг физик хоссаси ва қўндаланг кесим ўлчамларининг буралиш деформациясига қандай таъсири борлигини акс эттиради. Буралиш бурчагини аниқлаш масаласининг икки томонлама аҳамияти бор. Биринчидан, статик аниқмас масалаларни ечишда қўшимча тенглама деформацияни текширишдан аниқланади; иккинчидан, энг муҳими, буралиш бурчагини аниқлаш валларнинг бикрлигини текшириш учун зарурдир.

Машиналарнинг нормал ишлашини таъминлаш учун, буралиш бурчаги (φ) маълум миқдордан ошмаслиги керак. Масалан, оддий шароитда ишлаган машина валлари учун, ҳар бир метр узунликдаги рухсат этилган буралиш бурчаги $|\varphi| = 0,3^\circ$ бўлиши керак. Ўзгарувчи юк таъсирида ишловчи машина валлари учун $|\varphi| = 0,15^\circ - 0,25^\circ$ бўлиши керак.

Валларнинг ўлчамларини мустаҳкамлик шартидангина аниқламай, балки бикрлик шартини ҳам қаноатлантириш зарур:

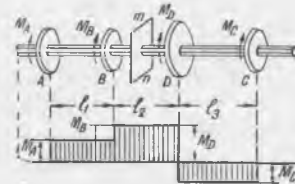
$$\varphi = \frac{M_6 l}{G I_p} \leq [\varphi] \text{ ёки } \frac{M_6}{G I_p} \leq [\varphi]. \quad (49.3)$$

Узун валларни ҳисоблашда бу шарт, қўпинча, мустаҳкамлик шартидан кўра афзалроқ туради.

50-§. Валларни буралишга ҳисоблаш. Буровчи моментлар эпюраси

Олдинги параграфларда чиқарилган хулосалар, учларига қўйилган ўзаро тенг қарама-қарши буровчи моментлар таъсирида буралувчи цилиндрик стерженга оид эди. Аммо буралувчи стержень бир нечта кесимларига қўйилган буровчи моментлар таъсирида бўлиши ҳам мумкин. Бундай ҳоллар тажрибада жуда кўп учрайди. Ҳатто буралувчи стерженнинг бўйига тенг тарқалган буровчи моментлар ҳам учрайди.

Масалан, икки учи билан подшипникларга тиралган вал двигателнинг қувватини бир нечта шкив орқали станокларга узатади, деб фараз қилайлик (148-шакл). D шкив двигателдан қувватни қабул қилиб, A , B , C , шкивлар орқали станокларга узатади. Станокларнинг қаршилик моментлари шаклда M_A , M_B , M_C билан белгиланиб, M_D моментга тескари йўналтирилган. Агар подшипниклардаги ишқаланишлар ва бошқа зарарли қаршиликлар ҳисобга олинмаса, валнинг текис ҳаракатида, етакловчи шкивга қўйилган M_D момент етакланувчи шкивлардаги M_A , M_B



148-шакл.

ва M_C моментлар билан мувозанатлашади:

$$M_D = M_A + M_B + M_C. \quad (50.1)$$

Валнинг бирор mn кесимида ҳосил бўладиган кучланишни аниқлаш зарур, деб фараз қилайлик. Бунинг учун вални унинг ўқиға тик ўтказилган текислик билан фикран кесиб, бир қисмининг мувозанатини текшираимиз. Масалан, mn кесимнинг чап томонини ташлаб юбориб, ўнг томонининг мувозанатини текширайлик. У ҳолда текшириладиган кесим юзасига ташлаб юборилган қисмга қўйилган моментларга эквивалент бўлган момент таъсир қилади, яъни:

$$M_6 = M_A + M_B$$

бўлади. Ана шу момент mn кесимдаги *буровчи момент* деб аталади. Агар биз валнинг mn кесимдан ўнг томонини ташлаб юбориб, чап қисмини текширсак, ундаги буровчи момент M_6 га тенг, лекин қарама-қарши йўналган бўлар эди.

Демак, валнинг бирор кўндаланг кесимида таъсир қилувчи буровчи момент деб шу кесимдан ўнг ёки чап томонга қўйилган моментларнинг алгебраик йиғиндиси айтилар экан. Валнинг турли қисмларидаги буровчи моментларни тасвирловчи график *буровчи моментлар эпюраси* дейилади. Буровчи моментлар эпюраси чизилган бўлса, валнинг қайси кесимида энг катта буровчи момент таъсир этаётганини яққол тасаввур қилиш мумкин. Биз текшираётган ҳолда валнинг ҳар қайси AB , BC ва CD участка-

ларида буровчи момент ўзгармас бўлгани учун, буровчи момент эпюраси, 148-шаклда тасвирланганидек, поғонали тўғри чизиқлар билан тасвирланади. M_D момент мусбат ишорали деб қабул қилинса, бошқа моментларни манфий деб олишга тўғри келади. Етакловчи шкив A ёки C кесимга қўчирилса, максимал буровчи моментнинг миқдори кўпаяди. Шунинг учун уни валнинг ўртасига ўрнатиш қулай. Бу ҳолда иккала томондаги моментларнинг йиғиндиси етакловчи шкив берадиган моментнинг маълум қисмларни ташкил қилади.

Валларни лойиҳалашда, улар узатадиган қувват билан бир минутдаги айланишлар сони асос қилиб олинади. Ана шу миқдорлар орқали буровчи моментни ифодалаш осон.

Вал двигателдан N от кучи қувватни олиб, бир минутда n марта айланади, деб фараз қилайлик. Двигателнинг бир минутда бажарган иши k гм ҳисобида қуйидагича ифодаланади:

$$A = 75 \cdot v \cdot 60.$$

Бу вақт ичида вал $\alpha = 2\pi n$ бурчакка айланади. Валга қўйилган жуфт кучнинг бажарган иши жуфт куч моменти билан айланиш бурчагининг кўпайтмасига тенглиги механикадан маълум. Шунинг учун:

$$A = M_6 \alpha = M_6 2\pi n$$

бўлади. Ёзилган бу ифодаларнинг ўнг томонларини солиштириб, буровчи момент учун қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз:

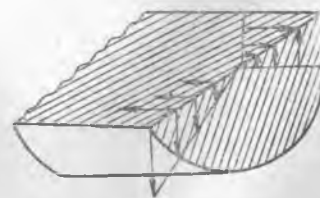
$$M_6 = \frac{75 \cdot 60 \cdot N}{2\pi n} = 716,2 \frac{N}{n} \text{ кгм.} \quad (50.2)$$

$$M_k = \frac{716,2}{0,736} \cdot \frac{k}{n} = 973,6 \frac{k}{n} \text{ кгм}$$

бу ерда k — киловат ҳисобидаги қувват.

51-§. Буралувчи стерженнинг қия кесимидаги кучланишлар

Доиравий цилиндрик стержень буралганда кўндаланг кесимининг ҳар бир нуқтасида тангенциал кучланиш (τ) ҳосил бўлишини кўрдик. Тангенциал кучланишлар ҳақидаги маълум теоремага мувофиқ, худди шундай тангенциал кучланишлар бўйлама кесимларда ҳам ҳосил бўлади (149-шакл). Кўндаланг кесим диаметрларининг учларидаги нуқталаридан ўтказилган ўзаро тик юзларда энг катта тангенциал кучланишлар ҳосил бўлади (149-шакл). Бу юзларда нормал кучланишлар бўлмайди. Аммо шу нуқталардан ўтказилган қия юзларда ҳам нормал кучланишлар йўқ деб бўлмайди. Кўндаланг ва бўйлама кесим юзларига қия бўлган юзларда ҳақиқатан ҳам нормал кучланишлар таъсир этишини кўрсатиш учун, буралаётган цилиндрик стержень сиртидан томонлари кўндаланг ва бўйлама кесимларга параллел бўлган бир $ABCD$ элементни ажратамиз (150-шакл). Бу элементнинг ён томонларига фақат тангенциал кучланишлар таъсир этади. Шунинг учун



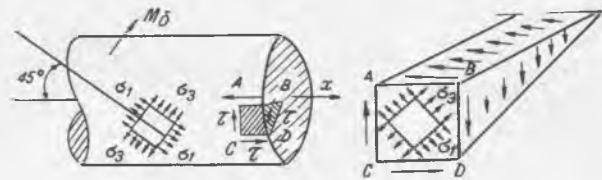
149-шакл.

бу элемент соф силжиш ҳолатида бўлади. Бу ҳол учун бош юзалар ва бош кучланишлар (36.4) ва (36.5) га мувофиқ қуйидагича аниқланади:

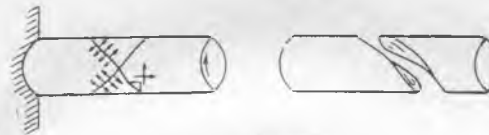
$$\sigma_x = \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = \tau;$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\tau}{0} = \infty, \quad \varphi = 45^\circ, \quad \sigma_{1,2} = \pm \tau.$$

Демак, цилиндр ўқиға 45° қия бўлган юзалар бош юзалар бўлиб, бу юзалардаги чўзувчи ва сиқувчи бош кучланишлар τ га тенг бўлар экан. Бу кучланишларнинг миқдори кўндаланг кесимнинг ҳамма нуқталарида ҳам стержень сиртидагидек бўлмай, марказгача бўлган масофага пропорционалдир.



150-шакл.



151-шакл.

Чўян каби мўрт материаллар буралганда қия кесим бўйича узилишдан парчаланади (151-шакл).

Ҳар бир нуқтадаги бош кучланишларнинг йўналишини ва миқдорини билганимиз ҳолда, шу нуқтадан ўтказилган ҳар қандай юзадаги нормал ва тангенциал кучланишларни (33.1) ва (33.2) тенгламалардан ёки шу кучланиш ҳолати учун чизилган кучланиш доирасидан фойдаланиб аниқлашимиз мумкин.

Максимал нормал ва максимал тангенциал кучланишлар сон жиҳатидан бир-бирига тенг бўлгани учун, мустаҳкамлик шарти рухсат этилган тангенциал кучланишга нисбатан қаноатлантирилганда, рухсат этилган нормал кучланишга нисбатан ҳам ўз-ўзидан қаноатлантирилади. Чунки мустаҳкамлик шарти учун қайси назария асос қилиб олинмасин, барибир, рухсат этилган тангенциал кучланиш $[\tau]$ рухсат этилган нормал кучланиш $[\sigma]$ нинг $0,5 \div 0,8$ қисмини ташкил этиши бизга маълум.

52-§. Буралиш деформациясининг потенциал энергияси (Буровчи моментнинг иши)

Цилиндрик стержень буралганда унга қўйилган буровчи момент иш бажаради. Бу иш (буралиш эластиклик чегарасида бўлса) деформациянинг потенциал энергиясига батамом айланиши ҳақида 6-параграфда айтиб ўтган эдик. Бошқача қилиб айтганда, цилиндрлик стержень эластиклик чегарасида маълум бурчакка бураб, кейин ундан буровчи момент таъсирини олсак,

стержень ўзининг олдинги ҳолатига қайтади. Олдинги ҳолатга қайтиш процесси тўпланган потенциал энергия ҳисобига бажарилади. Бир учи маҳкамланган цилиндрик стерженьнинг бошқа учига буровчи момент (M_6) таъсир қилса, стерженьнинг бу учи маҳкамланган учига нисбатан бирор φ бурчакка бурилади. Эластиклик чегарасигача буровчи момент (M_6) билан бу буралиш бурчаги (φ) орасидаги муносабат тўғри чизик орқали тасвирланади (152-шакл). Чўзувчи P кучнинг бажарган ишини ҳисоблашдаги мулоҳазаларни такрорлаб, буровчи момент M_6 нинг иши OAB учбурчакнинг юзи орқали ифодаланишини топамиз:

$$A = \frac{M_6 \varphi}{2}. \quad (52.2)$$

Бажарилган A иш деформациянинг потенциал энергияси (U) га тенглигини кўзда тутиб, буралиш бурчаги (φ) нинг қийматини (49.2) дан (52.1) га келтириб қўйсак, буралиш деформациясининг потенциал энергияси учун қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз:

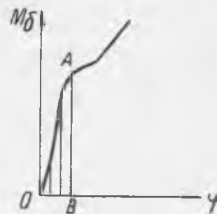
$$U = \frac{M_6^2 \varphi}{2GI_p}. \quad (52.2)$$

Потенциал энергияни буралиш деформацияси орқали ифодалаш ҳам мумкин, бунинг учун (49.2) дан M_6 ни φ орқали ифодалаб (52.2) га қўйиш лозим:

$$M_6 = \frac{GI_p}{l} \varphi,$$

$$U = \frac{GI_p}{2l} \varphi^2. \quad (52.3)$$

Кўрамизки, буралишда ҳам, чўзилиш ва сиқилишдагидек, потенциал энергия буровчи момент ёки буралиш бурчагининг квадратик функцияси бўлади.



152-шакл.

53-§. Кесими доиравий бўлмаган стерженларнинг буралиши

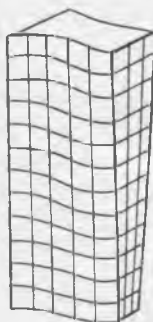
Кўпинча, буралишга ишлайдиган стерженларнинг кўндаланг кесими доиравий бўлади. Аммо буралишга қаршилик кўрсатувчи стерженлар орасида кўндаланг кесими доиравий бўлмаганлари ҳам кўп учрайди. Доиравий бўлмаган кўндаланг кесимлар деформациядан кейин текис қолмай, балки қийшаяди, натижада кесим элементлари эгилиб, кучланиш кесим юзаси бўйича мураккаб қонун билан тарқалади. Шунинг учун кесими доиравий бўлмаган стерженларнинг буралишини текшириш масаласи анча мураккаб масала бўлиб, уни элементар усулда ечиб бўлмайди. Бу хилдаги масалаларни бир қанча тур кесимлар учун даставвал Сер-Венан ечган эди Бв ҳақидаги маълумотларнинг тўла тавсифи эластиклик назариясида берилади. Ҳозирча бу соҳада ўтказилган текширишларнинг натижаларини энг муҳим ҳоллар учун исботсиз келтириш билан чекланамиз. Биринчи навбатда кесими тўғри тўртбурчак бўлган стерженьнинг буралишига оид натижаларни келтирамиз.

Тўғри тўртбурчак кесимли стерженьнинг буралишдаги деформациясини резинадан ясалган моделда жуда яхши кузатиш мумкин. Тўғри тўртбурчакли стержень модели сиртидаги квадратларнинг қийшайиши 153-шаклда тасвирланган. Кўндаланг чизикнинг эгилиши текис кўндаланг кесимнинг қанчалик ўзгаришини кўрсатади. Стержень сиртидаги квадратларнинг қийша-

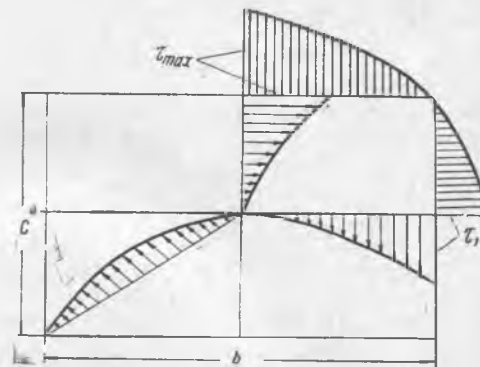
йиши силжиш деформациясининг ва тангенциал кучланишларнинг кесим че-тидаги юзаларда қандай қонун билан тарқалганлиги кўрсатади. Қиррага яқин квадратлар тўғрилигича қолиб, қиррадан узоқлашган сари квадратларнинг қийшайиши кўпайганини 153-шаклдан кўрамиз.

Стержень ён томонининг ўрта чизигидаги элементларда квадратларнинг қийшайиши энг катта қийматга эга бўлади. Шунинг учун кўндаланг кесимнинг бурчакларида тангенциал кучланишлар ноль бўлиб, томонларининг ўртасига қараб ўсади, деган хулоса чиқаришимиз мумкин. Бу хулосани эластиклик назарияси асосида ўтказилган текширишлар тасдиқлайди. Аниқ текширишларнинг натижалари кўндаланг кесимнинг узун томони ўртасида энг катта тангенциал кучланиш (τ_{max}) ҳосил бўлишини кўрсатади. Кесимнинг калта томонидаги тангенциал кучланиш узун томонидаги кучланишдан бирмунча оздир. Тўғри тўрт бурчакли кесим учун кўндаланг кесимнинг бош ўқлари диагоналлари ва четлари бўйича кучланишнинг қандай қонун билан тарқалиши 154-шаклда тасвирланган.

Тўғри тўрт бурчакли кесим учун эластиклик назариясида чиқарилган натижаларга мувофиқ, максимал тангенциал кучланишни ва стерженнинг



153- шакл.



154- шакл.

узунлик бирлигига тўғри келадиган буралиш бурчагини аниқлаш учун қуйидагича формулаларни оламиз:

$$\tau_{max} = \frac{M_\phi}{abc^2}, \quad (53.1)$$

$$\varphi = \frac{M_\phi}{\beta G \beta c^3}, \quad (53.2)$$

Бунда α ва β тўғри тўртбурчакнинг томонлари b ва c нисбатига боғлиқ бўлган коэффициентлардир (b — тўғри тўртбурчакнинг узун ва c — қисқа томони). Тўғри тўртбурчак қисқа томонининг ўртасида ҳосил бўладиган кучланиш учун ҳам юқоридагидек формулани ёзишимиз мумкин:

$$\tau_1 = \frac{M_\phi}{\alpha_1 c b^2}; \quad (53.3)$$

α , β , α_1 коэффициентларнинг қийматлари ($\frac{b}{c}$ нисбатнинг турли қийматлари учун) қуйидаги жадвалда берилган:

Тўғри тўрт бурчакли стерженлар учун α , β , α_1 коэффициентларнинг қийматлари

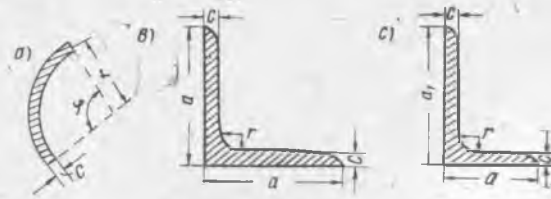
$\frac{b}{c}$	1,0	1,5	1,75	2,0	2,5	3,0	4,0	6,0	8,0	10	∞
α	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
β	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
α_1	0,208	0,270	—	0,309	—	0,354	0,379	0,402	—	—	0,448

Қўрамизки, b/c нинг катта қийматлари учун α ва β коэффициентлар $1/3$ га яқинлашади. Демак, юққа тўғри тўрт бурчакли кесимлар учун (масалан, $b/c \geq 10$ бўлган ҳолларда) амалий ҳисоблар қилишда $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$ деб олиниши мумкин. Бу ҳолда (53.1) ва (53.2) формулалар қуйидагича ёзилади:

$$\tau_{\max} = \frac{3M_0}{bc^2}, \quad (53.4)$$

$$\varphi = \frac{3M_1}{Gbc^2}, \quad (53.5)$$

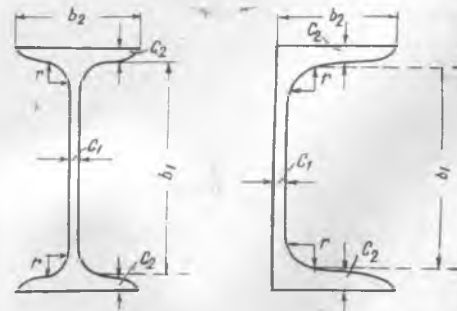
155-шакл.



Бу формулалардан юққа тўғри тўртбурчак кесимли стерженларнинг ҳисобини чиқаришдагина эмас, балки юққа деворли, ёпиқ бўлмаган профилли стерженларнинг ҳисобини чиқаришда ҳам фойдаланса бўлади. Бунинг учун тўғри тўртбурчакнинг узун томони ўлчами b ўрнига кесимдан ажратилган тўғри тўртбурчаклар узун томонларининг йиғиндисини олиш лозим. Масалан, кўндаланг кесим ҳалқанинг бир қисми бўлса (155-шакл, а), $b = r\varphi$ бўлади. Тенг ёнли бурчаклик кесим учун (155-шакл, в): $b = 2a - c$; тенг ёнли бўлмаган бурчаклик кесим учун: $b = a + a_1 - c$ (155-шакл, с).

Девори ва тоқчасининг қалинлиги бир хилда бўлмайдиган швеллер ва қўш таврли кесимлар учун (156-шакл) бикрликни кесимни ҳосил қилган учта юққа тўғри тўртбурчакка тегишли бикрликларнинг йиғиндисини тарзи-

156-шакл.

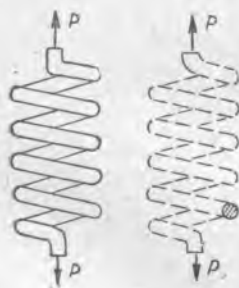


да олиш мумкин. Бунинг учун (53.5) даги bc^3 нинг ўрнига $b_1c_1^3 + 2b_2c_2^3$ ни қўйиш керак. У ҳолда φ учун қуйидаги ифодани оламиз.

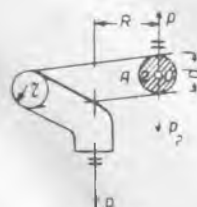
$$\varphi = \frac{3M}{G(b_1c_1^3 + 2b_2c_2^3)}. \quad (53.6)$$

54-§. Қадами кичик винт пружиналардаги кучланишлар ва деформациялар

Вагон, автомобиль рессорларида ва бошқа механизмларда қўзувчи ва сиқувчи кучлар таъсир этадиган винт пружиналар ишлатилади. Бундай пружиналарни лойиҳалаш учун уларнинг мустаҳкамлигини ҳисоблаш билан бирга, қўйилган юк таъсиридан нақадар чўкишини ёки чўзилишини ҳам олдиндан аниқлаш лозим. Демак, қўйилган масалани ечиш учун материали ва геометрик ўлчамлари маълум бўлган пружинага қўйиладиган куч билан тегишли деформация орасидаги муносабатни аниқлаш лозим.



157-шакл.



158-шакл.

Сиқилаётган ёки чўзилаётган винт пружинанинг асосан буралишга қаршилик кўрсатишини утказилган текширишлар тасдиқлайди. Шунинг учун ҳам қадами кичик винт пружиналар ҳисобини курсимизнинг буралиш бобида текширмоқдамиз. Цилиндрик пружинага ўқи бўйлаб йўналган қўзувчи P куч таъсир этади, деб фараз қилайлик (157-шакл, а). Пружина ўрами ўқининг радиусини R , ўрамлар сонини n , пружина ўрами қўндаланг кесимининг радиусини r , пружина материали учун силжиш модулини G деймиз. Пружина ўрамлари ҳосил қилган цилиндрнинг ўқидан ўтувчи текислик билан унинг ўрамларидан бирини кесиб, пружинани икки қисмга ажратамиз ва бир қисмининг, масалан, пастки қисмининг мувозанатини текшираемиз. (157-шакл, б). Бу қисмга ташқи P куч ва қирқилган кесим бўйича ички кучлар таъсир қилади. Қирқилган кесим бўйича таъсир қилаётган ички кучлар пружинанинг пастки учига қўйилган ташқи P куч билан мувозанатлашуви керак. Мувозанат шартини таъминлаш учун қирқилган қўндаланг кесим маркази O га сон жиҳатидан P кучга тенг ва қарама-қарши йўналган вертикал P_1 ва P_2 кучларни қўямиз (158-шакл). Бу кучлардан (P, P_1) қирқилган кесим текислигида ётувчи жуфт кучни ҳосил қилади. Бу жуфтниң моменти

$M_6 = PR$ бўлади. Бундан ташқари, кесим юзасида ётган ва марказга қўйилган $P_2 = P$ куч ҳам бор. Пружина ўрами горизонтга бирмунча қия бўлишига қарамай, унинг қўндаланг кесими вертикал текисликда ётади, деб фараз қилинди. Дарҳақиқат, қадами кичик винт пружиналарнинг ҳисобини чиқаришда бу нарс айтарли хатоларга олиб бормайди.

Демак, қирқилган кесим бўйича таъсир қилувчи ички кучлар кесим текислигида ётувчи P куч билан моменти $M_6 = PR$ бўлган жуфт кучга эквивалент бўлар экан.

$P_2 = P$ куч қирқилган кесим юзасини пастга қараб силжитишга интилади. Бу куч таъсиридан кесим бўйича тенг тарқалган кесувчи кучланишлар ҳосил бўлади (159-шакл, а):

$$\tau_1 = \frac{P}{F} = \frac{P}{\pi r^2}$$

Моменти $M_6 = PR$ бўлган жуфт куч пружина стерженини бурашга интилади. Бунинг натижасида ҳосил бўладиган иккинчи гуруҳ тангенциал кучланишлар

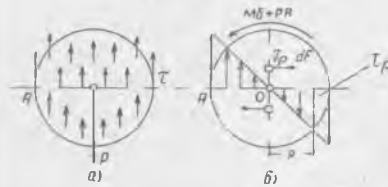
$$\tau_2 = \frac{M_6}{I_p} \rho$$

формулага мувофиқ аниқланади. Бу кучланишлар пружина ўрамининг кўндаланг кесими бўйича 159-шакл, б да кўрсатилганидек тарқалиши бизга маълум. У кесимнинг чегида энг катта қийматга эга бўлиб, бу қиймат:

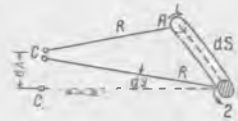
$$\tau_{2\max} = \frac{M_6}{W_p} = \frac{PR}{\frac{\pi r^3}{2}}$$

дир. Кўндаланг кесим юзасининг А нуқтасидаги кучланишлар бир хил йўналишда бўлгани учун уларни қўшиб, қуйидаги тўла максимал тангенциал кучланиш ($r_{\max}$) ни ҳосил қиламиз:

$$\tau_{\max} = \frac{2PR}{\pi r^3} + \frac{P}{\pi r^2} = \frac{2PR}{\pi r^3} \left(1 + \frac{r}{2R}\right). \quad (54.1)$$



159- шакл.



160- шакл.

Кўпгина ҳолларда кавс ичидаги иккинчи қўшилувчи ҳад $\frac{r}{2R}$ биринчиси-сига қараганда анчагина кичик бўлгани учун уни эътиборга олмасдан, фақат буралишдаги кучланишнинг кўзда тутамиз. У ҳолда, ҳисоб тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$r_{\max} = \frac{2PR}{\pi r^3} \leq [r]. \quad (54.2)$$

Соддалаштирилган бу схема асосида, пружинанинг чўзилиши (λ) ни, яъни пастки учининг пасайишини аниқлаш жуда осон бўлади. Бунинг учун пружинадан 1 ва 2 кесимлар билан чегараланган ва узунлиги dS га тенг бўлган кичик бир кесма ажратамиз (160-шакл). Ажратилган кесма чексиз кичик бўлгани учун, уни деформациягача горизонтал текисликда ётувчи тенг ёнли CAB уч бурчакни ҳосил қилади дейишимиз мумкин. Пружинанинг деформацияланиши натижасида 2-кесим 1-кесимга нисбатан dS давомида $d\rho = \frac{M_6 dS}{GI_p}$ бурчакка буралади. Шунинг билан бирга, BC радиус ҳам AC га нисбатан $d\varphi$ бурчакка оғади, ниҳоят, C нуқта C_1 га кўчади. Бунинг натижасида пружинанинг учи $d\lambda = R d\varphi = R \frac{M_6 dS}{GI_p}$ масофа пасаяди. Пру-

жинанинг dS каби барча элементлари шу тарзда деформацияланишини кўз-
да тутсак, пастки учининг тўла пасайиши қуйидаги интеграл орқали ифо-
даланади:

$$\lambda = \int_0^l R \frac{M_c dS}{GI_p} = R \frac{M_c l}{GI_p}. \quad (54.3)$$

Бунда $l = \int_0^l dS$ — пружина стерженининг тўла узунлиги; $\frac{M_c l}{GI_p}$ — пружи-
на стержени тўғрилганда учларининг бир-бирига нисбатан буралиш бур-
чаги. Пружина ўрамларининг горизонтга қиялиги ҳисобга олинмаса, l нинг
қиймати қуйидагича ёзилади: $l = 2\pi Rn$. У ҳолда:

$$\lambda = \frac{M_c R}{GI_p} 2\pi n R = \frac{4PR^3}{Gr^4} n \quad (54.4)$$

бўлади. (54.2) ва (54.4) формулалар воситаси билан винт пружиналарнинг
мустаҳкамлигини ва деформациясини аниқлаш мумкин.

Цилиндрик винт пружиналарнинг анчагина эластик чўзилиш қобилия-
тига эга бўлиши уларнинг вазифасидан келиб чиққани учун, пружина тай-
ёрлашда эластиклик чегараси юқори бўлган тобланган пўлатлар ишлатила-
ди. Бундай пўлат стержень учун рухсат этилган кўчланиш $[r] = 3500 \div$
 5000 кг/см^2 гача боради. Мустаҳкамлиги юқори бўлган махсус пўлатлар
учун, рухсат этилган кўчланиш бундан ҳам юқори бўлади.

Пружинага қўйиладиган юк ўзгарувчан бўлса, рухсат этилган кўчла-
ниш 30—65 % камайтирилади. Ўрами квадрат ёки тўғри тўрт бурчакли
пружиналарнинг ҳисоби ҳам худди шу тарзда чиқарилади. Бу ҳолда қар-
шилик моменти (W_p) ўрнига abc^2 ни ва бикрлик (GI_p) ўрнига βGbc^3 ни
олиш лозим.

(54.4) формуладан фойдаланиб, маълум геометрик ўлчамларга эга бўл-
ган пружинани эластиклик чегарасида чўзишга ёки сиқишга синаш натижа-
сида, унинг материали учун силжиш модули G ни аниқлаш мумкин.

Пружина учун P билан чўзилиш ёки чўқиш λ орасидаги муносабат
тўғри чизикли конун билан ифодалангани учун, юкнинг бажарган ишини
ёки деформациянинг потенциал энергиясини қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$U = \frac{1}{2} P \lambda = \frac{2P^3 R^3}{Gr^4} \cdot n. \quad (54.5)$$

(54.2) га мувофиқ, $U = \frac{2\pi Rn}{4G} \pi r^2 [\tau]^2$ ни ҳосил қиламиз. Бунда (54.5) га
қўйсак: $PR = \frac{[\tau] \pi r^3}{2}$ келиб чиқади, $2\pi Rn$ — пружина стерженининг узунлиги,
 πr^2 — унинг кўндаланг кесим юзя бўлгани учун, $2\pi Rn \cdot \pi r^2 = V$ пружина
материалининг ҳажмини ифодалайди; шунинг учун:

$$U = \frac{[\tau]^2}{4G} V. \quad (54.6)$$

Баъзан, пружина унга қўйилган юк бўйича ҳисобланмай, балки пружина
қабул қилиб оладиган энергия бўйича ҳисобланади. Маълум энергияни
қолдиқ деформациясиз қабул қилиб олиши учун, пружина материалининг
ҳажми қанча бўлиши керак, деган масалани (54.6) ёрдамида ечиш мумкин:

$$V = \frac{4G U}{[\tau]^2}. \quad (54.7)$$

Демак, маълум миқдордаги энергияни қабул қилувчи пружинада ҳосил бўладиган кучланиш рухсат этилган кучланишдан ошиб кетмаслиги учун пружина тайёрлашда сарфланадиган материалнинг ҳажми (54.7) формула билан аниқланадиган ҳажмдан ошиқ бўлмаслиги лозим.

Пружинанинг чўкиши (λ) га маълум чек қўйилади. Унинг қиймати шундай бўлиши керакки, пружина ўрамлари бир-бирига тегипмай, маълум ораликда туриши лозим.

(54.5) формуладан фойдаланиб, силжиш модули (G) ни эксперимент йўли билан аниқлаш мумкин. Ўрамларининг сони ва ҳамма геометрик ўлчамлари маълум бўлган пружина синов машинасида сиқилса, сиқувчи P куч билан пружинанинг чўкиши (λ) ни машинага ўрнатилган шкаладан аниқлаб, G ни (54.5) дан ҳисоблаш қийин эмас.

МАСАЛАЛАР

46. Қовак валнинг сиртқи диаметри $d_1 = 100$ мм ва ички диаметри $d_2 = 50$ мм дир. У, $n = 80$ айланиш/минут тезлик билан айланиб, $l = 2.7$ м узунлиги давомида $\varphi = 1,8^\circ$ га буралса, вал неча от кучига тенг қувватни узатиши мумкин? Энг катта тангенциал кучланишнинг миқдори ҳам аниқлансин. $G = 8 \cdot 10^9$ кг/см².

Еч иш. Буровчи момент, қувват ва буралиш бурчаклари ўзаро қуйидаги формулалар билан боғланган:

$$M_k = 71620 \frac{N}{n}; \quad \varphi = \frac{M_k l}{G I_p}$$

Буларни солиштириб:

$$71620 \frac{N}{n} = \frac{G I_p}{l} \varphi$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бундан:

$$N = \frac{G I_p}{71620} \cdot \frac{n \varphi}{l};$$

бурчак радиан ҳисобида ифодалангани учун:

$$\varphi = 1,8^\circ = \frac{1,8\pi}{180} = \frac{\pi}{100}$$

Поляр инерция моменти:

$$I_p = \frac{\pi (d_1^4 - d_2^4)}{32} = 293 \pi \text{ см}^4.$$

Булар қўзда тутилса, $N = 98,8$ от кучи.

Энг катта тангенциал кучланиш кесимнинг ташқи четида ҳосил бўлади.

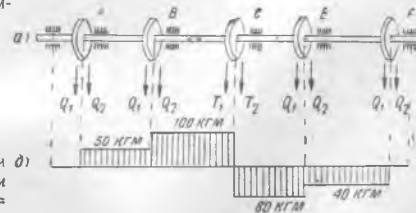
$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_p} = \frac{M_k}{0,1 d_1^3 (1 - \alpha^4)} = 481 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$$

$$\alpha = \frac{d_2}{d_1} = 0,5.$$

47. Трансмиссия валининг етакловчи д) шкиви C нинг диаметри $D_1 = 1,2$ м

бўлиб, қайиш учларининг тортилиши $T = 600$ кг ва $T_2 = 300$ кг (161-шакл). Станокларга айланма ҳаракат берувчи A , B , E ва F шкивларнинг диаметрлари қуйидагича: A ва B шкивларнинг диаметрлари $D_2 = 1$ м, E ва F шкивларнинг диаметрлари $D_3 = 0,8$ м. Тўртала шкивдаги қайишларнинг тортилиши Q_1 ва Q_2 бир хилда. Буровчи моментлар эпюраси қурилсин; валнинг диаметри, мустаҳкамлик ва бикрлик шарти аниқлансин. $G = 8 \cdot 10^9$ кг/см², $[\tau] = 200$ кг/см² ва 1 метр узунликдаги буралиш бурчаги

$$[\varphi] = \frac{1}{4}.$$



161-шакл.

Ечиш. Валга шкивдан бериладиган момент:

$$M_c = (T_1 - T_2) \frac{D_2}{2} = (600 - 300) 60 = 18000 \text{ кг.см.}$$

Қолган тўртала шкивнинг валга кўрсатадиган таъсирини ифодаловчи M_A , M_B , M_E ва M_F моментлар M_C га тескари йўналишда бўлиб, у билан мувозанатлашади; шунинг учун:

$$M_A + M_B + M_E + M_F - M_C = 0. \quad (a)$$

Тортилишларнинг айирмаси $Q_1 - Q_2$ ни ΔQ десак, мувозанат тенгламаси (a) қуйдагича ёзилади:

$$2 \frac{D_2}{2} \Delta Q + 2 \frac{D_3}{2} \Delta Q = M_c;$$

бундан:

$$\Delta Q = \frac{M_c}{D_2 + D_3} = \frac{18000}{100 + 80} = 100 \text{ кг.}$$

$$M_A = M_B = \Delta Q \frac{D_2}{2} = 100 \cdot 50 = 5000 \text{ кг.см.}$$

$$M_E = M_F = \Delta Q \frac{D_3}{2} = 100 \cdot 40 = 4000 \text{ кг.см.}$$

Буровчи моментлар эпюрасини қўриб (161-шакл, в), қўрамызки, $(M_k)_{\max} = 10000 \text{ кг.см}$ бўлади. Мустаҳкамлик шартига мувофиқ, зарур бўлган қаршилик momenti:

$$W = 0,2 d^3 = \frac{M_0}{[\tau]}.$$

Бундан валининг диаметри: $d = \sqrt[3]{\frac{M_0}{0,2 [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{10000}{0,2 \cdot 200}} = 6,3 \text{ см.}$

Бикрлик шартига мувофиқ нисбий буралиш бурчаги:

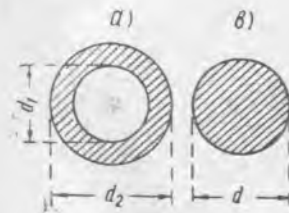
$$\varphi = \frac{\pi}{180 \cdot 400} \text{ радиан/см,}$$

$\varphi = \frac{M_0}{GI_\rho}$ формуладан бикрликни таъмин этувчи поляр инерция моментини топамиз:

$$I_\rho \approx 0,1 d^4 = \frac{M_0}{G\varphi};$$

бундан:

$$d = \sqrt[4]{\frac{M_0}{0,16 \varphi}} = \sqrt[4]{\frac{10000 \cdot 180 \cdot 400}{0,1 \cdot 8 \cdot 10^6 \cdot 3,14}} = 7,3 \text{ см.}$$



162-шакл.

48. Ички ва ташқи диаметрларининг нисбати $\alpha = \frac{d_1}{d_2} = 0,8$ бўлган ковак вал билан диаметри d га тенг тўлиқ валларнинг қўндаланг кесим юзлари бир хилда бўлса (162-шакл), ковак вал тўлиқ валга қараганда неча марта чидамли бўлиши аниқлансин. Иккала валнинг бикрлиги солиштирилсин.

Жавоби. Валларнинг қўндаланг кесим юзларини солиштириб $\frac{d_1}{d_2} = 0,8$ ни кўзда тутсак, d билан d_1 орасидаги муносабатни аниқлаймиз.

$$d_1 = \frac{d}{0,6}$$

Ковак валнинг мустаҳкамлиги тўлиқ валга қараганда 2,73 марта, бикрлиги 4,56 марта каттадир.

49. Катер моторининг курагини айлантирувчи пўлат валнинг мустаҳкамлиги ва бикрлиги ҳисоблансин. Двигателнинг қуввати $N = 60$ от кучи, валнинг айланиш тезлиги $n = 200$ айланиш/минут. Рухсат этилган кучланиш $[\tau] = 400 \text{ кг/см}^2$, 1 метр узунлик учун рухсат этилган буралиш бурчаги $[\varphi] = 1^\circ$; $G = 8 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$.

Жавоби. Мустаҳкамлик шартига мувофиқ: $d = 6,08 \text{ см} \approx 6 \text{ см}$, бикрлик шартига мувофиқ: $d = 5,97 \text{ см} \approx 6 \text{ см}$.

50. Пулатдан ясалган ковак валнинг ташқи диаметри $d_1 = 20 \text{ см}$, ички диаметри $d_2 = 12 \text{ см}$ бўлса, двигатель бериши мумкин бўлган энг катта қувват қанча бўлади?

Рухсат этилган кучланиш $[\tau] = 300 \text{ кг/см}^2$, айланиш тезлиги $n = 120$ айланиш/минут.

Жавоби. Энг катта қувват $N = 700$ от кучи бўлади.

51. Доиравий қўндаланг кесимли ва узунлиги l га тенг стержень иккала учи билан маҳкамланиб, маҳкамланган учларидан a ва b масофадаги кесимга M кгм буровчи момент таъсир қилади (163-шакл). Маҳкамланган жойларда ҳосил бўладиган реактив моментлар M_A ва M_B аниқлансин.

Е ч и ш. Масала статик аниқмас, чунки битта статика тенгламасида 2 та номаълум бор:

$$\sum M = m - M_A - M_B = 0. \quad (1)$$

Қўшимча тенгламани стерженьнинг чап ва ўнг қисмлари буралишларининг бир хилда бўлиши шартидан фойдаланиб тузамиз:

$$\varphi_a = \varphi_b. \quad (2)$$

Буралиш бурчакларининг қийматини $\varphi = \frac{Ml}{GI_p}$ формуладан аниқлаб, (2) тенгламага қўйсак, қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\frac{M_A a}{GI_p} = \frac{M_B b}{GI_p}. \quad (3)$$

Бундан:

$$M_A = M_B \frac{b}{a}. \quad (4)$$

Бу тенглама (1) тенглама билан қўшиб ечилса, M_A билан M_B нинг қиймати қуйидагича бўлади:

$$M_A = m \frac{b}{l}, \quad M_B = m \frac{a}{l}.$$

52. Доиравий қўндаланг кесимли стержень иккала учи билан маҳкамланиб, қарама-қарши йўналган $M_1 = 40 \text{ кгм}$ ва $M_2 = 60 \text{ кгм}$ буровчи моментлар таъсирида буралди (164-шакл). Стерженьнинг диаметри мустаҳкамлик ва бикрлик шартидан топилсин. Рухсат этилган кучланиш $[\tau] = 400 \text{ кг/см}^2$, ҳар бир метр учун рухсат этилган буралиш бурчаги $[\varphi] = \frac{1^\circ}{4}$; $G = 8 \times 10^5 \text{ кг/см}^2$.

Масофалар: $a = 0,5 \text{ м}$, $b = 0,75 \text{ м}$, $c = 1,25 \text{ м}$.

Е ч и ш. B учини бўшатиб, у ердаги боғланишнинг таъсирига M_B момент билан алмаштирамиз. Аммо бўшатишган бу кесим қўзғалмаслиги, яъни унинг буралиш бурчаги $\varphi_B = 0$ бўлиши керак. Шунинг учун:

$$\frac{M_1 \cdot 0,5}{GI_p} - \frac{M_2 \cdot 1,25}{GI_p} + \frac{M_B \cdot 2,5}{GI_p} = 0,$$

бу тенгламадан:

$$M_B = \frac{-40 \cdot 0,5 + 60 \cdot 1,25}{2,5} = 22 \text{ кгм}.$$

Максимал буровчи момент:

$$(M_0)_{\max} = 3800 \text{ кгсм}.$$

Мустаҳкамлик шартига мувофиқ:

$$d^3 = \frac{3800}{400 \cdot 0,2} = 47,5; \quad d = 3,62 \text{ см}.$$

Энди, d ни бикрлик шартидан аниқтаймиз. Унинг учун $[\varphi]$ ни радиан ҳисобида ёзамиз:

$$[\varphi] = \frac{0,25 \pi}{180} = \frac{3800 \cdot 100}{8 \cdot 10^5 \cdot 0,1 d^4}.$$

бундан:

$$d^4 = 1090; d = 5,75 \text{ см.}$$

Диаметр учун унинг катта қиймати 5,75 см ни қабул қиламиз.

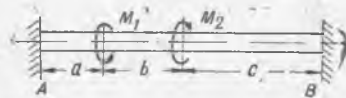
53. Ўзгарувчи кесимли пулат валга қўйилиши мумкин бўлган максимал буровчи момент аниқлансин (165-шакл). $d_1 = 7 \text{ см}$, $d_2 = 5 \text{ см}$. Рухсат этилган кучланиш $[\tau] = 600 \text{ кг/см}^2$.

Е ч и ш. Мувозанат тенгламасини ёзамиз:

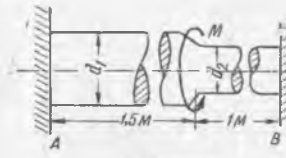
$$M_A + M_B = M; \quad (1)$$

деформация тенгламасини ёзамиз:

$$\frac{M_A l_1}{G I_{p1}} = \frac{M_B l_2}{G I_{p2}}; \quad (2)$$



164-шакл.



165-шакл.

(1) ва (2) тенгламалардан: $4,84 M_B = M$, $1,26 M_A = M$. Буровчи моментларнинг бу икки қийматидан кичигини олиш зарур, у:

$$M = 52,2 \text{ кгм}$$

булади.

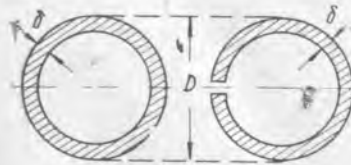
54. Квадрат кўндаланг кесимли вал $N=100$ от кучи қувватни узатиб, $n=120$ айланиш/минут тезлик билан айланади; вал кўндаланг кесимининг томони (a) аниқлансин. Рухсат этилган тангенциал кучланиш $[\tau] = 460 \text{ кг/см}^2$.

Е ч и ш.

$$M_0 = 71620 \frac{N}{n} = 71620 \frac{100}{120} = 59800 \text{ кгсм.}$$

Тўғри тўрт бурчакли кесим учун чиқарилган тенгламадан фойдаланамиз. $\tau_{\max} = \frac{M_0}{abc^2} < [\tau]$; биз текшираётган масалада $b=c=a$ бўлиб, a нинг қийматини $\frac{t}{c} = 1$ учун жадвалдан оламиз, $\alpha = 0,208 \approx 0,21$ бўлади.

$$\text{Демак, } \frac{59800}{0,21} < 460, \text{ бундан: } a^3 > \frac{59800}{0,21 \cdot 460} = 18 \text{ см.}$$



166-шакл.

55. Диаметри $D=60 \text{ мм}$, қалинлиги $\delta=3 \text{ мм}$ бўлган иккита трубадан биттаси ясовчисни бўйлаб кесилган (166-шакл). Уларнинг бикрлиги таққослансин.

Е ч и ш. Кесилган трубанинг кўндаланг кесим юзаси ингичка тўғри тўрт бурчакли бўлган учун, унинг бикрлиги $C_1 = G \beta b c^3$ булади; бу ҳол учун коэффициент $\beta = \frac{1}{3}$ бўлиб $b = \pi D_1 c = \delta$ дир.

Шунинг учун:

$$C_1 = \frac{1}{3} G \pi D \delta^3.$$

Кесилмаган ёпиқ труба кўндаланг кесимининг бикрлиги:

$$C_2 = G \pi D \delta \cdot R^2 = G \frac{\pi D^2}{4} \delta.$$

Бикрликларнинг нисбати:

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{3}{4} \cdot \frac{D^2}{\delta^2} = 300.$$

Демак, трубанинг ясовчисни бўйлаб кесилиш муносабати билан унинг бикрлиги 300 марта камаяр экан.

56. Доиравий қўндаланг кесимли симдан ўралган цилиндрик пружина А учининг кўчиши топилис (167-шакл). Симнинг диаметри $d = 20$ мм, ўрамларнинг сони $n = 10$, унинг ўрта радиуси $R = 100$ мм. Пружинани қўзувчи куч $P = 500$ кг; $G = 8 \cdot 10^5$ кг/см². Пружина бурилишида ҳосил бўладиган энг катта кучланиш $\tau_{\max}$ ҳам аниқлансин.

Е ч и ш. Пружинанинг қўзилиши $\lambda = \frac{2\pi n P R^3}{G I_p}$ формуладан аниқланади, шунинг учун:

$$\lambda = \frac{64 P R^3 n}{G d^4} = 20 \text{ см.}$$



167-шакл.

Максимал кучланиш:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\phi}}{W} = \frac{16 P R}{\pi d^3} = 3180 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}.$$

57. Клапанинг цилиндрик пружинаси доиравий кесимли симдан ўралган бўлиб, ўрамининг ўрта радиуси $R = 20$ мм (168-шакл). Пружинани сиқувчи кўчнинг максимал қиймати $P = 100$ кг ва максимал қўчиши $\lambda = 3$ мм бўлса, сим диаметри d ва ўрам сони қанча бўлади? Рухсат этилган кучланиш $[\tau] = 4800$ кг/см²; $G = 8 \cdot 10^5$ кг/см.

Е ч и ш. Ҳисоб тенгласидан d ни аниқлаб, деформация тенгласидан n ни топамиз:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\phi}}{W_p} \leq [\tau] \left[\frac{16 P R}{\pi d^3} \leq 4800 \right] \quad d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 100 \cdot 20}{\pi \cdot 48}} \approx 6 \text{ мм.}$$

$$\lambda = \frac{64 P R^3}{G d^4} n; \text{ бундан: } n = \frac{G d^4 \lambda}{64 P R^3} \approx 6.$$

58. Диаметри $d = 8$ мм бўлган симдан ўралган цилиндрик пружинанинг ўрта радиуси $R = 40$ мм, ўрамлари сони $n = 10$; деформациянинг потенциал энергияси ҳисоблаб топилин.

$T = 200$ кг/см ишни синмасдан қабул қилиши учун ўрамлар сони қанча бўлиши керак? Рухсат этилган кучланиш $[\tau] = 400$ кг/см²; $G = 8 \cdot 10^5$ кг/см².

Е ч и ш.

$$U = \frac{1}{2} P \lambda = \frac{32 P^2 R^3 n}{G d^4} = \frac{\pi^2 R d^2 n}{8 G} \tau_{\max}.$$

чунки:

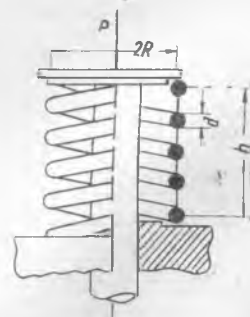
$$\tau_{\max} = \frac{M_{\phi}}{W} = \frac{P R}{\frac{\pi d^3}{16}};$$

шунинг учун:

$$U = \frac{\pi^2 R d^2 n}{8 G} [\tau] = 160 \text{ кг/см.}$$

$$T = \frac{1}{2} P \lambda_1 = \frac{32 P^2 R^3 n_1}{G d^4}; \quad \frac{T}{U} = \frac{n_1}{n}, \text{ бундан:}$$

$$n_1 = n \frac{T}{U} = 12,5 \text{ ўрам.}$$



168-шакл.

IX боб

ТЕКИС ШАКЛЛАРНИНГ СТАТИК ВА ИНЕРЦИЯ МОМЕНТЛАРИ

Призматик стерженларнинг буралиш деформациясини текширишда баъзи бир янги геометрик тушунчаларни учратган эдик. Улар доиравий кесим юзасининг поляр инерция моменти (I_p) ва буралишдаги қаршилик моменти W_p деб аталадиган катталиклар эди. Назарий механиканинг статика қисмида текис шаклларнинг оғирлик марказини топишда ҳам шунга ўхшаш тушунчаларни учратган эдик. У текис шаклларнинг статик моментлари тушунчаси эди. Эгилиш назариясида ҳам бундай тушунчаларни учратамиз. Шунинг учун бу бобни ана шу геометрик тушунчаларнинг назариясини янги таъриф ва мулоҳазалар билан тўлдириб, систематик равишда тавсиф этишга бағишлаймиз.

55-§. Текис шаклларнинг ўққа нисбатан статик моментлари

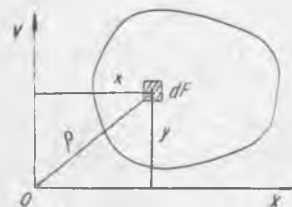
Назарий механиканинг статика қисмида текис шаклларнинг оғирлик марказини танланган координаталар системасига нисбатан қуйидаги формулалардан фойдаланиб аниқлаган эдик:

$$x_c = \frac{\int x dF}{F}; \quad y_c = \frac{\int y dF}{F} \quad (55.1)$$

бунда F — текис шаклнинг юзи.

Бу формулаларнинг ўнг томонларидаги касрларнинг сурати текис шаклнинг y ва x координата ўқларига нисбатан статик моментлардир. Биз уларни S_x ва S_y билан белгиллаган эдик, яъни:

$$S_x = \int y dF, \quad S_y = \int x dF. \quad (55.2)$$



169- шакл.

Демак, текис шаклнинг бирор ўққа нисбатан статик моменти деб, текис шаклдан ажратилган элементар юзчаларнинг ўққача бўлган ораликларга кўпайтмаларининг йиғиндиси айтилар экан. Масалан, текис шаклнинг x ўқига нисбатан статик моментини ҳисоблаш учун, ундан бирор элементар dF юзачани ажратиб, уни ўққача бўлган масофаси y га кўпайтирамиз ва шундай кўпайтмаларнинг йиғиндисини (интегралини) оламиз (169- шакл).

Бу таъриф асосида, текис шаклларнинг оғирлик марказини аниқловчи (55.1) формулаларни қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$x_c = \frac{S_y}{F}, \quad y_c = \frac{S_x}{F}. \quad (55.3)$$

Координата ўқларидан бири ёки иккаласи текис шаклнинг оғирлик марказидан ўтса, бундай ўқлар *марказий ўқлар* дейилади. Марказий ўқларга нисбатан статик моментларнинг нолга тенг бўлиши (55.3) дан кўриниб турибди.

56- §. Текис шаклларнинг инерция моментлари

Текис шаклнинг бирор ўққа нисбатан инерция моменти деб, шаклдан ажратилган ҳамма элементар юзчаларни шу ўққача бўлган оралиғи квадратага кўпайтиришдан ҳосил бўлган кўпайтмаларнинг йиғиндиси айтилади. Масалан, текис шаклнинг x ўқиға нисбатан инерция моментини ҳисоблаш учун, таърифға мувофиқ, ундан бирор dF элементар юзчани ажратиб, уни мазкур x ўқиғача бўлган масофаси y нинг квадратага кўпайтирамиз ва чиққан кўпайтманинг бутун текис шакл юзи бўйича йиғиндисини оламиз (169- шакл). Инерция моменти I ҳарфи билан белгиланиб, унғ ёнининг остига ўқ ишораси қўйилади.

Масалан, x ўқиға нисбатан инерция моменти I_x билан, y ўқиға нисбатан инерция моменти эса I_y билан белгиланади. Инерция моменти ибораси ишлатилганда қайси ўққа нисбатан олиниши кўрсатилиши зарур. Таърифға мувофиқ, x ва y ўқларига нисбатан инерция моментлари қуйидагича ёзилади:

$$I_x = \int_F y^2 dF; \quad I_y = \int_F x^2 dF. \quad (56.1)$$

Буралиш назариясини текширганимизда, поляр инерция моментини қуйидагича ифодалаган эдик:

$$I_p = \int_F \rho^2 dF. \quad (56.2)$$

169- шаклдаги $\rho^2 = x^2 + y^2$ нинг қийматини (56.2) га қўйиб, (56.1) кўзда тутилса, текис шаклнинг поляр инерция моменти билан ўзаро тик марказий ўқларға нисбатан олинган инерция моментлари орасидаги муносабатни толамиз:

$$I_p = \int_F (x^2 + y^2) dF = \int_F x^2 dF + \int_F y^2 dF,$$

ёки:

$$I_p = I_x + I_y. \quad (56.3)$$

Булардан ташқари, яна бир янги геометрик тушунча бор бу тушунча марказдан қочувчи инерция моменти дейилади. Унинг таърифи қуйидагича: текис шаклнинг ўзаро тик координата ўқларига нисбатан марказдан қочувчи инерция моменти деб, шаклдан ажратилган ҳамма элементар юзчаларни координата ўқларига бўлган ораликларига кўпайтиришдан ҳосил бўлган кўпайтмаларнинг йиғиндисини айтилади. Марказдан қочувчи инерция моменти I_{xy} билан белгиланади. Таърифға мувофиқ:

$$I_{xy} = \int_F xy dF. \quad (56.4)$$

Инерция моментлари узунликнинг тўртинчи даражасида ўлчаниши уларнинг таъриф ва ифодаларидан кўриниб турибди. Одатда, улар см^4 билан ифодаланади. Поляр инерция моменти ва ўққа нисбатан инерция моментлари ифодасига x ва y координаталарнинг квадратларигина киргани учун улар мусбат сон бўлади. Марказдан қочувчи инерция моменти эса мусбат ҳам, манфий ҳам бўлиши мумкин; чунки унинг ифодасига x ва y координаталар биринчи даражага киради. Марказдан қочувчи инерция моментини ифодаловчи йиғиндининг мусбат ва манфий белгили ҳадлари бир хилда бўлса, у

нолга тенг бўлади. Умуман, ҳар қандай қўринишдаги шакл учун координата ўқларини шундай танлаб олиш мумкинки, у ўқларга нисбатан марказдан қочувчи инерция моменти нолга тенг бўлади.

57-§. Бош инерция ўқлари ҳақидаги тушунчалар

Ҳар бир текис шакл учун ҳеч бўлмаганда бир жуфт шундай координата ўқлари борки, уларга нисбатан мазкур текис шаклнинг марказдан қочувчи инерция моменти нолга тенг бўлади. Бундай ўқлар текис шаклнинг бош инерция ўқлари дейилади.

Координата ўқларини ихтиёрий равишда танлаб, мазкур ўқларга нисбатан марказдан қочувчи инерция моментини ҳисоблаймиз:

$$I_{xy} = \int_F xy dF$$

x ва y координата ўқларининг йўналишини соат стрелкасининг йўналишига тескари томон бирор α бурчакка айлантирамиз (170- шакл). Уларнинг янги йўналишларини x' ва y' орқали белгилаймиз. Ҳар қандай элементар юзача dF нинг янги координата ўқларига нисбатан координаталари олдинги координаталари орқали қуйидагича ифодаланади:

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha.$$

$$y' = y \cos \alpha - x \sin \alpha.$$

Биз текшираётган ҳолда $\alpha = 90^\circ$ бўлса,

$$x' = y \quad y' = -x$$

бўлади.

Координата ўқларининг янги ҳолати учун марказдан қочувчи инерция моменти қуйидагича ёзилади:

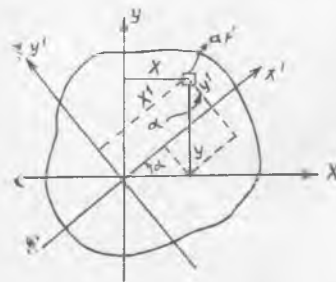
$$I_{x'y'} = \int_F x'y' dF = - \int_F xy dF = -I_{xy}.$$

Демак, координата ўқларининг йўналишини 90° айлантириш билан текис шаклнинг мазкур ўқларга нисбатан марказдан қочувчи инерция моменти нинг белгисини ўзгартдик.

α бурчакка бирданига 90° қиймат берилмасдан, координата ўқларини аста-секин айлантирсак, марказдан қочувчи инерция моменти узлуксиз равишда ўзгариб, α нинг бирор α_1 қийматида ноль бўлиб қолади.

Координата ўқларининг ана шу йўналиши текис шаклнинг бош инерция ўқлари дейилади. Демак, бош инерция ўқларига нисбатан текис шаклнинг марказдан қочувчи инерция моменти нолга тенг бўлар экан. Бош инерция ўқлари текис шаклнинг марказидан ўтса, улар марказий бош инерция ўқлари дейилади. Материаллар қаршилигига онд масалаларда, ҳамма вақт бош инерция ўқлари марказий бўлгани учун, одатда, марказий сўзи ишлатилмайди.

Текис шаклнинг ҳар қандай симметрик ўқи унинг марказий бош инерция ўқларидан бири бўлади. Масалан, 171- шаклда тасвирланган текис шакл учун y ўқи симметрия ўқи бўлсин. У ҳолда, симметрия ўқининг ўнг-томонидан ажратилган ҳар қандай dF элементар юзачага мос бир хил координаталарга эга бўлган юзача унинг чап томонида ҳам бўлади; аммо бу



170- шакл.

юзачанинг координаталаридан биттаси, яъни x манфий ишорали бўлади. Шу муносабат билан симметрия ўқининг ўнг томонидаги $xydF$ ҳадлари мусбат, чап томонидагилари эса манфий ишорали бўлиб, уларнинг умумий йиғиндиси нолга тенг, яъни:

$$\int_F xydF = 0$$

бўлади. Текис шаклнинг иккинчи бош инерция ўқи мазкур симметрия ўқига тик йўналади. Демак, ҳеч бўлмаса битта симметрия ўқи бўлган текис шакл учун бош инерция ўқларини аниқлаш қийин эмас.

Умумий ҳол учун бош инерция ўқларининг йўналишини аниқлаш масалаларини 63- параграфда текшираимиз.

58-§. Текис шаклнинг марказий ўқига параллел ўққа нисбатан инерция моменти

Масалан, текис шаклнинг марказий ўқлари x ва y га нисбатан инерция моментлари I_x , I_y ва марказдан қочувчи инерция моменти I_{xy} маълум бўлсин (172- шакл). x ва y ўқларига параллел ва улардан a ва b масофада бўлган x_1 ва y_1 ўқларни утказиб, бу ўқларга нисбатан шаклнинг инерция моментлари I_{x_1} , I_{y_1} ва $I_{x_1y_1}$ ни аниқлаймиз. Текис шаклнинг бирор dF элементининг олдинги ва янги ўқларга нисбатан координаталари ўзаро қуйидагича боғланган:

$$\begin{aligned}x_1 &= x + a, \\y_1 &= y + b.\end{aligned}$$

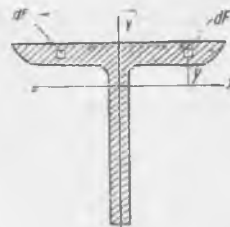
Инерция моментларининг таърифидан фойдаланиб, янги x_1 ва y_1 ўқларга нисбатан уларнинг ифодасини тузамиз:

$$I_{x_1} = \int_F y_1^2 dF = \int_F (y + b)^2 dF = \int_F y^2 dF + 2b \int_F y dF + b^2 \int_F dF;$$

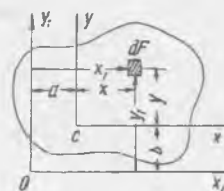
$$I_{y_1} = \int_F x_1^2 dF = \int_F (x + a)^2 dF = \int_F x^2 dF + 2a \int_F x dF + a^2 \int_F dF;$$

$$\begin{aligned}I_{x_1y_1} &= \int_F x_1 y_1 dF = \int_F (x + a)(y + b) dF = \\&= \int_F xy dF + a \int_F y dF + b \int_F x dF + ab \int_F dF.\end{aligned}$$

(55 2) га мувофиқ, $\int_F x dF$ ва $\int_F y dF$ текис шаклнинг x ва y ўқларига нисбатан статик моментларидир. Аммо x ва y ўқлари марказий бўлгани учун, улар нолга тенг. $\int_F dF = F$ бўлиб, у текис шаклнинг бутун юзидир.



171- шакл.



172- шакл.

$\int_F x^2 dF = I_y$; $\int_F y^2 dF = I_x$ эканлиги кўзда тутилса, юқоридаги тенгликлар қуйидагича ёзилади:

$$\left. \begin{aligned} I_{x_1} &= I_x + b^2 F, \\ I_{y_1} &= I_y + a^2 F; \end{aligned} \right\} \quad (58.1)$$

$$I_{x_1 y_1} = I_{xy} + abF. \quad (58.2)$$

Қурамызки, координаталар ўқи марказий ўқдан узоқлаштирилган сари, тегишли инерция моменти ўқлар оралигининг квадрати билан текис шакл юзининг қўпайтмасига ошиб боради. $a^2 F$ ва $b^2 F$ мусбат сон бўлгани учун, ўзаро параллел ўқлар ичида энг кичик инерция моменти берадиган ўқ марказий ўқ бўлади. Марказдан қочувчи инерция моменти координата ўқларининг ўзаро параллел қўчирилиши натижасида албатта ўзгаради. Аммо $abF > 0$ ёки $abF < 0$ бўлиши мумкин. Шунинг учун координата ўқларининг ўзаро параллел қўчирилиши марказий ўқларга нисбатан ҳисобланган марказдан қочувчи инерция моментини ошириши ҳам, камайтириши ҳам мумкин. Координата ўқларидан бири, масалан x ўқи қўчирилиб, y ўқи ўз ўрнида қолдирилса, марказдан қочувчи инерция моменти ўзгармайди, чунки бу ҳолда $a = 0$ бўлади.

59-§. Энг оддий текис шаклларнинг инерция моментлари

1. Даставвал асоси b , баландлиги h бўлган тўғри тўртбурчакликнинг асосидан ўтувчи x ўқига нисбатан инерция моментини ҳисоблаймиз (173-шакл). Бунинг учун x ўқидан y масофада эни b га ва қалинлиги dy га тенг бир элементар юза ажратамиз. Унинг шаклда штрихлаб қўйилган юзи $dF = bdy$ бўлади. Таърифга кўра:

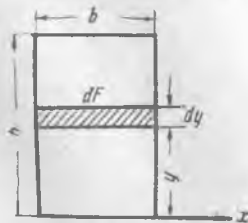
$$I_x = \int_F y^2 dF = \int_F y^2 b dy.$$

Интеграллашда y нинг 0 дан h гача ўзгаришини кўзда тутамиз:

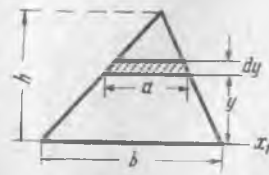
$$I_x = \int_0^h y^2 b dy = \frac{bh^3}{3}. \quad (59.1)$$

Тўғри тўртбурчакнинг асосига параллел ҳолда марказидан ўтувчи x_0 ўқига нисбатан инерция моментини ҳисоблаш учун (58.1) формуладан фойдаланамиз:

$$I_{x_0} = I_x - \left(\frac{h}{2}\right)^2 F = \frac{bh^3}{3} - \left(\frac{h}{2}\right)^2 bh = \frac{bh^3}{12}. \quad (59.2)$$



173- шакл.



174- шакл.

2. Асоси b га ва баландлиги h га тенг учбурчакнинг асосидан ўтувчи ўққа нисбатан инерция моментини ҳисоблаймиз (174- шакл). Учбурчакнинг асосидан y масофада бўлган бирор элементар юза ажратамиз. Бу юза тўғри тўртбурчак деб қаралса, унинг баландлиги dy бўлиб, асоси a ни учбурчакларнинг ўхшашлик шартидан топамиз: $y, a = b \frac{h-y}{h}$ бўлади. Инерция моментининг таърифига мувофиқ:

$$I_{x_1} = \int_0^h y^2 \left(1 - \frac{y}{h}\right) b dy = \frac{bh^3}{12} \quad (59.3)$$

бўлади.

Учбурчакнинг асосига параллел бўлиб, унинг марказидан ўтувчи x ўқи-га нисбатан инерция моментини топиш учун (58.1) формуладан фойдаланамиз:

$$I_x = I_{x_1} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 F = \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36} \quad (59.4)$$

3. Доира юзасининг диаметрал ўққа нисбатан инерция моментини топамиз. Барча диаметрлар доиранинг симметрия ўқлари бўлгани учун улар бош инерция ўқлари бўлади. Доиранинг марказидан ўтувчи ўзаро тик ҳар бир жуфт ўқ учун:

$$I_x = I_y$$

бўлади. Бу ҳолда (56.3) муносабат $I_p = 2I_x$ кўринишда ёзилади.

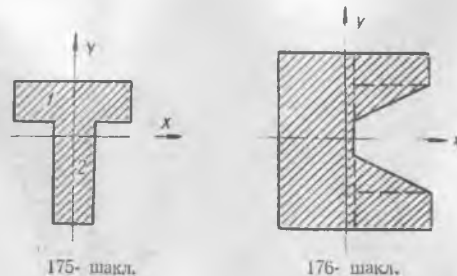
Поляр инерция моменти (I_p) нинг қийматини буралиш назариясида ҳисоблаган эдик, у $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$ эди. Шунинг учун доира юзасининг марказдан ўтувчи ўққа нисбатан инерция моменти қуйидагича бўлади:

$$I_x = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi d^4}{64} \quad (59.5)$$

Металл балкаларнинг кўндаланг кесим юзалари мураккаб геометрик шакллардан иборат бўлади. Бунинг сабабини эгилиш назариясида тушунтирамиз.

60- §. Мураккаб геометрик шаклларнинг инерция моментларини ҳисоблаш

Иншоот элементларининг мустаҳкамлигини текширишда юқорида айтилганидек мураккаб шаклдаги кўндаланг кесимларни учратамиз. Уларнинг инерция моментларини тўғри тўрт бурчакли, уч бурчакли кесим юзаларининг инерция моментларини ҳисоблагандек оддий усулда ҳисоблаб бўлмайди. Масалан, тавр (175- шакл) ёки ундан ҳам мураккаброқ кесимни (176- шакл)



175- шакл.

176- шакл.

олайлик. Буларни инерция моментлари олдиндан маълум бўлган бир нечта оддий шаклларга, масалан, тўғри тўртбурчак, учбурчак ва шунга ўхшаш шаклларга ажратиш мумкин.

177- шаклда келтирилган мураккаб кўринишдаги текис шакл юзасининг x ўқиға нисбатан инерция моментини ҳисоблаймиз. Ўққа нисбатан инерция моментининг таърифига мувофиқ:

$$I_x = \int_F y^2 dF$$

бўлади.

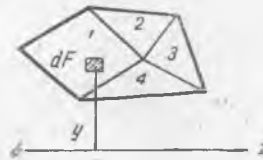
Текширилаётган мураккаб кўринишдаги юзани оддий кўринишдаги F_1, F_2, F_3 ва F_4 юзаларга ажратамиз. Мураккаб шаклнинг инерция моментини ифодаловчи интегрални ҳар қайси қисми бўйича оламиз. Ў ҳолда юқорида ёзилган интеграл қуйидагича ифодаланади:

$$I_x = \int_F y^2 dF = \sum_{i=1}^4 \int_{F_i} y^2 dF = \int_{F_1} y^2 dF + \int_{F_2} y^2 dF + \int_{F_3} y^2 dF + \int_{F_4} y^2 dF.$$

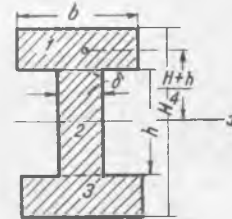
Бу интегралларнинг ҳар қайсиси тегишли қисмнинг x ўқиға нисбатан инерция моментидир; шунинг учун:

$$I_x = I_x^I + I_x^{II} + I_x^{III} + I_x^{IV} \quad (60.1)$$

бўлади; бунда, $I_x^I, I_x^{II}, I_x^{III}$ ва I_x^{IV} тегишлича F_1, F_2, F_3 ва F_4 юзаларнинг x ўқиға нисбатан инерция моментларидир.



177- шакл.



178- шакл.

Демак, мураккаб кўринишдаги текис шаклнинг инерция momenti уни ташкил этувчи қисмлар инерция моментларининг йиғиндисига тенг бўлар экан.

Мисол тарзида 178- шаклда тасвирланган қўш таврли кесимнинг марказидан ўтувчи x ўқиға нисбатан инерция моментини ҳисоблаймиз.

Шаклни уч қисмга ажратиб, уларни I, II, III билан белгилаймиз: II қисмнинг x ўқиға нисбатан инерция momenti (59.2) формулага мувофиқ

$$I_x^{II} = \frac{\delta h^3}{12}$$

бўлади.

I ва III қисмларнинг x ўқиға нисбатан инерция моментлари (58.1) ва (59.2) га мувофиқ:

$$I_x^I = I_x^{III} = \frac{b \left(\frac{H-h}{2} \right)^3}{12} + b \left(\frac{H-h}{2} \right) \left(\frac{H+h}{4} \right)^2$$

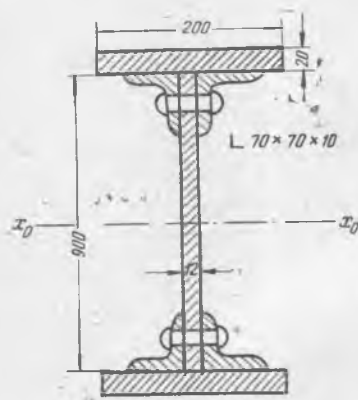
булади. Қўш таврли кесимнинг инерция моменти:

$$I_x = I_x^I + I_x^{II} + I_x^{III} = \frac{\delta h^3}{12} + \frac{b(H^3 - h^3)}{12}$$

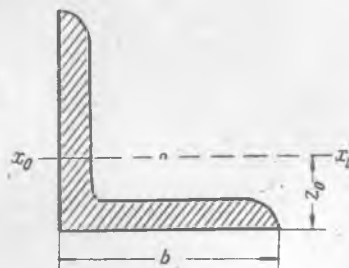
булади.

Металл конструкция элементларининг мураккаб кўндаланг кесимлари, одатда, маълум шакллар учун стандарт ўлчамлар билан берилади. Бундай кесимларнинг ўлчамлари махсус жадвалда берилади; бундай жадвал «Сортамент» дейилади. Сортамент жадваллари инженерлик справочникларида, материаллар қаршилиги курсларида, шунингдек, ушбу китобимизнинг охирида келтирилган. Бу жадвалларда, кўндаланг кесим ўлчамларидан ташқари, уларнинг юзлари, оғирлик марказининг координаталари, кесим юзасининг марказий ўқларга нисбатан инерция моментлари ҳам келтирилади. Бу маълумотлар тегишли ҳисобларни жуда осонлаштиради.

Жуда кўп ишлатиладиган мураккаб кесимларга мисол қилиб бир вертикал ва икки горизонтал тўғри тўртбурчак полосаларнинг бурчакликлар



179- шакл.



180- шакл.

воситаси билан туташтирилиши натижасида ҳосил бўлган қўш таврли балканинг кўндаланг кесимини кўрсатиш мумкин.

Масалан, 179- шаклда худди шундай кесим тасвирланган. Унда кўндаланг кесим бир вертикал тўғри тўрт бурчакли «девор» иккита горизонтал тўғри тўрт бурчакли «токча» ва тўртта бурчакликдан ҳосил бўлган. Бурчакликлар вертикал ва горизонтал листларга бириктирилган. Мазкур кесимнинг марказидан ўтувчи $x-x$ горизонтал ўққа нисбатан инерция моментини топамиз. Вертикал ва горизонтал листларнинг кўндаланг кесим ўлчамлари шаклда кўрсатилган.

$70 \times 70 \times 10$ ишораси ишлатилаётган бурчакликнинг томонлари 70 мм дан бўлиб, қаллиғи 10 мм га тенглигини кўрсатади. Вертикал листнинг инерция моменти (59.2) га мувофиқ:

$$I_x^{(e)} = \frac{1,2 \cdot 90^3}{12} = 2700 \text{ см}^4$$

булади.

Иккита горизонтал листнинг инерция моментлари (58.1) га мувофиқ:

$$I_x^{(2)} = 2 \left(\frac{20 \cdot 2^3}{12} + 20 \cdot 2 \cdot 16^2 \right) = 20500 \text{ см}^4$$

бўлади.

Бурчакликларнинг инерция моменти «ГОСТ» га мувофиқ топилади.

70 × 70 × 10 бурчаклик (180- шакл) учун жадвалдан қуйидагиларни оламиз:

$$\begin{aligned} \text{Юзи} & \dots\dots\dots F = 13,08 \text{ см}^2, \\ \text{Оғирлик марказининг координатаси} & \dots\dots\dots Z_0 = 2,09 \text{ см}, \\ \text{Марказдан ўтувчи ўққа нисбатан инерция моменти} & \dots\dots\dots I_{x0} = 57,3 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Бу маълумотлардан фойдаланиб, бурчакликнинг оғирлик маркази билан x ўқи оралиги (a) ни аниқлаймиз:

$a = 15 - 2,09 = 12,91 \text{ см}$ ўқидан бир хил масофадаги тўртта бурчакликнинг мазкур ўққа нисбатан инерция моментини (58.1) формулага мувофиқ ҳисоблаймиз:

$$I_x^1 = 4 (57,3 + 13,08 \cdot 12,91^2) = 8949 \text{ см}^4.$$

Кесимнинг умумий инерция моменти:

$$I_x = 2700 + 20500 + 8949 = 32149 \text{ см}^4$$

бўлади.

Ана шу схема асосида турли мураккаб кўндаланг кесимларнинг инерция моментларини ҳисоблаш мумкин.

61-§. Марказдан қочувчи инерция моментини ҳисоблаш

Марказдан қочувчи инерция моментини ҳисоблаш учун, таърифга кўра, қуйидаги интегрални ҳисоблаш керак:

$$I_x = \int_F xy dF. \quad (61.1)$$

Масалан, тўғри тўртбурчакнинг томонларидан ўтувчи координата ўқларига нисбатан марказдан қочувчи инерция моментини ҳисоблаш учун, ундан томонлари dx ва dy га тенг бир элементар юза (dF) ажратиш лозим (181- шакл). Интегрални тўғри тўртбурчакнинг бутун юзи бўйича олиш зарур бўлгани учун икки қаррали интегрални татбиқ этиш қулайдир:

$$I_{x,y} = \int_0^b \int_0^h xy dx dy = \int_0^b x dx \int_0^h y dy = \frac{h^2 b^3}{4}. \quad (61.2)$$

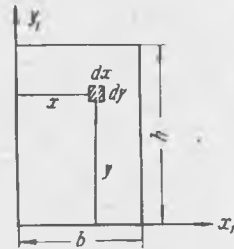
Бу натижани бошқа йўл билан олиш ҳам мумкин эди. Тўғри тўртбурчакнинг симметрия ўқлари марказий бош ўқлар бўлгани учун уларга нисбатан марказдан қочувчи инерция моменти нолга тенг бўлади. Буни кўзда тутиб, (58.2) формуладан (61.2) ни чиқариш мумкин.

(58.2) формуланинг татбиқ этилишини кўрсатиш ниятида яна битта мисол келтирамиз.

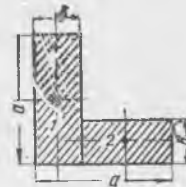
182- шаклда тасвирланган бурчакликнинг ташқи қирғоғидан ўтказилган координата ўқларига нисбатан марказдан қочувчи инерция моментини ҳисоблаймиз. Бурчакликни иккита тўғри тўртбурчакка ажратиб, уларни I ва II билан белгилаймиз. Ҳар қайси тўғри тўртбурчакнинг симметрия

Ҳақлари марказий бош Ҳақ бўлгани учун, (58.2) формула мураккаб шакл учун қуйидагича ёзилади:

$$I_{x_1 y_1} = F_1 a_1 b_1 + F_2 a_2 b_2. \quad (61.3)$$



181- шакл.



182- шакл.

Бу формулани бизнинг масаламиздаги Ҳақламлар учун татбиқ қилсак,

$$I_{x_1 y_1} = \frac{\delta^2 (2a^2 - b^2)}{4}$$

бўлади.

Ана шу схемада ҳар хил шаклдаги юзаларнинг марказдан қочувчи инерция моментларини ҳисоблаш мумкин.

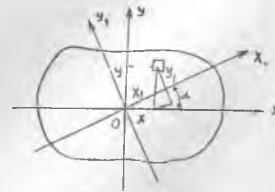
62- §. Координата Ҳақлари айлантирилганда инерция моментларининг Ҳағариши

Текис шакл учун ҳар қанча марказий координата Ҳақлари ўтказиш мумкин. Биз бу параграфда олдиндан танланган марказий Ҳақларга нисбатан ихтиёрий бурчакка айлантирилган янги координаталар системасини оламиз ва текис шаклнинг шу янги система Ҳақларига нисбатан инерция моментларини олдиндан танланган координаталар системасига нисбатан ҳисобланган инерция моментлари орқали ифодалаш масаласини ҳал қиламиз. Текис шаклнинг марказидан ox ва oy координата Ҳақларини ўтказамиз (183-шакл).

Масалан, текис шаклнинг мазкур координата Ҳақларига нисбатан инерция моментлари I_x , I_y , I_{xy} маълум бўлсин. Янги ox_1 ва oy_1 координата Ҳақларини ўтказамиз. Бу Ҳақлар олдинги координаталар системасининг Ҳақлари билан α бурчак ҳосил қилсин. Ана шу янги координаталар системаси ox_1 ва oy_1 га нисбатан текис шаклнинг инерция моментлари I_{x_1} , I_{y_1} ва $I_{x_1 y_1}$ ни ҳисоблаймиз. Бунинг учун олдин текис шаклга тегишли ихтиёрий нуктанинг янги ва олдинги системалардаги координаталарини ифодалаймиз.

Координата системалари айлантирилганда, бир системадан бошқа системага қуйидаги тенгламалар воситаси билан ўтиш аналитик геометриядан маълум:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ y_1 &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha. \end{aligned} \quad (62.1)$$



183- шакл.

Бу тенгликларни қўзда тутиб, текис шаклнинг янги координаталар системасига нисбатан инерция моментларини ҳисоблаймиз:

$$I_{x_1} = \int_F y_1^2 dF; \quad I_{y_1} = \int_F x_1^2 dF; \quad I_{x_1 y_1} = \int_F x_1 y_1 dF; \quad (62.2)$$

x_1 ва y_1 координаталарнинг қийматини (62.1) дан келтириб қўямиз:

$$I_{x_1} = \int_F (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dF = \int_F (y^2 \cos^2 \alpha - 2xy \sin \alpha \cos \alpha + x^2 \sin^2 \alpha) dF$$

ёки

$$I_{x_1} = \cos^2 \alpha \int_F y^2 dF + \sin^2 \alpha \int_F x^2 dF - \sin 2\alpha \int_F xy dF \quad (62.3)$$

Худди шунингдек:

$$I_{y_1} = \int_F (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 dF = \int_F (x^2 \cos^2 \alpha + 2xy \sin \alpha \cos \alpha + y^2 \sin^2 \alpha) dF$$

ёки

$$I_{y_1} = \sin^2 \alpha \int_F y^2 dF + \cos^2 \alpha \int_F x^2 dF + \sin 2\alpha \int_F xy dF. \quad (62.4)$$

(62.3) ва (62.4) ифодалардаги биринчи иккита интеграл текис шаклнинг ox ва oy координата ўқларига нисбатан инерция моментлари бўлгани учун, биз уларни I_x ва I_y билан, охириги интеграл эса шу ўқларга нисбатан марказдан қочувчи инерция моменти бўлгани учун, уни I_{xy} билан алмаштираемиз. У ҳолда:

$$\left. \begin{aligned} I_{x_1} &= I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha \\ I_{y_1} &= I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha \end{aligned} \right\} \quad (62.5)$$

бўлади.

Худди шундай тенгликни янги координаталар системасига нисбатан марказдан қочувчи инерция моменти учун ҳам ёзишимиз мумкин:

$$\begin{aligned} I_{x_1 y_1} &= \int_F x_1 y_1 dF = \int_F (x \cos \alpha + y \sin \alpha)(-x \sin \alpha + y \cos \alpha) dF = \\ &= \sin \alpha \cos \alpha \int_F y^2 dF - \sin \alpha \cos \alpha \int_F x^2 dF + \cos^2 \alpha \int_F xy dF - \sin^2 \alpha \int_F xy dF. \end{aligned}$$

Юқоридаги мулоҳазалар асосида, бу тенгликни қуйидагича ёзамиз:

$$I_{x_1 y_1} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha. \quad (62.6)$$

Текис шаклнинг махсус танланган марказий ўқларга нисбатан инерция моментлари маълум бўлса, бошқа ҳар қандай марказий ўқларга нисбатан инерция моментларини (62.5) ва (62.6) дан аниқлаш мумкин.

(62.5) тенгликларни косинус ва синусларнинг квадратлари орқали ифодаласдан, қўш бурчакнинг функциялари орқали ифодалаш қулай. Шунинг учун қуйидаги тригонометрик муносабатлардан фойдаланамиз:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}; \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

Бу муносабатларни (62.5) даги косинус ва синус квадратларининг ўрнига қўямиз. У ҳолда янги координаталар системаси учун инерция моментлари қуйидагича ёзилади:

$$\left. \begin{aligned} I_{x_1} &= \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\alpha - I_{xy} \sin 2\alpha, \\ I_{y_1} &= \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\alpha + I_{xy} \sin 2\alpha, \\ I_{x_1 y_1} &= \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha \end{aligned} \right\} \quad (62.7)$$

Бу тенгликлардан биринчи икkitасини қўшиб, (56.3) ни кўзда тутсак:

$$I_{x_1} + I_{y_1} = I_x + I_y = I_p \quad (62.8)$$

келиб чиқади. Демак, ўзаро тик ўқларга нисбатан инерция моментларининг йиғиндиси ўзгармас миқдор бўлиб, текис шаклнинг поляр инерция моментига тенгдир.

63-§. Бош инерция ўқларининг йўналишини ва бош инерция моментларини аниқлаш

Бош инерция ўқларининг таърифига кўра, бош инерция ўқларига нисбатан марказдан қочувчи инерция моменти нолга тенг бўлиши керак.

Текис шаклнинг бош инерция ўқларига нисбатан инерция моментлари бош инерция моментлари дейилади.

Бош инерция ўқларини OU ва OV билан белгилаймиз (184-шакл). У ҳолда, таърифга кўра:

$$I_{uv} = 0 \quad (63.1)$$

бўлади.

Мазкур OU ва OV бош инерция ўқлари OX ва OY ўқларга қандай α_0 бурчак остида қия эканлигини топамиз. Бунинг учун OX_1 ва OY_1 координаталар системасига нисбатан аниқланган $I_{x_1 y_1}$ ни ифодаловчи (62.7) даги учинчи тенгликка α нинг ўрнига α_0 ни қўйсак, OX_1 ва OY_1 ўқлар OU ва OV га мос келади, яъни:

$$(I_{x_1 y_1})_{\alpha=\alpha_0} = I_{uv} = 0,$$

ёки

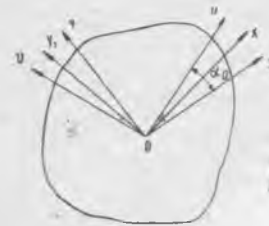
$$I_{uv} = -\frac{I_y - I_x}{2} \sin 2\alpha_0 + I_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0$$

бўлади; бундан:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} \quad (63.2)$$

келиб чиқади.

Бу тенгламани $2\alpha_0$ нинг 180° фарқ қиладиган иккита қиймати ёки α_0 нинг 90° фарқ қиладиган иккита қиймати қаноатлантиради. Шундай қилиб, (63.1) шартни қаноатлантирувчи ўзаро тик иккита йўналишни аниқлайдиган тенглама ҳосил бўлади.



184-шакл.

Бош инерция моментлари I_u ва I_v ни топиш учун (62.7) даги 1 ва 2-тенгликларда α нинг ўрнига α_0 нинг қийматини (63.2) дан аниқлаб қўямиз.

Худди шунга ўхшаш тенгламани текис кучланиш ҳолатида бош юзаларнинг йўналишини аниқлаш учун чиқарган эдик. Худди ўша тартибда, бу тенгламадан $\sin 2\alpha_0$ билан $\cos 2\alpha_0$ ни аниқлаймиз:

$$\sin 2\alpha_0 = \frac{2I_{xy}}{R}, \quad \cos 2\alpha_0 = \frac{I_y - I_x}{R},$$

бунда:

$$R = \sqrt{(I_y - I_x)^2 + 4I_{xy}^2}.$$

Буларни юқорида айtilган (62.7) нинг 1 ва 2-тенгликлариغا олиб бориб қўйсак, I_u ва I_v учун қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$(I_{x_1})_{\alpha=\alpha_0} = I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\alpha_0 - I_{xy} \sin 2\alpha_0.$$

$$(I_{y_1})_{\alpha=\alpha_0} = I_v = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\alpha_0 + I_{xy} \sin 2\alpha_0$$

ёки

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{(I_y - I_x)^2 + 4I_{xy}^2}{2R} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{R}{2},$$

$$I_v = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{(I_y - I_x)^2 + 4I_{xy}^2}{2R} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{R}{2}.$$

Бу иккала тенгликни қўшиб ёзишимиз мумкин:

$$I_{u,v} = \frac{1}{2} \left\{ (I_x - I_y) \pm \sqrt{(I_y - I_x)^2 + 4I_{xy}^2} \right\}. \quad (63.3)$$

Бу тенглик (+) белги билан олганда максимал, (—) белги билан олганда минимал бош инерция моментини ифодалайди. Марказий бош инерция ўқларига нисбатан олинган бош инерция моментлари марказий ўқларга нисбатан олинган инерция моментларидан энг каттаси ва энг кичиги эканини кўрсатамиз. x_1 марказий ўққа нисбатан ҳисобланган инерция моменти α нинг қандай қийматида максимум ёки минимумга эришишини топиш учун (62.7) нинг биринчи тенглигидан ҳосила олиб, уни нолга тенглаштирамиз:

$$\frac{dI_{x_1}}{d\alpha} = -(I_x - I_y) \sin 2\alpha - 2I_{xy} \cos 2\alpha = 0;$$

бундан:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} = \operatorname{tg} 2\alpha_0. \quad (63.4)$$

Бу тенглик (63.2) тенгликка мос келади. Демак, максимал ёки минимал инерция моментини берадиган ўқлар бош инерция ўқлари экан. Бу хулосага кўра, (63.3) тенгликни қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$I_{\max}^{\min} = \frac{1}{2} \left\{ (I_y + I_x) \pm \sqrt{(I_y - I_x)^2 + 4I_{xy}^2} \right\}. \quad (63.5)$$

Асосий марказий ўқлар учун, ўзаро тик бўлган ихтиёрий марказий ўқлар олинмай, бош инерция ўқлари олинса, (62.5) ва (62.6) тенгликлар бирмунча ихчамлашиб, уларда марказдан қочувчи инерция моменти

бўлмайди. Дарҳақиқат, x ўқини u билан ва y ўқини v билан алмаштириб, x_1 нинг ўрнига x ни, y_1 нинг ўрнига y ни олсак ва бош ўқ u билан x ўқининг тузган бурчагини β десак, I_x , I_y ва I_{xy} учун қуйидагиларни оламиз:

$$\left. \begin{aligned} I_x &= I_u \cos^2 \beta + I_v \sin^2 \beta, \\ I_y &= I_u \sin^2 \beta + I_v \cos^2 \beta, \\ I_{xy} &= \frac{I_u - I_v}{2} \sin^2 \beta \end{aligned} \right\} \quad (63.6)$$

Бу формулаларнинг кўриниши текис кучланиш ҳолатидаги ўзаро тик юзаларда ҳосил бўладиган σ_x , σ_y ва τ_{xy} кучланишларнинг ифодасига ўхшайди. Шунингдек, (63.5) ва (63.2) формулалар ҳам бош кучланишлар билан бош юзаларни ифодаловчи формулаларга ўхшайди. Шунинг учун ҳам бу жойда Мор доирасини тўла татбиқ қилиш мумкин. Нормал кучланишлар ўзаро тик ўқларга нисбатан ҳисобланган инерция моментларига мос келиб, тангенциал кучланишлар эса марказдан қочувчи инерция моментига мос келади.

64-§. Инерция эллипси

Текис шаклнинг инерция моменти ўқ йўналишининг ўзгариши билан ўзгаради. Унинг қандай конун билан ўзгаришини график равишда тасвирлаш учун, янги тушунча киритамиз. Бирор x ўқига нисбатан инерция радиуси деб қуйидаги миқдорни айтамыз:

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{F}}. \quad (64.1)$$

Демак, текис шаклнинг ҳар қандай ўққа нисбатан инерция моментини мазкур ўққа нисбатан ҳисобланган инерция радиуси орқали қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$I_x = Fr_x^2, \quad I_y = Fr_y^2. \quad (64.2)$$

(64.2) ни кўзда тутиб, (63.6) формулаларнинг биринчисини қуйидагича ёзамиз:

$$r_x^2 = r_u^2 \cos^2 \beta + r_v^2 \sin^2 \beta. \quad (64.3)$$

Координаталар бошидан ўқлар бўйича, тегишли ўқларга нисбатан олинган инерция радиусларига тескари пропорционал бўлган ρ_u , ρ_v ва ρ_x кесмаларни қуямиз.

$$\rho_u = \frac{m^2}{r_u}, \quad \rho_v = \frac{m^2}{r_v}, \quad \rho_x = \frac{m^2}{r_x}; \quad (64.4)$$

m — ҳозирча ихтиёрий бўлган бирор кесма узунлиги (64.4) эътиборга олинса, (63.3) тенглама қуйидагича ёзилади:

$$\frac{1}{\rho_x^2} = \frac{\cos^2 \beta}{\rho_u^2} + \frac{\sin^2 \beta}{\rho_v^2}. \quad (64.5)$$

ρ_x кесманинг учини M нуқта десак, унинг координаталари бундай бўлади:

$$u = \rho_x \cos \beta; \quad v = \rho_x \sin \beta.$$

Булардан $\cos \beta$ ва $\sin \beta$ ларни (64.5) га қўйсак, M нуқтанинг u ва v координаталари орасидаги муносабатни топган бўламиз:

$$\frac{u^2}{\rho_u^2} + \frac{v^2}{\rho_v^2} = 1. \quad (64.6)$$

Демак, β бурчакининг ўзгариши натижасида ρ_x кесманинг учи ярим ўқлари ρ_u ва ρ_v кесмаларга тенг бўлган эллипсни чизар экан ρ_x ни аниқлашда m кесманинг узунлигини ихтиёрий танлаган эдик; уни ўзгартириб, бир қанча эллипс олишимиз мумкин. m нинг узунлигини қуйидаги тенгламадан аниқласак, масала жуда қулай ҳолга келади:

$$m^2 = r_u r_v.$$

Бу ҳолда,

$$\rho_u = \frac{m^2}{r_u} = r_v; \quad \rho_v = \frac{m^2}{r_v} = r_u$$

бўлади ва (64.6) эллипс қуйидагича ёзилади:

$$\frac{u^2}{r_v^2} + \frac{v^2}{r_u^2} = 1. \quad (64.7)$$

Демак, эллипснинг ярим ўқлари r_v ва r_u бўлиб, u ўқи бўйича инерция радиуси r_v га тенг, v ўқи бўйича инерция радиуси r_u га тенг. Ана шу r_u ва r_v ярим ўқлар ёрдамида чизилган эллипс инерция эллипси дейилади (185- шакл).

Ҳар қандай текис шакл учун, унинг бош инерция ўқлари асосида инерция эллипси чизилган бўлса, бош инерция ўқиға ихтиёрий β бурчак остида қия бўлган ҳар қандай x ўқиға нисбатан инерция радиусини шу эллипс ёрдамида график усулда топиш мумкин. Бунинг учун инерция эллипсининг шу ўққа параллел бўлган уринмасини ўтказамиз; унинг уриниш нуқтаси D бўлсин (185- шакл). Мазкур D нуқтанинг уринмасини x' деб, инерция эллипси марказидан унга туширилган тик OC кесманинг узунлигини h деймиз. Ана шу кесма $OC = h$ текис шаклнинг x ўқиға нисбатан инерция радиуси эканлигини исботлаймиз, яъни:

$$h^2 = r^2 = r_u^2 \cos^2 \beta + r_v^2 \sin^2 \beta$$

бўлишини кўрсатамиз.

Инерция эллипсининг бу хусусиятини исботлаш учун, D нуқтадан ўтказилган уринма (x') нинг нормал тенгламасини ёзамиз:

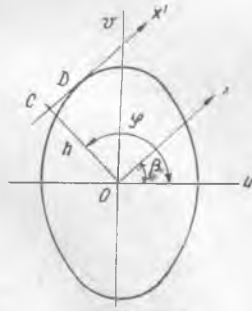
$$u \cos \varphi + v \sin \varphi - \rho = 0.$$

Биз текшираётган ҳолда:

$$\varphi = 90^\circ + \beta; \quad \rho = h,$$

Шунинг учун:

$$-u \sin \beta + v \cos \beta = h \quad (64.8)$$



185- шакл.

Бу чизик $D(u_0, v_0)$ нуқтадан ўтказилган уринма бўлгани учун, унинг тенгламасини эллипснинг тенгламасидан чиқаришимиз ҳам мумкин; у бундай кўринишда ёзилади:

$$\frac{uu_0}{r_v^2} + \frac{v \cdot v_0}{r_u^2} = 1 \quad (64.9)$$

Бу тенгламани юқоридаги тенглама билан солиштириб, қуйидаги муносабатни оламиз (коэффициентларнинг мутаносиблиги):

$$\frac{\frac{u_0}{r_v^2}}{-\sin \beta} = \frac{\frac{v_0}{r_u^2}}{\cos \beta} = \frac{1}{h}. \quad (64.10)$$

Бу тенгламаларни квадратга оширсак:

$$\frac{\frac{u_0^2}{r_v^2}}{r_v^2 \sin^2 \beta} = \frac{\frac{v_0^2}{r_u^2}}{r_u^2 \cos^2 \beta} = \frac{1}{h^2}$$

бўлади. Бундан ҳосилавий пропорция тузамиз:

$$\frac{\frac{u_0^2}{r_v^2} + \frac{v_0^2}{r_u^2}}{r_v^2 \sin^2 \beta + r_u^2 \cos^2 \beta} = \frac{1}{h^2}.$$

u_0 ва v_0 инерция эллипсининг тенгламасини қаноатлантиради, шунинг учун:

$$\frac{u_0^2}{r_v^2} + \frac{v_0^2}{r_u^2} = 1$$

бўлади. Демак:

$$h^2 = r_v^2 \sin^2 \beta + r_u^2 \cos^2 \beta = r_x^2.$$

Бундан ташқари, $CD = c$ кесманинг (185- шакл) Fh га кўпайтмаси текис шаклнинг xu координата ўқларига нисбатан марказдан қочувчи инерция моментини беради (бу ҳолни Л. Д. Проскуряков исботлаган).

Ҳақиқатан ҳам $CD = c$ кесма D нуқтанинг xu координаталар системасига нисбатан абсциссадир; шунинг учун уни u_0 ва v_0 орқали (координаталарни алмаштириш формулаларидан фойдаланиб) қуйидагича ифодалашимиз мумкин:

$$c = x = u_0 \cos \beta + v_0 \sin \beta. \quad (64.11)$$

(64.10) тенгликдан u_0 ва v_0 ни аниқлаймиз:

$$u_0 = -\frac{r_v^2 \sin \beta}{h}, \quad v_0 = \frac{r_u^2 \cos \beta}{h}. \quad (64.12)$$

Буларни (64.11) га қўямиз:

$$\begin{aligned} c &= \frac{r_u^2 \cos \beta \sin \beta - r_v^2 \sin \beta \cos \beta}{h} = \frac{(r_u^2 - r_v^2) \sin 2\beta}{2h} = \frac{(r_u^2 - r_v^2) F \sin 2\beta}{2Fh} = \\ &= \frac{(I_u - I_v) \sin 2\beta}{6Fh}. \end{aligned}$$

Бундан:

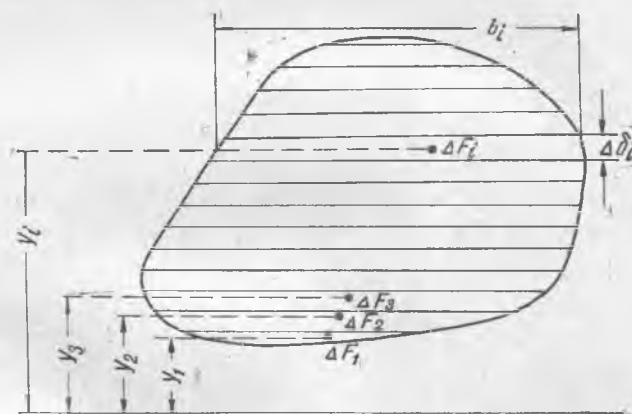
$$Fhc = \frac{I_u - I_v}{2} \sin 2\beta \quad (64.13)$$

келиб чиқади. Бу тенгликнинг ўнг томонини (63.6) нинг учинчи тенгламаси билан солиштириб, қуйидаги хулосани оламиз:

$$I_{xy} = Fhc. \quad (64.14)$$

65-§. Текис юзаларнинг инерция моментларини тақрибий усулда ҳисоблаш

Текис шакл мураккаб эгри чизиқли ёки бошқа мураккаб қисмлардан тузилган бўлса, унинг инерция моментларини юқорида кўрсатилган усуллар билан ҳисоблаш анча қийин бўлади. Бундай ҳолларда инерция моментларини етарли даражада аниқ бўлган тақрибий усуллар билан ҳисоблаш қулайдир. Масалан, 186-шаклда тасвирланган текис шаклнинг инерция



186- шакл.

моментини x ўқига нисбатан ҳисоблаш зарур бўлсин. Текис шаклни x ўқига параллел бўлган бир қанча ингичка полосаларга ажратиб, улардан бирортасининг, масалан, i -сининг узунлигини b_i , энини $\Delta \delta_i$, юзини ΔF_i ва оғирлик марказидан x ўқигача бўлган масофасини y_i билан белгилаймиз. Полосаларнинг эгри чизиқли томонларини тегишли тўғри чизиқлар билан алмаштирсак, тўғри тўрт бурчакли юзачаларни оламиз. Масалан, i -тўғри тўрт бурчакнинг x ўқига нисбатан инерция моменти қуйидагича ёзилади:

$$J_x^{(i)} = \frac{(\Delta \delta_i)^3 b_i}{12} + \Delta F_i y_i^2. \quad (65.1)$$

Барча полосалар учун шу тарздаги ифодаларни тузиб, уларнинг йигиндисини олсак, мураккаб текис шаклнинг x ўқига нисбатан инерция моментини аниқлаган бўламиз:

$$I_x = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{(\Delta \delta_i)^3 b_i}{12} + \Delta F_i y_i^2 \right\}$$

ёки

$$I_x = \sum_{i=1}^n \Delta F_i y_i^2 + \sum_{i=1}^n \frac{(\Delta \delta_i)^3 b_i}{12}. \quad (65.2)$$

Полосаларнинг эни $\Delta\delta_i$ ни нолга интиштириб лимит олсак, иккинчи йиғиндининг ҳадлари учинчи тартибли кичик сон бўлгани учун, лимитда нолга айланади, биринчи йиғинди эса лимитда текис шаклнинг x ўқига нисбатан инерция моментини ифодаловчи интегрални беради, яъни:

$$I_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta F_i Y_i^2 = \int y^2 dF \quad (65.3)$$

бўлади. Шунинг учун текис шаклнинг бирор ўққа нисбатан инерция моментини тақрибий формула (65.2) нинг ўнг томонидаги биринчи қисми билан алмаштириш, яъни:

$$I_x = \sum_{i=1}^n \Delta F_i Y_i^2 \quad (65.4)$$

тарзида ёзиш мумкин. Бу тақрибий формуланинг аниқлик даражасини билиш учун қуйидаги мисолни оламиз.

Радиуси a бўлган ярим доиранинг инерция моментини диаметри орқали ўтувчи ўққа нисбатан аниқ ва тақрибий формулалар билан ҳисоблаб, натижаларини солиштирамиз (187- шакл).

Аниқ формула бўйича ярим доира юзасининг диаметрға нисбатан инерция momenti қуйидагича ифодаланади:

$$I_x = \int_F y^2 dF, \quad dF = \int_F \rho dr d\varphi, \quad y = \rho \sin \varphi.$$



187- шакл.

Булар кўзда тутилса:

$$I_x = \int_0^{\pi} \int_0^a \rho^3 \sin^2 \varphi d\varphi d\rho = \frac{\pi a^4}{8} = 0,39a^4 \text{ см}^4$$

бўлади.

Тақрибий формулани татбиқ қилиш учун ярим доирани вертикал диаметри бўйлаб ўнта полосага ажратамиз. Ҳар бир полосани тўғри тўртбурчак деб қараймиз. У ҳолда полосаларнинг эни $\delta = \frac{a}{10}$ га тенг бўлиб, k -полосанинг узунлиги:

$$b_k = 2a \sin 9k^\circ$$

бўлади ($k = 1, 2, \dots, 10$).

Мазкур k -полосанинг оғирлик марказидан инерция ўқи (x) гача бўлган масофа $y_k = a \cos 9k^\circ$. Булар кўзда тутилса, (65.4) формула биз текшираётган ҳол учун қуйидагича ёзилади:

$$I_x = \sum_{k=1}^{10} \delta b_k y_k^2 = \sum_{k=1}^{10} \frac{a}{10} \cdot 2a \sin 9k^\circ a^3 \cos^2 9k^\circ, \\ k = 10 \text{ бўлганда } \cos 90^\circ = 0$$

бўлгани учун, йиғиндини $k = 1 \dots 9$ гача олиб, $k = 10$ қўшилувчини алоҳида ҳисоблаймиз.

Энг катта полоса (яъни $k = 10$) учун $b = 2a$, $\delta = \frac{a}{10}$, $y = \frac{a}{20}$ бўлади; шунингдек, $k = 1$ бўлган энг кичик полоса учун баландлиги $\delta = \frac{a}{10}$ га,

асоси $a = 2a \sin 9^\circ$ бўлган учбурчакни олиб, унинг учун y ни a деб олишимиз мумкин. Булар кўзда тутилса, юқоридаги йиғинди қуйидагича ёзилади:

$$I_x = \frac{a^4}{10} \sum_{k=2}^9 2 \sin 9k^\circ \cos 9k^\circ + 2a \frac{a}{10} \left(\frac{a}{20}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{a}{10} 2a \sin 9^\circ a^2$$

ёки:

$$I_x = \frac{a^4}{10} \{ 0,157 \cdot 0,99^2 + 0,309 \cdot 0,95^2 + 0,454 \cdot 0,89^2 + 0,59 \cdot 0,81^2 + \\ + 0,71 \cdot 0,71^2 + 0,81 \cdot 0,59^2 + 0,89 \cdot 0,25^2 = 0,99 \cdot 0,857^2 + \frac{1}{200} + \\ + 0,157 \} = 0,3829a^4 \text{ см}^4.$$

Бу натижани олдинги аниқ формулани татбиқ қилиб чиқарилган натижа билан солиштирсак, фарқи % ҳисобида:

$$\frac{0,39a^4 - 0,383a^4}{0,39a^4} \cdot 100\% \cong 1,8\%$$

ни ташкил этади. Қўрамизки, юзани 10 та бўлакка бўлганимизда натижа етарли даражада аниқ чиқаётир.

□

X БОБ

КўНДАЛАНГ ЭГИЛИШ

66-§. Эгилишга оид тушунчалар

Тўғри ўқли призматик стержень, ўкига тик йўналган кучлар ёки стерженнинг геометрик ўқи орқали ўтувчи текисликда ётадиган жуфт кучлар таъсиридан эгилади. Эгилиш деформацияси ўзаро параллел кўндаланг кесимларнинг бир-бирига нисбатан оғиши ва нукталарнинг вертикал қўчиши натижасида тўғри чизикли геометрик ўқнинг эгри чизикқа айланиши билан характерланади. Эгилишга қаршилик кўрсатувчи стерженлар *балка* деб аталади. Эгилувчи балкаларнинг кўндаланг кесимларида ҳосил бўладиган зўриқишларни аниқлаш масаласини ҳам кесиш усули ёрдамида ечамиз.

Эгилиш назариясида балканинг турли кўндаланг кесимларида ҳосил бўладиган зўриқишларни топиш, эгилган ўқнинг шаклини тасвирловчи эгри чизикни аниқлаш масалалари текширилади.

Балкага қўйилган юклар унинг симметрия текислигида ётса, эгилиш ҳам мазкур симметрия текислигида бўлиб, бундай эгилиш, *текис эгилиш* деб аталади. Бу ҳолда эгилган ўқ ўша симметрия текислигида ётадиган текис эгри чизик бўлади. Қўпинча, амалда ишлатиладиган балкалар кўндаланг кесимининг камида битта симметрия ўқи бўлгани учун, текис эгилиш энг кўп учратиладиган ҳолдир. Текис эгилишдаги балкаларнинг мустаҳкамлигини ҳисоблаш ва уларнинг деформацияларини аниқлаш учун, энг аввал, уларга қўйилган барча кучларни аниқлаш лозим. Балкага бевосита қўйилган юклардан ташқари, таянчларнинг реакциялари ҳам балкага таъсир қилувчи ташқи кучлар қаторига киради. Шунинг учун балкаларнинг ҳисобини чиқариш таянчларнинг реакцияларини аниқлашдан бошланади.

67-§. Таянчларнинг хиллари ва реакциялари

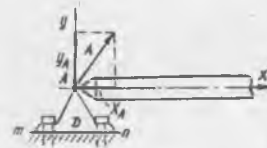
Таянчларнинг хиллари билан таништиришдан олдин, қуйидаги муҳим мулоҳазани эслатиб ўтамиз. Балкаларда ҳосил бўладиган эгилишлар етарли даражада кичик бўлгани учун мувозанат тенгламаларини тузишда, уларни абсолют қаттиқ деб қараш мумкин, яъни балкаларнинг деформацияси уларга қўйилган кучларнинг бир-бирига нисбатан жойлашувига ҳеч қандай таъсир кўрсатмайди, деб фараз қиламиз. Бу фикрнинг қатъийлиги ҳақида тегишли мулоҳазаларни китобнинг биринчи бобида берган эдик.

Энди, таянчларнинг реакцияларини ҳисоблашга ўтамиз. Бунинг учун таянчларнинг тузилиши билан танишиб чиқамиз. Улар қуйидаги уч типдан иборатдир:

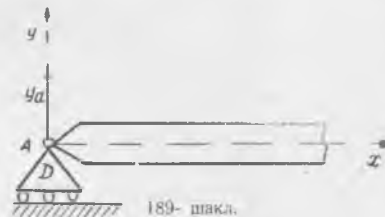
1. Цилиндрик шарнирли қўзғалмас таянч.
2. Цилиндрик шарнирли қўзғалувчи таянч.
3. Қисилиб тиралган таянч.

Цилиндрик шарнирли қўзғалмас таянч

Таянч текислиги $m-n$ га бириктирилган катта таянч ёстиғи (D) га балканинг учи цилиндрик шарнир воситаси билан туташтирилади (188-шакл). Таянч реакцияси (A) шарнир маркази орқали ўтгани учун, қўйилган нуктаси маълумдир. Миқдори ва йўналиши унинг Ox ва Oy ўқлардаги проекциялари X_A ва Y_A орқали аниқланади.



188-шакл.



189-шакл.

Балканинг учи таянчга бу тарзда бириктирилганда, у горизонтал ва вертикал йўналишда кўча олмай, фақат шарнир ўқи атрофида эркин айлана олади.

Цилиндрик шарнирли қўзғалувчи таянч

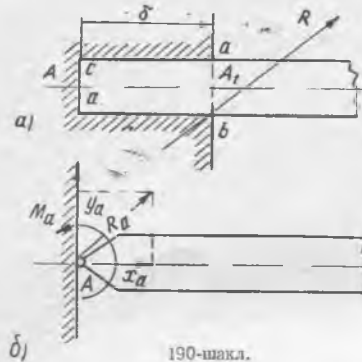
Бу типдаги таянч юқорида айtilган таянчдан шу билан фарқ қиладики, бу таянч ёстиғи (D) цилиндрик ғалтакка ўрнатилиб (189-шакл), бунинг натижасида балканинг учи шарнир ўқи атрофида айланиш имкониятига эга бўлиш билан бирга, таянч текислиги $m-n$ га параллел кўчиш имкониятига ҳам эга бўлади. Ғалтак билан таянч текислиги орасида ҳосил бўладиган ишқаланиш эътиборга олинмаса, таянч горизонтал кўчишга қаршилик кўрсата олмайди, шунинг учун реакциянинг горизонтал тузувчиси $X_A = 0$ бўлади.

Демак, бу ҳолда таянч реакцияси таянч текислигига тик йўналишда бўлиб, унинг миқдоригина номаълумдир.

Қисилиб тиралган таянч

Бундай таянч балканинг қисилган учининг ҳеч қандай кўчишига йўл қўймайди. Бу ҳолда балканинг учидан бир қисми, масалан $AA_1 = \delta$ қисми таянчга бириктирилган ҳолда қисилиб тиралади (190-шакл, а). Балканинг қистирилган қисми ac, cd, db юзаларидаги реактив босимлар қисилган кесим марказига қўйилган бир бош вектор R_A билан балканинг эгилиш текислигида ётувчи бир бош момент M_A га келтирилади.

R_A балканинг маҳкамланган учининг вертикал ва горизонтал йўналишлардаги кўчишига қаршилиқ кўрсатса, M_A балка учининг эркин айланишига қаршилиқ кўрсатади; шунинг учун M_A *реактив момент* деб аталади.



190-шакл.

Қисилиб тиралган таянчни қўзғалмас шарнирли таянч билан алмаштирсак, шарнир ўқи атрофидаги айланишни йўқотиш учун балканинг учига реактив момент қўйишимиз керак (190-шакл, в). Бу реактив момент балкага қўйилган барча кучларнинг шарнир ўқиға нисбатан олинган моментлари йиғиндисига сон жиҳатидан тенг, йўналиши эса тескари бўлиши керак.

Демак, қисилиб тиралган балка учун реакциялар сони учта (X_A , Y_A ва M_A) бўлади.

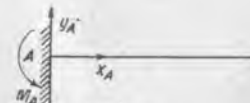
Балка кўрсатилган типдаги таянчлардан бир нечтасига таяниб туриши мумкин. Масалан, 191-шаклда кўрсатилган балканинг чап учи қўзғалмас шарнирли таянчга, ўнг учи эса қўзғалувчи шарнирли таянчга тиралган. Шунингдек, 192-шаклда кўрсатилган балканинг чап учи қисилиб тиралган ҳолда, ўнг учи эркиндир. Бир учи билан қисилиб тиралган ва бошқа учи эркин бўлган балка ва икки таянчли балканинг таянчдан чиқиб турган қисми (BC) (193-шакл) *консол* дейилади. Биз келтирилган бу схемаларда фақат таянчларнинг конструкцияларига оид ва қўйилган юклар таъсиридан ҳосил бўладиган реакцияларнигина тасвирлаб, балкага қўйиладиган юкларни кўрсатмадик. Реакцияларни аниқлаш учун балканинг мувозанатини текшираимиз. Балка қўйилган юклар ва таянч реакциялари таъсирида мувозанатда туради. Бу кучларнинг ҳаммаси бир текисликда ётгани учун, мувозанат тенгламалари учта бўлади. Шунинг учун, статиканинг тенгламаларидан фақат учта номаълум реакцияни аниқлаш мумкин. Таянч реакцияларининг сони учтадан ортиқ бўлмаган балкалар *статик аниқ балкалар* дейилади.

Таянч реакцияларининг сони учтадан ортиқ балкалар статик аниқмас бўлиб, бундай балкаларнинг ҳисобига махсус боб бағишлаймиз.

Балка таянчларининг ҳақиқий тузилиши биз келтирган схемаларга мос келмайди. Шунинг учун балкаларни ҳисоблашдан аввал, уларнинг таянчларининг 191, 192, 193-шаклларда келтирилган схемалардан бирортасига мослаш лозим. Тажрибада фақат катта ораликларга ўрнатиладиган бақувват



191-шакл.



192-шакл.



193-шакл.



194-шакл.

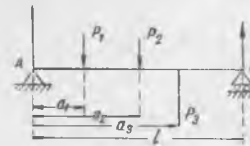
балкалардагина бир учининг қўзғалишига имкон туғдириш учун тегишли тадбирлар кўрилади. Кўпинча, балкаларнинг учи қўзғалмас таянчларга тиралади. Бу тарзда тиралганда балканинг учи таянч маркази атрофида айланмиш имкониятига эга бўлгани учун, у 194-шаклда тасвирланган схемага мос келади.

Бу схемадаги балкага фақат вертикал йўналишдаги кучлар таъсир қилса ҳам, U_A ва U_B реакциялардан ташқари, горизонтал йўналишдаги X_A ва X_B реакциялар ҳам ҳосил бўлади. Бу реакциялар балка эгилганда учларининг яқинлашишига имкон бермай, қўшимча чўзувчи кучланишлар ҳосил қилади. Бу реакцияларни статика тенгламаси $\Sigma X = 0$ дан аниқлаб бўлмайди. Бу тенглама X_A нинг X_B га тенг ва ўзаро қарама-қарши йўналишда эканлигини кўрсатади холос.

Масалага қатъий қаралганда, бу схемадаги балка статик аниқмас ҳолдир. Аммо масалани амалий жиҳатдан осонлаштириш учун горизонтал реакциялар эътиборга олинмайди. Бундай тадбир эгилиши кичик бўлган балкалар учун катта хатоларга олиб бормайди.

68- §. Таянч реакцияларини аниқлаш

Турли юклар таъсиридаги статик аниқ балкалар учун таянч реакцияларини аниқлаш йўлини кўрсатамиз. Икки учи билан қўзғалувчи ва қўзғалмас шарнирли таянчларга тиралган балка тўпланган P_1, P_2, P_3 кучлар таъсирида бўлсин (195-шакл). Мазкур балканинг таянч реакцияларини аниқлаймиз. Балканинг чап таянч реакциясини A ва ўнг таянч реакциясини B ҳарфлари билан белгилаймиз. Балкага қўйилган ҳамма кучларнинг иккала таянч шарнирига нисбатан олинган моментлари йиғиндиларини нолга тенглаштириб, қуйидаги иккита тенгламани ҳосил қиламиз:



195- шакл.

$$\sum_{i=1}^n M_B(P) = +Al - P_1(l - a_1) - P_2(l - a_2) + P_3(l - a_3) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n M_A(P) = -B \cdot l + P_1 a_1 + P_2 a_2 - P_3 a_3 = 0.$$

Балкага қўйилган актив кучлар моментларининг йиғиндиларини тегишлича ΣM_A ва ΣM_B десак, юқоридаги мувозанат тенгламалари қуйидагича ёзилади:

$$Al + \Sigma M_B = 0, \quad -Bl + \Sigma M_A = 0.$$

Бу тенгламалардан:

$$\left. \begin{aligned} A &= -\frac{\Sigma M_B}{l}, \\ B &= \frac{\Sigma M_A}{l}. \end{aligned} \right\} \quad (68.1)$$

Чиқарилган бу формулаларда иккала реакцияни юқорига йўналтириб, бу йўналишни мусбат деб қабул қилдик. (68.1) формулалардан фойдаланиб, тўпланган юклар учунгина эмас, балки ҳар қандай қўринишдаги юклар учун ҳам таянч реакцияларини аниқлашимиз мумкин.

Ёйилган юклар таъсиридаги балкаларнинг таянч реакцияларини аниқлашга ўтамиз. Қўпинча, балкага ёйилган юк қўйилади. Балканинг хусусий оғирлиги ёйилган юк учун мисол бўла олади; балка бўйича тўкилган чочилувчи (қум, тупроқ, шағал каби) юк ҳам ёйилган юкдир. Балка бўйича ёйилган юк тенг тарқалган бўлса, юкнинг умумий оғирлиги (P) ни балка узунлиги (l) га бўлиб, унинг узунлик бирлигидаги қиймати (q) ни аниқлаш мумкин, яъни $q = \frac{P}{l}$; q ёйилган юкнинг интенсивлиги дейилади. У $\frac{\text{кг}}{\text{см}}$ ёки $\frac{\text{т}}{\text{м}}$ ҳисобида ўлчанади (196-шакл).

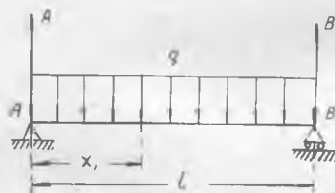
Ёйилган юк тенг тарқалмаган бўлса, унинг интенсивлиги ўзгариш қонуни берилган бўлиши, яъни

$$q = q(x)$$

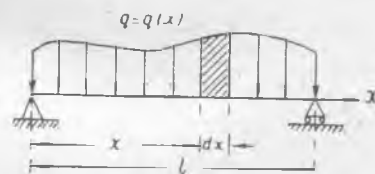
функция олдиндан маълум бўлиши керак (197-шакл). Бу тенглама билан тасвирланган график ёйилган юк эпюраси дейилади. Эпюранинг юзи эса юк юзи дейилади.

Тенг ёйилган юк учун, унинг интенсивлиги балканинг барча нуқталари учун бир хилда бўлиб, юк эпюраси тўғри тўртбурчак шаклида бўлади. Юк эпюраси берилган бўлса, балкага қўйилган юкнинг ҳаммасини ёки бир қисмини топиш мумкин. Масалан, тенг ёйилган юк учун балканинг чап учидан x_1 ораликдаги қисмига таъсир этувчи юкнинг қиймати бўлади

$$P_1 = qx_1$$



196-шакл.



197-шакл.

(196-шакл). Юк тенг тарқалмаган бўлса, ундан оирор dx ораликдаги элементар юза ажратиб, бу юзадаги юкни dP билан белгиласак, у 197-шаклда штрихланган юзага тенг бўлади:

$$dP = qdx.$$

Балка бўйича таъсир қилувчи P юкни аниқлаш учун юқоридаги ифодани интеграллаймиз:

$$P = \int_0^l q(x)dx;$$

$q = q(x)$ берилган бўлса, балкага таъсир этувчи P кучни ҳисоблаш қийин эмас. Ёйилган юк таъсиридаги балканинг таянч реакцияларини топишда ҳам (68.1) формулалардан фойдаланамиз. Бунинг учун ёйилган юкнинг таянч шарнирларига нисбатан моментлари йиғиндисини ҳисоблаш лозим. Тенг тарқалган юк учун бу масала жуда осон ечилади. Ёйилган юк текис тарқалмаган бўлса $\sum M_A$ ёки $\sum M_B$ ни ҳисоблаш учун куч эпюраси юзасидан элементар юза ажратиб (197-шакл), мазкур юза билан ифодаланган куч $dP = qdx$ нинг моментини ҳисоблаш зарур.

Бу кучнинг чап таянч шарнирига нисбатан моменти $xdP = xqdx$ бўлади. Бу тарзда ҳисобланган элементар моментлар йиғиндиси бутун балка бўйича таъсир этувчи ёйилган юкнинг чап таянч шарнирига нисбатан олинган моментига тенг, яъни:

$$\Sigma M_A = \int_0^l q x dx \quad (68.2)$$

бўлади. Бу ифодадан фойдаланиб, (68.1) га мувофиқ ўнг таянч реакциясини аниқлаймиз:

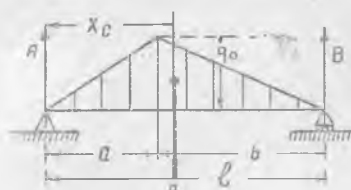
$$B = \frac{\int_0^l q x dx}{l}. \quad (68.3)$$

Чап таянч реакцияси (A) ни балкага таъсир қилувчи кучлар йиғиндиси нолга тенг бўлиши шартидан аниқласа ҳам бўлади: $A + B - P = 0$

$$\text{Бундан: } A = P - B = \int_0^l q(x) dx - \frac{1}{l} \int_0^l q(x) x dx.$$

Ёйилган юк эпюраси оддий геометрик шаклда, масалан, учбурчак ёки тўртбурчак шаклида бўлса, уларнинг юзлари ва оғирлик марказлари жуда осон ҳисобланади. Бундай вақтларда интеграл ҳисобини татбиқ этишнинг ҳолати йўқ. Масалан, ёйилган юк эпюраси учбурчак билан тасвирланган ҳолда учлари билан шарнирли таянчларга тиралган балканинг таянч реакцияларини ҳисоблаймиз (198-шакл). Ёйилган юкнинг энг катта интенсивлиги балканинг чап учидан a масофада бўлиб, қиймати q_0 га тенг.

Ёйилган юкнинг тенг таъсир қилувчиси $P = \frac{q_0 l}{2}$ бўлади.



198-шакл.

Бу куч қўйилган нукта учбурчак юзининг оғирлик маркази бўлгани учун, уни қуйидаги формуладан топамиз:

$$x_c = \frac{S_y}{F}.$$

S_y — учбурчак юзининг y ўқига нисбатан статик моменти, F — учбурчакнинг юзи. S_y ни ҳисоблаш учун учбурчакни асослари a ва b , баландлиги q_0 бўлган иккита учбурчакка ажратамиз, у ҳолда:

$$S_y = \frac{q_0 a}{2} \cdot \frac{2}{3} a + \frac{q_0 b}{2} \cdot \left(a + \frac{b}{3}\right) = \frac{q_0 l(l+a)}{6}; \quad F = \frac{q_0 l}{2}.$$

Шунинг учун:

$$x_c = \frac{S_y}{F} = \frac{l+a}{3}.$$

P кучнинг қўйилган нуктаси маълум бўлгани учун ΣM_B ёки ΣM_A ни аниқлаш қийин эмас:

$$\Sigma M_A = P x_c = \frac{q_0 l}{2} \cdot \frac{l+a}{3} = \frac{q_0 l}{6} (l+a),$$

$$B = \frac{\Sigma M_A}{l} = \frac{q_0 l(l+a)}{6}.$$

Чап реакция $A + B = P$ тенгламадан аникланади, у:

$$A = \frac{q_0(2l - a)}{6} = \frac{q_0(l + b)}{6}$$

булади

69-§. Балкаларда ҳосил бўладиган кучланишларнинг характери. Эгувчи момент ва кўндаланг куч

Таянч конструкциясини танлаш ва таянч реакцияларини ҳисоблаш билан балкага қўйилган ташқи юкларни аниқлаш яқунланади.

Энди, балканинг турли кесимларида ҳосил бўладиган кучланишларни аниқлаш масаласига ўтамиз.

Бунинг учун икки учи билан шарнирли таянчларга тиралган ва P_1 ҳамда P_2 кучлар таъсирида бўлган балкани оламиз (199-шакл).

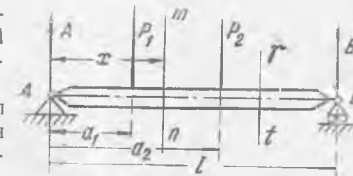
Таянч реакциялари A ва B (68.1) дан аникланади. Демак, биз текшираётган балка қўйилган P_1 ва P_2 юклар, A ва B таянч реакциялари таъсирида мувозанатда туради.

Балканинг турли кесимларида ҳосил бўладиган кучланишларни ҳисоблашдан олдин, унинг кўндаланг кесимларида ҳосил бўладиган зўриқишларни аниқлаймиз. Бунинг учун балканинг чап таянчидан x масофадаги mn кесимни оламиз (199-шакл). Мазкур mn кесимдаги зўриқишларни ҳисоблаш учун, балканинг бир қисмини (масалан, ўнг қисмини) ташлаб, қолган чап қисмининг мувозанатда бўлиши учун кесим юзаси бўйича ташлаб юборилган қисмининг таъсирини алмаштирувчи зўриқишларни қўямиз.

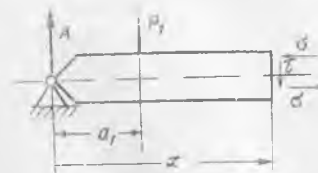
Кўндаланг кесимнинг ҳар бир нуқтасига, умумий ҳолда, нормал кучланиш (σ) ва уринма кучланиш (τ) таъсир қилади (200-шакл.) Кесим бўйича ёйилган бу кучланишлар балканинг текширилаётган қисмига қўйилган ташқи кучлар (A ва P_1) билан мувозанатлашади. Демак, ташқи A ва P_1 кучлар билан кесим бўйича ёйилган кучланишлар ўзаро мувозанатлашган фазовий кучлар системасини ташкил қилади.

Мазкур кучлар системаси учун тузилган олти та статика тенгласидан σ ва τ кучланишларни аниқлаш мумкин. Аммо турли кўндаланг кесимлар учун, яъни x нинг ҳар хил қийматлари учун бу тарздаги мувозанат тенгламаларини такрорлашга тўғри келади. Чунки, текширилаётган қисмга қўйилган ташқи кучлар, умуман, турли кесимлар учун турлича бўлади. Масалан, n кесимни олсак, унинг чап қисмига A реакциядан ташқари, P_1 ва P_2 кучлар таъсир қилади (199-шакл).

Ҳар бир кўндаланг кесим учун σ ва τ кучланишларни статика тенгламаларидан аниқлаш жуда ноқулайдир. Балканинг ҳар қандай кўндаланг кесимида ҳосил бўладиган σ ва τ кучланишлар аниқланадиган умумий формулаларни чиқариш учун, текширилаётган қисмга таъсир этувчи ташқи кучларни маълум бир стандарт кўринишга келтириш лозим. Энг қу-



199-шакл.



200-шакл.

лайи, текшириладиган қисмга қўйилган кучларни уларга статик эквивалент бўлган бир бош вектор ва бир бош момент билан алмаштиришдир. Бунинг учун текшириладиган қисмга таъсир қилувчи кучларни маълум бир нуқтага келтириш лозим. Келтириш марказини кесилган кўндаланг кесим марказида олиш қулайдир. Биз текшириладиган ҳолда кучлар параллел ва бир текисликда ётувчи бўлгани учун, уларни келтириш марказига кўчирганимизда, куч текислигида ётувчи бир жуфт куч билан вертикал йўналишдаги бир кучни оламиз. Масалан, A реакция билан P_1 юъни кўндаланг кесимнинг маркази (O) га келтириш учун, мазкур O нуқтага ноль системалар ($A' A''$) ва ($P_1' P_1''$) ни қўямиз, уларни тегишлича $A' = A'' = A$ ва $P_1' = P_1'' = P_1$ қилиб танлаймиз. У ҳолда AA' ва P_1P_1' жуфт ҳосил бўлиб, улар моментларининг йиғиндисини M десак,

$$M = Ax - P_1(x - a_1)$$

бўлади.

O нуқтадаги кучларнинг йиғиндисини Q десак, $Q = A - P_1$ бўлади. Шундай қилиб, балканинг қирқилган кесимдан чап қисмига қўйилган A ва P_1 кучларнинг ўрнига, қирқилган кесимнинг марказига қўйилган Q куч билан momenti M га тенг бўлган жуфт кучни олдик.

Балканинг текшириладиган кесимига қўйилган жуфт куч танланган кесимдаги *эгувчи момент* деб аталади. Эгувчи момент балканинг текшириладиган кесимидач бир томондаги қисмига қўйилган ташқи кучларнинг мазкур кесим марказига нисбатан олинган моментларининг йиғиндисига тенг.

Q куч балканинг текшириладиган қисмини ташлаб юборилган кесимига нисбатан силжитишга интилгани учун, у мазкур кесимдаги *кўндаланг ёки кесиб ётувчи* куч деб аталади.

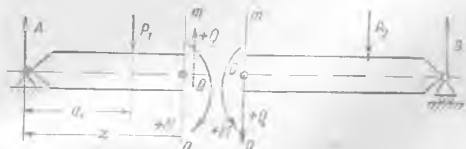
Кўндаланг Q куч балканинг текшириладиган қисмига қўйилган барча ташқи кучларнинг балка ўқига тик йўналишдаги ўқда туширилган проекцияларининг йиғиндисига тенг.

Кўрамизки, Q ва M бирликда балканинг текшириладиган қисмига қўйилган кучлар системасини алмаштириш билан бирга, ташлаб юборилган қисм томонидан қирқилган кесим бўйича кўрсатиладиган таъсир билан мувозанатлашади.

Келтирилган мисолда эгувчи момент (M) билан кесиб ётувчи куч (Q) ни балканинг чап қисми учун ҳисобладик. Аммо, баъзан балканинг ўнг қисмини ташлаб юбориб чап қисмини текшириш қулайроқ бўлади.

Балканинг чап ва ўнг қисмлари учун M ва Q лар орасидаги муносабатни текширамиз. 201-шаклда:

балканинг mn кесимдан чап томондаги қисмига A ва P_1 ташқи кучлар қўйилган бўлиб, ўнг қисмига эса P_2 ва B кучлар қўйилган. Балка бутунлай мувозанатда бўлгани учун A ва P_1 кучлар системаси P_2 ва B кучлар системаси билан мувозанатлашади. A, P_1 кучлар системаси қирқилган кесимнинг маркази (O) га қўйилиб, юқорига қараб йўналган Q куч ва соат стрелкаси айланадиган томонга қараб йўналган M жуфт куч билан алмаштирилган. Шунинг учун балканинг ўнг қисмига қўйилган P_2 ва B кучлар системаси қирқилган кесимнинг марказига келтирилганда, O нуқтага қўйилиб, пастга қараб йўналган Q куч билан соат стрелкаси айланадиган томонга тескари йўналишдаги M моментга тенг жуфт кучга эквивалент

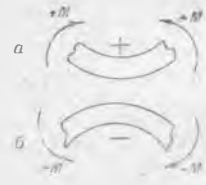


201-шакл.

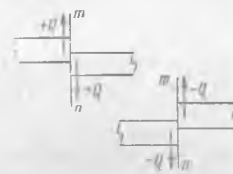
бўлади (201-шакл.) Демак, балканинг ўнг қисми текширилса, M ва Q учун чап қисми текширилганда олинган миқдорларни олампиз; ўнг қисми учун бу миқдорларнинг ишораси тескари бўлади.

Эгувчи момент билан кесиб ўтувчи куч ифодаси балканинг чап ва ўнг қисмларини танлашдан қатъи назар бир хилда қийматга эга бўлиши билан бирга, ишораси ҳам бир хилда бўлсин учун қуйидаги қондани қабул қилампиз:

Балканинг чап томони учун эгувчи момент (M) соат стрелкаси айланиган томон йўналиб, кесиб ўтувчи Q куч юқорига йўналган, ўнг қисми учун эса M соат стрелкаси айланишига тескари йўналиб, Q пастга қараб йўналган бўлса, бу миқдорлар мусбат ҳисобланади. Бу қондага мувофиқ M ва Q нинг йўналиши 201-шаклда тасвирланган. Ишоралар бу тарзда танланса, балканинг ўнг ёки чап қисмини текширишдан қатъи назар M ва Q учун бир хилда қийматлар олампиз. M ва Q нинг ишорасини балканинг ташки юклар таъсиридан оладиган деформацияси билан боғлаш ҳам мумкин. Бал-



202-шакл.



203-шакл.

канинг m кесимида эгувчи момент мусбат бўлса, балка бу кесимда юқорига қараб эгилади, яъни эгилган ўқининг ботиғи бу нуқтада юқорига қараган бўлади (202-шакл, а) агар эгувчи момент манфий бўлса, эгилган ўқининг ботиғи пастга қараган бўлади (202-шакл, б).

Бирор қундаланг кесимда M нолга айланса, эгилган ўқининг бу нуқтадаги эгирилиги ўз йўналишини ўзгартиради, яъни бу кесимда балка ўқининг бурилиш нуқтаси бўлади.

203-шаклда мусбат ва манфий қундаланг кучлар таъсиридан ҳосил бўладиган деформациялар тасвирланган.

Энди, σ ва τ кучланишларни M ва Q орқали ифодалаш масаласига ўтишмпиз мумкин. Кесилган қундаланг кесим бўйича ташлаб юборилган қисмининг таъсирини алмаштирувчи σ ва τ кучланишлар M ва Q кучлар системасини мувозанатлаштириши керак. Нормал кучланишларнинг кесим бўйича кўрсатдиган таъсири Q ни мувозанатлай олмайди, чунки улар Q га тик йўналган. Аммо нормал кучланишлар жуфт куч ҳосил қилиб, эгувчи момент (M) ни мувозанатлаши мумкин, чунки бу кучланишлар эгувчи момент ётган симметрия текислигига параллелдир. Демак, нормал кучланиш (σ) фақат эгувчи моментга боғлиқ бўлади. Шуниси ҳам борки, тангенциал кучланиш (τ) қундаланг кесим юзасида ётиши муносабати билан, унга тик текисликда ётувчи жуфт куч M ни мувозанатлай олмайди.

Q куч қундаланг кесим юзасида ётгани учун уни тангенциал кучланишлар мувозанатлаши мумкин.

Бинобарин, бундай хулосага келампиз: кесим юзаси бўйича таъсир қилаётган тангенциал кучланишлар йиғиндиси фақат Q куч билан мувозанатлашиб, у сон жиҳатидан Q га тенг, йўналиши эса қарама-қарши бўлади.

Демак:

$$\sigma = \sigma(M). \quad (69.1)$$

$$\tau = \tau(Q). \quad (69.2)$$

Бу формулаларни бирорта кесим учун чиқарсак, улар қолган барча кесимлар учун ҳам ярайди, фақат турли кесимлар учун M ва Q нинг қийматиниғина аниқлаш зарур, ҳолос

M ва Q қанча катта бўлса, σ ва τ кучланишлар ҳам шунча катта бўлади. Балканинг мустаҳкамлигини текшириш учун бу кучланишларнинг энг катта қийматларини аниқлашимиз лозим. Албатта, қайси кесимда M ва Q энг катта қийматга эришса, шу кесимда σ ва τ кучланишлар ҳам энг катта қийматларга эришади. M ва Q максимал қийматларга эришган кесим *хавфли кесим* дейилади. Хавфли кесимларни излашда балканинг ўқи бўйлаб M ва Q нинг ўзгаришини тасвирловчи график катта ёрдам беради.

Балканинг ўқи бўйлаб эгувчи момент (M) ва кўндаланг куч (Q) нинг ўзгаришини тасвирловчи график, тегишлича, эгувчи момент ва кўндаланг куч *эпюраси* деб аталади. M ва Q балканинг турли кесимларида ҳар хил қийматларга эга бўлгани учун, улар x нинг функциялари, яъни:

$$M = M(x), \quad (69.3)$$

$$Q = Q(x) \quad (69.4)$$

бўлади. M ва Q эпюраларини чизиш учун, балканинг ўқига параллел қилиб абсцисса ўқи ўтказилади. Ордината ўқи бўйлаб маълум масштабда ҳар қайси кесимдаги M ва Q нинг қийматлари мазкур кесим остига қўйилади. Агар M ва Q ни x нинг функциялари тарзида балканинг маълум участкалари учун ифодаласак, яъни (69.3) ва (69.4) функциялар маълум бўлса, эгувчи момент ва кесиб ўтувчи куч эпюрасини чизиш жуда осонлашади.

70-§. Эгувчи момент ва кўндаланг кучлар эпюрасини аналитик равишда тузиш

Юқоридаги мулоҳазаларга суяниб, бир неча хараактерли ҳоллар учун эгувчи момент ва кўндаланг кучлар эпюраларини тузамиз.

59-масала. Чап учидан a масофада бўлган P куч таъсиридаги балка учун кўндаланг куч ва эгувчи момент эпюралари чизилсин (204-шакл).

Балканинг бирор кесимда ҳосил бўладиган Q ва M ларни ҳисоблашдан олдин, таянч реакцияларини ҳисоблаш керак. Бунинг учун (68.1) тенгламани татибқ этиб, A ва B реакцияларни ҳисоблаймиз:

$$A = \frac{\Sigma M_B}{l} = \frac{Pb}{l}; \quad B = \frac{\Sigma M_A}{l} = \frac{Pa}{l}.$$

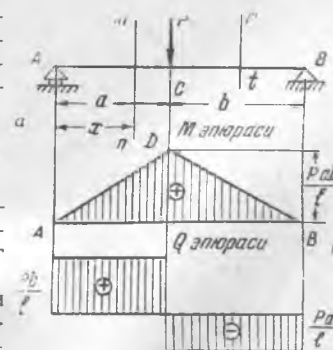
Балкага қўйилган куч ва таянч реакцияларининг алгебраик йиғиндиси нолга тенгличидан A ва B реакцияларнинг тўғри аниқланганлигига ишонамиз.

Кўндаланг куч (Q) билан эгувчи момент (M) нинг маълум кесимдаги ифодаларини тузиш учун балканинг чап учидан x масофадаги бирор кесимни оламиз. Бу кесимдаги кесиб ўтувчи кучни балканинг чап қисми учун ҳисоблаш қулай, чунки чап қисмида фақат таянч реакцияси (A) қўйилган, холос.

Текширилаётган чап қисмга қўйилган кучларни балканинг ўқига тик йўналишдаги ўққа проекциялаб, mn кесимдаги кесиб ўтувчи куч (Q_1) нинг ифодасини тузган бўламиз. У:

$$Q_1 = A = \frac{Pb}{l} \quad (1)$$

бўлади.



204-шакл.

Курамизки, чап таянчдан x масофадаги кўндаланг кесимда ҳосил бўладиган кесиб ўтувчи куч (Q_1) абсцисса (x) га боғлиқ бўлмайди, яъни $0 \leq x \leq a$ бўлганда Q_1 нинг қиймати ўзгармайди. Шунинг учун бу ораликда Q нинг эпюраси абсцисса ўқига параллел бўлган тўғри чизик билан тасвирланади. Q учун тузилган ифода балканинг C кесимида, яъни x нинг қиймати a дан ошмагунча ($0 \leq x \leq a$) тўғридир. $x > a$ бўлса, балканинг чап қисмига иккита куч, яъни A ва P кучлар қўйилган бўлади. Бунинг натижасида чап қисмга қўйилган кучлар проекцияларининг йиғиндиси ҳам ўзгаради. Иккинчи участка учун кўндаланг куч ифодасини қайтадан тузиш лозим. Балканинг CB участкасидан бирорта rt кесимни оламиз. Бу кесим балканинг чап учидан x_2 масофада бўлсин. Балканинг чап қисми учун:

$$Q_2 = A - P < 0 \quad (2)$$

бўлади. Ўнг қисмини текширсак, унинг учун:

$$Q_2 = -B \quad (2')$$

бўлар эди. Ишорасининг манфий олинishiга сабаб, ўнг қисмга қўйилган кучнинг юқорига қараб йўналганидир. Дарҳақиқат, бу кучнинг манфий эканлиги (2) дан кўриниб турибди. (2) ёки (2') тенгликлар фақат CB участка учунгина, яъни $a \leq x_2 \leq l$ оралиқдагина кесиб ўтувчи кучни ифодалайди. Q_2 нинг ҳам x_2 абсциссага боғлиқ эмаслиги (2) дан кўриниб турибди. Иккинчи участка учун ҳам кесиб ўтувчи куч эпюраси абсцисса ўқига параллел бўлган тўғри чизик билан тасвирланади (204-шакл, б).

Кесиб ўтувчи куч эпюраси C кесимда узилади.

C кесимнинг бевосита чап томонида:

$$Q_1 = \frac{Pb}{l},$$

ўнг томонида эса:

$$Q_2 = -\frac{Pa}{l}$$

бўлади. Узилишнинг абсолют қиймати шу кесимга қўйилган P кучга тенгдир. Бу тарздаги узилишнинг ҳосил бўлишига сабаб шуки, кичик участкага таъсир этувчи ёйилган P юқни бир нуқтага қўйилган тўпланма куч билан алмаштирдик. P кучни кичик участкада ёйилган деб қарасак, кесиб ўтувчи куч узлуксиз равишда $+\frac{Pb}{l}$ дан $-\frac{Pa}{l}$ га ўзгариб (205-шакл), тегишли эпюра 1—2 қия чизик билан тасвирланади. Бу ҳолда энг катта кесиб ўтувчи кучнинг абсолют қиймати:

$$Q_{\max} = \frac{Pb}{l}$$

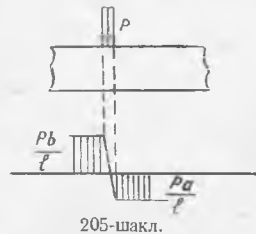
бўлади ($a < b$ бўлган ҳолда).

Шунинг учун AC участкадаги барча кесимлар тангенциал кучланишга нисбатан бир хилда хавфлидир.

Эгувчи момент эпюрасини тузиш учун ҳалиги биринчи участкадаги mn ва иккинчи участкадаги rt кесимларидан фойдаланамиз.

Балканинг mn кесимдан чап томонидаги кесимга фақат A реакция кучи таъсир қилгани учун, мазкур кесимдаги эгувчи момент:

$$M_1 = Ax = \frac{Pb}{l} x_1 \quad (3)$$



бўлади. C нуқтанинг чап томонида эгувчи момент x_1 нинг биринчи даражали функцияси тарзида ўзгаради. Демак балканинг AC участкасида эгувчи момент эпюраси тўғри чизиқ билан тасвирланади (3) тенглама $0 < x < a$ ораликдагина эгувчи моментни ифодалайди, x нинг қиймати a дан ошуви биланоқ, кесимнинг чап томонидаги кучлар таркибига P куч ҳам кириб, оқибатда, эгувчи моментнинг ифодаси ўзгаради. Шунинг учун (3) тенглама тўпланган куч қўйилган кесимнинг ўнг томонидаги моментни ифодалай олмайди. Ўнг томон учун эгувчи момент ифодасини янгидан тузиш лозим. P юк қўйилган кесимнинг ўнг томонидаги бирор rl кесимда ҳосил бўладиган эгувчи момент:

$$M_2 = Ax_2 - P(x_2 - a) \quad (4)$$

бўлади. Бунда аргумент $a < x_2 < l$ ораликда ўзгаради. M_2 ифодасини rl кесимнинг ўнг томони учун тузса ҳам бўлади. Ҳатто ўнг томонда момент ифодаси анчагина ихчам бўлади. Чунки у томонда фақат биттагина B кучнинг моментини олишга тўғри келади. Умуман, текширилаётган кесимнинг қайси томонида кучлар сони кам бўлса, шу томондаги кучлар учун эгувчи момент ифодаси ихчам бўлади.

Энди, (3) ва (4) тенгламалардан фойдаланиб, эгувчи момент эпюрасини чизамиз. Унинг учун балка ўқига параллел ўқ ўтказиб, координаталар бошини A учининг остида олиб, ордината ўқини юқорига қараб йўналтирамиз. (3) ва (4) тенгламалар тўғри чизиқнинг тенгламалари бўлгани учун, уларнинг графигини чизишда ҳар қайси тўғри чизиқ учун унинг иккита нуқтасининг ҳолатини билиш kifоядир. (3) тенглама учун $x = 0$ бўлганда,

$$M_1 = 0; \quad x = a \text{ бўлганда, } M = \frac{Pab}{l} \text{ бўлади. Бу кейинги ифода куч қўйилган } C \text{ кесимдаги эгувчи моментнинг қийматидир. Шунингдек, иккинчи участка эгувчи momenti } (M_2) \text{ нинг ҳам тегишли қийматларини аниқлаймиз:}$$

$$x_2 = a \text{ бўлганда, } M_2 = \frac{Pab}{l}; \quad x_2 = l \text{ бўлганда, } M_2 = 0 \text{ бўлади.}$$

Эгувчи моментлар эпюрасини чизишда, мусбат моментни y ўқининг мусбат йўналиши бўйича қўямиз. Баъзан, эгувчи моментлар балканинг қавариқ томонига қараб қўйилади. Масалан балканинг қавариғи пастга қараган бўлса, тегишли момент пастга қаратиб, қавариғи юқоригача қараган бўлса, юқорига қаратиб қўйилади.

Бу қоида, кўпинча, қурилиш механикасида қўлланилади. Биз курсимизнинг охиригача, мусбат моментни юқорига, манфий моментни эса пастга қаратиб қўйишни шарт қилиб оламиз.

A ва B нуқталарда эгувчи момент нолга тенг бўлгани учун, уларга тегишли ординаталар ҳам нолга тенг бўлади. C даги момент $\frac{Pab}{l}$ га тенг бўлгани учун уни маълум масштабда CD кесма билан ордината ўқи бўйлаб қўйсак, эгувчи момент эпюрасини A ва D ҳамда B ва D нуқталарни тўташтириб, AD ва BD чизиқлар орқали тасвирлаган бўламиз (204-шакл, а).

Балка бўйича эгувчи момент мусбат бўлиб, у куч қўйилган C кесимда максимал қийматга эришади:

$$M_{\max} = \frac{Pab}{l}.$$

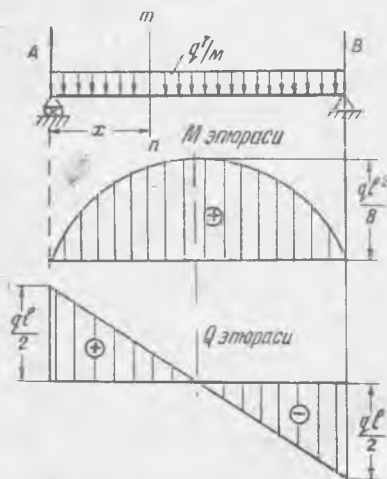
Куч балканинг ўртасига қўйилган бўлса, $a = b = \frac{l}{2}$ бўлиб, максимал эгувчи момент:

$$M_{\max} = \frac{Pl}{4}$$

бўлади.

60- масала. 206- шаклда тасвирланган икки таянчда ётувчи балкага интенсивлиги q т/м бўлган тенг ёйилган юк таъсир қилади. Шу балка учун эгувчи момент ва кесиб ўтувчи куч эпюраларини чизамиз. Юк балка бўйича симметрик ёйилгани учун, A ва B таянч реакциялари бир хилда бўлиб, қўйилган юкнинг ярмига тенгдир:

$$A = B = \frac{ql}{2}.$$



206- шакл.

Кесиб ўтувчи куч ва эгувчи момент ифодасини тузиш учун, балканинг чап учидан x масофадаги бирор кесимни оламиз ва балканинг чап қисmini текшираемиз. Унинг чап қисмига юқо ига қараб йўналган таянч реакцияси $A = \frac{ql}{2}$, ва пастга қараб йўналган, x давомида тенг ёйилган юк қўйилган. Ёйилган юкнинг тенг таъсир қилувчиси qx га тенг.

Текширилаётган кесимдаги кесиб ўтувчи куч балканинг чап қисмига қўйилган кучларнинг алгебраик йиғиндисига тенгдир. Шунинг учун:

$$Q = \frac{ql}{2} - qx.$$

Юк балка бўйича узлуксиз таъсир қиладиган бўлгани учун тенглама балканинг барча кесимларидаги кесиб ўтувчи кучни ифодалайди. Кесиб ўтув-

чи куч эпюраси тўғри чизиқ билан тасвирлангани учун унинг икки нуқтасини аниқлаймиз: $x = 0$ бўлганда $Q = \frac{ql}{2}$, $x = l$ бўлганда $Q = -\frac{ql}{2}$ бўлади. Бу нуқталар воситаси билан кесиб ўтувчи куч эпюрасини чизиш қийин эмас. У 206- шаклда тасвирланган. Бу ҳолда $Q_{\max} = \frac{ql}{2}$ бўлади.

Эгувчи момент эпюрасини чизиш учун, текширилаётган кесимнинг чап томонидаги кучларнинг кесим марказига нисбатан олинган моментлари йиғиндисини топамиз.

x мобайнида ёйилган юкнинг тенг таъсир қилувчиси qx га тенг бўлиб, у x кесманинг ўртасига қўйилган. Шунинг учун унинг елкаси $\frac{x}{2}$ га тенг. Демак:

$$M = \frac{ql}{2}x - qx\frac{x}{2} = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}$$

ёки:

$$M = \frac{qx}{2}(l - x).$$

Бу тенгламадан балканинг барча кесимларидаги эгувчи моментларни ҳисоблаш мумкин. Бу ҳолда эгувчи момент x нинг иккинчи даражали функцияси орқали ифодалангани учун, унга тегишли эпюра квадратик парабола бўлади. Бу эгри чизиқни ясаш учун унинг бир нечта нуқтасини белгилаш керак.

Масалан:

$$x = 0, \quad M = 0;$$

$$\begin{aligned}
 x = \frac{l}{4}, \quad M &= \frac{ql}{2 \cdot 4} \left(l - \frac{l}{4} \right) = \frac{3}{32} ql^2, \\
 x = \frac{l}{2}, \quad M &= \frac{ql}{2 \cdot 2} \left(l - \frac{l}{2} \right) = \frac{4}{32} ql^2, \\
 x = \frac{3}{4}l, \quad M &= \frac{3ql}{2 \cdot 4} \left(l - \frac{3}{4}l \right) = \frac{3}{32} ql^2; \\
 x = l, \quad M &= 0.
 \end{aligned}$$

Эгувчи момент эпюраси 206-шаклда тасвирлангандек бўлади.

$M_{\max}$ ни ҳисоблаш учун балканинг қайси кесимида, яъни x нинг қандай қийматида максимумга эришувини аниқлаймиз. Бунинг учун эгувчи момент ифодасидан x га нисбатан ҳосила оламиз:

$$\frac{dM}{dx} = \frac{ql}{2} - qx = 0;$$

бундан:

$$x = \frac{l}{2}.$$

Демак:

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8}.$$

Энг катта эгувчи момент балканинг ўрта кесимида, яъни кесиб ўтувчи куч нолга тенг жойда ҳосил бўлади.

61-масала. Бир учи билан маҳкамланган (қисилиб тиралган) балкага унинг бутун бўйича тенг ёйилган q кг/м юк қўйилган (207-шакл). Бу балка учун кесиб ўтувчи куч эпюраси билан эгувчи момент эпюрасини чизамиз. Бу ҳолда таянч реакциясини аниқлашнинг ҳожати йўқ. Балканинг эркин учидан x масофадаги кесимни олиб, унинг чап томонидаги қисмини текшираимиз. Бу қисми учун кесиб ўтувчи куч билан эгувчи момент қуйидагича ифодаланади:

$$Q_x = -qx, \quad (1)$$

$$M_x = -qx \frac{x}{2} = -\frac{qx^2}{2}. \quad (2)$$

Қўндаланг куч чизиқли қонун билан, эгувчи момент эса квадратик парабола қонуни билан ўзгаради (207-шакл).

Энг катта қўндаланг куч ва эгувчи момент балканинг маҳкамланган кесимига мос келади:

$$Q_{\max} = -ql, \quad M_{\max} = -\frac{ql^2}{2}.$$



207-шакл.

62-масала. Бир учи билан маҳкамланган (қисилиб тиралган) балканинг бир қисмига тенг ёйилган q кг/м юк қўйилган (208-шакл). Шу балка учун қўндаланг куч эпюраси билан эгувчи момент эпюрасини чизамиз.

Бу ҳолда тенг ёйилган юк балканинг бир қисмига қўйилгани учун балкани икки участкага бўлади. Биринчи участкада, яъни a узунлик давомида олдинги масала учун тузилган қўндаланг куч билан эгувчи момент

ифодаси ярайдн. Иккинчи участка учун x_2 масофадаги бирор mn кесимни олиб, балканинг чап қисми учун Q_2 ва M_2 ифодаларини тузамиз. Улар:

$$Q_2 = -qa. \quad M_2 = -qa\left(x_2 - \frac{a}{2}\right)$$

кўринишда ёзилади. Демак, иккинчи участка учун кесиб ўтувчи куч эпюраси абсцисса x_2 га параллел чизик билан, эгувчи момент эпюраси эса туғри чизик билан тасвирланади (208-шакл). Энг катта кесиб ўтувчи куч:

$$Q_{\max} = -q \cdot a$$

бўлади. Энг катта эгувчи момент маҳкамланган кесимда бўлиб, у:

$$M_{\max} = q \cdot a \left(l - \frac{a}{2} \right)$$

бўлади.

63-масала. Икки учи билан таянчга тиралган балка учбурчак қонуни билан ўзгарувчи ёйилган юк таъсирида бўлиб, юкнинг ўнг таянчдаги қиймати q_0 кг/м га тенг (209-шакл). Бу ҳолда ёйилган юкнинг тенг таъсир этувчиси ACB учбурчакнинг юзи билан ифодаланиб, $p = \frac{q_0 l}{2}$ бўлади. Бу куч балканинг ўнг учидан $\frac{l}{3}$ масофадаги нуқтага қўйилган. Шунинг учун A ва B таянч реакциялари (68.1) формулага мувофиқ қуйидагича аниқланади:

$$A = \frac{q_0 l}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{l} = \frac{q_0 l}{6} = \frac{p}{3},$$

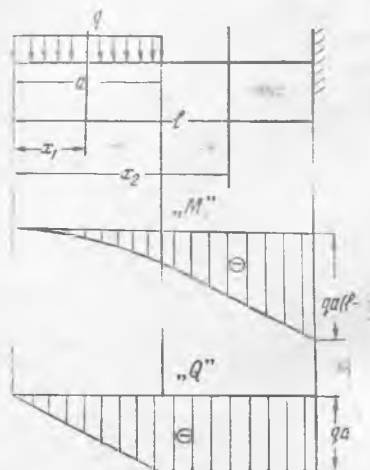
$$B = \frac{q_0 l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{l} = \frac{q_0 l}{3} = \frac{2}{3} p.$$

Энди, балканинг чап учидан x масофадаги бирор кесимни олиб, бу кесимдаги кўндаланг куч билан эгувчи момент ифодасини тузамиз. Бунинг учун балканинг танланган кесимдан чап томондаги қисмини текшираимиз. Бу қисмга таянч реакцияси A ва x давомида учбурчак қонуни билан ёйилган q кг/м юк таъсир қилади. Ёйилган юкнинг тенг таъсир қилувчиси $\frac{q'x}{2}$ га тенг бўлиб, у текширилаётган кесимдан $\frac{x}{3}$ масофадаги нуқтага қўйилган (бу ифодадаги q' — юк интенсивлигининг олинган кесимдаги қиймати). Аммо бу ҳолда ёйилган юк интенсивлиги q' ўзгарувчи бўлгани учун кесиб ўтувчи куч ва эгувчи момент ифодасини тузишдан аввал, уни x нинг функцияси тарзида ифодалашимиз зарур. Уни бутун юкни тасвирловчи учбурчак билан x масофадаги кесимнинг чап томонидаги юкни тасвирловчи учбурчакнинг ўхшашлигидан аниқлаймиз:

$$\frac{q'}{q_0} = \frac{x}{l}; \text{ бундан } q' = q_0 \frac{x}{l}$$

Бу кўзда тутилса, кесиб ўтувчи куч билан эгувчи моментлар ифодаси қуйидагича ёзилади:

$$Q = A - \frac{q'x}{2} = \frac{q_0 l}{6} - \frac{q_0 x^2}{2l} = \frac{q_0 l}{6} \left(1 - 3 \frac{x^2}{l^2} \right), \quad (1)$$



208-шакл.

$$M = Ax - \frac{q'x}{2} \cdot \frac{x}{3} = \frac{q_0 l x}{6} - \frac{q_0 x^3}{6l} = \frac{q_0 l}{6} x \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right). \quad (2)$$

Кўндаланг кучни ифодаловчи функция x га нисбатан иккинчи даражали бўлгани учун у чўққиси балканинг чап таянчи остида бўлган квадрат параболadır (209-шакл), чап таянчдаги кесимда, яъни $x = 0$ бўлганда:

$$Q_A = \frac{q_0 l}{6} = A;$$

ўнг таянчдаги кесимда, яъни $x = l$ бўлганда,

$$Q_B = -\frac{q_0 l}{6} = -B$$

бўлади.

(1) тенгламанинг ўнг томонини нолга тенглаштириб, кесиб ўтувчи куч нолга тенг бўладиган кесимнинг ҳолатини аниқлаймиз:

$$\frac{q_0 l}{6} \left(1 - 3 \frac{x^2}{l^2}\right) = 0; \text{ бундан:}$$

$$x = \frac{l}{\sqrt{3}} \cong 0,577 l.$$

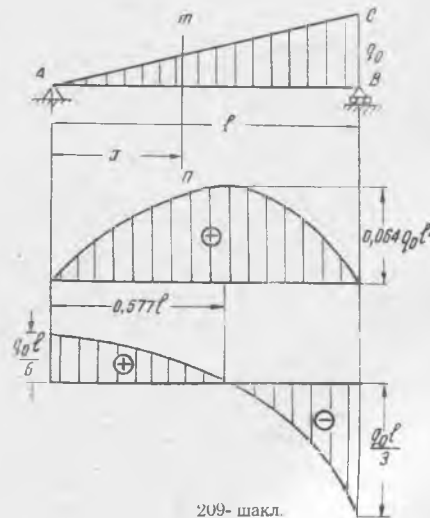
(2) тенглама, яъни эгувчи моментни ифодаловчи функция учинчи даражали парабола билан тасвирланади (209-шакл).

Энг катта эгувчи моментнинг қийматини (2) тенгламанинг максимумини аниқлаш билан топишимиз мумкин. Бунинг учун ҳалиги тенглама (2) дан x га нисбатан ҳосила олиб, уни нолга тенглаштирамиз ва энг катта момент ҳосил бўладиган кесимни аниқлаймиз:

$$\frac{dM}{dx} = \frac{q_0 l}{6} \left(1 - 3 \frac{x^2}{l^2}\right) = 0; \quad \text{бундан:} \quad x = \frac{l}{\sqrt{3}} \cong 0,577 l.$$

Буни (2) тенгламага олиб бориб қўйсак, $M_{\max}$ учун қуйидаги қийматни оламиз:

$$M_{\max} = 0,064 q_0 l^2.$$



71- §. Мураккаб юклар учун кўндаланг куч ва эгувчи момент эпюраларини ясаш

Тенг ёйилган ва чизиқли қонун билан ўзгарувчи юклар учун Q ва M ифодаларини тузиш кўриб ўтилган эди. Энди, ҳар қандай қонун билан ёйилган юклар учун Q ва M ларнинг ифодасини тузишга ўтишимиз мумкин. Икки таянчда ётувчи балка бутун узунлиги бўйлаб x нинг ихтиёрий функцияси бўлган, яъни $q = q(x)$ қонун билан ўзгарувчи ёйилган юк таъсирида бўлади, деб фараз қилайлик (210-шакл). У ҳолда кесиб ўтувчи куч билан эгувчи момент ҳам x нинг қандайдир функциялари бўлади.

Ёйилган q юкнинг қандай қонун билан ўзгаришини тасвирловчи abc чизиқ юк чизиги деб, бу чизиқ билан чекланган юза эса юк юзаси деб

аталади. Q ва M функцияларни $q(x)$ орқали ифодалашдан аввал ёйилган юкнинг тенг таъсир қилувчисини, яъни юк юзасини ва унинг оғирлик марказини аниқлаш зарур. Бунинг учун юк юзасидан x масофадаги чексиз кичик юзачани оламиз. У 210-шаклда штрихлаб қўйилган. Бу юзача $q(x) dx$ га тенг; юк юзаси бундай юзачаларнинг балка бўйича олинган йиғиндисига тенгдир. Ёйилган юкнинг тенг таъсир қилувчисини q десак,

$$p = \int_0^l q(x) dx \quad (71.1)$$

бўлади.

Бу кучнинг қўйилган нуқтасини, яъни юк юзасининг оғирлик марказини топиш учун, ҳалиги чексиз кичик юзачанинг статик моментини олиб, уни интеграллаймиз:

$$S_y = \int_0^l xq(x) dx; \quad (71.2)$$

(71.1) ва (71.2) тенгликлардан фойдаланиб, p куч қўйилган нуқтани аниқлаш қийин эмас:

$$x_c = \frac{S_y}{p} = \frac{\int_0^l xq(x) dx}{\int_0^l q(x) dx}. \quad (71.3)$$

Энди, A ва B таянч реакцияларини топиш мумкин. Улар тегишлича:

$$A = p \frac{l - x_c}{l}, \quad B = p \frac{x_c}{l} \quad (71.4)$$

бўлади.

Чап таянчдан x масофада бўлган бирор mn кесим учун Q ва M ифодаларини тузишга ўтамиз:

$$Q = A - \int_0^x q(x) dx = p \frac{l - x_c}{l} - \int_0^x q(x) dx, \quad (71.5)$$

$$M = Ax - \int_0^x xq(x) dx = p \frac{l - x_c}{l} x - \int_0^x xq(x) dx. \quad (71.6)$$

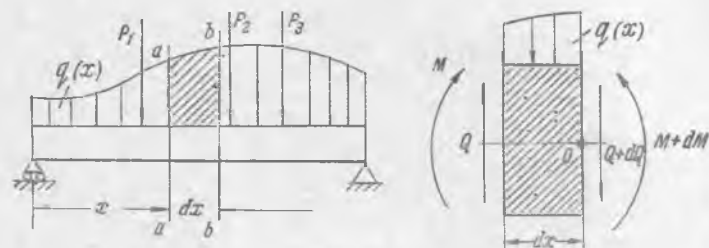
Интеграл чегараси x гача олинди, чунки Q ва M ни x масофадаги кесим учун ҳисобладик. Булардан фойдаланиб, ҳар қандай қонун билан ёйилган юк учун Q ва M нинг ифодаларини тузишимиз мумкин. Юқорида келтирилган 60 ва 63-масалаларни ҳам бу формулалардан фойдаланиб, бавосита ечиш мумкин.

72-§. Эгувчи момент, қундаланг куч ва ёйилган куч интенсивлиги орасидаги дифференциал муносабатлар

Балкага қўйилган ташқи кучлар унинг ҳар бир қундаланг кесимида кесиб ўтувчи кучга ва эгувчи моментга келтирилишини текширдик.

Шунинг билан бирга, балканинг текширилаётган қисми мувозанатда бўлсин учун, қирқилган кесимдаги ички кучларнинг ҳам ҳалиги Q ва M га келтирилиши зарурлигини аниқладик.

Энди, ана шу Q ва M орасидаги дифференциал муносабатни ҳамда балкага ёйилган юк қўйилган бўлса, унинг интенсивлиги (q) билан Q ва M орасидаги муносабатларни аниқлашга ўтамиз. Бунинг учун ихтиёрий юклар таъсиридаги балканинг чап учидан x ва $x + dx$ масофалардаги $a - a$ ва $b - b$ кесимлар билан чегараланган чексиз кичик элемент ажрата-



211-шакл.

миз. Бу элементга интенсивлиги $q(x)$ бўлган ёйилган юкдан ташқари ҳеч қандай ташқи куч қўйилмаган бўлсин. Қирқилган кесимларга эса тегишлича Q , M ва $Q + dQ$, $M + dM$ қўйилган (211-шакл). Ажратилган элемент ана шу кучлар таъсирида мувозанатда тургани учун унинг мувозанат шарти қуйидаги икки тенглама билан ифодаланади:

$$\sum Y = Q - (Q + dQ) - q(x)dx = 0,$$

$$\sum M_0 = M + Qdx + q(x)dx \frac{dx}{2} - (M + dM) = 0.$$

Чексиз кичик dx давомида q ни тенг ёйилган деб олдик. Бу тенгламаларнинг биринчисидан:

$$\frac{dQ}{dx} = -q(x). \quad (72.1)$$

Иккинчи тенгламадаги иккинчи тартибли кичик миқдор эътиборга олинмаса.

$$\frac{dM}{dx} = Q \quad (72.2)$$

муносабат келиб чиқади.

Q нинг қийматини (72.2) дан (72.1) га қўйсак:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -q(x). \quad (72.3)$$

Демак, бирор кесимдаги кесиб ўтувчи куч (Q) ва эгувчи момент (M) дан шу кесимнинг абсциссасига нисбатан олинган ҳосилалар тегишлича ёйилган юк интенсивлигининг тескари ишора билан олинган қийматига ва кесиб ўтувчи кучга тенг бўлар экан.

Худди шунингдек, бирор кесимдаги эгувчи моментдан, шу кесимнинг абсциссига нисбатан олинган иккинчи ҳосила ёйилган юк интенсивлигининг тескари ишора билан олинган қийматига тенг булар экан. Бу дифференциал муносабатлар, кўпинча, адабиётда Журавский теоремаси деб юритилади.

$$q = q(x), \quad Q = Q(x), \quad M = M(x)$$

функцияларни тасвирловчи графикларга ёйилган юк чизиги ва кесиб ўтувчи куч ҳамда эгувчи момент эпюралари деб ном бердик.

Ҳосиланинг геометрик маъносини, яъни ҳосила эгри чизиқнинг бирор нуқтасидан ўтказилган уринманинг оғиш бурчаги тангенсига тенглигини эсласак, (73.1), (73.2) ва (73.3) дифференциал муносабатларнинг геометрик маъносини чиқарган бўламиз. Ҳақиқатан ҳам, агар кесиб ўтувчи куч эпюрасини олиб, унинг бирор нуқтасидан уринма ўтказсак, шу уринма оғиш бурчагининг тангенсига (72.1) га мувофиқ, қуйидагича ёзилади:

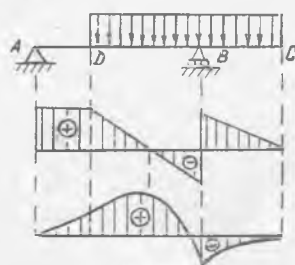
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dQ}{dx} = -q(x).$$

Бошқача қилиб айтганда, ёйилган юкнинг бирор нуқтадаги (интенсивлиги) q қўндаланг куч эпюрасига шу нуқтада ўтказилган уринманинг оғиш бурчаги тангенсининг тескари ишора билан олинган кийматига тенг бўлар экан. Худди шундай хулосани (72.2) тенглама асосида ҳам чиқаришимиз мумкин:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{dM}{dx} = Q.$$

Бирор кесимдаги қўндаланг куч Q эгувчи момент эпюрасининг шу кесимга тегишли нуқтасидан ўтказилган уринманинг оғиш бурчагининг тангенсига тенг бўлар экан.

Бу хулосалар чизилган Q ва M эпюрасининг тўғрилигини текширишда катта аҳамиятга эгадир. 212-шаклда кўрсатилган ҳол учун чизилган эпюраларни анализ қилмиз. Бирор участкада:



212-шакл.

$Q > 0$ бўлса, яъни $\operatorname{tg} \beta > 0$ бўлса, момент узлуксиз равишда ўсади, $Q < 0$ бўлса, яъни $\operatorname{tg} \beta < 0$ бўлса, момент кемайди. 212-шаклда биринчи участкада Q ўзгармас мусбат сон бўлгани учун $\beta = \text{const}$ дир. Бу участкада эгувчи момент эпюраси оғиш бурчаги β бўлган тўғри чизиқ билан тасвирланади. DB ва BC участкаларда интенсивлиги ўзгармас q га тенг юк таъсир кўрсатгани учун, $\operatorname{tg} \alpha = -q$ бўлади. Тегишли Q эпюраси оғиш бурчаги α ва тенг бўлган пасажувчи тўғри чизиқ билан тасвирланади. Q нолга айланиб, ишорасини $+$ дан $-$ га айлантиргэнди,

$M = M_{\max}$ бўлади. Ишорасини $-$ дан $+$ га айлантирса, $M = M_{\min}$ бўлади. $Q = 0$ бўлса, $\operatorname{tg} \beta = 0$ бўлиб, $M = \text{const}$ бўлади.

$$q = 0 \text{ бўлса, яъни } \frac{dQ}{dx} = 0 \text{ бўлса, } Q = \text{const}$$

бўлади. Демак, ёйилган юк қўйилмаган участкаларда Q абсцисса ўқига параллел бўлган тўғри чизиқлар билан тасвирланар экан (212-шаклдаги AD участка).

Тенг ёйилган юк таъсиридаги участкаларда, M квадратик парабола билан, Q эса абсцисса ўқига қия тўғри чизиқ билан тасвирланади. q тенг ёйилмаган бўлса, Q ва M эпюралари эгри чизиқлар билан тасвирланиб, уларнинг характери ёйилган юкнинг типига боғлиқ бўлади. Тўпланган юк таъсир қилаётган кесимларда Q узилиб, узилиш миқдори шу кесимга қўйилган кучга тенг бўлади. Бу кесимда M ни тасвирловчи чизиқ ўз йўналишини кескин равишда ўзгартиради (212-шаклдаги балканинг B кесими), яъни эпюра чизиги синиб, бу кесимнинг иккала томонида M чизигининг йўналиши ҳар хил бўлади.

Консол балкалар пастга қараб йўналган ёйилган юк таъсирида бўлса (72.3) га мувофиқ:

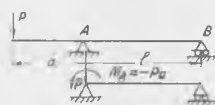
$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q < 0,$$

яъни M чизигининг эгрилигини характерловчи иккинчи хосила манфий бўлгани учун, тегишли чизиқнинг қавариғи юқорида, эгрилигининг маркази пастда бўлади. Аксинча, ёйилган юк юқорига йўналган бўлса, $\frac{d^2 M}{dx^2} = q > 0$ бўлиб, тегишли эгри чизиқнинг қавариғи пастга қараган, эгрилик маркази эса юқорида бўлади. Балканинг учи таянчга шарнир воситаси билан туташтирилган бўлса, бу кесимдаги кесиб ўтувчи Q куч таянч реакциясига, эгувчи момент эса нолга тенг бўлади (агар таянч кесимига ташқи жуфт куч қўйилмаган бўлса). Консол балканинг эркин учига жуфт куч ёки тўпланган куч таъсир кўрсатмаса, Q ва M нолга тенг бўлади.

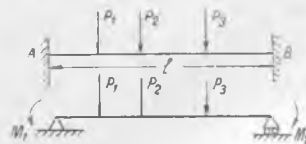
Балканинг қисилиб тиралган учига Q ва M тегишли таянч реакциялари билан реактив моментларга тенг бўлади. Бу мулоҳазалар яхши билиб олинса, Q ва M эпюраларини чизиш масаласи анча осонлашади.

73-§. Жуфт кучлар билан юкланган балкалар учун Q ва M эпюраларини ясаш

Балкаларнинг ҳисобида жуфт кучлар билан юкланган ҳоллар жуда кўп учрайди. Масалан, икки таянчда ётувчи балканинг бир учи консол бўлиб, унга P куч қўйилган бўлса (213-шакл) ва унинг консол қисми ташлаб юборилса, A таянч кесимига ташланган қисмининг таъсирини алмаштирувчи $M_A = -P \cdot a$ жуфт кучни ва P кучни қўйишга тўғри келади.



213-шакл.



214-шакл.

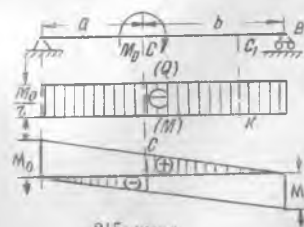
Агар AB балкани мустақил балка деб қарасак, M_A моментни балкага қўйилган ташқи момент дейишимиз мумкин, P куч бевосита таянч устига қўйилгани учун, у балканинг эгилишига ҳеч қандай таъсир кўрсатмай, фақат A таянчда ўзига тенг ва қарама-қарши реакция ҳосил қилади.

Икки учи билан қисилиб тиралган балкани шарнирли таянчларга тиралган балкага айлантириш мумкин (214-шакл). Бунинг учун қисилишнинг таъсирини тегишли реактив моментлар (M_1 ва M_2) билан алмаштириш лозим. У ҳолда бу M_1 ва M_2 реактив моментлар балкага қўйилган ташқи моментлар деб қаралади. Бу тарздаги юклар учун ҳам Q ва M эпюраларини чизиш усули одатдагичадир.

64-масала. Икки таянчга тиралган балканинг C кесимига momenti M_0 га тенг бўлган жуфт куч қўйилган (215-шакл). Бу ҳол учун Q ва M эпюраларини ясаймиз.

Таянч реакциялари:

$$A = -\frac{M_0}{l}, \quad B = \frac{M_0}{l}.$$



215-шакл.

Қўрамызки, бу реакциялар моменти M_0 га тенг бўлган жуфт куч ҳосил қилаётир; бу жуфт балкага қўйилган жуфтни мувозанатлайди.

Балканинг қайси кесимини олмайлик, ундаги кесиб ўтувчи кучнинг ишораси манфий бўлиб, миқдори балканинг чап қисми учун A га, ўнг қисми учун эса B га тенгдир:

$$A = -B = -\frac{M_0}{l}.$$

Эгувчи момент C кесимнинг чап ва ўнг қисмлари учун ҳар хил бўлади.

АС участка учун:

$$M_x = Ax = -\frac{M_0}{l}x; \quad (2)$$

ВС участка учун:

$$M_x = B(l-x) = \frac{M_0}{l}(l-x). \quad (3)$$

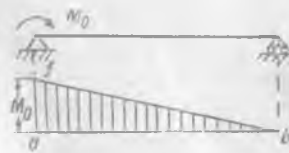
Жуфт куч қўйилган кесимда M функция ўзилади. Узилиш миқдори:

$$\frac{M_0}{l}(l-x) - (-\frac{M_0}{l}x) = M_0$$

бўлади.

Шунинг учун, эгувчи момент эпюраси жуфт куч қўйилган кесимда, тўпланган юк қўйилган кесимда Q қандай сакраса, шундай сакрайди. Q ва M эпюраси 215-шаклда тасвирланган.

Жуфт куч C кесимга қўйилмай, бошқа бирор C_1 кесимда бўлса, тегишли таянч реакциялари ва эгувчи момент ифодаси ўзгармайди. Аммо M эпюрасининг кўриниши ўзгаради, чунки ҳалиги эгувчи моментнинг сакраши бошқа кесимга кўчади. C кесимдаги жуфт куч учун эгувчи момент эпюраси $acdb$ билан жуфт куч C_1 га кўчгандаги ҳол учун $aklb$ синиқ чизиқ билан тасвирланади. Жуфт куч балканинг чап учига қўйилса, эгувчи момент эпюраси мусбат ишорали ajb учбурчак кўринишида бўлади (216-шакл). Унинг энг катта ординатаси $af = M_0$ бўлади. Жуфт куч балканинг ўнг учига қўйилган бўлса, M эпюраси geb учбурчак билан тасвирланиб, балка бўйича ҳамма жойда манфий бўлади; унинг энг катта қиймати $be = -M_0$ дир (217-шакл).



216-шакл.



217-шакл.

Шуни ҳам эслатиб ўтиш керакки, чап таянчдаги эгувчи момент (M_A) шу кесимга қўйилган ташқи жуфт моментига тенг, яъни: $M_A = M_0$.

Шунингдек, ўнг таянчдаги эгувчи момент (M_B) шу кесимга қўйилган жуфт момент (M_0) га тенг, аммо унинг белгиси чап кесимдаги момент белгисига тескаридир, яъни: $M_B = -M_0$.

Таянч кесимига қўйилган M_A ва M_B эгувчи моментлар таянч моментлари деб аталади.

65-масала. Икки таянчда ётувчи балканинг учларига M_A ва M_B моментлар қўйилган (218-шакл). Уларнинг йўналиш шаклда кўрсатилгандек. Бу ҳол учун Q ва M эпюралари чизилсин.

Балка давомиди ҳеч қандай юк таъсир кўрсатмагани учун, M нинг эпюрасини чизиш жуда осон. Абсцисса ўқининг A ва B нуқталарига маълум масштабда M_A ва M_B ординаталарини қўйиб, уларнинг учларини туташтириш билан M нинг эпюрасини ҳосил қиламиз. Шаклда бу эпюра $abcd$ трапеция билан тасвирланган. Аммо M нинг эпюрасини унинг аналитик ифодасидан фойдаланиб чизиш қулай. Шунинг учун олдин таянч реакциялари (A ва B) ни аниқлаймиз.

$$A = \frac{M_A - M_B}{l}, \quad B = \frac{M_A + M_B}{l}.$$

Агар $M_B > M_A$ бўлса, $A > 0$, $B < 0$ бўлади.

x масофадаги кесимнинг эгувчи momenti балканинг чап қисми учун қуйидагича ёзилади:

$$M_x = \frac{M_A - M_B}{l} x + M_A = M_A \frac{l-x}{l} + M_B \frac{x}{l}. \quad (4)$$

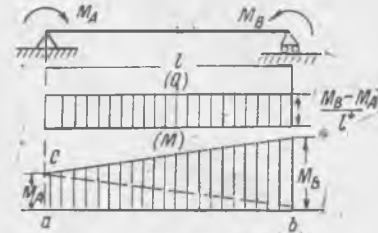
Бу ифодани дифференциаллаб, текширилаётган кесимдаги кесиб ўтувчи кучни топамиз:

$$Q = \frac{dM_x}{dx} = \frac{M_B - M_A}{l} = \text{const}. \quad (5)$$

(4) тенглама ҳақиқатан ҳам ҳалиги трапеция билан тасвирланадиган эпюрага мос келади.

$x = 0$ бўлганда $M_x = M_A$, $x = l$ бўлганда $M_x = M_B$ бўлади.

(5) тенглама эса ординатаси $Q_x = \frac{M_B - M_A}{l}$ бўлган ва абсцисса ўқига параллел чизикни тасвирлайди.



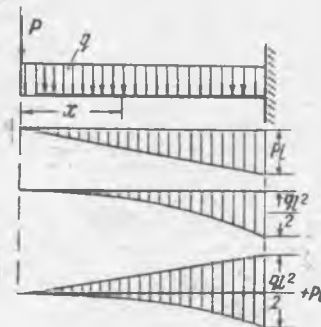
218-шакл.

74-§. Q ва M эпюраларини чизишда кучлар таъсирини қўшиш усули

Балка бир неча куч таъсирида бўлса, унинг турли кўндаланг кесимларида ҳосил бўладиган Q ва M ни мазкур балкага ҳар қайси кучнинг алоҳида таъсиридан ҳосил бўлган Q ва M ларни тегишлича қўшиш билан аниқлаш мумкин, чунки Q ва M ифодасига ташқи кучлар биринчи даражада киради. Балкага қўйилган юкларнинг ҳар қайсиси учун алоҳида Q ва M эпюраларини чизиб, мазкур эпюраларни тегишлича график равишда қўшиш билан умумий Q ва M эпюрасини оламиз. Бу усул механикада кучлар таъсирини қўшиш усули деб аталади. Масалан, 219-шаклдаги консол балка тенг ёйилган юк ва чап учига қўйилган тўпланма куч (P) таъсирида бўлсин. Мазкур юклар учун Q ва M эпюраларини чизиш керак.

Биз олдин бу масалани кучлар таъсирини қўшиш усулидан фойдаланмай ечамиз.

Балканинг чап учидан x масофадаги кесим учун Q ва M ифодасини тузамиз:



219- шакл.

$$\left. \begin{aligned} Q &= -P - qx, \\ M &= -Px - \frac{qx^2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (74.1)$$

Қўрамизки, бу кесимдаги Q ва M икки тузувчидан иборатдир, улар тегишлича $-P$ ва $-qx$ ҳамда $-Px$ ва $-\frac{qx^2}{2}$ га тенг.

Булардан биринчиси P , иккинчиси эса q юклардан вужудга келган. Шунинг учун P ва q нинг таъсирини алоҳида текшириб, ҳар қайси юк учун тегишли эпюралар чизилгач, уларни қўшиш натижасида юқорида чиқарилган (74.1) тенгламаларни ҳосил қиламиз. Бу эса кучлар таъсирини қўшиш усулининг татбиқи бўлади. Бу процесс эгувчи момент учун 219-шаклда тасвирланган.

Иккинчи мисол тариқасида, икки таянчга тиралиб узунлиги буйича тенг ёйилган юк ва чап таянчига қўйилган жуфт куч (M_A) таъсирида бўлган балкани оламиз (220-шакл).

Ёйилган юк билан таянч momenti M_A таъсиридан ҳосил бўладиган эгувчи моментларнинг алоҳида эпюралари тегишлича 220-шакл, a ва b да тасвирланган. Бу ҳолда q ва M_A дан ҳосил бўлган эпюраларнинг ишораси ҳар хилдир. Буларни геометрик равишда қўшиш учун иккала эпюрани бир абсцисса чизиғига қўйиш лозим.

Турли ишорада бўлган момент эпюралари ўзаро ейтишиб, натижада 220-шакл, c да штрихланган юза қолади. Ниҳоят, балкага қўйилган юклардан ҳосил бўлган якунловчи эгувчи момент эпюраси ўша штрихланган юза билан тасвирланади. Унинг ординаталарини янги горизонтал ўқдан ҳисобласак, фойдаланиш учун қулай қўринишдаги эпюрани ҳосил қиламиз. У 220-шакл, d да тасвирланган. Худди шу мулоҳаза асосида якунловчи кесиб ўтувчи куч эпюрасини ҳам чиза оламиз.

Худди шундай мулоҳазалар юргизиб, ҳар қандай мураккаб куч билан юкланган балкалар учун Q ва M эпюраларини чизишимиз мумкин.

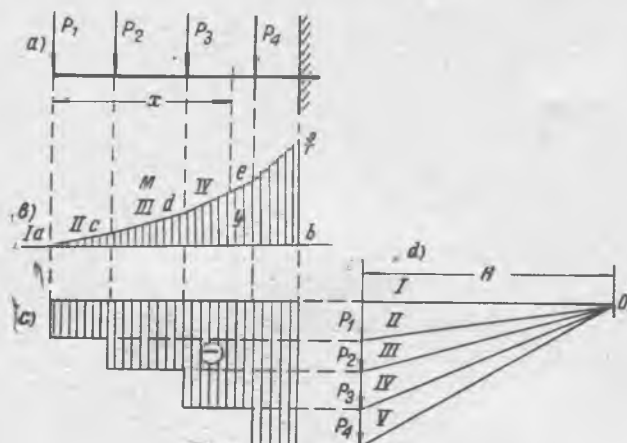
75-§. M ва Q эпюраларини график усулда ясаш

Параллел кучларнинг моментини аниқлаш учун арқон кўпбурчаги татбиқ этилиб, қуйидаги формула чиқарилган:

$$M = Hy; \quad (75.1)$$

бунда, H — қутб масофаси, яъни куч қўпбурчагининг ёпувчиси билан қутб орасидаги масофа; y — ёпиқ арқон қўпбурчагининг момент маркази остидаги ординатаси. Биз бу ерда формуланинг қандай чиқарилганини такрорлаб ўтирмаймиз, бу формула ҳақида мукаммал маълумот олишни хоҳлаганларга назарий механика курсига мурожаат қилишни тавсия этамиз.

Куч ва арқон қўпбурчаларини ҳамда (75.1) формулани M ва Q эпюраларини тузиш учун татбиқ қиламиз. P_1, P_2, P_3 ва P_4 кучлар таъсиридаги консол учун Q ва M эпюраларини график усулда ясаймиз (221-шакл, а).



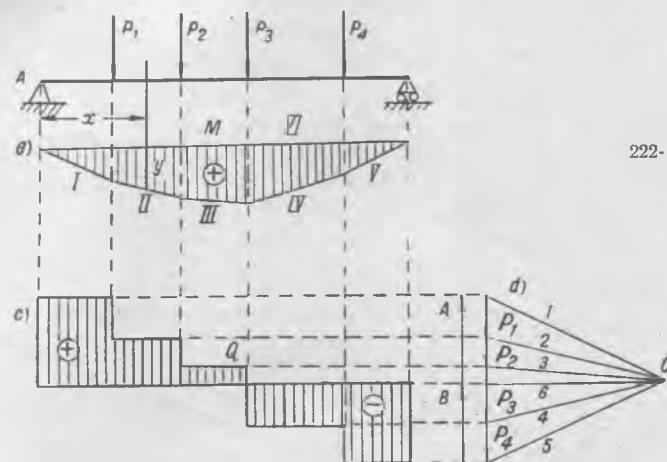
221-шакл.

Олдин куч қўпбурчагини чизамиз. Қутбни шундай танлаймизки, биринчи нур горизонтал йўналишда бўлади. У ҳолда арқон қўпбурчаги ($acdef$) эгувчи момент эпюрасини тасвирлайди. x билан аниқланган ҳар бир кесим учун арқон қўпбурчагининг ординатаси (y) нинг қутб оралиғи (H) га қўпайтмаси, (75.1) га мувофиқ, ҳалиги кесимдаги эгувчи моментга тенг бўлади. Q нинг эпюрасини чизиш учун тегишли кесимлардаги P_1, P_2, P_3 ва P_4 кучларни ўз-ўзига параллел равишда куч қўпбурчагидан келтириш лозим (221-шакл, с).

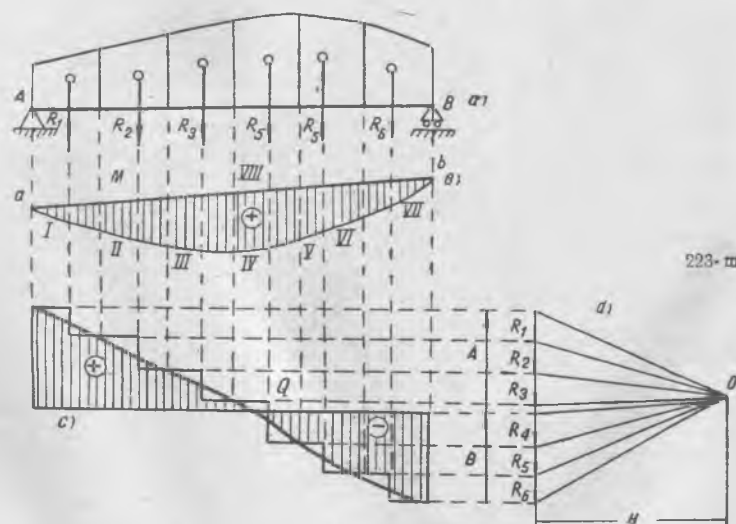
Икки таянчга тиралган балка P_1, P_2, P_3, P_4 кучлар билан юкланган (222-шакл, а). Мазкур балка учун M ва Q нинг эпюраларини график усулда чизамиз. Бу ҳолда, балкага қўйилган P_1, P_2, P_3 ва P_4 кучлар таянч реакциялари A ва B билан мувозанатлашгани учун куч қўпбурчаги билан бирга арқон қўпбурчаги ҳам ёпиқ бўлади. Олдин куч қўпбурчагини чизиб, қутб учун ихтиёрий O нуқтани оламиз ва 1, 2, 3, 4, 5 нурларни ўтказамиз (222-шакл, d). Бу нурларга тегишли арқон қўпбурчагини чизиб, ундаги I ва V нурларни таянч реакцияларининг йўналиши билан кесишгунча давом эттираемиз. Бу кесишган нуқталарни туташтириб, арқон қўпбурчагини ёпувчи VI нурнинг йўналишини аниқлаймиз. Энди мазкур VI чизиққа параллел қилиб, қутбдан 6-нурни ўтказсак, бу нур ташқи кучлар тенг таъсир этувчиси (P) ни тегишлича A ва B реакцияларга тенг қисмларга ажратади.

Ҳар бир кесимдаги эгувчи момент ёпиқ арқон қўпбурчагининг текширилаётган кесимга тегишли ординатаси (y) билан қутб оралиғи (H) нинг қўпайтмасига тенг бўлади. y ни ёпувчи VI нурдан вертикал йўналиш бўйи-

ча ўлчаш лозим. Демак, ёпиқ арқон қўпбурчаги маълум масштабда эгувчи момент эпюрасини тасвирлайди. Агар $H = 1$ деб олинса, арқон қўпбурчаги M эпюрасини асли масштабида тасвирлайди. График равишда чизилган M эпюрасини горизонтал чизиқдан ҳисоблаш учун, куч қўпбурчагидаги 6-нурни горизонтал ҳолатга келтириб, қутбни шу чизиқ устида олиш лозим. Қутб ихтиёрий танлангани учун, унинг вертикал йўналишда кўчирилиши



222-шакл.



223-шакл.

на y ни ва на қутб оралиғи (H) ни ўзгартиради; фақат арқон кўпбурчаги қулай қўринишда тасвирланади, холос.

Эгувчи моментни аниқлаш учун y ни узунлик масштабида, қутб оралиғи (H) ни эса куч масштабида ўлчанг лозим. Q нинг эпюраси олдинги масаладаги усул билан чизилади (222-шакл, с).

Энди, ёйилган юк учун M ва Q эпюраларини чизишга ўтамиз. Балкага таъсир этувчи ёйилган юкни балка бўйича бир қанча участкага ажратиб, ҳар қайси участкадаги ёйилган юкни унинг тенг таъсир қилувчисига алмаштирамиз. Ҳар қайси тенг таъсир қилувчининг миқдори тегишли юк юзига тенг бўлиб, унинг оғирлик марказига қўйилган. Ёйилган юкни ўзаро параллел бир қанча $R_1, R_2, R_3, \dots, R_n$ тўпланган юк билан алмаштирдик. Бу юклар учун куч ва арқон кўпбурчақларини чизиб, арқон кўпбурчагининг ичидан унинг ҳар қайси томонига лекало ёрдами билан уринма эгри чизиқ ўтказиш лозим. Бу эгри чизиқ арқон чизиғи деб аталади. Ҳалиги участкаларнинг сони қанча кўп олинса, арқон кўпбурчагига ички чизилган арқон эгри чизиғи ўзининг ҳақиқий ҳолатига шунча яқин келади.

223-шаклда икки таянчга тиралган ва ихтиёрий қонун билан ёйилган юк таъсир этаётган балка учун арқон эгри чизиғи ясалган.

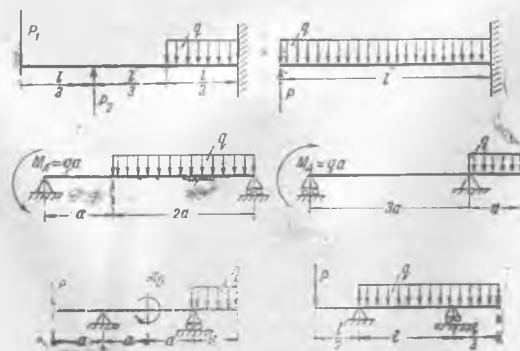
Бу ҳолда балка давомида таъсир этувчи ёйилган куч юзи олтига участкага ажратилган. Арқон чизигининг ёпувчи нури (VIII) ёрдами билан куч кўпбурчагидан таянч реакциялари аниқланади.

Q нинг эпюраси куч кўпбурчаги ёрдамида чизилганда поғонали шакл ҳосил бўлади. Ҳар қайси погонанинг уртасидаги нуқталарни олиб, уларни лекало билан туташтириш натижасида Q нинг эпюрасини чиқарамиз.

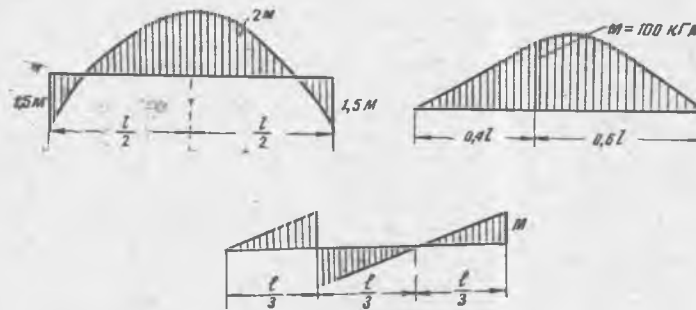
МАСАЛАЛАР

66. 224—229-шаклларда келтирилган схемаларда юкланган балкалар учун кесиб ўтувчи куч ва эгувчи момент эпюралари чизилсин.

67. 230—232-шаклларда келтирилган эгувчи момент эпюралари икки таянчга тиралган балкага қўйилган қандай юкларга мос келади? Шу юклар учун кесиб ўтувчи кучлар эпюраси чизилсин.



224 — 229-шакллар.



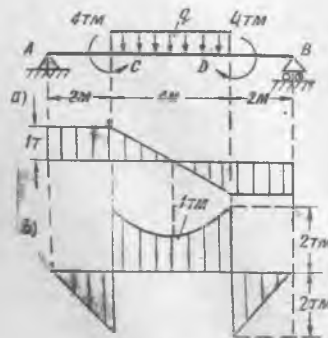
230 — 232- шакллар.

68. 233- шаклда кўрсатилган балкага таъсир қилувчи тенг ёйилган куч интенсивлиги (q) нинг қандай қийматида балканинг ўрта кесимида эғувчи момент нолга тенг бўлади?
 Жавоби. $q = 0,833 \text{ т/м}$.



233- шакл.

69. 234- шаклда кўрсатилган балкага таъсир қилувчи тенг ёйилган юк интенсивлиги (q) нинг қандай қийматида C кесимининг бевосита чап ва ўнг томонларида эғувчи моментнинг абсолют қийматлари бир хил бўлади? Шу ҳол учун Q ва M эпюралари чизилсин.
 Жавоби. $q = 0,5 \text{ т/м}$; Q ва M эпюралари 234-шакл, а ва б да тасвирланган.



234- шакл.

70. 235-шаклда тасвирланган балка учун C ва D кесимларга қўйилган моментнинг қандай қийматида C кесимининг бевосита ўнг томонида эғувчи момент нолга тенг бўлади? Бу ҳол учун Q ва M эпюралари чизилсин.

Жавоби. $M_0 = 2 \text{ т/м}$; Q ва M эпюралари 235-шакл, а ва б да тасвирланган.

71. 236- шаклда тасвирланган балка учун P кучининг қандай қийматида C кесимининг бевосита чап томонида кесиб ўтувчи куч нолга тенг бўлади? Бу ҳол учун Q ва M эпюралари чизилсин.

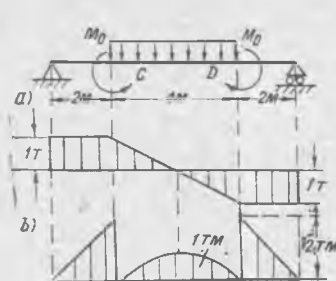
Жавоби. $P = 2 \text{ т}$; Q ва M эпюралари 236- шакл, а ва б да тасвирланган.

72. 237 — 239-шакллардаги балкалар учун Q эпюралари тасвирланган. Бу ҳоллар учун M эпюралари чизилсин.

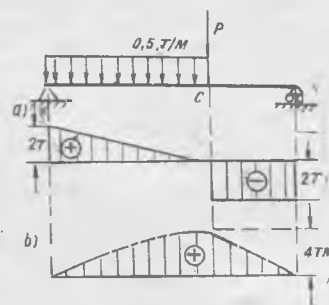
Кўрсатма. 72- параграфда келтирилган мулоҳазалардан фойдаланилсин; M эпюраси 237 — 239-шаклларнинг пастиди тасвирланган.

73. 240- шаклдаги балка учун M эпюраси берилган. Бу ҳол учун Q эпюраси чизилсин.

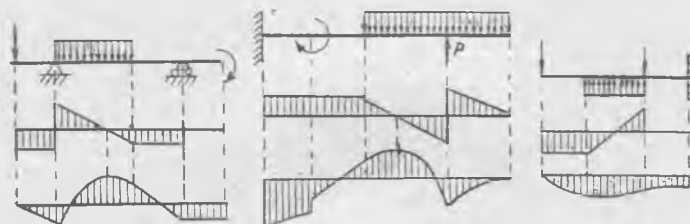
Кўрсатма. Бу масала ҳам 72- параграфдаги мулоҳазалар асосида ечилади.



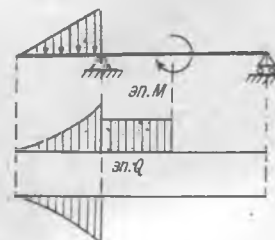
235- шакл.



236- шакл.



237 — 239- шакллар

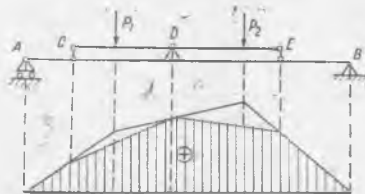


240- шакл.

76-§. Тугунлар орқали юкланган балкалар учун M ва Q эпюраларини ясаш

Тугунлар ёрдами билан таъсир қиладиган юкларнинг схематик кўриниши 241-шаклда тасвирланган. Балкага қўйиладиган P_1 ва P_2 юклар ёрдамчи балкалар CD ва DE орқали асосий балкага узатилади. Юклар ёрдамчи балкаларга қандай тартибда қўйилмасин, асосий балка ўзининг маълум кесимларига ўрнатилган ёрдамчи балкалар таянчлари орқали узатиладиган босимларни қабул қилади. Статика нуқтаи назаридан бу ҳол ёрдамчи балкаларга қўйилган ҳар бир юкни мазкур ёрдамчи балкаларнинг таянчлари орқали асосий балкага узатиладиган эквивалент кучларга ажратишдир. Юкларни тугунлар орқали асосий балкага узатишда унинг таянч реакцияси ўзгармайди. Шунингдек, асосий балкага бевосита қўйилган ва ёрдамчи балкалар орқали узатилган юклардан тугунлардаги кесимларда эгувчи моментлар бир хил бўлади. Ҳақиқатаи ҳам, асосий балканинг D кесимидаги (241-шакл) эгув-

чи момент асосий балканинг чап таянч реакцияси (A) билан P_1 кучдан ҳосил бўлади. Тугун орқали узатилган юк учун эса эгувчи момент яна ҳалғи реакция билан P_1 га статик эквивалент бўлган ёрдамчи балкаларнинг иккита реакциясининг моментига тенг. Бу хулосадан фойдаланиб, тугунлар орқали узатилган юклар учун эгувчи момент эпюраларини чизиш қондасини қуйидагича таърифлаймиз. Юклар бевосита асосий балкага қўйилган деб



241-шакл.

эгувчи момент эпюраси чизилади, сўнгра тугунларнинг проекцияси эпюра чизигига туширилиб, уларни туташтириш билан тугунлар орқали юкланган балка учун эгувчи момент эпюраси 241-шаклда штрихланган кўринишда ҳосил қилинади.

Кесиб ўтувчи кучнинг эпюрасини одатдаги йўл билан чизиш мумкин.

□

XI боб

ЭГИЛИШДАГИ КУЧЛАНИШЛАРНИ ҲИСОБЛАШ

77-§. Соф эгилиш. Эгилиш назариясига оид гипотезалар

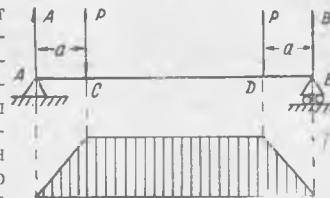
Балкаларнинг турли кўндаланг кесимларида ҳосил бўладиган эгувчи момент ва кўндаланг кучларни юқорида текшириб ўтдик. Энди, мазкур кесимлардаги нормал ва тангенциал кучланишларни аниқлаш масаласига ўта-миз. Нормал кучланишнинг фақат эгувчи моментга, тангенциал кучланишнинг эса фақат кесиб ўтувчи кучга боғлиқлигини, яъни:

$$\sigma = \sigma(M), \quad (77.1)$$

$$\tau = \tau(Q) \quad (77.2)$$

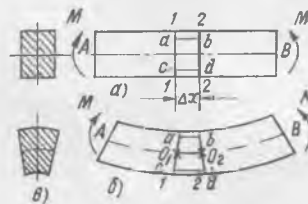
эканелигини исботлаган эдик. Бу хулоса нормал ва тангенциал кучланишларни бир-биридан қатъий назар аниқлашга имкон беради. Олдин балкага қўйилган кучлар системасининг ҳамма кўндаланг кесимларда бир хил эгувчи момент берадиган холини текшира-миз, яъни балка давомда $M = \text{const}$ бўлсин. Ундай бўлса, Д. И. Журавский теоремасига мувофиқ, $Q = \frac{dM}{dx} = 0$ бўлади. Балканинг хусусий оғирлиги эътиборга олинмаганда, бундай ҳолнинг мавжуд бўлиши мумкин. Масалан, бир учи қисилиб тиралган балканинг бошқа учига жуфт куч қўйилган бўлса, унинг барча кўндаланг кесимларидаги эгувчи моментлар бир хил бўлиб, ўзгармас қийматга эга ва $Q = 0$ бўлади. Ёки учлари билан икки таянчга тиралган балкага таянчлардан бир таянч масофадаги C ва D нуқталарга P кучи қўйилган бўлса (242-шакл), CD қисмида $M = \text{const}$ бўлиб, $Q = 0$ бўлади.

Бундай эгилиш *соф эгилиш* дейилади. 242-шаклдаги балканинг чап таянчидан a масофадаги кесимни олсак, бу кесимда фақат эгувчи момент $M=Pa$ таъсир этиб, $Q=0$ бўлади. Шунинг учун кесим юзаси бўйича нормал кучланишлар бўлиб, уларнинг моменти ҳалиги эгувчи моментга тенг жуфт кучга келтирилади. Қўндаланг кесимнинг қайси нуқтасида энг катта нормал кучланиш ҳосил бўлишини билиш учун, нормал кучланишнинг кесим юзаси бўйича қандай қонун билан ўзгаришини билиш зарур. Аммо мувозанат шартидан бу масаланинг жавобини ололмаймиз. Бу жихатдан олганда масала статик аниқмасдир. Қўшимча тенгламани балканинг деформацияланишини текшириш учун ўтказилган тажрибаларнинг оқибатларидан фойдаланиб чиқарамиз. Бунинг учун симметрия текислигида ётувчи жуфт кучлар таъсирида соф эгилишда бўлган балка учун кузатиш натижаларини кўздан кечиравимиз (243-шакл).



242-шакл.

Балканинг сиртида, унинг бир-бирига чексиз яқин икки кесимини аниқловчи 1—1 ва 2—2 чизиқларни оламиз. Уларнинг оралиги dx бўлсин. Ҳалиги кесимлар орасида балканинг ўқиға параллел қилиб, ab ва cd чизиқларни ўтказамиз. Булардан ab ни балканинг юқориги юзасига, cd ни эса пастки юзасига яқин қилиб оламиз (243-шакл, а). Балка деформациялангунча: $ab = cd = dx$ эди.



243-шакл.

Ўтказилган тажрибалар қуйидагиларни кўрсатади:

1. Деформация натижасида 1—1 ва 2—2 тўғри чизиқлар тўғрилигича қолиб, фақат бир-бирига нисбатан $d\theta$ бурчакка айланади.
2. ab кесма қисқариб, cd кесма узаяди (243-шакл, б).
3. Балканинг кенглиги толаларининг сиқилган зоналарида ортиб, узайган зоналарида эса камаяди (243-шакл, в). Бу ҳодисани Пуассон коэффициентини воситаси билан ҳисобга олиш мумкин.

Келтирилган тажриба оқибатларидан, соф эгилишдаги балканинг деформацияси ҳақида қуйидаги хулосаларни чиқаришимиз мумкин:

Модомики, балка сиртидаги 1—1 ва 2—2 чизиқлар деформация натижасида тўғрилигича қолиб, фақат бир-бирига нисбатан айланади, балканинг қўндаланг кесим юзалари текислигича қолиб, фақат бир-бирига нисбатан $d\theta$ бурчакка айланади. Қўйилган жуфт куч моменти мусбат бўлган ҳолда ab қисқариб, cd узайгани учун, балканинг юқори қатламларидаги толалари сиқилиб, пастки қатламларидаги толалари чўзилади.

Балканинг деформацияси баландлиги бўйича узлуксиз равишда ўзгариши учун, пастки қатламдаги толалар чўзилишдан сиқилишга ўтишда, бу қатламларни ажратувчи шундай бир қатламни учратамизки, ундаги толалар ўз узунлигини ўзгартирмайди. Бу қатлам *нейтрал* қатлам деб аталади. 243-шакл, в да нейтрал қатлам нуқтали чизиқ билан тасвирланган. Нейтрал қатламда олинган O_1O_2 кесманинг узунлиги (dx) ўзгармаган.

Биз текшираётган ҳолда, кучлар текислиги балканинг симметрия текислиги бўлгани учун, унинг иккала томонидаги қисмлари мазкур симметрия текислигига нисбатан симметрик деформацияланади. Шунинг учун, нейтрал

қатламга параллел ҳар қандай қатламдаги толаларнинг деформацияси балканинг кенглиги бўйича қандай ҳолатда эканлигига боғлиқ бўлмайди, деган ҳулласани чиқаришимиз мумкин. Нейтрал қатламнинг ҳар бир кўндаланг кесим юзаси билан аниқланган чизиги мазкур кесимнинг *нейтрал ўқи* деб аталади. Нейтрал қатлам балканинг симметрия текислигига тик бўлгани учун, нейтрал ўқ ҳам шу текисликка тикдир. Балка эгилганда ҳар бир кўндаланг кесим ўз нейтрал ўқи атрофида айланади. Масалан, 243-шаклда 1—1 чизик билан аниқланган кўндаланг кесим нейтрал ўқ O_1 атрофида, 2—2 билан аниқланган кўндаланг кесим эса O_2 атрофида айланиши тасвирланган. 1—1 ва 2—2 чизиклар билан аниқланган кўндаланг кесимлар нейтрал ўқ устида ётмаган бошқа ўқлар атрофида айланса, O_1O_2 кесманинг узунлиги ўзгарган бўлар эди.

Кўндаланг кесимлар кучлар текислигига тик бўлган нейтрал ўқлар атрофида айланиши учун, мазкур текисликдаги нуқталар деформациядан кейин ҳам шу текисликда қолади. Демак, балканинг ўқи деформациядан кейин кучлар текислигида қолиб, фақат текис эгри чизикқа айланади. Шунинг учун ҳам бундай эгилиш *текис эгилиш* дейилади.

Юқорида келтирилган мулоҳазалар асосида соф эгилиш назариясининг гипотезаларини қуйидагича таърифлаймиз:

а) Соф эгилишда балканинг деформациягача текис бўлган кўндаланг кесимлари деформациядан кейин ҳам текислигига қолади. Бу қоида, кўпинча, «текис кўндаланг кесим гипотезаси» ёки Бернулли гипотезаси дейилади. Энг аввал бу гипотезани 1705 йилда Я. Бернулли деган олим баён этган эди.

б) Балканинг бўйлама толалари кесимнинг кенглиги бўйича ўзаро ҳеч қандай босим кўрсатмайди, нормал кучланишлар таъсиридан толалар фақат чўзилади ёки сиқилади.

Толалар балканинг кенглиги бўйича бир хилда деформацияланади. Шунинг учун нормал кучланиш ҳам балканинг баландлигига ўзгариб, кенглигига ўзгармайди. Бу гипотезалар соф эгилиш учун тажриба оқибатининг ҳулосалари бўлган ҳолда, кўндаланг эгилиш учун тақрибий аҳамиятга эгадир. Аммо кўпчилик ҳолларда бу гипотезаларни татбиқ қилиш натижасида рўй берадиган хатоларни амалий масалаларни ечишда эътиборга олмаса ҳам бўлади.

78- §. Соф эгилишдаги нормал кучланишлар

Моменти M га тенг жуфт кучлар таъсиридан соф эгилишда бўлган балкани олиб, унинг ўқига тик қилиб 1—1 текисликни ўтказамиз. Бу текислик билан балкани фикран икки қисмга ажратиб, чап қисмининг мувозанатини текшираемиз (244-шакл). Тасвирлаш жиҳатидан оддий бўлгани учун тўғри тўртбурчак кесимли балкани олдик. Балканинг чап қисмини қолдириб, унинг мувозанатини текшираемиз. Мувозанат тенгламаларини тузишда текширилаётган қисмининг деформациясини эътиборга олмаслигимиз мумкин, чунки бу деформация балка ўлчамларига қараганда жуда кичикдир. Координата ўқларининг йўналишини қуйидагича танлаймиз. Балканинг симметрия текислиги (ташқи кучлар ҳам шу текисликда ётади) билан кўндаланг кесим юзларининг кесишган чизикларини z ўқи деб қабул қиламиз, y ўқини кесимнинг нейтрал ўқи бўйлаб йўналтирсак, x ўқи yz текислигига тик бўлиб, нейтрал қатламда ётади. Аммо нейтрал қатламнинг ҳолати маълум бўлмагани учун, ҳозирча y ва x ўқларининг ҳолати ҳам маълум эмас.

Кундаланг кесимнинг ҳар бир нуқтасига нормал кучланиш (σ) таъсир қилади. Координаталари y ва z бўлган бирор нуқтанинг атрофидан элементар dF юза ажратамиз (244-шакл). Мазкур элементар юзага таъсир этувчи нормал зўриқиш $dN = \sigma dF$ бўлади.

Балканинг қолдирилган қисми моменти M га тенг бўлган ташқи жуфт ва ташлаб юборилган қисмининг таъсирини алмаштирувчи dN нормал зўриқишлар таъсирида мувозанатда туради. Шунинг учун мазкур кучлар системаси статиканинг олти та мувозанат тенгламасини қаноатлантириши керак.

Олдин x, y, z ўқларидаги проекциялар тенгламасини ёзамиз. Жуфт кучнинг ҳар қандай ўқдаги проекцияси айнан нолга тенг бўлгани учун, координата ўқларидаги проекциялар тенгламаси dN нормал зўриқишларнинг тегишли ўқлардаги проекцияларининг йиғиндисини нолга тенглашдан иборат бўлади:

$$\sum X = \int_F \sigma dF = 0. \quad (78.1)$$

Нормал зўриқиш dN координата ўқлари y ва z га тик йўналгани учун, унинг бу ўқлардаги проекцияси айнан нолга тенг, шунинг учун қуйидаги икки тенглама айниятга айланади:

$$\sum Y = 0, \quad \sum Z = 0.$$

Энди, x, y, z ўқларига нисбатан моментлар тенгламаларини тузамиз. Балкага қўйилган жуфт куч $хоз$ текислигида ётгани учун, унинг x ва z ўқларига нисбатан моменти нолга тенгдир. dN нормал зўриқиш x ўқига параллел бўлгани учун мазкур x ўқиға нисбатан олинган моментлар йиғиндиси ҳам айнан нолга тенг бўлиб, тегишли тенглама айниятга айланади:

$$\sum M_x = 0.$$

y ва z ўқларига нисбатан олинган моментлар йиғиндиси қуйидагича ёзилади:

$$\sum M_y = - \int_F \sigma dF \cdot z + M = 0.$$

Бундан:

$$M = \int_F \sigma z dF. \quad (78.2)$$

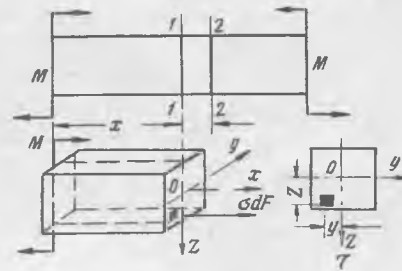
$$\sum M_z = \int_F \sigma dF \cdot y = 0. \quad (78.3)$$

Бинобарин, статиканинг олти та тенгламасидан фақат учтасидангина фойдаланиш мумкин экан, улар қуйидагилардир:

$$\sum X = 0 \text{ ёки } \int_F \sigma dF = 0; \quad (78.1)$$

$$\sum M_y = 0 \text{ ёки } \int_F \sigma z dF = M; \quad (78.2)$$

$$\sum M_z = 0 \text{ ёки } \int_F \sigma y dF = 0. \quad (78.3)$$

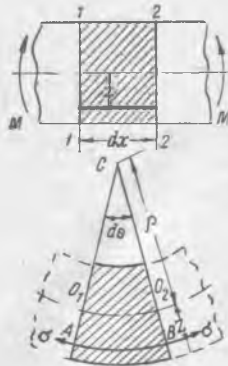


244-шакл.

Аммо бу тенгламалардан кучланиш (σ) ни аниқлаб бўлмайди, чунки у элементар dF юзанинг координатаси (z) га боғлиқдир.

σ кучланиш балканинг баландлиги бўйича қандай қонун билан ўзгариши маълум эмас. Ундан ташқари, нейтрал ўқ (y) нинг ҳолати ҳам маълум бўлмагани учун, оралиқ (z) ҳам номаълумдир.

Қўшимча тенгламани тузиш мақсадида балканинг деформациясини текшираемиз. Бунинг учун балкадан бир-бирига чексиз яқин 1—1 ва 2—2



245-шакл.

кўндаланг кесимлар воситаси билан узунлиги dx га тенг бўлган бир элемент ажратамиз. Бу элементнинг деформациягача ва ундан кейинги кўриниши 245-шаклда тасвирланган. 1—1 ва 2—2 кўндаланг кесимлар текис қолган ҳолда нейтрал ўқлар атрофида айланиб бир-бири билан $d\theta$ бурчак ҳосил қилади. Шаклда нейтрал қатлам нуқтали чизик билан кўрсатилган. O_1O_2 кесма нейтрал қатлам устида ётгани учун деформациядан кейин ҳам ўзининг олдинги узунлиги (dx) ни сақлайди.

Нейтрал қатламдан юқоридаги барча толалар сиқилиб, пастдагилари чўзилади. Нейтрал қатламдан z масофадаги бирор AB толанинг σ кучланиш таъсиридан чўзилишини аниқлаймиз. Бу толанинг деформациягача узунлиги $AB = dx = \rho d\theta$ эди. Деформациядан кейин у A_1B_1 ёй билан тасвирланади, бу ёйнинг узунлиги $A_1B_1 = (\rho + z)d\theta$.

Текширилаётган толанинг абсолют чўзилиши

$$\Delta(dx) = A_1B_1 - AB = (\rho + z)d\theta - \rho d\theta = z d\theta$$

бўлади. Бу толанинг нисбий чўзилиши (ϵ) ни аниқлаш учун $\Delta(dx)$ ни текширилаётган толанинг олдинги узунлиги (dx) га бўлиш керак:

$$\epsilon = \frac{\Delta(dx)}{dx} = \frac{z d\theta}{\rho d\theta} = \frac{z}{\rho}. \quad (78.4)$$

Демак, текширилаётган толанинг нисбий чўзилиши унинг нейтрал ўқ-қача бўлган масофасига пропорционал экан. Бунда ρ — нейтрал қатламнинг эгрилик радиуси; z ажратилган элемент учун маълум қийматга эгадир.

Юқорида қабул қилинган гипотезаларга мувофиқ, эгилишда балканинг толалари бир-бирига ҳеч қандай босим кўрсатмасдан, ҳар қайси тола ўзича чўзилиб ёки сиқилади. Бундай чўзилишдаги ёки сиқилишдаги толаларда ҳосил бўлган кучланишларни ҳисоблаш учун Гук қонунидан фойдаланишимиз мумкин. Шунинг учун:

$$\sigma = E\epsilon = E \frac{z}{\rho}. \quad (78.5)$$

Кураимизки, кўндаланг кесимнинг бир нуқтасидаги нормал кучланиш, мазкур нуқтанинг нейтрал ўқ-қача бўлган масофасига пропорционал экан. Демак, соф эгилишда нормал кучланиш балканинг баландлиги бўйича чизикли қонун билан ўзгаради. Бу (78.5) формула кўндаланг кесим бўйича нормал кучланиш (σ) нинг қандай қонун билан ўзгаришининггина ифодалайди, аммо унинг ёрдами билан кучланишни ҳисоблаб бўлмайди, чунки нейтрал ўқнинг ҳолати, шунинг билан бирга, нейтрал қатламнинг эгрилик радиуси (ρ) маълум эмас. Кучланиш (σ) ни эгувчи момент (M) билан боғ-

лаш учун, деформация шартидан чиқарилган тенглама (78.5) билан статика тенгламалари (78.1), (78.2) ва (78.3) ни биргаликда ечиш лозим. Кучланиш (σ) нинг қийматини (78.5) дан (78.1) тенгламага қўямиз:

$$\int_F \frac{E}{\rho} z dF = 0.$$

$\frac{E}{\rho} = \text{const}$ ва нолга тенг бўлмагани учун:

$$\int_F z dF = 0 \quad (78.6)$$

бўлади.

Бу интеграл кўндаланг кесим юзасининг нейтрал ўққа нисбатан статик моментидир. У нолга тенг бўлаётир; демак, нейтрал ўқ кесим юзасининг оғирлик марказидан ўтар экан. Оз ўқи кесимнинг симметрия ўқи бўлгани учун оғирлик маркази бу ўқнинг устида ётади. Ҳар бир кўндаланг кесимда оғирлик маркази (O) икки ўқнинг кесишган нуқтасида ётгани учун, координаталар ўқи (Ox) балканинг геометрик ўқи бўлади. Демак, (79.6) тенглама нейтрал ўқ ва нейтрал қатламнинг ҳолатини тўла аниқлайди.

Энди, (78.5) ифодани (78.3) га қўямиз:

$$\int_F \frac{E}{\rho} zy dF = 0 \quad \text{ёки} \quad \frac{E}{\rho} \int_F zy dF = 0;$$

бундан:

$$\int_F zy dF = 0. \quad (78.7)$$

Бу интеграл кўндаланг кесим юзасининг y ва z ўқларига нисбатан марказдан қочувчи инерция моментидир. z ўқи симметрия ўқи бўлганлигидан у бош ўқдир, шунинг билан бирга, нейтрал ўқ (y) ҳам кўндаланг кесимнинг иккинчи бош ўқи бўлади.

Масалани осонлаштириш учун z ўқини кўндаланг кесимнинг симметрия ўқи деб фараз қилдик. Бундан фойдаланиб, эгилиш текислиги билан кучлар ётган текисликларни мос келади ва нейтрал ўқ (y) бу текисликларга тик йўналади, деган хулосани чиқардик. Нейтрал ўқнинг кучлар текислигига тик йўналишини умумий ҳол учун, яъни z ўқи симметрия ўқи бўлмаган ҳол учун ҳам исботлаш мумкин. Олдинги хулосага диққат билан қарасак, z ўқининг симметрия ўқи эканлигидан фақат кўндаланг кесим юзаси марказдан қочувчи инерция моменти (I_{yz}) нинг нолга тенг бўлиши учун фойдаландик. Аммо марказдан қочувчи инерция моменти (I_{yz}) симметрия ўқи бор кесим учунгина эмас, балки ихтиёрий шаклдаги кесим учун z ва y ўқлар бош инерция ўқлари бўлган ҳолда ҳам нолга тенг бўлади. Бунга асосланиб, қуйидаги хулосани чиқаришимиз мумкин: эгувчи момент кўндаланг кесим юзасининг бош ўқларидан биттаси орқали ўтувчи zx текисликда ётса, нейтрал ўқ кўндаланг кесимнинг иккинчи бош ўқи бўлади. Балканинг геометрик ўқи ва кўндаланг кесим юзасининг бирор бош инерция ўқи орқали ўтувчи текислик *бош текислик* деб аталади. Балкага қўйилган жуфт унинг бош текисликларидан биттасида ётса, эгилиш шу текисликда бўлади. Ниҳоят, статиканинг энг кейинги тенгламаси (78.2) дан фойдаланамиз. Унга (78.5) ни қўйсак:

$$\int_F \frac{E}{\rho} z^2 dF = M \quad \text{ёки} \quad \frac{E}{\rho} \int_F z^2 dF = M$$

келиб чиқади. Бу тенгликнинг чап томонидаги интеграл кўндаланг кесим юзасининг нейтрал ўққа нисбатан инерция моменти бўлгани учун, уни I_y орқали белгилаймиз:

$$I_y = \int_F z^2 dF. \quad (78.8)$$

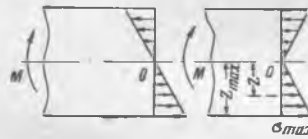
Бу қўзда тутилса, юқоридаги тенглама қуйидагича ёзилади:

$$\frac{EI_y}{\rho} = M \quad \text{ёки} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_y} \quad (78.9)$$

Эгилган ўқнинг эгрилиги $\frac{1}{\rho}$ эгувчи момент (M) га тўғри пропорционал бўлиб, EI_y га тескари пропорционал экан. EI_y балканинг эгилишдаги бикирлиги деб аталади. (78.9) тенглама эгилиш назариясининг асосий муносабатларидан биридир. Бу муносабатдан фойдаланиб, келгусида балканинг эгилган ўқини текшираимиз; ҳозирча ундан фойдаланиб, нормал кучланиш формуласини чиқарамиз.

$\frac{1}{\rho}$ нинг қийматини (78.9) дан (78.5) га қўйсак, қуйидаги формула ҳосил бўлади:

$$\sigma = \frac{M}{I_y} z. \quad (78.10)$$



246- шакл.

Кўндаланг кесимнинг ҳар бир нуқта-сидаги нормал кучланиш эгувчи момент ва мазкур нуқтанинг нейтрал ўққача бўлган масофасига тўғри пропорционал бўлиб, кўндаланг кесим юзасининг нейтрал ўққа нисбатан олинган инерция моментига тескари пропорционал экан. (78.10) дан фойдаланиб, балканинг кўндаланг кесими бўйича нормал кучланиш (σ) нинг ўзгариш қонунини тасвирлашимиз мумкин. Пастки қатламлардаги толалар чўзилиб, нейтрал ўқда ($z = 0$), $\sigma = 0$ бўлади. Сиқилиш зонасига ўтиш билан кучланиш (σ) координата z билан бирга ишорасини $+$ дан $-$ га ўзгартиради, унинг абсолют қиймати эса нейтрал ўқдан узоқлашган сари кўпая боради. Демак, кучланишнинг энг катта қиймати кесимнинг энг юқори ва энг паст толаларида $z = z_{\max}$ бўлганда ҳосил бўлар экан. Кучланиш (σ) нинг тўғри тўрт бурчакли кесим бўйича тарқалиши 246-шаклда тасвирланган.

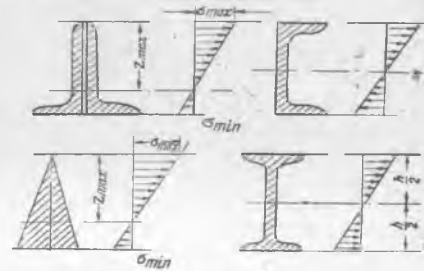
79-§. Эгилиш учун ҳисоб тенгламаси

Соф эгилиш учун балканинг кўндаланг кесимидаги нормал кучланиш (78.10) формуладан ҳисобланади. Ўтказилган текширишлар бу формула ёрдами билан Q нолга тенг бўлмаганда ҳам нормал кучланишни ҳисоблаш мумкинлигини кўрсатади. Q нинг мавжуд бўлиши текис кўндаланг кесимларни бирмунча қийшайтиради, аммо бу қийшайиш иккита қўшни кўндаланг кесим орасидаги элемент толаларининг бўйлама деформациялари характерини ўзгартирмайди. 247-шаклда турли шаклдаги кўндаланг кесимлар учун нормал кучланишнинг ёйилиш характери тасвирланган. Нейтрал ўқдан бир хил узоқликдаги барча нуқталарда нормал кучланишлар бир хилдадир. Нейтрал ўқнинг бир томонида кучланиш чўзувчи бўлиб, бошқа томонида сиқувчидир. Энг катта нормал кучланишлар нейтрал ўқдан энг узоқ нуқталарда ҳосил бўлади.

M ва z нинг 244-шаклда кўрсатилганча йўналиши σ учун тўғри ишорани беради. Эгувчи момент мусбат бўлган ҳолда, балканинг дўнг томони пастга қараган бўлиб, юқоридаги толалар сиқилади: $z < 0$ бўлганидан (78.10) формула манфий ишорада бўлади; $M < 0$ бўлса, юқоридаги толалар чўзилар эди: $z < 0$ бўлгани учун $\sigma > 0$ бўлар эди.

Қўндаланг кесимнинг чўзувчи толаларига мос нуқталарда σ ни мусбат, сиқилувчи толаларга мос нуқталарда эса манфий ишора билан олиш лозим.

Балка материалнинг нормал кучланишга нисбатан мустақамлигини текшириш учун, энг катта чўзувчи ва сиқувчи кучланиш таъсиридаги юзачани топиш лозим. Бунинг учун олдин хавфли кесимни ва ундаги энг катта эгувчи моментнинг қийматини аниқлаш лозим. Мазкур кесимнинг нейтрал ўқдан энг узоқ нуқтаси учун $z_{\max}$ ни топиб, (78.10) га қўйиш керак. У ҳолда энг катта нормал кучланиш учун қуйидаги формулани оламиз:



247-шакл.

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} z_{\max}}{I_y} \quad (79.1)$$

Бу формуланинг сурати ва маҳражини $z_{\max}$ га бўлиб, қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{\left(\frac{I_y}{z_{\max}}\right)}$$

$\frac{I_y}{z_{\max}}$ эгилишдаги қаршилик моменти деб аталади ва W_y билан белгиланади:

$$\frac{I_y}{z_{\max}} = W_y \quad (79.2)$$

Қўндаланг кесимнинг нейтрал ўққа нисбатан инерция моменти $I_y \text{ см}^4$ ҳисобида ўлчангани учун қаршилик моменти $W \text{ см}^3$ ҳисобида ўлчанади. (79.2) ни кўзда тутиб, максимал нормал кучланишни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y} \quad (79.3)$$

Қўрамызки, балканинг қўндаланг кесими учун қаршилик моменти (W_y) қанча катта бўлса, ундаги максимал нормал кучланиш шунча кичик бўлар экан. Қаршилик моменти (W_y), инерция моменти (I_y) каби, қўндаланг кесим ўлчамлари билан бирга унинг шаклига ҳам боғлиқдир. Қандай кўринишдаги қўндаланг кесимнинг энг рационал бўлиши ҳақида кейинги параграфда тўхталиб ўтамиз. Қаршилик моменти (W) оддий кўринишдаги шакллар учун инерция моменти (J) каби ҳисобланади. Масалан, тўғри тўртбурчакли кесим учун:

$$W_y = \frac{I_y}{h/2} = \frac{bh^3}{12} : \frac{h}{2} = \frac{bh^2}{6}$$

бўлади. Кўп тарқалган стандарт профиллар учун W нинг қийматлари ГОСТ нинг махсус жадвалларида берилади.

Балка материалнинг рухсат этилган кучланиши $[\sigma]$ чўзилиш ва сиқилиш учун бир хил бўлса, кўндаланг кесим шакли ва ўлчамлари маълум бўлган балканинг мустаҳкамлик шарти (79.3) га мувофиқ, қуйидагича ёзилади:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y} \leq [\sigma]. \quad (79.4)$$

Маълум юк таъсиридаги балканинг материали берилган бўлса, унинг мустаҳкамлигини таъмин этувчи кўндаланг кесимни танлаш учун олдин (79.4) дан қаршилик моменти (W_y) ни аниқлаш лозим:

$$W_y \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}. \quad (79.5)$$

Кесим учун энг маъқул шакл танланиб, унинг ўлчамлари ГОСТ жадвалидан олинади ёки бевосита ҳисобланади. Бу тарзда танланган қаршилик моментининг қиймати (79.5) формуладан чиқарилган қийматга мумкин қадар яқин бўлиши керак. Танланган қаршилик моментининг қиймати унинг ҳақиқий қийматидан 5% чегарасида кагга ёки кичик бўлиши мумкин. Қаршилик моменти стандарт профиллар учун ГОСТ нинг жадвалидан танланганда бундай фарқ албатта бўлади; бундай ҳолларда фарқнинг ортиқча мустаҳкамлик берадиган томонини олиш зарур.

Балканинг материали ва кўндаланг кесим юзи маълум бўлса, унга қўйилиши мумкин бўлган юкни аниқлаш учун олдин (79.4) формуладан $M_{\max}$ ни ҳисоблаш зарур:

$$M_{\max} \leq W_y [\sigma]. \quad (79.6)$$

Бу қийматга асосланиб, балканинг маълум оралиғи учун қўйилиши мумкин бўлган юк аниқланади.

Нейтрал ўқ кесимнинг симметрия ўқи бўлмаса, бунинг устига, балканинг материали чўзилиш ва сиқилишга бир хилда қаршилик кўрсатмаса, мустаҳкамлик шартини чўзилувчи ва сиқилувчи қисмлар учун алоҳида тузиш зарур. Рухсат этилган кучланишлар тегишлича $[\sigma_{\text{чўз}}]$ ва $[\sigma_{\text{сиқ}}]$ бўлса, қаршилик моментини чўзилувчи зона учун W_1 , сиқилувчи зона учун эса W_2 билан белгилаб, мустаҳкамлик шартини қуйидагича ёзамиз:

$$\sigma_{\text{чўз}} = \frac{M_{\max}}{W_1} \leq [\sigma_{\text{чўз}}], \quad \sigma_{\text{сиқ}} = -\frac{M_{\max}}{W_2} \leq [\sigma_{\text{сиқ}}]. \quad (79.7)$$

Прокат ва қуйма пулатлар учун эгилишдаги рухсат этилган кучланиш оддий чўзилишдагидек олинади.

Турли тошлар, улардан ишланган иншоот қисмлари ва бетонлар сиқилишга яхши қаршилик кўрсатгани ҳолда чўзилишга жуда ёмон ишлайди. Шунинг учун уларни чўзилишга мумкин қадар ишлатмаслик тadbирлари кўрилади. Иложи бўлмаган ҳолларда ортиқча запас қўйиб ишлатилади.

80-§. Балка кесимларининг рационал шакллари

Балкага қўйилган юклар ва кўндаланг кесим ўлчамлари маълум бўлса, унинг ҳар бир нуқтасидаги кучланиш миқдорини аниқлаб, шу билан бирга, балканинг мустаҳкамлиги тўғрисида мулоҳаза юргизишимиз мумкин. Аммо иншоотларни лойиҳалашда, кўпинча, юқорида айtilган масаланинг тескарисини ечишга тўғри келади.

Балканинг кўндаланг кесими шундай танланиши зарурки, у мустаҳкамлик шартини қаноатлантириш билан бирга, енгил бўлсин, яъни балканинг материали маълум хусусиятга эга бўлган ҳолда мустаҳкамлик шартини қаноатлантириши билан иқтисодий шартни ҳам қаноатлантирсин. Балкага

сарфланган материалнинг миқдори унинг қўндаланг кесим юзига пропорционал бўлади, шунинг учун қўндаланг кесим юзининг қиймати ўзгармаган ҳолда, унинг қаршилик моменти қанча катта бўлса, кесим шунча рационал шаклда, яъни шунча қулай бўлади.

Бу муносабат билан, қўндаланг кесим рационал шаклининг ўлчами учун $\frac{W}{F}$ нисбатни олиш мумкин. Масалан, тўғри тўртбурчакли кесим учун, $W = \frac{bh^2}{6}$, $F = bh$ бўлади. Унинг рационал ўлчами: $\frac{W}{F} = \frac{h}{6} = 0,167 h$ дир. Қўрамызки, тўғри бурчакли кесимнинг рационаллиги унинг баландлиги (h) га пропорционал ўсаётир. Бу пропорционалликни бошқа шаклдаги кесимлар учун ҳам шу тарзда ёзиш мумкин, лекин бунда пропорционаллик коэффициенти бошқа бўлади. Дарҳақиқат, қаршилик моменти (W) ни қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$W = \lambda F h. \quad (80.1)$$

Бундай кесимнинг рационал ўлчамини қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$\frac{W}{F} = \lambda h; \quad (80.2)$$

бунда λ — фақат кесимнинг шаклига боғлиқ коэффициент. Қандай кўринишдаги кесим энг рационал бўлишини текшириш учун, бир хил баландликдаги кесимларни солиштириш лозим. Масалан, диаметри $d = h$ бўлган доиравий кесимнинг рационал ўлчамини топамиз:

$$W = \frac{\pi r^3}{4}; \quad F = \pi r^2; \quad \frac{W}{F} = \frac{r}{4} = \frac{d}{8} = 0,125 h.$$

Демак, доиравий кесим учун $\lambda = 0,125$ бўлади. Тўғри бурчакли кесим доиравий кесимга қараганда бирмунча рационал бўлар экан. Шунинг учун баландлиги катта бўлган тўғри тўрт бурчакли кесим энг рационал бўлади, деган хулоса чиқаришимиз мумкин. Аммо кесимнинг кенглиги ҳисобига унинг баландлигини беҳад кўпайтириб бўлмайди, чунки ингичка кесимли балка эгилиш текислигидан оғиб, буралиб кетиши, яъни балканинг эгилишдаги мувозанати етарли даражада устивор бўлмаслиги мумкин. Қўндаланг кесим бўйича нормал кучланишнинг тарқалишига қарасак, нейтрал ўқ атрофидаги материал жуда оз фойдаланилган ҳолда, кесимнинг пастки ва юқоридаги чеккаларига яқин жойлашган материал катта кучланиш таъсирида бўлишини кўрамыз. Шунинг учун қўндаланг кесим материални кўпроқ юқори ва пастки чеккаларга яқин элементларга суриб, нейтрал ўққа яқин элементларда озайтирса ҳам бўлади. Бу мулоҳазалар оқибати қўш таврли ва швеллер кесимларнинг вужудга келишига сабаб бўлди.

Қўш таврли кесим учун $\lambda = 0,29 \div 0,31$ гача бўлади. Демак, қўш таврли кесимли прокат балка баландлиги u билан бир хил бўлган тўғри тўртбурчак кесимли балкага қараганда тахминан икки марта рационал бўлар экан, яъни унга баландлиги бир хилда тўғри тўртбурчак кесимли балкага қараганда тахминан икки ҳисса кўп юк қўйилиши мумкин экан. Швеллер кесимлар учун $\lambda = 0,27 \div 0,31$ орасида бўлади.

Агарда қўндаланг кесим бўйича барча материални кесимнинг тепа ва паст чеккасига жойласак, $I = I_0 + F \left(\frac{h}{2}\right)^2$ бўлади, бунда $I_0 = 0$ дейишимиз мумкин, чунки $I_0 = \frac{b(\Delta h)^3}{12} \approx 0$; шунинг учун: $I = F \left(\frac{h}{2}\right)^2$ дир.

Бу ҳолда:

$$\frac{W}{F} = \frac{F \left(\frac{h}{2}\right)^2}{F} = \frac{h}{2} = 0,5h; \quad \lambda = 0,5.$$

Аммо бу иккита юқори ва пастки чеккалардаги юзаларни бир-бири билан туташтириш учун бир девор бўлиши зарур. Бу деворнинг қалинлигини шундай танлаш керакки, у кесиб ўтувчи куч таъсирига бардош бера олсин. Ҳар ҳолда қўш таврли ва швеллер кесимлар идеал ҳолга анча яқиндир. Бу тарикадаги кесимларнинг баландлигини ҳам қалинлиги ҳисобига беҳад кўпайтириб бўлмайди. Масалан, бизда Совет Иттифокида тарқалган қўш таврли кесимнинг баландлиги 70 см, швеллерники 40 см гачадир. Бундан баланд кесимлар пайвандлаш ёки парчинлаш ёрдами билан туташтириладиган алоҳида полосалардан тузилади.

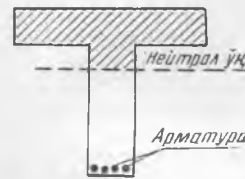
Балка материали чўзилиш ва сиқилишга бир хилда қаршилиқ кўрсатса, кўпинча, нейтрал ўққа нисбатан симметрик кесимлар қўлланилади. Нейтрал ўққа нисбатан симметрик бўлмаган кесимлар бундай ҳолларда ноқулайдир, чунки нейтрал ўқ билан энг четдаги толаларнинг оралиғи бир хил бўлмагани ҳолда, нейтрал ўқдан камроқ узоқдаги элементларда кучланишлар қиймати рухсат этилган кучланишдан пастдир. Аксинча, чўзилиш ва сиқилишга бир хилда қаршилиқ кўрсатмайдиган материаллар учун нейтрал ўққа нисбатан симметрик бўлмаган кесимларни ишлатиш қулайдир. Нейтрал ўқ билан энг четки толалар оралиғи (z_1 ва z_2) ни шундай танлаш керакки, улар тегишли рухсат этилган кучланишларга пропорционал, яъни:

$$\frac{M_{\max}}{I_y} z_1 = [\sigma_{\text{чз}}]$$

бўлсин, булардан:

$$\frac{M_{\max}}{I_y} z_2 = [\sigma_{\text{сик}}]$$

$$\frac{[\sigma_{\text{чз}}]}{[\sigma_{\text{сик}}]} = \frac{z_1}{z_2} \quad (80.3)$$



248- шакл.

Бу муносабат энг катта чўзилиш ва сиқилишдаги элементларда ҳосил бўладиган кучланишлар тегишли рухсат этилган кучланишларга тенг бўлишини таъмин этади. Бетоннинг сиқилишга яхши қаршилиқ кўрсатиш қобилиятидан эгилишда яхши фойдаланиш ниятида темир-бетон балкалар вужудга келтирилди. Энг четдаги чўзилган элементлар зонасига ўрнатилган доиравий кўндаланг кесимли пулат арматура чўзувчи кучланишларнинг деярли ҳаммасини қабул қилади. Бунда бетоннинг чўзилишга кўрсатадиган қаршилиги

этиборга олинмайди. Шунинг учун ҳам бетон юзасини чўзилган зоналарда мумкин қадар камайтириб, сиқилган зоналарда, аксинча, кўпайтириш зарурдир. Бундай талабни темир-бетон балкаларда кенг кўламда фойдаланиладиган таврли кесим қаноатлантиради (248- шакл).

81- §. Кўндаланг кесими тўғри тўрт бурчакли балкадаги тангенциал кучланишлар

Эгилишдаги тангенциал кучланишлар кесиб ўтувчи Q куч билан мувозанатлашуви бизга маълум. Юпқа тўғри тўртбурчак ва ундан ҳосил бўлган профилларда (қўш тавр, швеллер каби профилларда) тангенциал кучланишлар этиборга оладиган даражадаги қийматларга эришишини кейинчалик кўрсатамиз.

Шунинг учун, энг олдин эгилишдаги тангенциал кучланишларни кўндаланг кесими тўғри тўртбурчак бўлган балкалар учун ҳисоблаймиз.

Баландлиги h , кенлиги b бўлган тўғри тўртбурчак кесимли балкани оламиз (249-шакл). Балканинг чап томондаги қирқилган кесимига мусбат кесиб ўтувчи Q куч таъсир этади, деб фараз қилайлик. Бу куч текширилаётган кесим бўйича бирор қонун асосида ёйилган тангенциал кучланишлар билан мувозанатлашади.

1855 йилда инженер-олим Д. И. Журавский эгилишдаги тангенциал кучланишларнинг тақрибий назариясини ишлаб чиқди. Бу назария қуйидаги икки гипотезага асосланган:

1. Кўндаланг кесимдаги барча тангенциал кучланишларнинг йўналиши уларни мувозанатловчи кўндаланг Q кучга параллелдир.

2. Нейтрал ўқдан бир хил масофадаги элементларда ҳосил бўладиган тангенциал кучланишлар бир хил қийматларга эгадир.

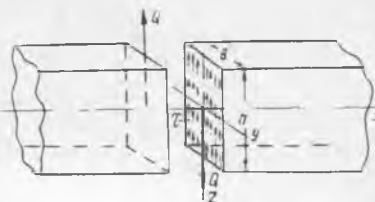
Юпқа тўғри тўрт бурчакли ва улардан ташкил топган кўндаланг кесимлар учун бу гипотезаларнинг тўғрилигини эластиклик назарияси тасдиқлайди.

Масалан, $\frac{h}{b} = 1$ бўлганда, тақрибий назариянинг хатоси 6% ни ташкил этади, $\frac{h}{b} = 2$ бўлганда эса 2% га бормайди.

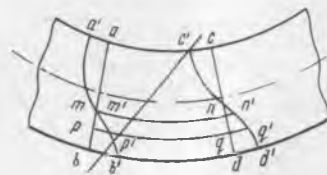
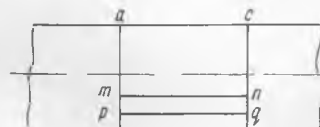
Амалда ишлатиладиган тўғри тўрт бурчакли ва улардан тuzилган кўндаланг кесимлар учун ҳамма вақт $\frac{h}{b} \geq 2$ бўлгани учун, бу тақрибий назария етарли даражада аниқ натижаларни беради. Балканинг баландлиги бўйича тангенциал кучланишнинг қандай қонун билан ўзгаришини аниқлаш учун эгилишдаги силжиш деформациясини текшираимиз.

Тўғри тўрт бурчакли параллелепипеднинг томонларига, унинг қиррасига тик йўналган тангенциал кучланишлар қўйилса, параллелепипеднинг тўғри бурчаклари қийшайиб, чизиқли элементларнинг оғиши бизга маълум. Балканинг иккита ab ва cd кўндаланг кесимини олиб, уларга тик йўналишдаги mn ва pq чизиқларни ўтказамиз (250-шакл).

Деформациягача балканинг кўндаланг кесимига тик бўлган mn ва pq чизиқлар деформациядан кейин эгилган ҳолда кўндаланг кесим юзасига тик бўлмайди. Натижада $mnpq$ элемент $m'n'p'q'$ га айланади. Элементларнинг силжиши балканинг баландлиги бўйича турли нуқталарда ҳар хил бўлгани учун, кўндаланг кесим текис қолмай эгриланади. 250-шаклдаги $a'b'$ ва $c'd'$ чизиқлар эгриланган кўндаланг кесимларни схематик равишда тасвирлайди. Кўраимизки, энг катта эгриланиш нейтрал ўқдаги элементларга тўғри келаётир. Кўндаланг кесимнинг юқориги ва пастки четларидаги элементларда эса, масалан, a_1, b_1, c_1 ва d_1 нуқталарида ҳеч қандай эгриланиш йўқ. Чунки бу нуқталардаги элементлар кўндаланг кесим юзасига тик бўлган ҳолда a нуқтадан a_1 га ва b нуқтадан b_1 га кўчмоқда.

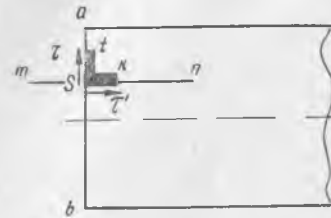


249-шакл.



250-шакл.

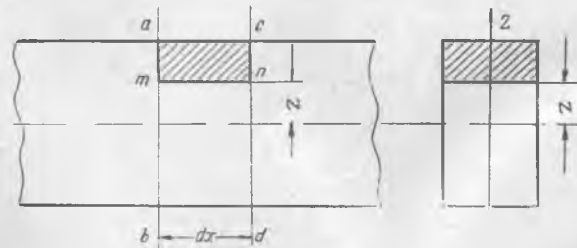
Демак, силжиш деформацияси балканинг баландлиги бўйича узлуксиз равишда ўзгаргани ҳолда, унинг кўндаланг кесимини эгрилаштирар экан. Аммо силжиш натижасида балканинг бўйлама тодаларининг чўзилиш ёки сиқилиш деформациялари ўзгармайди; чунки ab кесим cd га нисбатан айланганда, mn ва pq элементлар чўзилади. Кўндаланг кесимлар силжиш натижасида эгриланганда, ҳалиги элементлар ўз узунлигини ўзгартмасдан, фақат янги m_1n_1 ва p_1q_1 ҳолатларга кўчади. Шунинг учун эгувчи момент таъсиридан кўндаланг кесимларнинг айланиши натижасида ҳосил бўладиган чўзувчи ва сиқувчи кучланишлар кўндаланг кесимлар тангенциал кучланиш таъсиридан эгриланганда ҳам ўз қийматини ўзгартмайди.



251-шакл.

кесимга тик mn қатламдаги sk элементга ҳам $\tau' = -\tau$ тангенциал кучланиш таъсир қилади (251-шакл). Бу кучланиш (τ') юқоридаги қисмнинг пастки қисмга mn текислик бўйича кўрсатадиган таъсирини ифодалайди.

Юқорида қабул қилинган икки гипотеза ва силжиш деформациясининг баландлик бўйича ўзгариш характери эгилишдаги тангенциал кучланишни тўғри тўрт бурчакли кесим учун статика тенгламаларидан аниқлашга имкон беради. Балкадан бир-бирига чексиз яқин ab ва cd кўндаланг кесимлар ва нейтрал қатламдан z масофадаги mn текислик воситаси билан тўғри бурчакли параллелепипед ажратамиз (252-шакл). Кесиб ўтувчи кучни ажратил-



252-шакл.

ган элемент бўйича ўзгармайди деб фараз қиламиз, яъни ac мобайнида ҳеч қандай куч таъсир кўрсатмайди. Шунинг учун ажратилган элементнинг ab ва cd кўндаланг кесимларидаги тангенциал кучланишлар бир хилда бўлади. ab кесимдаги эгувчи момент M бўлса, cd да $M + dM$ га тенг бўлади, чунки бу кесим қўшни кесимга чексиз яқин бўлгани учун ундаги эгувчи момент ҳам чексиз кичик миқдор (dM) га фарқ қилади. Олдин ab ва cd кўндаланг кесимлар орқали ўтувчи текисликлар воситаси билан $abcd$ элементни ажратамиз. Ташланган қисмларнинг бу кесимлар бўйича таъсирини тегишлича нормал ва тангенциал кучланишлар билан алмаштирамиз

(253-шакл, а). Энди, ажратилган элементни mn текислик билан кесиб mnb қисмини ажратиб ташлаймиз. Ташланган бу қисмининг mn ёғи бўйича кўрсатадиган таъсири ўнг томонга йўналган тангенциал кучланиш (τ) билан ифодаланади (253-шакл, в). Тангенциал кучланиш (τ) ни аниқлаш учун, ажратилган элементга қўйилган кучларнинг горизонтал ўқдаги проекциялари йиғиндисини нолга тенглаштираемиз.

Бунинг учун ҳалиги $amnc$ элементнинг ёқларига таъсир қилувчи кучларнинг тенг таъсир этувчиларини аниқлаймиз. 253-шакл, с да ўша элементнинг аксонометрик кўриниши тасвирланган. Вертикал ёқлардаги тангенциал кучланишлар тенг таъсир этувчисининг горизонтал ўқдаги проекциялари нолга тенг бўлгани учун улар шаклда кўрсатилмаган. Мазкур вертикал ёқлардаги нормал кучланишларнинг тенг таъсир этувчиларини тегишлича N ва N_1 деб, ажратилган элементнинг пастки ёғидаги тангенциал кучланишлар тенг таъсир этувчисини dT деб белгиласак, мувозанат тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$N + dT - N_1 = 0. \quad (81.1)$$

Ажратилган элементнинг чап ёғида dF элементар юза олиб, ундаги нормал зўриқиш (dN) ни аниқлаймиз: $dN = \sigma dF$; буни интеграллаб, N ни топамиз:

$$N = \int_{F_1} \sigma dF,$$

бунда F_1 — ажратилган элемент чап ёғининг юзи; интеграл шу юз бўйича олинмоқда. Нормал кучланишни соф эгилишдагидек бўлади деб ҳисобласак ва унинг қийматини (78.10) формуладан келтириб қўйсак:

$$N = \frac{M}{I_y} \int_{F_1} z dF$$

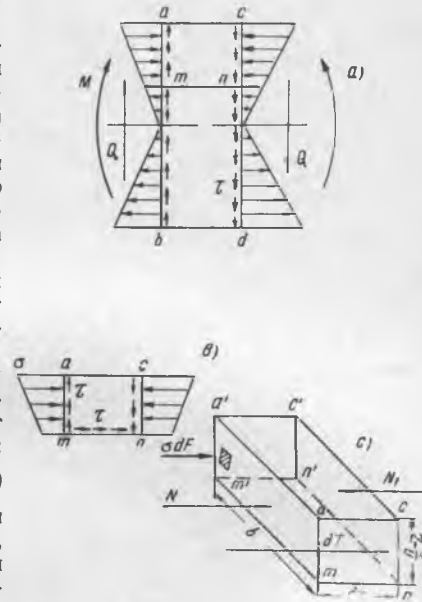
ни ҳосил қиламиз. Ўнг томондаги интеграл кўндаланг кесимнинг mn дан юқорида жойлашган қисми юзасининг нейтрал ўққа нисбатан статик моментиدير. У $S_y(z)$ билан белгиланади:

$$S_y(z) = \int_{F_1} z dF. \quad (81.2)$$

z баландликдаги юзани олганимиз учун, статик момент z нинг функцияси бўлади.

Шунинг учун:

$$N = \frac{M}{I_y} S_y(z).$$



253-шакл.

Ўнг еққа қўйилган N_1 нормал кучни ҳам худди шу тарзда толамиз:

$$N_1 = \frac{M + dM}{I_y} S_y(z).$$

Қабул қилинган гипотезага мувофиқ, балканинг кенглиги бўйича тангенциал кучланиш (τ) бир хил бўлгани учун dT ни ажратилган элементар параллелепипеднинг пастки ёғи юзини τ га кўпайтириш йўли билан аниқлаймиз:

$$dT = \tau b dx.$$

N , N_1 ва dT ларнинг топилган қийматларини мувозанат тенгламасига қўйсак:

$$\frac{M}{I_y} S_y(z) + \tau b dx - \frac{M + dM}{I_y} S_y(z) = 0$$

келиб чиқади. Бундан:

$$\tau = \frac{S_y(z)}{I_y b} \cdot \frac{dM}{dx}.$$

Д. И. Журавский теорамасига мувофиқ: $\frac{dM}{dx} = Q$; буни кўзда тутсак, эгилишдаги тангенциал кучланишларни ҳисоблаш учун қуйидаги формулани оламиз:

$$\tau = \frac{Q S_y(z)}{I_y b}. \quad (81. 3)$$

Мувозанат шартидан горизонтал mn кесимдаги тангенциал кучланишларни аниқладик. Тангенциал кучланишларнинг жуфтлик принцига мувофиқ, шу формула кўндаланг кесимнинг нейтрал ўқдан z масофадаги нуқталарида таъсир қилувчи тангенциал кучланишларни ҳам аниқлайди.

(81. 3) дан кўрамизки, ҳар бир кўндаланг кесим учун Q , I_y ва балканинг кенглиги (b) ўзгармас сон бўлганидан, кўндаланг кесим давомида τ фақат $S_y(z)$ нинг ўзгаришига боғлиқ бўлади. Тўғри тўрт бурчакли кесимнинг нейтрал ўқдан z баландликдаги қисми учун (81. 2) дан $S_y(z)$ ни ҳисоблаймиз. 254-шаклдан: $dF = b dz$.

F_1 юза z билан $h/2$ орасида бўлганидан, бу юзанинг статик моменти қуйидагича бўлади:

$$S_y(z) = \int_z^{h/2} z b dz = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) = \frac{h^2 b}{8} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right).$$

Тўғри тўртбурчак учун:

$$I_y = \frac{bh^3}{12}$$

бўлганидан:

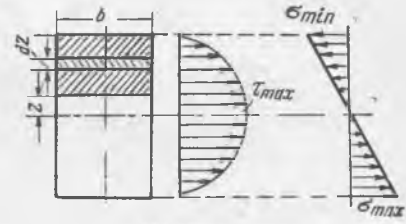
$$\tau = \frac{12 Q b h^2}{8 b \cdot b h^3} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) = \frac{3 Q}{2 b h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right),$$

$b h = F$ бўлганидан эса:

$$\tau = \frac{3 Q}{2 F} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) \quad (81. 4)$$

бўлади. Демак, тўғри тўртбурчакнинг баландлиги бўйича тангенциал кучланиш парабола қонуни билан ўзгарар экан. Кесимнинг энг пастки ва энг юқориги нуқталарида, яъни $z = \pm \frac{h}{2}$ бўлганда τ нолга айланади. Бу ҳуло-са тангенциал кучланишларнинг ўз-аро муносабатда бўлиш қонунига мувофиқ келади. Нейтрал ўқда, $z=0$ бўлганда τ максимал қийматга эришади. Бу нуқтада нормал кучланиш нолга тенг эди. Текширилаётган кесимда кесиб ўтувчи куч $Q(x) = Q_{\max}$ бўлса, энг катта тангенциал кучланиш

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_{\max}}{F} \quad (81.5)$$



254-шакл.

бўлади. Қўрамизки, энг катта тангенциал кучланиш тўғри тўрт бурчакли кесим учун ўзининг ўртача қийматидан бир ярим марта катта бўлар экан. 254-шаклда тангенциал ва нормал кучланишларнинг балка баландлиги бўйича ўзгариш қонуни тасвирланган.

82-§. Қўш таврли кесим учун тангенциал кучланишлар

Қўш таврли, бир таврли балкалар тўғри тўртбурчакликлардан тузилгани учун, улардаги тангенциал кучланишларни ҳисоблашда юқорида баён этилган назарияларни бевосита татбиқ этишимиз мумкин. Умуман, юпқа деворли профилларнинг вертикал деворлари учун юқорида тасвир этилган назария етарли даражада аниқ натижалар бериши ҳақида олдинги параграфда тўхталиб ўтган эдик.

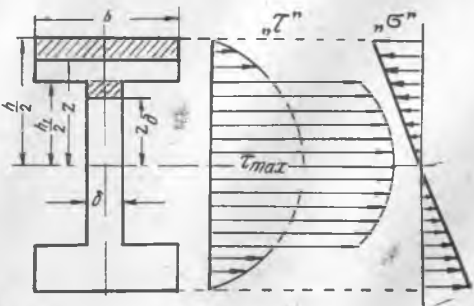
Қўш таврли кесимга эга бўлган балканинг нейтрал ўқдан z баландликдаги нуқталарида таъсир қилувчи тангенциал кучланишларнинг ўзгариши қонунини

$$\tau = \frac{QS(z)}{I_y b}$$

формуладан аниқлаймиз. Қўш таврли кесим учун бу формуладан фойдаланишда, статик моментни олдин кесимнинг тоқчаси учун, сўнгра девори учун ҳисоблаш лозим. Тоқча учун τ ни аниқлаганда формуладаги b нинг ўрнига тоқчанинг кенглигини, девор учун аниқлаганда эса деворнинг кенглигини қўйиш лозим.

Қўш таврли кесимнинг тоқчасидаги тангенциал кучланишни τ_T билан, деворидагисини эса τ_d билан белгилаймиз (255-шакл). У ҳолда тоқчанинг z баландликдаги элементда таъсир қилувчи кучланиш

$$\tau = \tau_T \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) \quad (82.1)$$



255-шакл.

формуладан аниқланади. Бу формуладан z_T девор баландлигининг ярмисига, яъни $\pm \frac{h_1}{2}$ га эришгунча фойдаланиш мумкин. $z_T = \pm \frac{h_1}{2}$ бўлганда токчага оид элементларнинг тангенциал кучланиши (82.1) дан аниқланиб, деворга оид элементларнинг кучланишини аниқлаш учун (82.1) даги b нинг ўрнига деворнинг қалинлиги (δ) ни қўйиш лозим, яъни:

$$\tau_\partial = \frac{Qh^2b}{8I_y\delta} \left(1 - \frac{h_1^2}{h^2}\right). \quad (82.2)$$

Қўрамизки, токча билан деворнинг қўйилган жойида тангенциал кучланишнинг қиймати узлуксиз эмас. $z_T = \pm \frac{h_1}{2}$ бўлганда τ_T билан τ_∂ нинг нисбати $\frac{\delta}{b}$ га тенг, яъни:

$$\frac{\tau_T}{\tau_\partial} = \frac{\delta}{b}; \quad \tau_\partial = \frac{b}{\delta} \tau_T \quad (82.3)$$

бўлади. Демак, $\frac{b}{\delta}$ нисбат қанча катта бўлса, токчадан деворга ўтишдаги тангенциал кучланишнинг ўсиши шунча катта бўлади.

Энди, нейтрал ўқдан z_∂ баландликдаги девор элементида ҳосил бўладиган тангенциал кучланишни ҳисоблаймиз. Бунинг учун текширилаётган элементнинг юқорисидаги юзаларнинг статик моментини ҳисоблаб топамиз. Токча юзасининг статик momenti:

$$S_T = \frac{bh^2}{8} \left(1 - \frac{h_1^2}{h^2}\right)$$

бўлади.

Деворнинг z_∂ баландлик юқорисидаги юзасининг статик momenti:

$$S_\partial = \frac{\delta h^2}{8} \left(1 - \frac{4z_\partial^2}{h_1^2}\right)$$

бўлади. Демак, z_∂ баландлик тепасидаги юзанинг статик momenti бундай бўлади:

$$S(z) = \frac{bh^2}{8} \left(1 - \frac{h_1^2}{h^2}\right) + \frac{\delta h_1^2}{8} \left(1 - 4 \frac{z_\partial^2}{h_1^2}\right).$$

Энди, қўш таврли балка деворининг z_∂ баландликдаги элементида ҳосил бўладиган тангенциал кучланишни аниқлашимиз мумкин:

$$\tau_\partial = \frac{Q}{8I_y\delta} \left\{ bh^2 \left(1 - \frac{h_1^2}{h^2}\right) + \delta h_1^2 \left(1 - 4 \frac{z_\partial^2}{h_1^2}\right) \right\}. \quad (82.4)$$

(82.1) ва (82.4) га мувофиқ, қўш таврли балка учун тангенциал кучланишнинг баландлик бўйича ўзгаришини тасвирловчи графикни чизиш мумкин. У иккала тенглама учун ҳам парабола чизигидир, бу чизиқ 225-шаклда тасвирланган.

Шуни айтиб ўтиш керакки, қўш таврли балкаларда токча билан деворнинг қўшилган жойида кучланиш биз тасвирлаганча сакрамайди. Аниқроқ текширишлар бу жойда кучланишлар тўпланишини кўрсатади. Аммо кучланишлар тўпланиши биз чиқарган формула (82.2) билан аниқланадиган қийматдан ошмайди, чунки реал профиллар тўғри тўртбурчакликлардан иборат эмас.

Бу ҳолда ҳам энг катта тангенциал кучланиш нейтрал ўқда ҳосил бўлади. Унинг қиймати қуйидагичадир:

$$\tau_{\max} = \frac{Ch^2b}{8I_y\delta} \left(1 - \frac{h_1^2}{h^2} \left(1 - \frac{\delta}{h} \right) \right). \quad (82.5)$$

Кесиб ўтувчи кучнинг кўп қисмини кесимнинг девори қабул қилиб олиши, тоқчага эса жуда ҳам оз қисми тўғри келиши 255-шаклдаги тангенциал кучланиш эпюрасидан кўриниб турибди.

Масалан, қўш таврли кесимнинг ўлчамлари $b = 12$ см, $\delta = 1,2$ см, $h = 30$ см, $h_1 = 26$ см, $I_y = 11200$ см⁴ бўлса, (82. 2) ва (82. 5) формулалардан қуйидагиларни чиқарамиз:

$$\tau_{\max} = 0,0326 \text{ Q кг/см}^2, \tau_g = 0,0250 \text{ Q кг/см}^2.$$

Бу мисолда қўш таврли балканинг девори Q нинг қандай қисмини қабул қилишини ҳисоблаймиз. Бунинг учун деворнинг юзини эпюра юзининг шу деворга тегишли қисмига кўпайтирамиз:

$$Q_d = 26 \cdot 1,26 \left\{ 0,0250 + \frac{3}{2} (0,0326 - 0,0250) \right\} Q = 0,94Q$$

$$\text{ёки } Q_g = \int_{F_d} \tau_g dF = 0,94 Q.$$

Демак, қўш таврли балканинг девори кесиб ўтувчи кучнинг 94 процентини қабул қилар экан. Шунинг учун ҳам девор нормал кучланишларнинг 0,3 қисмини қабул қилади деб уни жуда юпқа олиш хавфлидир.

83-§. Доиравий кесим учун тангенциал кучланиш

Доиравий кесим учун тангенциал кучланишларни ҳисоблаймиз. Тўғри тўрт бурчакли кесим учун қабул қилинган гипотезалардан биринчиси доиравий кесимга нисбатан унча тўғри бўлмайди. Тўғри тўрт бурчакли кесимлар учун чиқарилган (81. 3) формула доиравий кесим учун тангенциал кучланишнинг кесиб ўтувчи куч (Q) га параллел тузувчисинигина беради. Аммо у формула доиравий кесим учун қуйидагича ёзилади:

$$\tau_z = \frac{QS(z)}{I_y b(z)}. \quad (83.1)$$

Бунда $S(z)$ илгаригидек кўндаланг кесим юзасининг z баландликдан юқоридаги қисмининг статик моменти бўлиб (256-шакл), y

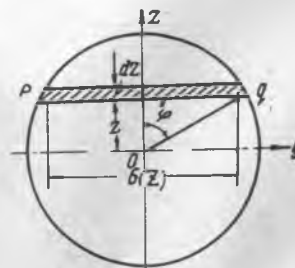
$$S(z) + \int_{F_1} z dF = \int_{F_1} z b(z) dz$$

формуладан аниқланади. $S(z)$ ни бу интегралдан ҳисоблаш учун, ўзгарувчи z нинг ўрнига φ бурчакни киритамиз. 256-шаклдан:

$$z = r \cos \varphi; b(z) = 2r \sin \varphi, dz = -r \sin \varphi d\varphi;$$

у ҳолда:

$$\begin{aligned} S(z) &= \int_0^{\varphi} 2r^2 \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi = \\ &= 2r^2 \int_0^{\varphi} \sin^2 \varphi d(\sin \varphi) = \frac{2}{3} r^3 \sin^3 \varphi \end{aligned}$$



256-шакл.

бўлади. Буни (83. 1) формулага қўйиб ва $b(z) = 2r \sin \varphi$ ни кўзда тутсак тангенциал кучланишнинг вертикал тузувчиси учун қуйидаги формулани оламиз:

$$\tau_z = \frac{Qr^2 \sin^2 \varphi}{3I_y} = \frac{Qr^2(1 - \cos^2 \varphi)}{3I_y} = \frac{Q(r^2 - z^2)}{3I_y}. \quad (83.2)$$

pq чизиқнинг турли нуқталарида тангенциал кучланишнинг горизонтал тузувчиси ҳар хил бўлади. Унинг энг катта қиймати мазкур pq чизиқнинг p ва q нуқталарида ҳосил бўлади. Шунинг учун унинг қийматини (83. 2) дан фойдаланиб, қуйидагича ёзамиз:

$$\tau_y = \tau_z \operatorname{ctg} \varphi = \frac{Qr^2 \sin^2 \varphi}{3I_y} \operatorname{ctg} \varphi.$$

Тангенциал кучланишнинг p ва q нуқталардаги тўла қиймати:

$$\tau = \sqrt{\tau_z^2 + \tau_y^2} = \frac{Qr^2 \sin^2 \varphi}{3I_y} \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi} = \frac{Qr^2 \sin \varphi}{3I_y}$$

бўлади.

Тангенциал кучланиш нейтрал ўқда ўзининг энг катта қийматига эришади. У ерда $\varphi = \frac{\pi}{2}$ дир. Демак,

$$\tau_{\max} = \frac{Qr^2}{3I_y} = \frac{Qr^2}{3 \frac{\pi d^4}{4}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{F} \quad (83. 3)$$

бўлади. F — кўндаланг кесимнинг юзи. Бу ҳолда энг катта тангенциал кучланиш ўртача қийматининг $\frac{4}{3}$ қисмига тенг бўлар экан.

84- §. Балкаларнинг мустаҳкамлигини тангенциал кучланишларга нисбатан текшириш

Балканинг бўйи билан кўндаланг кесими баландлиги одатдаги нисбатда бўлганда, максимал нормал кучланиш максимал тангенциал кучланишдан бир неча марта катта бўлади. Шунинг учун балканинг кўндаланг кесим ўлчамлари асосан, максимал эгувчи моментнинг қийматига мувофиқ:

$$W \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}$$

формуладан топилади. Зарур бўлган ҳолларда, балканинг мустаҳкамлиги тангенциал кучланишга нисбатан ҳам текширилади. Қурилиш тажрибасида ишлатиладиган балкалар учун максимал тангенциал кучланишлар уларнинг нейтрал ўқидаги элементларида ҳосил бўлади. Максимал тангенциал кучланишларни ҳисоблаш учун кўндаланг кесимнинг нейтрал ўқи юқорисидаги юзининг мазкур ўққа нисбатан статик моменти ($S_{\max}$) ни ҳисоблаш зарур. Балканинг тангенциал кучланишга нисбатан мустаҳкамлик шarti қуйидагича ёзилади:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_{\max}}{I_y \cdot b_0} = [\tau]; \quad (84.1)$$

бунда b_0 — кўндаланг кесимнинг нейтрал ўқ бўйича кенглиги. Пулат ст. 2 учун: $[\tau] = 900 \text{ кг/см}^2$ ёки $[\tau] = 1000 \text{ кг/см}^2$ бўлади.

Стандарт прокат балкалар кўндаланг кесимининг қалинлиги h/l нисбатининг одатдаги қийматлари учун етарли даражада бўлиб, ҳамма вақт $\tau_{\max}$

тегишли рухсат этилган кучланишдан кичик бўлади. Шунинг учун прокат балкаларни тангенциал кучланишга нисбатан текширмаса ҳам бўлади.

Парчин миҳ билан ва пайвандлаш йўли билан уланган баланд балкаларнинг ҳисобини чиқаришда, уларнинг девори юпқа бўлгани учун, мустаҳкамлик шартини, албатта, тангенциал кучланишга нисбатан ҳам текшириш зарур. Биз бу ҳақда кейинроқ батафсил тўхтаб ўтамиз.

Бундан ташқари, балка кесимини танлашга асос бўладиган эгувчи моментнинг миқдори кесиб ўтувчи кучга қараганда кичик бўлган ҳолларда ҳам балканинг мустаҳкамлигини тангенциал кучланишга нисбатан текшириш лозим. Бундай ҳоллар оғир юк таъсиридаги балканинг оралиғи қисқа бўлганда ёки балкага қўйилган оғир юк таянчга яқин бўлганда учрайди.

Бир нечта тузувчидан ҳосил бўлган балкадаги туташтирувчи элементларнинг ҳисобини чиқариш учун, мазкур балканинг маълум участкасида горизонтал кесимларда ҳосил бўладиган силжитувчи зўриқишларни аниқлашга тўғри келади. Бунинг учун, олдин, балканинг узунлик бирлигига тўғри келадиган силжитувчи куч (t) ни аниқлаймиз. Бу t кучни аниқлаш учун, тангенциал кучланиш (τ) ни кўндаланг кесимнинг кенглиги (b) га кўпайтириш керак:

$$t = \tau \cdot b \cdot l = \frac{QS_y(z)}{I_y}. \quad (84.2)$$

Балканинг кесими ўзгармас бўлса, $I_y = \text{const}$ бўлади. Текширилаётган горизонтал кесим учун ҳам $S(z) = \text{const}$ дир. Демак, балканинг бўйига йўналган силжитувчи куч (T) кесиб ўтувчи куч (Q) га пропорционал равишда ўзгаради. Балканинг бирор a қисми давомида кесиб ўтувчи куч ўзгармаса, горизонтал силжитувчи куч бу участкада

$$T = \frac{QS_y}{I_y} \cdot a \quad (84.3)$$

бўлади. Бу қисм давомида кесиб ўтувчи куч ўзгарувчи бўлса, горизонтал силжитувчи куч қуйидагича ифодаланади:

$$T = \int_{x_1}^{x_2} t dx = \frac{S_y}{I_y} \int_{x_1}^{x_2} Q(x) dx.$$

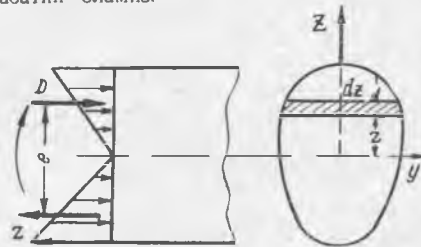
Бундаги x_1 ва x_2 координаталар a қисмини аниқлайди. Д. И. Журавский теоремасига мувофиқ: $Q(x)dx = dM$; ҳалиги участканинг бошидаги эгувчи моментни M_1 , охиридагисини M_2 десак, юқоридаги интеграл қуйидагича ёзилади:

$$T = \frac{S_y}{I_y} (M_2 - M_1). \quad (84.4)$$

Бу формула горизонтал силжитувчи кучни ҳисоблаш учун жуда қулайдир.

(84.1) формулани фойдаланиш учун қулайроқ ҳолга келтириш мумкин. Бунинг учун ички жуфтнинг елкаси тушунчасини киритиш лозим. Кўндаланг кесимда таъсир қилувчи чўзувчи зўриқишларнинг тенг таъсир этувчиси қўйилган нуқта билан сиқувчи зўриқишларнинг тенг таъсир этувчиси қўйилган нуқта оралиғи ички жуфтнинг елкаси деб аталади.

Бу тенг таъсир этувчиларни Z ва D орқали белгилаймиз (257-шакл). Маълумки $Z = D$ бўлади. Кўндаланг кесим бўйича таъсир қилувчи ички кучларнинг моменти эгувчи моментга тенглигини эсласак, қуйидаги муносабатни оламиз:



257-шакл.

$$\int_F z \sigma dF = Ze = De = M; \quad (84.5)$$

бунда e — ички жуфтнинг елкаси; Z билан D қуйидагича аниқланади:

$$Z = \int_0^{z_1} \sigma b dz = \frac{M}{I_{y0}} \int_0^{z_1} z b dz = \frac{MS_1}{I_y}$$

$$D = \int_0^{z_2} \sigma b dz = \frac{M}{I_y} \int_0^{z_2} z b dz = \frac{MS_2}{I_y}$$

S_1 ва S_2 — кесим юзасининг нейтрал ўқдан юқориги ва пастки қисмларининг статик моментларидир. $S_1 = S_2 = S_{\max}$ бўлгани учун, Z ва D нинг қийматини (84.5) га қўйсак, ички жуфтнинг елкаси (e) ни аниқлаган бўламиз:

$$e = \frac{I_y}{S_{\max}}. \quad (84.6)$$

Бу хулосага мувофиқ, (84.1) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max}}{b_0 \cdot e}. \quad (84.7)$$

Тўғри тўрт бурчакли кесим учун:

$$S_{\max} = \frac{bh^3}{8}, \quad e = \frac{2}{3}h;$$

доиравий кесим учун:

$$S_{\max} = \frac{2}{3}r^3, \quad e = \frac{\pi^4}{4} : \frac{2\pi^3}{3} = \frac{3}{8}\pi r, \quad e \approx 0,6d$$

бўлади. Ёйма профиллардан, масалан, қўш таврли балкалар учун ички жуфтнинг елкаси «Сортамент» жадвалларида берилган, унинг ўртача қиймати $0,85h$ га тенгдир.

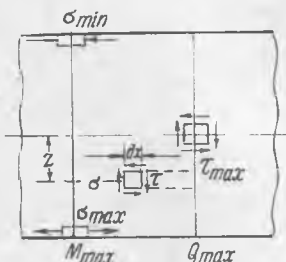
85-§. Балканинг мустаҳкамлигини бош кучланишлар асосида текшириш

Ҳозиргача балканинг мустаҳкамлигини нормал ва тангенциал кучланишларга нисбатан қуйидаги мустаҳкамлик тенгламалари асосида текширдик:

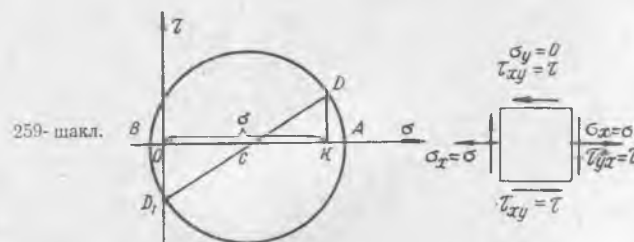
$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma], \quad \tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_{\max}}{Ib} \leq [\tau].$$

Максимал нормал кучланишни эгувчи момент максимум бўлган кўндаланг кесимдаги нейтрал ўқдан энг узоқ нуқталар учун ҳиссбладик. Бу

нуқталар оддий чўзилиш ва сиқилишга дуч келади. Худди шунингдек, максимал тангенциал кучланишни ҳам кесиб ўтувчи куч максимум бўлган кесимнинг нейтрал ўқдаги элементлари учун ҳисобладик. Бу элементлар соф силжиш деформациясига дуч келади. 258-шаклда мустаҳкамлиги текшириладиган балканинг фасади кўрсатилган. Унда $M_{\max}$ таъсир қилувчи кесимдаги энг катта нормал чўзувчи ва сиқувчи кучланишлар ҳосил бўладиган элементлар ва $Q_{\max}$ таъсир этувчи кесимдаги соф силжиш деформациясига дуч келадиган элемент кўрсатилган. Балканинг мустаҳкамлик шартини бу учта элементдаги оддий чўзилиш ва сиқилиш ҳамда соф силжишга нисбатан текшириш билан чекландик. Бу уч элементни энг хавфли кучланиш ҳолатида дейишга бизда ҳеч қандай ишонч йўқ, чунки бу элементларнинг ҳар қайсиси фақат битта кўринишдаги деформациягагина дуч келаётир. Ҳолбуки, нейтрал ўқдан ихтиёрий z масофадаги ҳар қандай элемент нормал ва тангенциал кучланишларнинг қўшилиб кўрсатадиган таъ-



258- шакл.



259- шакл.

сирига дуч келади. Шунинг учун бу шароитдаги элементлар, эҳтимол, ҳалиги оддий кучланиш ҳолатидаги учта элементга қараганда хавфлироқ ҳолатдадир. Бу мулоҳазаларга кўра, нейтрал қатламдан z масофада мусбат белгилли нормал ва тангенциал кучланишлар таъсиридаги бирор элементни оламиз (258-шакл). Бу элементнинг балка ўқида тик ёқларига нормал кучланиш (σ) ва тангенциал кучланиш (τ), балка ўқида параллел ёқларига эса фақат тангенциал кучланиш (τ) таъсир қилади. Буларнинг қиймати тегишлича:

$$\sigma = \frac{M}{I_y} z; \quad \tau = \frac{QS(z)}{I_y b} \quad (85.1)$$

формулалар билан аниқланади.

M ва Q текшириладиган элемент ажратилган кўндаланг кесимдаги эгувчи момент ва кесиб ўтувчи кучдир. Ажратилган элементнинг фасад томонига ҳеч қандай кучланиш таъсир қилмайди. Шунинг учун биз текшириладиган элемент, шу билан бирга, текис эгилишдаги балка текис кучланиш ҳолатида бўлади. Текис кучланиш ҳолатининг умумий назариясини 33-параграфда текширган эдик. Ҳозирги текшириладиган конкрет хусусий ҳол учун умумий назарияни татбиқ қиламиз. Бу ҳолда (259-шакл):

$$\sigma_x = \sigma = \frac{M}{I_y} z, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = \tau = \frac{QS(z)}{I_y b}$$

бўлади. Энди, ана шу текис кучланиш ҳолатидаги элементлар учун бош кучланишлар билан бош юзаларни аниқлаймиз, чунки балканинг текшири-
лаётган элементи учун мустаҳкамлик шартини бош кучланишсиз туза олмай-
миз. (σ, τ) текислигида координаталар боши (0) дан σ ўқи бўйлаб $\sigma_x =$
 $= \sigma = OK$ кесмани қўямиз; K нуқтадан σ ўқига тик чизиқ ўтказиб, бу чи-
зиқ бўйича юқорига қараб $KD = \tau$ кесмани қўямиз ва D нуқтани аниқ-
лаймиз. Бу нуқта кучланиш доирасида ётади. Бу нуқтага тегишли кучла-
нишлар балканинг ўқига тик юзалардаги кучланишлардир. Балканинг ўқи-
га параллел юзаларда нормал кучланиш $\sigma_y = 0$ бўлиб, тангенциал кучла-
ниш $\tau_z = -\tau$ манфий ишорали бўлгани учун, бу юзага тегишли кучланиш-
ларни аниқловчи нуқта τ ўқининг манфий томонида $OD_1 = -\tau$ кесма би-
лан аниқланади. Ҳалиги D нуқта билан бу D_1 нуқтани туташтириб, куч-
ланиш доирасининг маркази (C) ни доира радиуси CD ва CD_1 ни аниқ-
лаймиз (259-шакл). Чизилган доира бош кучланишларни аниқловчи A ва B
нуқталарни беради. B нуқта абсцисса ўқининг чап томонида ётгани учун
тегишли бош кучланиш манфий бўлади. Демак:

$$\sigma_1 = OA > 0, \quad \sigma_2 = -OB < 0.$$

36-параграфдаги (36.5) формулага биноан, σ_1 ва σ_2 нинг қиймати биз
текшираётган ҳол учун қуйидагича ёзилади:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{2} \left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right) > 0, \\ \sigma_2 &= \frac{1}{2} \left(\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right) < 0. \end{aligned} \quad (85.2)$$

Бу натижаларни, бевосита кучланиш доирасидан, яъни 259-шаклдан чиқа-
ришимиз ҳам мумкин эди. (85.2) формулаларни $\sigma > 0$, $\tau > 0$ бўлган эле-
мент учун чиқардик. Бу кучланишлардан бирортаси манфий бўлса, (85.2)
даги тегишли ҳадларнинг ишорасини ўзгартириш керак бўлади. Кучланиш
доираси ҳам тегишлича ўзгаради.

Текис кучланиш ҳолати учун, бош кучланишлар аниқлангандан кейин,
мустаҳкамлик назарияларидан фойдаланиб, балканинг мустаҳкамлик шар-
тини тузишимиз мумкин.

Биринчи назарияга мувофиқ:

$$\sigma_1 \leq [\sigma] \text{ ёки } \frac{1}{2} \left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right) \leq [\sigma]. \quad (85.3)$$

Иккинчи назарияга мувофиқ:

$$\sigma_1 - \mu \sigma_2 \leq [\sigma];$$

σ_1 ва σ_2 нинг қийматини (85.2) дан келтириб қўйсак:

$$\left[\frac{1}{2} \sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} - \frac{1}{2} \mu \left(\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right) \right] \leq [\sigma]$$

ёки

$$\frac{1-\mu}{2} \sigma + \frac{1+\mu}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma] \quad (85.4)$$

бўлади. Пулат учун $\mu = 0,3$ деб қабул қилиб, (85.4) ни қуйидагича
ёзамиз:

$$0,356 + 0,65 \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (85.4')$$

Учинчи назарияга мувофиқ:

$$(\sigma_1 - \sigma_2) \leq [\sigma].$$

σ_1 ва σ_2 нинг қийматини қўйсак:

$$\frac{1}{2} \left[\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} - \sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right] \leq [\sigma]$$

ёки

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma] \quad (85.5)$$

бўлади. Ниҳоят, тўртинчи энергетик назарияга мувофиқ:

$$[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \leq 2[\sigma]^2.$$

σ_1 ва σ_2 нинг қийматини қўйиб, $\sigma_3 = 0$ эканлигини эътиборга олсак,

$$\frac{1}{4} \left[\left(2\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right)^2 + (\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2})^2 + (\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2})^2 \right] \leq 2[\sigma]^2$$

бўлади; соддалаштиришлардан кейин эса:

$$\sigma^2 + 3\tau^2 \leq [\sigma]^2 \quad (85.6)$$

ҳосил бўлади.

Балканинг мустаҳкамлигини текшириш учун, унинг қандай нуқталарида бу кучланишларни аниқлаш лозимлиги устида тўхталиб ўтамиз. Мустаҳкамлик шarti қандай назарияга асосланмасин, σ ва τ кучланишларга боғлиқ бўлгани учун, уни шундай элементлар учун тузиш зарурки, бу элементларда σ ва τ нинг иккаласи ҳам бирданига етарли даражада катта қийматга эга бўлсин. Бундай элемент албатта, M билан Q бирданига максимал қийматга эришувчи кесимда бўлади. Умуман, M максимал бўлган кесим Q максимал бўлган кесимга мос келмайди. Аммо хусусий ҳолларда M ва Q бирданига энг катта қийматга эришуви мумкин. Масалан, бундай қиймат консол балкаларнинг қисиб қўйилган кесимида ёки оғир юк қўйилган нуқта таянчга яқин ўрнатилган ҳолларда учратилади. Бундай ҳоллар учун M билан Q энг катта қийматга эришган кўндаланг кесимдаги σ ва τ нинг кесим бўйича ўзгариш графигини тузиш лозим. Тўғри тўрт бурчакли ва доиравий кесимлар учун олдиндан айтиш мумкинки, унинг ҳар қандай нуқтасидаги бош кучланиш кўндаланг кесимнинг энг узоқ нуқтасидаги нормал кучланиш $\sigma_{\max}$ дан ошмайди. Бу тарздаги кесимлар учун, нормал кучланиш σ нейтрал ўқдан узоқлашган сари тўғри чизиқли қонун билан ўсиб, тангенциал кучланиш (τ) эса параболик қонун билан шу йўналишда нолгача камаяди. Шунинг учун кесим бўйича бирданига σ ва τ энг катта қийматга эга бўладиган нуқта учрамайди. Аммо кўндаланг кесим қўш таврли ёки ичи ковак тўғри тўртбурчаклик бўлса, тангенциал кучланиш нейтрал ўқдан четга томон жуда секин озаяди. Кесимнинг девори билан тоқчаси қўшилган жойда бу кучланишнинг қиймати етарли даражадан катта бўлади, бу жойда нормал кучланиш ҳам катта қийматга эгадир (255-шакл). Ана шундай нуқталар учун бош кучланишларни ҳисоблаш зарур.

Бош кучланишлар ҳисоблангандан кейин, қайси назария асосида балканинг мустаҳкамлик шартини тузиш лозим деган савол тушади. Энг такомиллашган назария энг катта потенциал энергия назарияси бўлгани учун (85. 6) тенгламага мувофиқ текшириш керак. Аммо, шундай бўлишига қарамай, балкалар ҳисобини чиқаришда энг катта нормал кучланиш назарияси кўпроқ ишлатилади.

Айтилганларни ойдинлаштириш учун битта мисол келтираемиз. Икки гаянчда ётувчи AB балка симметрик ўрнатилган, балкада таянчлардан $x = 50$ см масофада таъсир қилувчи $P = 6,4$ т юклар туради (260-шакл). Рухсат этилган нормал кучланиш $[\sigma] = 1400$ кг/см², тангенциал кучланиш

$[\tau] = 900 \text{ кг/см}^2$ Балканинг қўндаланг кесимини қўш таврли қилиб олиб, унинг ўлчамларини танлаш ва кесимнинг девори билан токчасининг қўшилган жойидаги элементнинг мустаҳкамлигини текшириш.

Энг катта M ва Q нинг қийматини 260-шаклдаги эпюралардан оламиз; улар мана бундай:

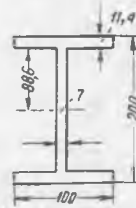
$$M_{\max} = Pa = 0,5 \cdot 6,4 = 3,2 \text{ т. } M = 320000 \text{ кг} \cdot \text{см},$$

$$Q_{\max} = P = 6,4 \text{ т} = 6400 \text{ кг}.$$

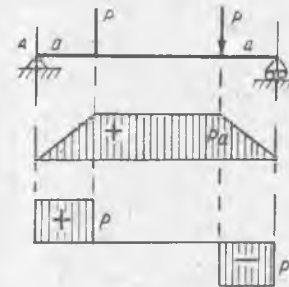
Қўндаланг кесимни танлаймиз.

$$W \leq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{320000}{1400} = 229 \text{ см}^3.$$

Сортамент жадвалидан $N 20^a$ бўлган қўш таврни оламиз. Унинг учун: $W = 237 \text{ см}^3$; $I_y = 2370 \text{ см}^4$ бўлади. Қолган ўлчамлари схематик равишда тасвирланган 261-шаклда кўрсатилган.



260-шакл.



261-шакл.

Биз танлаган профиль учун:

$$\sigma_{\max} = \frac{320000}{237} = 1350 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} < 1400 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}.$$

Қўндаланг кесим, 3,6% ортиқча запас билан танланган.

Нейтрал ўқдаги энг катта тангенциал кучланишни (84. 7) формуладан аниқлаймиз:

$$\tau_{\max} = \frac{Q}{be} = \frac{6400}{0,7 \cdot 10} = 914 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} > 900 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}.$$

Максимал тангенциал кучланиш нейтрал ўқда фақат 1,6% кўп, холос. Қўшимча текширишни $z = 8,86 \text{ см}$ баландликдаги элемент учун ўтказамиз. У элементдаги нормал ва тангенциал кучланишларни ҳисоблаймиз:

$$\sigma = \frac{M}{I_y} z = \frac{320000 \cdot 8,86}{2370} = 1195 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}.$$

$$\tau = \frac{QS(z)}{I_y b} = \frac{6400 \cdot 107}{2370 \cdot 0,7} = 413 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}.$$

$$S(z) = 10 \cdot 1,14 \cdot \left(\frac{1,14}{2} + 8,86 \right) = 107 \text{ см}^3.$$

Энди, энг катта нормал кучланиш назариясига мувофиқ, мустаҳкамлик шартини тузамиз:

$$\frac{1}{2} \left[1195 + \sqrt{1195^2 + 4 \cdot 413^2} \right] = 1323 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} < 1400 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}.$$

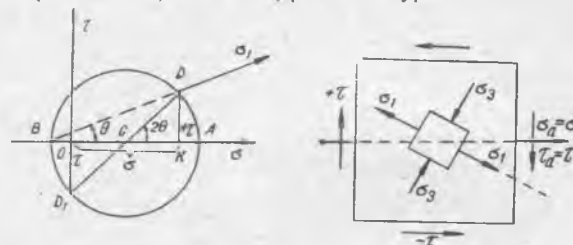
Энг катта тангенциал кучланиш назариясига кўра:

$$1195^2 + 4 \cdot 413^2 = 1392 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} < 1400 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$$

бўлади. Иккала назарияга кўра ҳам энг хавфли элементлар учун мустаҳкамлик шarti қаноатлантирилади.

86-§. Бош кучланишларнинг йўналиши. Кучланишлар траекторияси

Балканинг ихтиёрий элементларидаги бош кучланишларни аниқлашда уларнинг йўналишига эътибор қилмаган эдик. Чўзилиш ва сиқилишга бир хилда қаршилиқ кўрсатувчи материаллар учун бош кучланишларнинг, йўналишидан қатъи назар, фақат миқдоригина аҳамиятга эгадир. Аммо чўзилиш ва сиқилишга бир хилда қаршилиқ кўрсатмайдиган материаллар учун,



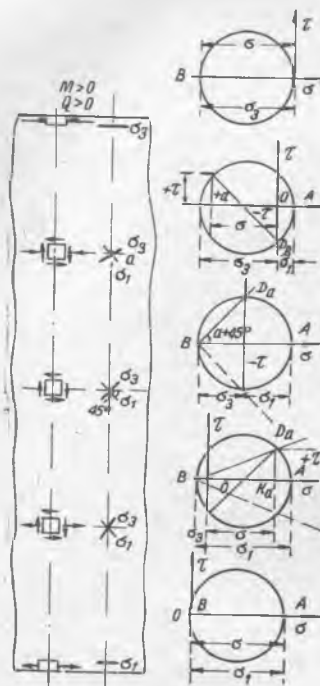
262-шакл.

масалан, темир-бетондан ясалган балкалар учун чўзувчи бош кучланишларнинг йўналишини олдиндан билиш муҳим аҳамиятга эга. Бу йўналиш бўйича чўзувчи кучланишларни қабул қилувчи пўлат арматура ўрнатилади. Бош кучланишларнинг йўналиши кучланиш доираси воситаси билан аниқланиши мумкин (262-шакл). Биз текшираётган ҳолда, балканинг ўқиға тик кесимдаги σ_a ва τ_a кучланишлар мусбат бўлади, деб фараз қилайлик:

$$\sigma_a = \sigma = \frac{M}{I_y} z > 0, \quad \tau_a = \tau = \frac{QS(z)}{I_y b} > 0.$$

Бу кучланишлар учун чизилган кучланиш доираси 262-шаклда тасвирланган. Кучланиш доирасидан кўринадики, бош кучланиш (σ_1) нинг йўналишини аниқлаш учун, σ_a нинг йўналишини соат стрелкаси йўналиши бўйича 0 бурчакка айлантириш лозим.

Текширилаётган элемент кесим бўйича қўзғалганда σ_1 нинг йўналиши ҳам ўзгара боради. Кесимнинг юқориги ва пастки қирғоқларида бош кучланишлардан биттаси ноль, иккинчиси эса балканинг ўқиға параллел йўналишда бўлади. Нейтрал қатламда бош кучланишлар балка ўқи билан 45° ва 135° бурчаклар тузади. 263-шаклда кўндаланг кесимнинг 5 та элементи учун M ва Q мусбат бўлган ҳолдаги кучланиш доиралари ва тегишли бош кучланишларнинг йўналиши тасвирланган. Сиқувчи бош кучланишларнинг йўналиши балканинг фасадида йўгон чизиқ билан, чўзувчи бош кучланишларнинг йўналиши эса ингичка чизиқ билан тасвирланган. Балканинг бирор кўндаланг кесимида олинган нуқта учун бош кучланишнинг йўналишини аниқлаб, бу йўналишнинг қўшни кесим билан кесишган нуқтаси учун яна бош кучланиш ва унинг йўналишини аниқлаймиз. Бу иккинчи нуқта бош кучланиш йўналишининг учинчи қўшни кесим билан кесишув нуқтасини топиб, у нуқта учун яна бош кучланиш йўналишини аниқлаймиз. Шу тарзда ясашни давом эттириб, бир синиқ чизиқ ҳосил қиламиз. Ҳалиги бош кучланишлар йўналиши билан кесишган кесимларни бир-бирига чексиз яқин олсак, лимитда бу синиқ чизиқ узлуксиз эгри чизиққа айланади. Бу чизиқ



263- шакл.

бирор нуқтаси (xz) даги бош кучланишларнинг йўналиши қуйидаги тенгламадан аниқланади:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_x}. \quad (a)$$



264- шакл.

Биз текшираётган ҳол учун:

$$\tau_{yx} = \tau = \frac{Q(x) S(z)}{I_y b(z)}, \quad \sigma_y = 0, \quad \sigma_x = \sigma = \frac{M(x)}{I_y} z$$

Ундан ташқари:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\operatorname{tg} \theta}{1 - \operatorname{tg}^2 \theta} = \frac{2 \frac{dz}{dx}}{1 - \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

нинг ҳар бир нуқтасида ўтказилган уринмаси шу нуқтага тегишли бош кучланишнинг йўналишини аниқлайди. Мазкур эгри чизик бош кучланишнинг *траекторияси* деб аталади.

Балканинг ҳар бир нуқтасидан иккита ўзаро тик бўлган чўзувчи ва сиқувчи бош кучланишлар траекториясини ўтказиш мумкин. Қўндаланг кесимнинг баландлиги бўйлаб бош кучланишлар йўналишининг ўзгаришини аниқлаганимиздан кейин, кучланиш траекториясининг умумий характерини белгилаш қийин эмас. Балканинг юқори қиррасида $\sigma_1 = 0$ бўлиб, $\sigma_3 = -\sigma_{\max}$ дир. Шунинг учун чўзувчи бош кучланиш траекторияси юқори қиррадаги сиқилган толадан бошланиб, балканинг ўқиға 90° қиядир (263- шакл); нейтрал қатламда эса балканинг ўқиға 45° бурчак билан қияланиб, пастки қиррасида чўзилган толалар йўналишига мос келади. Сиқувчи бош кучланиш траекторияси сиқилган толаларга уринма бўлиб, нейтрал қаватда балка ўқиға 45° қия ҳолда чўзилган толалар билан 90° бурчак ҳосил қилади (263- шакл).

264- шаклда икки таянчга тиралган ва тенг ёйилган юк таъсирида бўлган балкадаги кучланиш траекториялари тасвирланган.

Бош кучланишлар траекториясининг дифференциал тенгламасини чиқариб, унинг интегралини топиш ҳам мумкин. Балканинг

Булар кўзда тутилса, (а) тенглама қуйидагича ёзилади:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 - \frac{\sigma}{\tau} \frac{dz}{dx} - 1 = 0.$$

Бу тенгламадан:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 2\tau^2}}{2\tau}.$$

Бу тенгламаларнинг интегралли балканинг ҳар бир нуқтаси учун, тегишлича қўзувчи ва сиқувчи бош кучланишларнинг траекториясини беради.

Бош кучланишлар траекторияси назарий жиҳатдангина эмас, балки амалий жиҳатдан ҳам катта аҳамиятга эгадир. Масалан, темир-бетон балкаларнинг қўзилишга ишлайдиган қисми темир арматура билан қучайтирилганда арматура тахминан қўзувчи бош кучланиш траекторияси бўйича ўрнатилади. Таянчлар яқинида ҳосил бўладиган қийшиқ ёриқлар темир-бетон балкаларни парчалайди. Шунинг учун пастки томондаги горизонтал арматура симларининг учи 265-шаклда кўрсатилгандек букиб қўйилади.



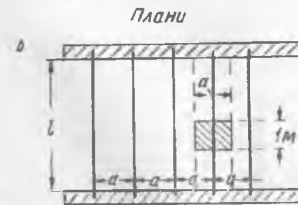
265-шакл.

МАСАЛАЛАР

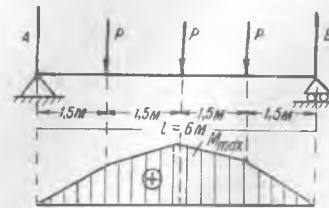
74. Бино қаватларини ёпадиган бир пролётли, қундаланг кесими қўш таврли балканинг ўлчамлари аниқлансин (266-шакл). Балканинг узунлиги $l = 6$ м, қатор ўрнатилган балкалар оралиғи $a = 1,5$ м. Ёпиш материалларининг (балка билан бирга) ҳар бир квадрат метрдаги оғирлиги $p = 520$ кг/м². Рухсат этилган қучланиш $[\sigma] = 1200$ кг/см².

Ечиш. Ҳар бир балкага кенглиги a га тенг поёсадаги юк туғри келади. Бу полосадан бир метр узунликдаги қисминини ажратиб (266-шакл, в), ёйилган юкнинг интенсивлиги (q) ни топамиз:

$$q = p \cdot a \cdot l = 520 \cdot 1,5 \cdot 1 = 780 \text{ кг/м}.$$



266-шакл.



267-шакл.

Максимал эгувчи момент балка оралиғининг ўртасида бўлади:

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{780 \cdot 6^2}{8} = 3510 \text{ кгм}, \quad M = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{351000}{1200} = 293 \text{ см}^3.$$

Сортамент жадвалидан қаршилик моменти $W = 293$ см³ га мос бўлган № 22^а қўш таврини оламиз. Унинг учун: $W_x = 309$ см³ (сортамент жадвалида нейтрал ўл х билан белгиланади)

75. Узунлиги $l = 6$ м бўлган қўш таврли балканинг сортамент жадвалидаги номери 30^а дир. Бу балкага гаянчлар оралиғини тўртта тенг булакка бўладиган учта бир хил тупланма куч таъсир қилади. Нормал кучланиш $\sigma = 1200$ кг/см² дан ошмаслиги учун P кучнинг энг катта қиймати қанча бўлиши мумкин (267-шакл)?

Е ч и ш. № 30^а профиль учун $W_x = 597$ см³; балканинг мустаҳкамлик шартидан:

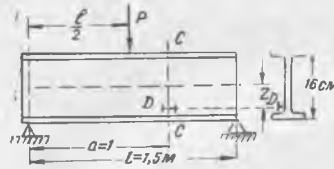
$$M_{\max} = 597 \cdot 1200 = 716400 \text{ кгсм} \quad (1)$$

бўлади.

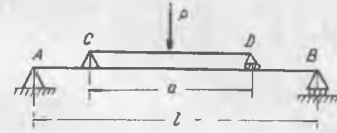
Иккинчи томондан, энг катта эгувчи момент балканинг ўрта кесимига мос келгани учун унинг қиймати:

$$M_{\max} = 1,5P \cdot 300 - P \cdot 150 = 300P \text{ кгсм}. \quad (2)$$

(1) ва (2) ни солиштириб, P ни топамиз: $P = 2,388$ т.



268-шакл.



259-шакл.

76. 268-шаклда тасвирланган балкага қўйилган P куч таъсиридан, CC кесимдаги нейтрал ўқдан $z_D = 5$ см ораликда турган D тола $\Delta S = 0,005$ мм чўзилган. Балканинг кундаланг кесими 16-номерли қўш тавр билан, узунлиги $l = 1,5$ м, эластиклик модули $E = 2 \cdot 10^6$ кг/см². D толадаги чўзилиш $S = 2$ см базали танзометр билан ўлчанган (269-шакл). Шу P кучнинг қиймати аниқлансин.

Е ч и ш. CC кесимнинг D толасидаги нормал кучланиш бундай бўлади:

$$\sigma = \frac{M}{I_y} \cdot z_D = \frac{P \cdot 50 \cdot 5}{2 \cdot 1130} \approx 0,11P \text{ кг/см}^2. \quad (1)$$

$I_y = 1130$ бўлган қиймат 16-номерли қўш тавр учун сортамент жадвалидан олинади. D толанинг нисбий чўзилиши:

$$\epsilon = \frac{\Delta S}{S} = \frac{0,005}{20}$$

бўлади.

Гук қонунидан:

$$\sigma = E\epsilon = E \frac{0,005}{20} \quad (2)$$

келиб чиқади: (1) билан (2) ни солиштириб, P ни топамиз: $P \approx 5$ т.

77. 269-шаклда тасвирланган балканинг ўртасига P куч таъсир этганда, y кесимда ҳосил бўладиган максимал норма кучланиш тегишли рухсат этилган кучланишдан 30% ошадди. Ортиқча кучланишни йўқотиш учун ёрдамчи CD балкача ўрнатилган. Мазкур CD балкачанинг узунлиги (a) аниқлансин.

Е ч и ш. Ёрдамчи балкача бўлмаганда:

$$M_{\max} = \frac{Pl}{4},$$

ёрдамчи балкача бўлганда:

$$M = \frac{P}{2} \left(\frac{l}{2} - \frac{a}{2} \right) = \frac{Pl}{4} - \frac{Pa}{4},$$

30% ортиқча кучланишни йўқотиш учун $M_{\max}$ ни 30% камайтириш лозим:

$$\frac{Pa}{4} = 0,3 \frac{Pl}{4}; \text{ бундан } a = 0,3l \text{ бўлади.}$$

78. 20^a номерли қўш тавр балканинг узунлиги $l = 3$ м, учлари таянчларга шарнир воситаси билан тиралган. Таянчларнинг биридан $a = 1,2$ м масофадаги нуқтага тўпланган $P = 2,5$ т юк қўйилган. Рухсат этилган кучланиш $[\sigma] = 1200$ кг/см² бўлса, балканинг ўртасига яна қандай миқдор тўпланган X юкни қўйиш мумкин?

Е ч и ш. Мустақамлик шартидан $M_{\max}$ ни аниқлаймиз:

$$M_{\max} = W[\sigma] = 237 \cdot 1200 = 284400 \text{ кгсм.} \quad (1)$$

Сортамент жадвалидан I 20А учун: $W_x = 237$ см³. Балкага қўйилган юклар учун $M_{\max}$ қуйидагича бўлади:

$$M_{\max} = (1500 + 0,5X) 1,2 \text{ кг-м.} \quad (2)$$

(1) билан (2) ни солиштириб, X ни топамиз:

$$X = 1,74.$$

79. Бир учи билан қисилғиб тиралган балканинг қўндаланг кесими баландлиги h бўлган тўғри тўрт бурчакликдир. Қуйидаги уч ҳол учун мазкур балканинг нейтрал қатламида ҳосил бўладиган тангенциал зўриқиш (T) аниқлансин.

1. Эркин учига P юк қўйилган.

2. Балкага интенсивлиги q бўлган тенг ёйилган юк таъсир этади.

3. Энг катта интенсивлиги q_0 бўлган ва учидан таянчга қараб ўсиб боровчи учбурчак қонуни билан ёйилган юк таъсир этади (270-шакл).

Е ч и ш. Учала ҳол учун ҳам дастлаб эркин учидан x масофадаги кесимдаги Q ни аниқлаш лозим:

$$1) Q = -P,$$

$$2) Q = -qx,$$

$$3) Q = -\frac{q_x x}{2} = -q_0 \frac{x^2}{2l}.$$



270-шакл.

x масофадаги қўндаланг кесимнинг нейтрал ўқидаги элементда ҳосил бўладиган тангенциал кучланиш қуйидагича аниқланади:

$$\tau_{\max} = \frac{Q(x) S(z)_{\max}}{I_y b}.$$

Тўғри тўрт бурчакли кесим учун нейтрал ўқидаги элемент юқорисидаги юзанинг статик моменти:

$$S(z)_{\max} = \frac{bh^2}{6}; \quad I_y = \frac{bh^3}{12}.$$

бўлади. Шунинг учун:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q(x)}{bh}.$$

Биринчи ҳолда $|Q| = P = \text{const}$ бўлгани учун: $\tau_{\max} = \text{const}$, демак:

$$T = \tau_{\max} b l = \frac{3}{2} \frac{P}{h} l.$$

Иккинчи ҳолда $|Q| = qx$ бўлгани учун, нейтрал қатлам юзасидан элементар $b dx$ юзани ажратиб, олдин бу юзада ҳосил бўладиган тангенциал зўриқиш dT ни аниқлаймиз:

$$dT = \tau_{\max} b \cdot dx = \frac{3}{2} \frac{qx}{bh} b dx.$$

Балканинг нейтрал қатламидаги тангенциал зўриқиш T ни топниш учун dT нинг интегралини оламиз:

$$T = \frac{3q}{2h} \int_0^l x dx = \frac{3ql^2}{4h}.$$

Худди шундай мулоҳаза юргизиб, учинчи ҳол учун ҳам T ни аниқлаш қийин эмас. Бу ҳолда:

$$T = \frac{q_0 l^2}{4h}$$

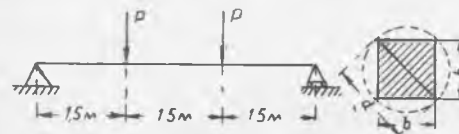
бўлади.

Агар $P = ql$ ва $q_0 = q$ бўлса, тангенциал зўриқиш (T) уч ҳол учун қуйидагича бўлади:

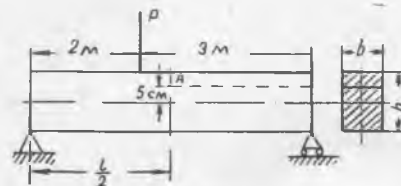
$$T = 1,5 \frac{Pl}{h}, \quad T = 0,75 \frac{Pl}{h},$$

$$T = 0,25 \frac{Pl}{h}.$$

80. Қўндаланг кесими квадрат ва тўғри тўрт бурчакли балкаларга қўйилган юкнинг кўрниниши, балканинг узунлиги ва рухсат этилган кучланиш ўзгартирилмай, фақат юкнинг миқдори икки хисса кўпайтирилса, балканинг ҳажми неча марта кўпаяди? Тўғри тўрт бурчакли кесимнинг кенглиги сақланиб фақат баландлиги ўзгартирилади.



271-шакл.



272-шакл.

Кўрсатма. Мустаҳкамлик шarti: $W = \frac{M_{\max}}{[\sigma]}$ дан ва эгувчи

моментнинг юкка пропорционал ўсишидан фойдаланиш керак. Квадрат кесимли балканинг ҳажми $\sqrt[3]{4}$ марта тўғри тўртбурчак кесимли балканинг ҳажми эса $\sqrt{2}$ марта кўпаяди.

81. Қўндаланг кесим юзи, материали, узунлиги, қўйилган юкнинг характери бир хилда бўлган иккита балкадан бири доиравий кесимли бўлиб, иккинчиси квадрат кесимлидир. Доиравий кесимли балка учун хавфсиз юкнинг миқдори $P_1 = 1000$ кг бўлса, квадрат кесимли балка учун хавфсиз P_2 юкнинг миқдори қанча бўлади?

Кўрсатма. Доиравий в квадрат қўндаланг кесим юзлари

нинг тенглигидан $a = \frac{\sqrt{\pi}}{2} d$ ни ҳосил қиламиз. Энди, иккала ҳол учун мустаҳкамлик тенгламасини тузиб, ундан P_2 ни аниқлаймиз:

$$P_2 = \frac{2\sqrt{\pi}}{3} P_1 \approx 1180 \text{ кг.}$$

82. Икки таянчда ётган ва қарағай ёғочдан ишланган балканинг қўндаланг кесими $b \times h$ тўғри тўртбурчак бўлиб, узунлиги $l = 4,5$ м дир. Балка узунлигининг учдан бир оралиқларига иккита $P = 2$ т юк қўйилган (271-шакл). Қўндаланг кесими доира бўлган тўсундан ҳалиги тўғри тўртбурчак кесимли балка аралаш учун тўсуннинг минимал диаметри қанча бўлиши керак?

$\frac{h}{b}$ нисбатнинг қандай қийматидан балканинг қаршилик momenti энг катта бўлади?

Ечиш. Қўндаланг кесимнинг қаршилик momenti тўсуннинг диаметри ва тўғри тўртбурчакнинг кенглиги орқали қуйидагича ифодаланади:

$$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(d^2 - b^2)}{6}.$$

$W_{\max}$ бўлиши учун, бу ифоданинг b га нисбатан ҳосиласи нолга тенг бўлиши керак:

$$\frac{dW}{db} = d^2 - 3b^2 = 0, \quad b^2 = \frac{d^2}{3} \quad \text{ва} \quad h^2 = \frac{2}{3} d^2.$$

Бундан:

$$\frac{b^2}{h^2} = 0,5 \quad \text{ва} \quad \frac{b}{h} = 0,71;$$

демак:

$$W_{\max} = \frac{d}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2d^3}{3 \cdot 6} = \frac{d^3}{9\sqrt{3}}.$$

Ҳисоб тенгламасидан қаршилик моментини аниқлаймиз:

$$W = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{2000 \cdot 150}{100} = 3000 \text{ см}^3.$$

Бу ифодани ҳалиги $W_{\max}$ га тенглаштириб, d ни топамиз:

$$d \approx 36 \text{ см.}$$

83. Икки таянчга тиралган балкага, 272- шаклда кўрсатилгандек $P = 1000 \text{ кг}$ куч таъсир этади. Балканинг ўртасидаги кўндаланг кесимининг, нейтрал қатламдан 5 см масофадаги A элементда ҳосил бўладиган нормал ва тангенциал кучланишлар ҳисоблансин. Кўндаланг кесим тўғри тўртбурчак бўлиб, унинг ўлчамлари: $h = 20 \text{ см}$, $b = 12 \text{ см}$ дир. Кўрсатма. Нормал ва тангенциал кучланишлар

$$[\sigma] = \frac{M}{I_y} z; \quad \tau = \frac{Qh^2}{8I_y} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right)$$

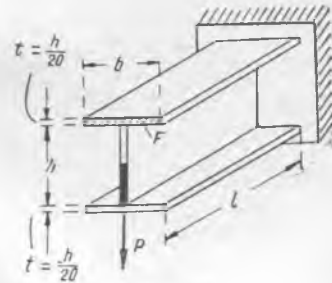
формулардан аниқланади:

$$\sigma_A = 62,5 \text{ кг/см}^2,$$

$$\tau_A = 1,88 \text{ кг/см}^2.$$

84. Токчаси билан девори бир хил қалинликдаги листларнинг туташтирилишидан ҳосил бўлган қўш таврли кўндаланг кесимга эга консолнинг учига 273- шаклда кўрсатилгандек, P куч таъсир этади. Консол узунлиги (l) нинг қандай қийматида энг катта нормал ва тангенциал кучланишлар тегишли рухсат этилган кучланишларга тенг бўлади. Рухсат этилган кучланишларнинг нисбати: $\frac{[\tau]}{[\sigma]} = 0,8$; $b = h$. Масала шартини шундай қолдириб, l нинг қиймати тўғри тўрт бурчакли кесим учун аниқлансин.

Ечнш. Юпка листлардан тузилган қўш тавр учун I_y , W ва $S(z)_{\max}$ ни ҳисоблаймиз:



273- шакл.

$$I_y = 2F \frac{h^3}{4} + \frac{th^3}{12} = 2h \frac{h}{20} \cdot \frac{h^3}{4} + \frac{h^4}{20 \cdot 12} = \frac{7h^4}{240}, \quad W = I_y \cdot \frac{h}{2} = \frac{7h^3}{120}.$$

$$S(z)_{\max} = \frac{h}{20} \cdot h \cdot \frac{h}{2} + \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{20} \cdot \frac{h}{4} = \frac{h^3}{32}, \quad \sigma_{\max} = \frac{M}{W} = \frac{Pl}{7h^3} \cdot 120;$$

$$\tau_{\max} = \frac{QS(z)_{\max}}{I_y b} = \frac{Ph^3 240 \cdot 20}{32 \cdot 7h^4 h} = \frac{300P}{2 \cdot 7h^2}.$$

Масала шартига мувофиқ:

$$\tau_{\max} \geq 0,8\sigma_{\max}; \quad \frac{300P}{2 \cdot 7 \cdot h^2} \geq 0,8 \frac{Pl}{7h^3} \cdot 120,$$

бундан:

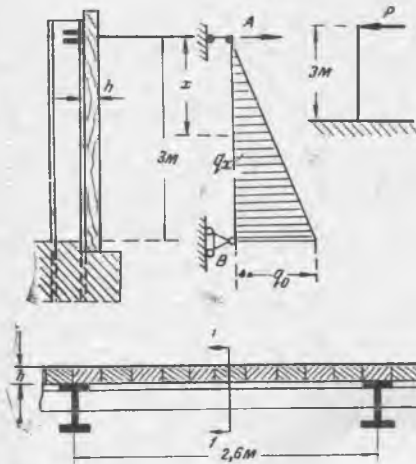
$$l \leq \frac{300h}{2 \cdot 120 \cdot 0,8} = 1,56h.$$

Тўғри тўрт бурчакли кесим учун:

$$\sigma_{\max} = \frac{6Pl}{bh^2}; \quad \tau_{\max} = \frac{3P}{2bh};$$

$$\frac{3P}{2bh} \geq 0,8 \frac{6Pl}{bh^2}; \quad l \geq \frac{h}{2 \cdot 2 \cdot 0,8} = 0,31h.$$

85. Уч метр баландликдаги сув босимини тутиб турувчи тўғон зич урнатилган тўғри тўртбурчак кесимли вертикал тахталардан иборат бўлиб, улар пастки учи билан, 274-шаклда тасвирланганидек, фундамент қиррасига (поғонасига) тиралиб, юқориги учи билан тенг ёқли бўлмаган иккита бурчакликдан тузилган горизонтал балкага тиралган. Бу балкалар пастки учи фундаментга қистириб тиралган қўш таврли устунларга болтлар ёрдами билан бириктирилган. Устунлар бир-биридан 2,6 м масофада туради. Ёғоч тахталарнинг қалинлиги (h) ни, горизонтал балкаларнинг ҳамда вертикал устунларнинг кесимларини аниқлаш керак. Рухсат этилган кучланишлар ёғоч учун:



274-шакл.

дир. Бу юкнинг интенсивлиги халиги балканинг А таянч реакциясидир, шунинг учун:

$$A = q = 1,5 \text{ т/м.}$$

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{1,5 \cdot 2,6^2}{8} = 1,27 \text{ тм;}$$

$$W = \frac{M_{\max}}{[\sigma_n]} = \frac{127000}{1000} = 127 \text{ см}^3.$$

Сортамент жадвалидан $150 \times 100 \times 12$ мм бурчакликни танлаймиз. Бу бурчаклик учун:

$$W = 130 \text{ см}^3.$$

Устунлар икки балканинг таянч боси лари билан юкланган (274-шакл). Шунинг учун устуннинг учига қўйилган юк:

$$P = 1,5 \cdot 2,6 = 3,9 \text{ Т.}$$

$$W_{\max} = 3,9 \cdot 3 = 11,7 \text{ тм; } W = \frac{1170000}{1000} = 1170 \text{ см}^3.$$

Бунга мос кесим: I № 40^с дир: $W = 1190 \text{ см}^3$.

86. Қўш таврли балканинг кесимидаги эгувчи момент $M = 3000$ кгм, кесиб ўтувчи куч $Q = 10000$ кг. Мазкур кесимнинг қуйидаги икки нуқтаси учун максимал бош кучланишлар аниқлансин:

1. Деворнинг ёғига мос келган mm чизикдаги энг юқори a нуқта учун.

2. Токчанинг паст ёғига мос келган, деворнинг энг баланд толаси nn учун (275-шакл).

Е чи ш. Биринчи ва иккинчи ҳол учун нормал кучланиш бир хил қийматга эга, у қуйидаги формуладан аниқланади:

$$\sigma = \frac{M}{I_y} \cdot z.$$

$$\sigma = \frac{300000 \cdot 8,5}{1765} \approx 1445 \text{ кг/см}^2.$$

$$[\sigma] = 50 \text{ кг/см}^2, \text{ пўлат учун: } [\sigma_n] = 1000 \text{ кг/см}^2.$$

Бурчакликларнинг болтлар учун тешиллиш натижасида заифланиши ҳисобга олинмасин.

Е чи ш. Кенглиги 1 м ли вертикал тахталар учун (274-шакл):

$$q_0 = 3 \text{ т/м, } A = 1,5 \text{ т}$$

$$\text{бўлади, хавфли кесим } A \text{ таянчдан } x = \frac{b \sqrt{3}}{3} = 1,73 \text{ тм масофададир. Шу-}$$

нинг учун: $M_{\max} = 1,73$ м бўлади. Тегишли қаршилик моментини ҳисоб тенгламасидан топамиз:

$$W \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{173000}{50} = 3460 \text{ см}^3.$$

$$\text{Иккинчи томондан: } W = \frac{100h^3}{6} =$$

$= 3460$; бундан тахталарнинг қалинлиги (h) ни аниқлаймиз: $h = 14,4$ см.

Вертикал тахталарнинг босими горизонтал балка учун тенг ёйилган юк:

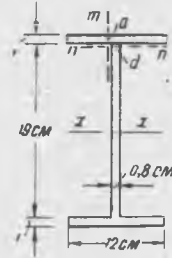
Тангенциал кучланиш эса иккала нуқта учун ҳар хил бўлади: биринчи нуқта тоқчага оид бўлиб, иккинчиси деворга оиддир; шунинг учун (82.1) ва (82.3) дан фойдаланамиз:

$$\tau_1 = \frac{Qh^2}{8I_y} \left(1 - \frac{h_1^2}{h^2} \right) = \frac{10000 \cdot 21^2}{8 \cdot 1765} \left(1 - \frac{19^2}{21^2} \right) = 62,3 \text{ кг/см}^2,$$

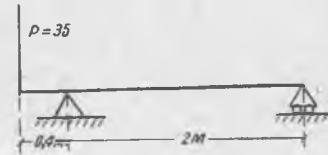
$$\sigma = \frac{b}{a} \tau_1 = \frac{12}{1} \cdot 62,3 = 747,6 \text{ кг/см}^2.$$

Максимал бош кучланиш:

1) ҳолда:



275-шакл.



276-шакл.

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \left\{ 1445 + \sqrt{1445^2 + 4 \cdot 62,3^2} \right\} \approx 1448 \text{ кг/см}^2,$$

2) ҳолда:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \left\{ 1445 + \sqrt{1445^2 + 4 \cdot 747,6^2} \right\} \approx 1764 \text{ кг/см}^2.$$

87. 276-шаклда тасвирланган балка учун сортамент жадвалидан қўш таврли кесим танлансин. Консол учига қўйилган куч: $P = 3,5 \text{ т}$ рухсат этилган кучланиш: $[\sigma] = 1400 \text{ кг/см}^2$. Танланган кесим туртала мустаҳкамлик назариясини татбиқ этиб текшириб қўрилсин.

Ечиш. Кесиб ўтувчи куч ва эгувчи момент эпюраларидан:

$$Q_{\max} = 3500 \text{ кг}; M_{\max} = 140000 \text{ кгсм}.$$

Эпюраларни чизиш ўқувчиларга тавсия этилади. Ҳисоб тенгламасидан:

$$W = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{140000}{1400} = 100 \text{ см}^3$$

келиб чиқади. Сортамент жадвалидан 14-номерли I ни оламяз.

$I = 712 \text{ см}^4$. Мазкур кесим тоқчасининг статик моменти:

$$S_1 = 8 \cdot 0,91 \cdot 6,54 = 47,6 \text{ см}^3.$$

Кесим юзаси ярмисининг статик моменти:

$$S_2 = 47,6 + \frac{6 \cdot 0,9^2}{2} \cdot 0,55 = 57,8 \text{ см}^3$$

бўлади. Тоқчанинг юқори қиррасидаги кучланишлар:

$$\sigma_{\max} = \frac{140000}{712} \cdot 7 = 1376 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} < 1400,$$

$$\tau = 0$$

бўлади.

Тоқчанинг пастки қиррасида девор билан қўшилган жойдаги кучланишлар:

$$\sigma = \frac{140000}{712} \cdot 6,09 = 1197 \text{ кг/см}^2,$$

$$\tau = \frac{3500 \cdot 47,6}{712 \cdot 0,55} = 425 \text{ кг/см}^2.$$

Бу нуқта учун балканинг мустаҳкамлигини текшираимиз:

Биринчи назарияга мувофиқ:

$$\frac{1}{2} \{ 1197 + \sqrt{1197^2 + 4 \cdot 425^2} \} = \frac{1}{2} (1197 + 1467) = 1332 \text{ кг/см}^2 < 1400.$$

Иккинчи назарияга мувофиқ:

$$0,35 \cdot 1197 + 0,65 \cdot 1467 = 1373 \text{ кг/см}^2 < 1400.$$

Учинчи назарияга мувофиқ:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 1332 - (-135) = 1467 \text{ кг/см}^2 > 1400.$$

Тўртинчи назарияга мувофиқ:

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{1197^2 + 3 \cdot 425^2} = 1405 \text{ кг/см}^2 > 1400.$$

Фақат учинчи назария асосида чиқарилган кучланиш тахминан +5% фарқ қилади. Биз девор билан тоқчанинг қўшилган жойидаги тадрижий утишни кескин бурчак билан алмаштирганимиз учун бу фарқнинг аҳамияти йўқ.

□

XII боб

БАЛКАЛАРНИНГ ЭГИЛИШДАГИ ДЕФОРМАЦИЯЛАРИНИ АНИҚЛАШ

87-§. Балкаларнинг салқилигини ва кўндаланг кесимларнинг айланишини аналитик усулда аниқлаш

Балкаларни ҳисоблашда инженерни балкага қўйилган юклар таъсиридан унда ҳосил бўладиган кучланишлар билан бирга деформациялар, яъни турли нуқталарининг салқилиги ва турли кўндаланг кесимларининг айланиши ҳам қизиқтиради. Балкалар қўйилган юклар таъсиридан салқилиш натижасида таянчлардан ажраб кетмаслиги ва, шунингдек, юклар динамик бўлган ҳолда тебраниш ҳаддан ташқари кучли бўлмаслиги учун, одатда, уларнинг салқилигига чек қўйилади. Масалан, пўлат балкалар учун максимал салқилик $\frac{l}{1000} \div \frac{l}{250}$ орасида бўлиш керак.

Статик аниқмас масалаларни ечишда балкаларнинг эгилишдаги деформациясини аниқлашдан фойдаланиб, қўшимча тенгламалар тузилади. Шунинг учун ҳам эгилишдаги деформацияларни аниқлашнинг аҳамияти каттадир. Эгилиш назариясини баён этишда қабул қилинган асосий гипотезаларнинг ҳаммасини ўз кучида қолдирамиз. Шунинг учун бу ерда уларни такрорлаб ўтирмасдан, фақат текис эгилиш назариясини ривожлантираётганлигимизни яна бир қарра эслатиб ўтамиз. Балканинг симметрия текислиги XOZ да ётувчи ҳар хил юклар таъсиридан эгилган ўқи AC_1B 277-шаклда тасвирланган. Эгилган бу ўқ баъзан эластик чизиқ деб аталади, чунки балкадан юк таъсири олинганда, ундаги деформация йўқолиб, эгилган ўқ ўзининг олдинги тўғри чизиқли ҳолатига қайтади. 277-шаклда тасвирланган балканинг чап таянчидан x масофадаги кесимининг S маркази деформация натижасида C_1 га қўчади. Балканинг ўқиға тик йўналишдаги CC_1 қўчиш мазкур S кесимининг салқилиги дейилади. Балка ўқининг ҳар бир нуқтасидаги салқиликни w билан белгилаймиз.

Балка деформацияланганда унинг қўндаланг кесими текис қолган ҳолда нейтрал ўқ атрофида ўзининг олдинги ҳолатига нисбатан айланади. 277-шаклда C кесимнинг деформациягача ва ундан кейинги ҳолатлари mC ва m_1C_1 чизиқлар билан кўрсатилган. Ҳар бир қўндаланг кесим ўзининг олдинги ҳолатига нисбатан деформация натижасида қандайдир θ бурчакка айланади. Бу бурчак кесимнинг айланиш бурчаги дейилади. Балка ўқининг ҳар бир нуқтасидаги салқилик (w) ни аниқлаш учун унинг эгилган ўқини, яъни унинг салқилиги қандай эгри чизиқ билан тасвирланишини яъни:

$$w = w(x) \quad (87.1)$$

тенгламани билишимиз керак. Бу тенглама эгилган ўқ ёки эластик чизиқ тенгламаси дейилади. Эгилган ўқнинг C_1 нуқтасидан ўтказилган уринма x ўқи билан θ бурчак ҳосил қилади. Бу θ бурчак мазкур C кесимнинг олдинги ҳолатига нисбатан айланиш бурчагидир. Бу бурчакнинг тангенс $w(x)$ функциянинг x га нисбатан олинган ҳосиласига тенг:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dw}{dx}. \quad (87.2)$$

Балканинг ҳар қандай нуқта-сидаги салқилиги унинг узунлигига қараганда жуда ҳам кичик бўлгани учун кесимнинг энг катта айланиш бурчаги 1° дан ошмайди. Шунинг учун θ бурчакнинг тангенсини шу бурчакнинг радианларда ифодаланган қиймати билан алмаштиришимиз мумкин: $\operatorname{tg} \theta \approx \theta$. Шунинг кўзда тутиб, (87.2) ни бундай кўринишда ёзса бўлади:

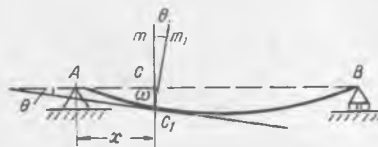
$$\theta = \frac{dw}{dx}. \quad (87.3)$$

Демак, деформация вақтида бирор қўндаланг кесимнинг айланиш бурчаги θ мазкур кесимнинг салқилиги (w) дан x га нисбатан олинган биринчи ҳосиллага тенг бўлар экан.

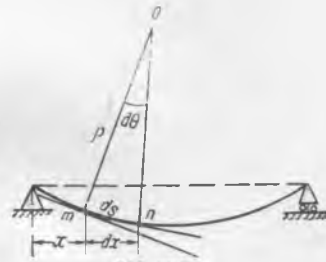
Балканинг деформациясини текшириш масаласи ўқнинг эгилган ўқининг тенгламаси $w = w(x)$ ни аниқлашга келтирилади. Бу тенгламани аниқлаш учун, эгувчи момент (M) билан эластик чизиқ эгрилиги ($\frac{1}{\rho}$) орасидаги муносабат (78.9) дан, яъни:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EI_y} \quad (87.4)$$

дан фойдаланамиз. Эластик чизиқ эгрилиги билан тегишли кесимнинг айланиш бурчаги (θ) орасидаги муносабатни топамиз. Бунинг учун эластик чизиқнинг бир-бирига чексиз яқин бўлган бирор m ва n нуқталаридан уринмалар ўтказамиз (278-шакл). Бу нуқталар орасидаги ёй ds бўлсин, m ва n нуқталардаги уринмаларга ўтказилган нормаллар орасидаги $d\theta$ бурчак n кесимининг m кесимга нисбатан айланиш бурчагидир. Нормалларнинг кесиш-



277-шакл.



278-шакл.

ган нуқтаси (O) эса эластик чизиқнинг m нуқтадаги эгрилик марказини беради. Шунинг учун:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{d\theta}{ds} \quad (87.5)$$

бўлади. Балканинг эластик чизиғи нейтрал қатламда ётгани учун $ds \approx dx$ деб олишимиз мумкин. Ундан ташқари, (87.3) кўзда тутилса, эластик чизиқнинг эгрилиги $\left(\frac{1}{\rho}\right)$ учун қуйидаги тақрибий ифодани оламиз:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{d^2 w}{dx^2}. \quad (87.6)$$

$\frac{1}{\rho}$ нинг қийматини бу тенгламадан (87.4) га қўйсак, қуйидаги тақрибий дифференциал тенглама ҳосил бўлади:

$$\pm EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} = M(x). \quad (87.7)$$

Бу тенглама эластик чизиқнинг дифференциал тенгламаси дейилади. Бу тенгламанинг интегралли ҳар бир хусусий ҳолда балка эластик чизиғининг тенгламаси $w = w(x)$ ни беради.

Биз $\frac{d^2 w}{dx^2}$ олдига икки хил ишора қўйдик, чунки 278-шаклда z ўқининг йўналишини кўрсатмадик. Эгувчи момент M нинг ишораси координата ўқларининг йўналишидан қатъи назар белгилангани учун $\frac{d^2 w}{dx^2}$ нинг ишораси координата ўқларининг йўналишига боғлиқдир. Иккинчи ҳосила $\frac{d^2 w}{dx^2}$ мусбат бўлиши учун, z ўқининг мусбат йўналиши эгри чизиқнинг ботиқ томонига, манфий бўлиши учун эса қавариқ томонига қараб йўналган бўлиши керак (279-шакл). Демак, M мусбат бўлган ҳолда z ўқи юқорига йўналганда тенглама $+$ ишора билан, пастга йўналганда $-$ ишора билан олинади. Эластик чизиқнинг дифференциал тенгламаси (87.7) га қатъий бир ишора бериш учун z ўқини китобимизнинг охиригача юқорига йўналтирамиз ва тенгламани мусбат белги билан ёзамиз:

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} = M(x). \quad (87.8)$$

Эгувчи момент (M) нинг ишорасини балкага қўйилган ишораларга қараб, илгари белгиланган қоидага мувофиқ оламиз. Қўндаланг кесим инерция моментининг нейтрал ўқ (Y) га нисбатан олиниши бизга маълум бўлгани учун (87.8) тенгламадаги I нинг y ишорасини тушириб қолдирдик.

13-параграфда чиқарилган $M(x)$, $Q(x)$ ва $q(x)$ орасидаги дифференциал муносабатлардан фойдаланиб, (87.8) тенгламанинг бошқача кўринишларини ҳам келтирамиз.

$$\frac{dM}{dx} = Q(x) \text{ бўлгани учун:}$$

$$EI \frac{d^3 w}{dx^3} = Q(x). \quad (87.9)$$

$$\frac{dQ}{dx} = -q(x) \text{ бўлгани учун:}$$

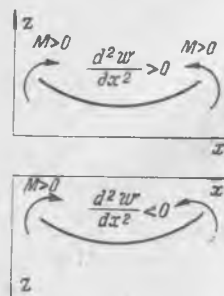
$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = -q(x) \quad (87.10)$$

Энди, (87.3) ни қўзда тутиб, (87.8), (87.9) ва (87.10) тенгламаларни қўшиб ёзишимиз мумкин:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = EI \frac{d^3 \theta}{dx^3} = \frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} = -q(x). \quad (87.11)$$

Юқоридаги тенгламалар бикрлиги ўзгармас ($EI = \text{const}$) балкалар учун чиқарилди.

Қўрамизки балка таянчларининг тузилиши ва унга қўйилган ёйилма юк $q(x)$ маълум бўлса, (87.11) ни кетма-кет интеграллаш билан $Q(x)$, $M(x)$, $EI\theta$ ва EIw функцияларни оламиз. Шунингдек эластик чизиқ тенгламаси $w = w(x)$ маълум бўлса, $EIw(x)$ функцияни кетма-кет дифференциал-



279- шакл.



280- шакл.

лаш билан $EI\theta$, $M(x)$ ва $Q(x)$ ни оламиз. Бу миқдорларнинг графикларини тасвирлашда, уларнинг мусбат қийматларини юқорига, манфий қийматларини эса пастга қаратиб қўямиз. 280-шаклда икки таянчга эркин тиралган ва ихтиёрий $q(x)$ қонун билан ёйилиб, пастга қараб йўналган юк таъсири остида бўлган балка учун $Q(x)$, $M(x)$, $\theta(x)$ ва $w(x)$ ларнинг графиклари тасвирланган.

88-§. Тақрибий назариянинг қўлланиш чегараси

Тақрибий тенглама (87.8) нинг аниқлигини билиш учун, характерли бирор масалани олиб, уни ана шу тақрибий тенглама воситаси билан ечиш ва чиққан натижасини шу масаланинг аниқ тенгламадан фойдаланиб чиқарилган натижаси билан таққослаш лозим. Бир учи билан қисилиб тиралган консолнинг бошқа учига моменти M га тенг жуфт куч қўйилган (281-шакл). $M = \text{const}$ бўлгани учун $\frac{1}{\rho} = \text{const}$ бўлади. Эгрилиги ўзгармас чизиқ айлана бўлади. Бу ҳолда балка учи (B) нинг салқилиги ($w_{\max}$) ни аниқ ҳисоблашимиз мумкин:

$$w_{\max} = AA_1 = BB_1 = \rho - \rho \cos \theta = \rho \left(1 - \cos \frac{l}{\rho} \right).$$

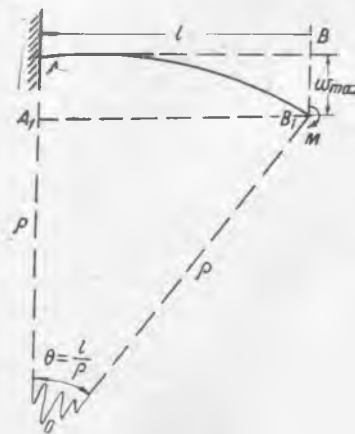
$\cos \frac{l}{\rho}$ ни қаторга ажратиб, унинг фақат уч ҳадиниғина қолдираимиз, чунки $\left(\frac{l}{\rho} < 1\right)$:

$$\cos \frac{l}{\rho} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{l}{\rho}\right)^2 + \frac{1}{24} \left(\frac{l}{\rho}\right)^4.$$

Бу ифода кўзда тутилса, $w_{\max}$ қуйидагича ёзилади:

$$w_{\max} = \frac{1}{2} \frac{l^2}{\rho} + \frac{1}{24} \frac{l^4}{\rho^3}; \text{ бундан: } \frac{w_{\max}}{l} = \frac{1}{2} \frac{l}{\rho} + \frac{1}{24} \frac{l^3}{\rho^3}$$

ёки:



281-шакл.

$$\frac{w_{\max}}{l} = \frac{1}{2} \left(\frac{Ml}{EI}\right) + \frac{1}{24} \left(\frac{Ml}{EI}\right)^3. \quad (88.1)$$

Энди, шу масалани тақрибий тенглама (87.8) ёрдами билан ечамиз. $M = \text{const}$ бўлгани учун, тенгламани икки қайта интеграллаб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{Mx}{EI} + C_1;$$

$$w = \frac{Mx^2}{2EI} + C_1x + C_2.$$

Ихтиёрий ўзгармаслар C_1 ва C_2 ни балка учларининг тирлиш шартларидан аниқлаймиз. Биз текшираётган ҳолда, $x = 0$ бўлган кесим қистириб тиралгани учун унинг айланиши ва салқиланиши нолга тенг бўлади.

Шунинг учун, $x = 0$ бўлганда: $\frac{dw}{dx} =$

$= 0$; $w = 0$. Бу шартларни $C_1 = C_2 = 0$ бўлгандагина қаноатлантириш мумкин. Демак, балканинг B учининг нисбий салқилиғи тақрибий назарияга мувофиқ, қуйидагича ёзилади:

$$\frac{w_0}{l} = \frac{1}{2} \frac{Ml}{EI}. \quad (88.2)$$

Энди, буни кўзда тутиб, B нинг нисбий салқилиғининг аниқ қийматини қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$\frac{w_{\max}}{l} = \frac{w_0}{l} + \frac{1}{3} \left(\frac{w_0}{l}\right)^3.$$

Тақрибий назариянинг нисбий хатолиғи:

$$\frac{w_{\max} - w_0}{l} = \frac{1}{3} \left(\frac{w_0}{l}\right)^3. \quad (88.3)$$

бўлади. Эластиклик модули (E) тажрибадан аниқланганда, унинг хатоси 3—4% чегарасида бўлгани учун, балкалардаги салқиликнинг хатосини энг камида 3% олсак, уни жуда юқори аниқлик билан ҳисоблаган бўламиз.

Шунинг учун:

$$\frac{w_{\max} - w_0}{l} = \frac{1}{3} \left(\frac{w_0}{l}\right)^3 = \frac{3}{100};$$

бундан:

$$\frac{w_0}{l} \approx 0,4.$$

Кўрамизки, салқилик балка узунлигининг 40 процентини ташкил этганда ҳам (87.8) тенглама етарли даражада аниқ натижаларни берар экан. Бундан катта салқилик жуда юпқа балкаларда бўлиши мумкин. Ҳақиқатан ҳам, тақрибий назарияга мувофиқ:

$$\frac{w_0}{l} = \frac{1}{2} \frac{l}{\rho} \quad (88.4)$$

бўлса, балка қўндаланг кесимининг нейтрал ўқидан энг юқори қиррасига-ча бўлган масофа $\frac{h}{2}$ га тенг бўлса, максимал нисбий чўзилиш:

$$e_{\max} = \frac{h}{2\rho}$$

бўлади; бундан:

$$\frac{1}{\rho} = 2 \frac{e_{\max}}{h} = 2 \frac{[\sigma]}{Eh}$$

ни ҳосил қиламиз. Буни (88.4) га қўйсак,

$$\frac{w_0}{l} = \frac{l}{h} \cdot \frac{[\sigma]}{E}$$

чиқади, бундан:

$$\frac{l}{h} = \frac{w_0}{l} \frac{E}{[\sigma]} \quad (88.5)$$

$$E = 2 \cdot 10^8 \text{ кг/см}^2, [\sigma] = 2000 \text{ кг/см}^2 \text{ ва } \frac{w_0}{l} \approx 0,4$$

бўлса:

$$\frac{l}{h} = 400$$

бўлади.

Кўрамизки, балка баландлигининг узунлигига нисбати 400 дан катта бўлмаганда, тақрибий тенгламанинг хатолиги 3% га борар экан. Ҳолбуки металлдан ясалган конструкцияларда ишлатиладиган балкалар учун $\frac{l}{h}$ нинг қиймати 33 дан ошмайди. Шунга кўра, материаллар қаршилигида ечиладиган эгилишга оид масалалар учун (87.8) тенгламани тақрибий демаса ҳам бўлади. Аммо жуда юпқа стерженларда, масалан, рессора ва пружиналарда кесимнинг айланиш бурчаги тангенсини бурчакнинг радиан ҳисобида ўлчанган қиймати билан алмаштириб бўлмайди. Ундай ҳолларда эгриликнинг аниқ қийматини олиш лозим бўлади.

89-§. Эластик чизиқнинг дифференциал тенгламасини интеграллаш

Эластик чизиқнинг дифференциал тенгламаси (87.8) ни интеграллаш, эгувчи момент $M(x)$ балканинг узунлиги давомида битта аналитик тенглама билан ифодаланса, жуда ҳам осон бўлади. Бундай ҳоллар учун X бобда тегишли эгувчи момент ифодаларини тузган эдик. Эгувчи момент

$M(x)$ балканинг бутун узунлиги давомида битта аналитик ифода билан аниқланади деб, (87.8) тенгламанинг интегралини қуйидагича ёзамиз:

$$EI \frac{dw}{dx} = \int M(x) dx + C_1; \quad (89.1)$$

$$EI w = \int \left(\int M(x) dx + C_1 \right) dx + C_2. \quad (89.2)$$

Бунда C_1 ва C_2 — интеграллашда ҳосил бўладиган ихтиёрый ўзгармаслар. Уларнинг қийматини балка учларининг тиралиш шартларидан, яъни масаланинг чегара шартларидан топамиз. Энг оддий иккита типдаги статик

аниқ балкаларни текшираемиз. Улар бир учи билан қисилиб тиралган консол ва икки учи билан эркин тиралган оддий балкалардир. Бу икки ҳол учун, балкага қўйилган юкларнинг қандай бўлишидан қатъи назар, C_1 ва C_2 ни аниқлашнинг иккита шартини оламиз. Бир учи билан қисилиб тиралган консол учун (282-шакл) балканинг чап учида салқилиги, шунингдек, шу кесимнинг нейтрал ўққа нисбатан айланиш бурчаги нолга тенг. Шунинг учун қуйидаги иккита чегара шартини оламиз:

$$x = 0 \text{ бўлганда: } \theta = \frac{dw}{dx} = 0 \text{ ва } w = 0 \quad (89.3)$$



282-шакл.



283-шакл.

Икки таянчга эркин тиралган оддий балка учун (283-шакл) таянчлардаги салқиликлар нолга тенг бўлади. Шунинг учун чегара шартлари қуйидагича ёзилади:

$$x = 0 \text{ бўлганда: } w_A = 0; \quad x = l \text{ бўлганда: } w_B = 0. \quad (89.4)$$

Балка учларининг тиралиш шартларидан, яъни (89.3) ёки (89.4) дан C_1 ва C_2 ни аниқлаб, уларнинг қийматини (89.1) ва (89.2) га қўйсак, ечилаётган масаланинг барча шартларини канонизациялаштирувчи эластик чизик тенгламасини оламиз. Балка давомида битта аналитик ифода билан аниқланадиган эгувчи моменти бўлган бир нечта хусусий ҳоллар учун эластик чизик дифференциал тенгламасини интеграллаймиз.

МАСАЛАЛАР

88. Узунлиги l га тенг бўлиб, учи билан қисилиб тиралган балканинг эластик чизик тенгламаси қуйидаги уч ҳол учун аниқлансин: 1) ўнг учига P юк қўйилган; 2) балка давомида интенсивлиги q бўлган тенг бўлган юк таъсир қилади; 3) максимал қиймати q_0 бўлган учбурчак қонун билан ўзгарувчи бўлган юк таъсир этади (284-шакл, a , b , c).

Еч и ш. Масалани биринчи ҳол учун ечамиз: $M = -P(l-x)$ бу ҳол учун (89.1) ва (89.2) қуйидагича бўлади:

$$\left. \begin{aligned} \theta = \frac{dw}{dx} &= \frac{P(l-x)}{2EI} + C_1, \\ w &= -\frac{P(l-x)^2}{6EI} + C_1x + C_2. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

C_1 ва C_2 ни (89.3) дан аниқлаймиз: $x = 0$ бўлганда $\frac{dw}{dx} = 0$; $w = 0$; $C_1 = -\frac{Pl^3}{2EI}$;
 $C_2 = \frac{Pl^3}{6EI}$. Буларни (а) га қўйсак:

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \frac{dw}{dx} = -\frac{P}{2EI} x(2l - x), \\ w &= -\frac{P}{6EI} (3lx^2 - x^3) \end{aligned} \right\} \quad (89.5)$$

келиб чиқади.

Кесимнинг энг катта айланиш бурчаги (θ_A) ва максимал салқилигининг қиймати ($w_{\max} = f_A$) ни $x = l$ ни қўйиб аниқлаймиз:

$$1) \theta_A = -\frac{Pl^2}{2EI}; f_A = -\frac{Pl^3}{3EI}. \quad (89.6)$$

Иккинчи ва учинчи ҳоллар ҳам худди шундай усулда ечилади:

$$2) \theta_A = -\frac{ql^3}{6EI}; f_A = -\frac{ql^4}{8EI}. \quad (89.7)$$

$$3) \theta_A = -\frac{q_0 l^3}{24EI}; f_A = -\frac{q_0 l^4}{30EI}. \quad (89.8)$$

89. Икки таянчга тиралган ва узунлиги l бўлган балканинг эластик чизиги тенгламаси куйидаги уч ҳол учун аниқлансин: 1) балка мобайнча интенсивлиги q бўлган тенг ёйилган юк қўйилган; 2) балка давомида учбурчак қонун билан ёйилган ва максимал интенсивлиги q_0 га тенг бўлган юк қўйилган; 3) балканинг таянч кесими B га momenti M_0 га тенг жуфт куч қўйилган (285-шакл, а, б, в).

Е чи ш. Биринчи ҳолни ечамиз. Таянч реакциялари $A = \frac{ql}{2}$; $B = \frac{ql}{2}$ бўлгани учун, эгувчи момент $M = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} = \frac{q}{2}(lx - x^2)$ бўлади. Бу ҳолда (89.1) ва (89.2) куйидагича ёзилади:

$$\theta = \frac{dw}{dx} = \frac{q}{2EI} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) + C_1;$$

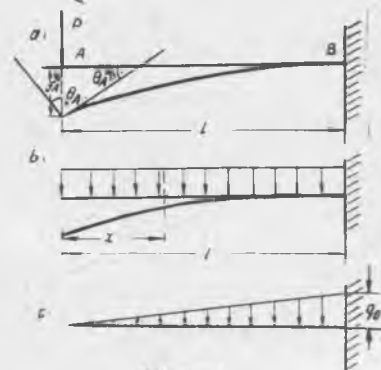
$$w = \frac{q}{2EI} \left(\frac{lx^3}{6} - \frac{x^4}{12} \right) + C_1x + C_2.$$

Ихтиёрий ўзгармаслар C_1 ва C_2 ни (89.4) дан аниқлаймиз. Таянч A да $x = 0$ бўлганда, $w_A = 0$, шунингдек, таянч B дан $x = l$ бўлганда $w_B = 0$. Бу шартлардан C_1 ва C_2 ни аниқлаймиз:

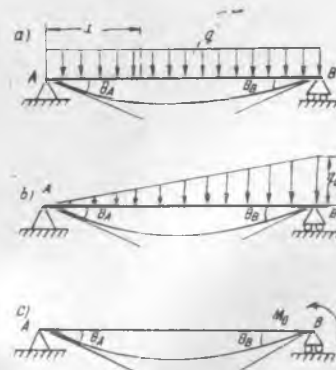
$$C_2 = 0; C_1 = -\frac{ql^3}{24EI}$$

0 ва w учун куйидаги ифодаларни оламиз:

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \frac{dw}{dx} = -\frac{ql^3}{24EI} \left(1 - 6\frac{x^2}{l^2} + 4\frac{x^3}{l^3} \right); \\ w &= -\frac{ql^3x}{24EI} \left(1 - 2\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3} \right) \end{aligned} \right\} \quad (89.9)$$



284-шакл.



285-шакл.

Максимал салқилик бу ҳолда балканинг ўртасида бўлади. У ерда $\frac{x}{l} = \frac{1}{2}$ бўлгани учун:

$$\theta = 0 \text{ ва } w_{\max} = f = -\frac{5ql^4}{384EI}. \quad (89.10)$$

бўлади.

θ нинг энг катта қиймати таянчлардаги кесимларда бўлиб, $x=0$ ва $x=l$ бўлганда, унинг қиймати қуйидагича бўлади:

$$\theta_{\max} = \pm \frac{ql^3}{24EI}. \quad (89.11)$$

Иккинчи ва учинчи ҳоллар ҳам худди шундай ечилади. Аммо максимал салқилик ҳосил бўладиган кесимнинг ҳолатини $\theta = \frac{dw}{dx} = 0$ дан аниқлаш лозим.

2-ҳолда:

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{q_0 l x}{6} \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right); \\ \theta = \frac{dw}{dx} &= \frac{q_0 l^3}{360EI} \left(7 - 30 \frac{x^2}{l^2} + 15 \frac{x^4}{l^4} \right); \\ w &= \frac{q_0 l x^3}{360EI} \left(7 - 10 \frac{x^2}{l^2} + 3 \frac{x^4}{l^4} \right). \end{aligned} \right\} \quad (89.12)$$

Максимал салқилик $x = 0,519l$ бўлган кесимда ҳосил бўлади. Унинг қиймати:

$$w_{\max} = f = -0,0065 \frac{q_0 l^4}{EI}. \quad (89.13)$$

шунингдек, таянчлардаги кесимларнинг айланиши:

$$\theta_A = -\frac{7}{360} \frac{ql^3}{EI}; \quad \theta_B = \frac{8}{360} \frac{q_0 l^3}{EI} \quad (89.14)$$

бўлади.

3-ҳол учун: $M = \frac{M_0}{l}x$; (89.1) ва (89.2) интеграллар қуйидагича ёзилади:

$$\left. \begin{aligned} \theta = \frac{dw}{dx} &= -\frac{M_0 l}{6EI} \left(1 - 3 \frac{x^2}{l^2} \right); \\ w &= -\frac{M_0 l x}{6EI} \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (89.15)$$

Энг катта салқилик ҳосил бўладиган кесимда $\theta = \frac{dw}{dx} = 0$ бўлиб, унинг абсциссаси

$$x_0 = \frac{l}{\sqrt{3}} = 0,577l \text{ дир. Энг катта салқилик:}$$

$$w_{\max} = f = -\frac{M_0 l^2}{9\sqrt{3}EI}. \quad (89.16)$$

балканинг ўртасидаги салқилик:

$$w_{x=\frac{l}{2}} = -\frac{Ml^2}{16EI} \quad (89.17)$$

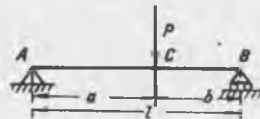
бўлади.

Бу миқдор $w_{\max}$ дач 2,5% фарқ қилади, шунинг учун юк симметрик бўлмаган ҳолда ҳам, икки таянчда ётадиган балканинг максимал салқилиги унинг ўртасидаги кесимда деса бўлади.

90-§. Балка давомида эгувчи момент битта аналитик функция билан ифодаланмайдиган ҳоллар

Балка давомида эгувчи момент битта аналитик функция билан ифодаланмаса, эластик чизиқнинг тенгламасини аниқлаш масаласи бирмунча мураккаблашади. Масалан, балкага тўпланма P юк қўйилган бўлса (286-шакл), бу юк балкани иккита участкага ажратади, ҳар қайси участка учун эгувчи

момент турли функциялар билан ифодаланади. Шунинг учун ҳар қайси участканинг эластик чизиги дифференциал тенгламасини алоҳида тузиб уларнинг интегралини алоҳида топишга тўғри келади. Ҳар қайси участка учун тузилган дифференциал тенгламанинг интегралда иккитадан ихтиёрий ўзгармас бўлади. Балка n та участкага ажратилган бўлса, ихтиёрий ўзгармасларнинг умумий сони $2n$ та бўлади. Уларни аниқлаш учун иккита



286-шакл.



287-шакл.

таянчдаги шартлардан ташқари, $2n - 2$ та қўшимча шарт бўлиши зарур. Биз бу қўшимча шартларни эластик чизикнинг бир участкадан бошқа участкага ўтишда узлуксиз ва силлиқ бўлиши шартидан фойдаланиб тузамиз.

$(k - 1)$ - участканинг ўнг чегарасидаги салқилик w_{k-1} ва бу кесимнинг айланиши $\frac{dw_{k-1}}{dx}$ бўлсин (287-шакл). Шунингдек, k - участканинг чап чегарасидаги салқилик w_k ва бу кесимнинг айланиши $\frac{dw_k}{dx}$ бўлсин. У ҳолда бу участкаларнинг қўшилган жойида қуйидаги муносабатлар бўлиши керак:

$$w_{k-1} = w_k, \quad \frac{dw_{k-1}}{dx} = \frac{dw_k}{dx}. \quad (90.1)$$

Бундай чегара нукталаридан $(n - 1)$ та бўлиб, улар учун $2(n - 1)$ та тенглама тузишимиз мумкин. Балка учларининг тиралиш шартидан яна иккита тенглама оламиз. Буларнинг ҳаммаси $2(n - 1) + 2 = 2n$ та тенглама бўлади. Бу $2n$ тенгламадан ҳалиги $2n$ та ихтиёрий ўзгармасларни аниқлаб, ҳар қайси участка учун тегишли эластик чизикнинг тенгламасини ҳосил қиламиз.

Конкрет масалаларни ечиш йўлини қуйида келтирилган масалалар билан ойдинлаштирамиз.

90- масала. Узунлиги l бўлган балканинг чап таянчидан a масофада P куч қўйилган (288-шакл). Ана шу балка эластик чизигининг тенгламасини, максимал салқилигини ва таянч кесимларининг бурилиши θ_A ва θ_B ни аниқланг.

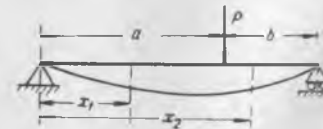
Ечиш. Балкага қўйилган P юк уни иккита участкага ажратгани учун ҳар қайси участка эгувчи моментининг ифодасини тузамиз.

Биринчи участка учун чап таянчдан x_1 масофадаги кесимнинг эгувчи моменти.

$$M = \frac{Px_1}{l}, \quad 0 < x_1 \leq a.$$

Бу участка учун эластик чизикнинг дифференциал тенгламаси:

$$EI \frac{d^2 w_1}{dx^2} = \frac{Px_1}{l}$$



288-шакл.

кўринишда ёзилади. Бунинг интеграллини ёзамиз:

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= \frac{dw_1}{dx} = \frac{Pb}{EI} \frac{x_1^2}{2} + C_1, \\ w_1 &= \frac{Pb}{EI} \frac{x_1^3}{6} + C_1 x_1 + C_2. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Иккинчи участка учун, балканинг чап учидан x_2 масофадаги кесими учун эгувчи момент:

$$M_2 = \frac{Pb}{l} x_2 - P(x_2 - a); \quad a \leq x_2 \leq l$$

бўлади.

Бу иккинчи участканинг дифференциал тенгламаси:

$$EI \frac{d^2 w_2}{dx^2} = \frac{Pb}{l} x_2 - P(x_2 - a)$$

бўлади. Бу тенгламанинг интеграллини ёзамиз:

$$\left. \begin{aligned} \theta_2 &= \frac{dw_2}{dx} = \frac{P}{EI} \left\{ \frac{b}{l} \frac{x_2^2}{2} - \frac{(x_2 - a)^2}{2} \right\} + D_1, \\ w_2 &= \frac{P}{EI} \left\{ \frac{b}{l} \frac{x_2^3}{6} - \frac{(x_2 - a)^2}{6} \right\} + D_1 x_2 + D_2. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

(90.1) шартларни татбиқ этиб, ихтиёрий ўзгармасларни аниқлаймиз:

$$\left\{ \frac{Pb}{EI} \cdot \frac{x_1^2}{2} + C_1 \right\}_{x_1=a} = \frac{P}{EI} \left\{ \frac{b}{l} \frac{x_2^2}{2} - \frac{(x_2 - a)^2}{2} + D_1 \right\}_{x_2=a},$$

$$\left\{ \frac{Pb}{EI} \cdot \frac{x_1^3}{6} + C_1 x_1 + C_2 \right\}_{x_1=a} = \frac{P}{EI} \left\{ \frac{b}{l} \frac{x_2^3}{6} - \frac{(x_2 - a)^3}{6} + D_1 x_2 + D_2 \right\}_{x_2=a}.$$

Бу тенгламалардан: $C_1 = D_1$; $C_2 = D_2$ бўлади. Дифференциал тенгламаларни тузганда иккала участка учун ҳам координаталар бошини бир жойда олдик ва $(x - a)^n$ каби полиномни интеграллашда қавсни очмадик. Шунинг учун ихтиёрий ўзгармаслар иккала участка учун мос равишда тенг бўладик.

Энди, (89.4) шартларни олдин (1) тенгламага, кейин (2) тенгламага татбиқ қилиб, C_1 ва C_2 ни аниқлаймиз. $x_1 = 0$ бўлганда $w_1 = 0$ бўлади. Шунинг учун: $C_2 = D_2 = 0$. $x_2 = l$ бўлганда $w_2 = 0$ бўлади. Бундан:

$$C_1 = D_1 = -\frac{Pb}{6l}(l^2 - b^2).$$

Энди, θ ва w нинг қийматини иккала участка учун аниқлаймиз. 1-участка учун:

$$\theta_1 = \frac{dw_1}{dx} = \frac{Pb}{6EI} [3x_1^2 - (l^2 - b^2)]$$

$$w_1 = \frac{Pb}{6EI} [x_1^3 - x_1(l^2 - b^2)].$$

2-участка учун:

$$\theta_2 = \frac{dw_2}{dx} = \frac{Pb}{6EI} \left\{ 3x_2^2 - 3\frac{l}{b}(x_2 - a)^2 - (l^2 - b^2) \right\},$$

$$w_2 = \frac{Pb}{6EI} \left\{ x_2^3 - \frac{l}{b}(x_2 - a)^3 - x_2(l^2 - b^2) \right\}.$$

$w_{\max} = f$ нинг қийматини аниқлаймиз. У, $0 = 0$ бўлган кесимга мос келади. θ_1 нинг қиймати $x_1 = 0$ бўлганда: $\theta_1 = -\frac{Pb}{6EI} \left(1 - \frac{l^2}{l^2}\right) < 0$ бўлади: $x_1 = a$ бўлганда, яъни C кесимда:

$$\theta_c = \frac{2Pab}{3EI} \left(\frac{a}{l} - \frac{1}{2}\right);$$

масала шартига мувофиқ $\frac{a}{l} > \frac{1}{2}$ бўлгани учун $\theta_c > 0$ бўлади. Демак, θ_1 нинг қиймати A ва C нуқталар орасида ишорасини ўзгартираётир, яъни ноль оркали ўтаётир. Шунинг учун энг катта салқилик биринчи участкада бўлади. Шу $w_{\max} = f$ бўлган кесим абсциссасини x_0 деб, унинг ҳолатини аниқлаймиз:

$$0_1 = \frac{Pb}{6EI} \{3x_0 - (l^2 - b^2)\} = 0, \text{ бундан: } x_0 = \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}};$$

бу қийматни w_1 нинг ифодасига қўйиб, $w_{\max} = f$ нинг абсолют қиймати учун қуйидаги ифодани оламиз:

$$w_{\max} = f = \frac{Pb(l^2 - b^2)\sqrt{3(l^2 - b^2)}}{27EI} = \frac{Pbl^2\sqrt{3}}{27EI} \sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{l^2}\right)^3}. \quad (90.2)$$

P қўйилган нуқтанинг ўзгариши билан энг катта салқилик ҳосил бўладиган кесим ҳам қўзғалади. Масалан, куч қўйилган нуқта балканинг ўртасида бўлса, $b = \frac{l}{2}$ бўлиб, $x_0 = \frac{l}{2}$ бўлади. У ҳолда:

$$f = \frac{Pl^3}{48EI}. \quad (90.3)$$

Куч қўйилган нуқтани балканинг ўнг таянчига яқинлаштирамиз, $b \rightarrow 0$ бўлганда:

$$x_0 = \frac{l}{\sqrt{3}} = 0,577l$$

бўлади.

Қўрамизки, куч қўйилган нуқта, балканинг ўртасидан чеккасига яқинлашганда, энг катта салқилик ҳосил бўладиган кесимнинг абсциссаси $0,5l$ дан фақат $0,577l$ гача ўзгарар экан. Шунинг учун, одатда, энг катта салқиликни аниқлаш учун юклар симметрик бўлмаган ҳолларда ҳам балканинг ўрта кесимидаги салқилик ҳисобланади. Масалан, биз текшираётган ҳолда балканинг ўртасидаги салқиликни w_1 нинг ифодасига $x_1 = \frac{l}{2}$ ни қўйиб аниқлаймиз:

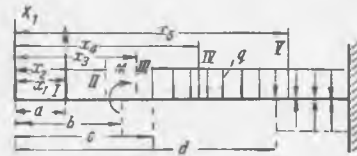
$$(w_1)_{x_1=\frac{l}{2}} = \frac{Pb(3l^2 - 4b^2)}{48EI}. \quad (90.4)$$

Бу ифода (90.2) дан сон жиҳатидан жуда оз фарк қилади. Агар балкага бир неча $P_1, P_2, \dots, P_n$ куч қўйилган бўлса ва улар қўйилган нуқталар балканинг ўнг таянчидан $b_1, b_2, \dots, b_n$ масофаларда бўлса, балканинг ўртасидаги салқиликни (90.4) га мувофиқ, кучларнинг таъсирини қўшиб принцидан фойдаланиб, қуйидаги йиғинди шаклида аниқлаш мумкин:

$$w_{\max} \approx f = \frac{1}{48EI} \sum_{i=1}^n P_i b_i (3l^2 - 4b_i^2). \quad (90.5)$$

91-§. Эластик чизиқнинг универсал тенгламаси

Бундан олдинги параграфда ечилган масаладан шундай хулоса чиқаришимиз мумкин: эластик чизиқ дифференциал тенгламасини маълум тартибда тузиб, уни интеграллашда маълум қондаларга амал қилинса, ихтиёрий ўзгармаслар сонини иккитага келтириш мумкин. Балка давомидида бир қанча куч таъсир этиб, унинг узунлиги бир нечта участкага ажратилганда бу



289-шакл.

хулосадан фойдаланиш эластик чизиқ тенгламасини аниқлашдаги ҳисоблар ҳажминини анча қисқартиради. Балканинг барча участкалари эластик чизиқларининг дифференциал тенгламаларини интеграллашдан чиққан ихтиёрий ўзгармаслар тегишлича бир-бирига тенг бўлиши (яъни $C_1 = C_2 = C_3 = \dots = C_n$; $D_1 = D_2 = D_3 = D_n$ бўлиши) учун қуйидаги шартлар бажарилиши керак:

1. Балканинг барча участкаларидаги ихтиёрий кесимларни аниқловчи абсциссаларни битта нуқтадан (масалан, балканинг чап учидан) ҳисоблаш лозим.

2. Балканинг барча участкалари учун эгувчи момент ифодасини балканинг фақат бир томонидаги кучларга (масалан, фақат чап томондаги кучларга) нисбатан тузиш лозим.

3. $(x-a)^n$ каби қўлҳадларни интеграллашда қавсларни очмасдан, биномларни интеграллаш формуласидан, яъни.

$$\int (x-a)^n dx = \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + C$$

формуладан фойдаланиб интеграллаш лозим.

Балканинг бирор жойида моменти M га тенг бўлган жуфт куч қўйилган бўлса, унинг қийматини эластик чизиқ дифференциал тенгламасида қуйидагича ифодалаш тавсия этилади: $M = M(x-b)^0$; бунда b — жуфт куч қўйилган кесимнинг ҳолатини аниқловчи абсцисса. Ёйилган юк мавжуд бўлса, у ўзи таъсир кўрсата бошлаган кесимдан то балканинг охиригача узилмаслиги лозим. Агар, масаланинг шартига мувофиқ, унинг узилиши зарур бўлса, у ҳолда, бу юк сунъий равишда давом эттирилади. Аммо ўша юк узилган кесимдан бошлаб ҳалиги ёйилган юк давом эттирилган участка давомидида қўйилган юкка сон жиҳатидан тенг ва унга тескари йўналишдаги юк қўйилади (289-шаклда пунктирли чизиқлар билан кўрсатилган).

Айтилган бу шартлар бажарилса, балка нечта участкага ажратилмасин, барибир ихтиёрий ўзгармаслар сони иккитага келтирилади, 289-шаклдаги балкага унинг узунлигини бешта участкага ажратуви турли юклар шаклда кўрсатилгандек таъсир қилаётган ҳол учун, барча участкаларнинг салқиликларини аниқлайдиган битта универсал тенглама чиқарамиз.

Координаталар бошини балканинг чап учиди олиб, балка давомидидаги бешта участка учун қуйидаги дифференциал тенгламаларни тузамиз:

$$EI \frac{d^2 w_1}{dx_1^2} = -P_1 x_1, \quad 0 \leq x_1 \leq a;$$

$$EI \frac{d^2 w_2}{dx_2^2} = -P_1 x_2 + P_2 (x_2 - a); \quad a \leq x_2 \leq b;$$

$$EI \frac{d^2 w_3}{dx_3^2} = P_1 x_3 + P_2 (x_3 - a) + M (x_3 - b)^0; \quad b \leq x_3 \leq C$$

$$EI \frac{d^2 w_4}{dx_4^2} = -P_1 x_4 + P_2 (x_4 - a) + M (x_4 - b)^0 - \frac{q(x_4 - c)^2}{2}, \quad C \leq x_4 \leq d;$$

$$EI \frac{d^2 w_5}{dx_5^2} = P_1 x_5 + P_2 (x_5 - a) + M (x_5 - b)^0 - \frac{q(x_5 - c)^2}{2} + \frac{q(x_5 - d)^2}{2},$$

$$d \leq x_5 \leq l.$$

Бу тенгламаларнинг биринчи ва иккинчи интеграллини олиб, (90.1) шартларга қўямиз:

$$\begin{aligned} \left[-P_1 \frac{x_1^2}{2} + C_1 \right]_{x_1=a} &= \left[-P_1 \frac{x_2^2}{2} + \frac{P_2 (x_2 - a)^2}{2} + C_2 \right]_{x_2=a}, \\ \left[-P_1 \frac{x_1^3}{6} + C_1 x_1 + D_1 \right]_{x_1=a} &= \left[-P_1 \frac{x_2^3}{6} + \frac{P_2 (x_2 - a)^3}{6} + C_2 x_2 + D_2 \right]_{x_2=a}, \\ \left[-P_1 \frac{x_2^2}{2} + \frac{P_2 (x_2 - a)^2}{2} + C_2 \right]_{x_2=b} &= \left[-P_1 \frac{x_3^2}{2} + \frac{P_2 (x_3 - a)^2}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{M(x_3 - b)}{1} + C_3 \right]_{x_3=b}, \\ \left[-P_1 \frac{x_2^3}{6} + \frac{P_2 (x_2 - a)^3}{6} + C_2 x_2 + D_2 \right]_{x_2=b} &= \left[P_1 - \frac{x_3^3}{6} + \frac{P_2 (x_3 - a)^3}{6} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{M(x_3 - b)^2}{2} + C_3 x_3 + D_3 \right]_{x_3=b}, \\ \left[-P_1 \frac{x_3^2}{2} + \frac{P_2 (x_3 - a)^2}{2} + \frac{M(x_3 - b)}{1} + C_3 \right]_{x_3=c} &= \left[-P_1 \frac{x_4^2}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{P_2 (x_4 - a)^2}{2} + \frac{M(x_4 - b)}{1} - \frac{q(x_4 - b)^3}{6} + C_4 \right]_{x_4=c}, \\ \left[-P_1 \frac{x_3^3}{6} + \frac{P_2 (x_3 - a)^3}{6} + \frac{M(x_3 - b)^2}{2} + C_3 x_3 + D_3 \right]_{x_3=c} &= \left[-P_1 \frac{x_4^3}{6} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{P_2 (x_4 - a)^3}{6} + \frac{M(x_4 - b)^2}{2} - \frac{q(x_4 - c)^4}{24} + C_4 x_4 + D_4 \right]_{x_4=c}, \\ \left[-P_1 \frac{x_4^2}{2} + \frac{P_2 (x_4 - a)^2}{2} + \frac{M(x_4 - b)}{1} - \frac{q(x_4 - c)^3}{6} + C_4 \right]_{x_4=d} &= \\ = \left[-P_1 \frac{x_5^2}{2} + \frac{P_2 (x_5 - a)^2}{2} + \frac{M(x_5 - b)}{1} - \frac{q_1 (x_5 - c)^3}{6} + \frac{q(x_5 - d)^3}{6} + C_5 \right]_{x_5=d}, \\ \left[-P_1 \frac{x_4^3}{6} + \frac{P_2 (x_4 - a)^3}{6} + \frac{M(x_4 - b)^2}{2} - \frac{q(x_4 - c)^4}{24} + C_4 x_4 + D_4 \right]_{x_4=d} &= \\ = \left[-P_1 \frac{x_5^3}{6} + \frac{P_2 (x_5 - a)^3}{6} + \frac{M(x_5 - b)^3}{2} - \frac{q(x_5 - c)^4}{24} + \frac{q(x_5 - d)^4}{24} + \right. \\ &\quad \left. + C_5 x_5 + D_5 \right]_{x_5=d}. \end{aligned}$$

Бу тенгликлардан $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5$ ва $D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = D_5$ ларни ҳосил қиламиз. Демак, ўнта ихтиёрий ўзгармас иккитага келтирилди; уларни C ва D деб, балка учларининг тиралиш шартларидан аниқлаймиз:

$$x_1 = 0 \text{ бўлганда } w_1 = w_0 \text{ ва } \frac{dw}{dx} = \theta_0 \text{ бўлса,}$$

$$C = \theta_0 EI, \quad D = w_0 EI \text{ бўлади.}$$

Демак:

$$\theta = \frac{dw}{dx} = \theta_0 + \frac{1}{EI} \left(\frac{M(x-b)}{1} + \frac{P_2(x-a)^2}{2} - \frac{P_1x^2}{2} - \frac{q(x-c)^3}{6} + \frac{q(x-d)^3}{6} \right), \quad (91.1)$$

$$w = w_0 + \theta_0 x + \frac{1}{EI} \left(\frac{M(x-b)^3}{2} + \frac{P_2(x-a)^3}{6} - \frac{P_1x^3}{6} - \frac{q(x-c)^4}{24} + \frac{q(x-d)^4}{24} \right). \quad (91.2)$$

Бу тенгламалардан балканинг ҳар қачдай участкасидаги салқиликни ва кундаланг кесимининг айланишини аниқласа бўлади. Масалан, иккинчи участкага оид кесимлар учун M ва q ҳадларни ташлаб юбориш лозим, чунки бу участкадаги кесимларнинг чап томонида M билан q йўқ.

Ҳалиги балкага бир неча жуфт куч, тўпланган юк ва маълум ораликлар давомида таъсир қилувчи ёйилган юклар қўйилган бўлса, кучларнинг таъсирини қўшиш принципига мувофиқ, (91.1) ва (91.2) тенгламалар қуйидагича ёзилади:

$$\theta = \theta_0 + \frac{1}{EI} \sum_{i=1}^n \left(\frac{M_i(x-a_i)}{1} + \frac{P_i(x-b_i)^2}{2} - \frac{q_i(x-c_i)^3}{6} + \frac{q_i(x-d_i)^3}{6} \right), \quad (91.3)$$

$$w = w_0 + \theta_0 x + \frac{1}{EI} \sum_{i=1}^n \left(\frac{M_i(x-a_i)^3}{2} + \frac{P_i(x-b_i)^3}{6} - \frac{q_i(x-c_i)^4}{24} + \frac{q_i(x-d_i)^4}{24} \right). \quad (91.4)$$

Куч қўйилган кесимларнинг абсциссаларини кучлар тарғибига мувофиқлаштирдик. Бу (91.4) тенглама эластик чизикнинг универсал тенгламаси дейилади.

Агар ёйилган юк балканинг охиригача борса, бу тенгламалардан фойдаланишда кейинги ҳадни ташлаб юбориш лозим.

284-шаклдаги a ва b ҳоллар учун универсал тенгламани татбиқ қиламиз:

1- ҳолда:

$$M = 0, \quad q = 0, \quad b = 0, \quad P = -P.$$

$$\theta = \theta_0 - \frac{Px^2}{2EI}; \quad w = w_0 + \theta_0 x - \frac{Px^3}{6EI};$$

$x = l$ бўлганда: $\theta = 0$ ва $w = 0$; шунинг учун:

$$\theta = + \frac{Pl}{2EI}; \quad w_0 = - \frac{Pl^3}{2EI}.$$

Демак:

$$\theta = \frac{dw}{dx} = + \frac{P}{2EI} (l^2 - x^2); \quad w = - \frac{P}{2EI} (l^3 - 3l^2x + x^3).$$

2- ҳолда:

$$P = 0, \quad M = 0, \quad c = 0, \quad d = l.$$

$$\theta = \theta_0 - \frac{qx^3}{2EI}; \quad w = w_0 + \theta_0 x - \frac{ql^4}{24EI};$$

$x = l$ бўлганда: $\theta = 0$; $w = 0$; шунинг учун:

$$\theta = + \frac{ql^3}{6EI}; \quad w_0 = - \frac{ql^4}{8EI};$$

демак:

$$w = - \frac{q}{24EI} (x^4 - 4l^3x + 3l^4).$$

Энди, 285-шаклдаги a ва c ҳоллар учун, универсал тенгламани татбиқ қиламиз.

1-ҳолда:

$$M = 0, b = 0, c = 0, P = \frac{ql}{2}, d = l,$$

$$\theta = \theta_0 + \frac{1}{EI} \left[\frac{ql}{2} \frac{x^2}{2} - \frac{qx^3}{6} \right]; \quad w = w_0 + \theta_0 x + \frac{1}{EI} \left[\frac{ql}{2} \cdot \frac{x^3}{6} - \frac{qx^4}{24} \right].$$

$x = 0$ бўлганда: $w = 0$; $x = l$ бўлганда, $w = 0$; шунинг учун

$$w_0 = 0; \quad \theta_0 = \frac{ql^3}{24EI}; \quad w = -\frac{q}{24EI} (x^4 - 2lx^3 + l^3x)$$

2-ҳолда:

$$P = \frac{M}{l}; \quad q = 0; \quad M = 0;$$

шунинг учун:

$$\theta = \theta_0 + \frac{1}{EI} \frac{M}{l} \frac{x^2}{2}; \quad w = w_0 + \theta_0 x + \frac{1}{EI} \frac{M}{l} \frac{x^3}{6};$$

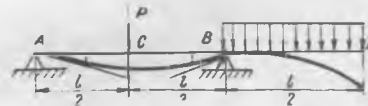
$x = 0$ бўлганда: $w = w_0 = 0$; $x = l$

бўлганда: $w = 0$; шунинг учун:

$$\theta_0 = -\frac{Ml}{6EI}.$$

Демак:

$$w = \frac{Mx}{6EI} (x^2 - l^2).$$



290-шакл.

91-масала. Икки таянчда ётувчи консолли балка 290-шаклда кўрсатилгандек юкланган. Универсал тенгламани татбиқ этиб, C ва D нуқталардаги салқиликларни аниқланг ($q = \frac{2P}{l}$).

Еч иш. Таянч реакциялари: $A = \frac{P}{4}$; $B = \frac{7}{4}$; $P(91.2)$ ва (91.3) дан:

$$\theta = \theta_0 + \frac{1}{EI} \left\{ \frac{P}{4} \frac{x^2}{2} - \frac{P(x - \frac{l}{2})^2}{2} + \frac{7}{4} \frac{P(x - l)^2}{2} - \frac{q(x - l)^2}{6} \right\},$$

$$w = w_0 + \theta_0 x + \frac{1}{EI} \left\{ \frac{P}{4} \frac{x^3}{6} - \frac{P(x - \frac{l}{2})^3}{6} + \frac{7}{4} \frac{P(x - l)^3}{6} - \frac{q(x - l)^4}{24} \right\};$$

$x = 0$ бўлганда $w = w_0 = 0$; θ_0 нинг қийматини $x = l$ бўлганда $w = 0$ бўлиши шартидан топамиз: $\theta_0 = -\frac{Pl^3}{48EI}$

Демак:

$$\theta = -\frac{Pl^2}{48EI} + \frac{P}{EI} \left\{ \frac{x^2}{8} - \frac{(x - \frac{l}{2})^2}{2} + \frac{7(x - l)^2}{8} - \frac{2(x - l)^2}{6l} \right\}, \quad (a)$$

$$w = -\frac{Pl^2}{48EI} x + \frac{Pl}{EI} \left\{ \frac{x^3}{24} - \frac{(x - \frac{l}{2})^3}{6} + \frac{7(x - l)^3}{24} - \frac{(x - l)^4}{12l} \right\}. \quad (b)$$

А кесимнинг бурилиш бурчагини аниқлаш учун (а) тенгликнинг ҳадларидан биринчисини, w_C ни ҳисоблаш учун эса (в) тенгликнинг биринчи икки ҳадини оламиз, w_D ни ҳисоблаш учун ҳамма ҳадлар сақланиши керак:

$$\theta_A = \theta_0 = -\frac{Pl^2}{48EI}; \quad w_C = -\frac{3Pl^2}{192EI}; \quad w_D = -\frac{5Pl^2}{172EI}.$$

92-§. Эластик чизиқни график усулда яшаш

Эластик чизиқни аниқлашда қуйидаги дифференциал тенгламани интеграллашга тўғри келади:

$$EI \frac{d^2w}{dx^2} = M(x).$$

Бу интеграллаш операциясини график усулда бажариш ҳам мумкин. Эластик чизиқни график усулда яшаш йўлини кўз олдимизга яққол келтириш ниятида, ихтиёрий равишда ёйилган юклар учун график усулда эгувчи момент эпюрасини яшаш йўлини эсга оламиз.

AB балка ихтиёрий қонун билан ўзгарувчи ёйилган юк таъсирида бўлади. m/s эса юк чизиғини ифодалайди, деб фараз қиламиз (291-шакл). Бу юк чизиғига тегишли арқон эгри чизиғи abc бўлсин. Мазкур арқон эгри чизиғининг дифференциал тенгламасини тузамиз. Арқон эгри чизиғининг ординатасини w деймиз. Арқон эгри чизиғининг бирор N нуқтасидан уринма ўтказамиз. x ўқи билан бу уринма θ бурчагини ҳосил қилсин, унга тегишли нурни куч кўпбурчагида OF билан белгилаймиз. У ҳолда уринма қиялик бурчагининг тангенсини қуйидагича бўлади:

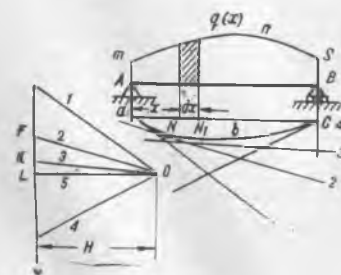
$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dw}{dx} = -\frac{FL}{OL}. \quad (a)$$

N нуқтага чексиз яқин бошқа бир N_1 нуқтани олиб, у орқали уринма ўтказсак, унинг x ўқи билан ҳосил қилган бурчаги куч кўпбурчагида мазкур уринма тегишли OK нурини горизонтал чизиқ билан ҳосил қилган бурчагига тенг бўлади. Бу бурчакнинг тангенсини қуйидагичадир:

$$\operatorname{tg} = (\theta + d\theta) = \frac{dw}{dx} + d\left(\frac{dw}{dx}\right) = -\frac{KL}{OL} \quad (b)$$

(в) дан (а) ни айириб, бурчак тангенсининг орттирмасини аниқлаймиз:

$$d\left(\frac{dw}{dx}\right) = \frac{-KL + FL}{OL} = \frac{FK}{OL},$$



291-шакл.

OF ва OK нурлар орасидаги FK кесма арқон кўпбурчагининг тегишли томонлари орасидаги кучларнинг тенг таъсир этувчиси бўлгани учун $FK = qdx$ бўлади; ундан ташқари, қутб ораллиги OL ни H деб белгиласак, юқоридаги тенглама бундай ёзилади:

$$\frac{d^2w}{dx^2} dx = \frac{qdx}{H} \quad \text{ёки} \quad \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{q(x)}{H}. \quad (92.1)$$

Бу тенглама арқон эгри чизиғининг дифференциал тенгламасидир. Бу тенгламанинг интегралини график усулда топишни биламиз, у ёйилган юкка

ясалган арқон чизигидир. Шунинг учун бу усулни эластик чизикни график усулда ясаш учун татбиқ қиламиз. Бунинг учун олдин эластик чизик билан арқон чизигининг дифференциал тенгламаларини таққослаймиз.

Арқон чизикнинг
дифференциал тенгламаси:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{q(x)}{H}.$$

Эластик чизикнинг
дифференциал тенгламаси:

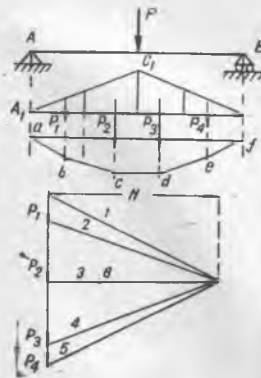
$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}.$$

Арқон чизигининг дифференциал тенгламасидаги юк интенсивлиги ($q(x)$) ва қутб оралиғи (H) эластик чизикнинг дифференциал тенгламасидаги эгувчи момент ($M(x)$) ва балка бикирлиги (EI) га мос келаётир. Эластик чизикни ясаш учун, балкани эгувчи момент ($M(x)$) қонуни билан ўзгарувчи ёйилган юк таъсирида деб, мазкур юкка тегишли арқон чизигини қуриш лозим. Шунинг билан бирга, қутб оралиғи (H) нинг ўрнига балканинг бикирлиги (EI) ни олиш керак.

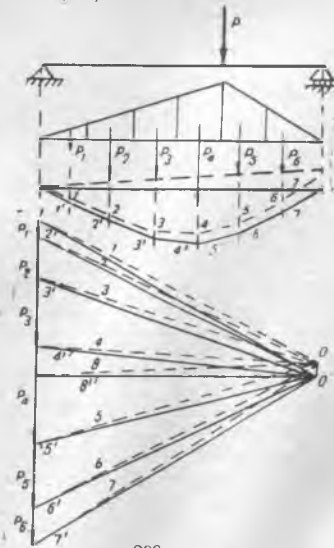
Бу тарзда ясалган арқон чизиги эластик чизик бўлади. Эгувчи момент билан тасвирланган юк *фиктив* юк дейилади. Демак, эластик чизикни арқон чизиги каби ясаш учун балкага фиктив юк қўйиб, қутб оралиғи учун EI ни қабул қилиш зарур экан.

Фиктив юкни тасвирловчи эгувчи момент эпюрасининг юзаси бир нечта участкага ажратилиб, ҳар қайси участканинг юзи ҳисобланади; фиктив юкларни тасвирловчи бу юзаларни маълум масштабда олиб, улар учун куч купбурчагини ясаш лозим. Фиктив юклар чизигининг ординатаси момент билан, яъни $кгсм^2$ ҳисобида ўлчангани учун, фиктив кучларни тасвирловчи юзлар $кгсм^2$ ҳисобида ўлчанади, яъни бикирлик (EI) нинг ўлчамлиги билан бир хилда бўлади.

Эластик чизикни яққолроқ кўринишда ясаш, яъни салқиликни йирик-роқ масштабда тасвирлаш учун, қутб оралиғи (EI) нинг масштабини юк юзасининг масштабига қараганда камида 100 марта кичик олиш керак, бу ҳолда $H = 0,01EI$ бўлиб, ясалган эластик чизик графигининг ординатасини 100 марта катта қилиб тасвирланган бўлади.



292- шакл.

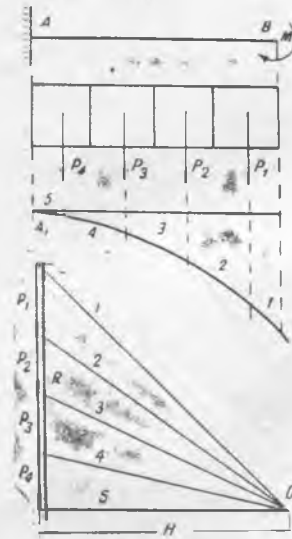


293- шакл.

Фиктив юк ва $H = 0,01 EI$ қутб оралиғи учун арқон чизигини қуришда, ёпувчи чизикни шундай ўтказиш керакки, Салка учларининг тўралиш шарти қаноатлантирилсин.

Конкрет масалаларни ечиш билан айтилганларни ойдинлаштирамиз.

Икки учи билан тиралган балканинг ўртасига P куч қўйилган (292-шакл, а). Бу ҳол учун ёгувчи момент эпюраси тенг ёнли $A_1B_1C_1$ уч-



294-шакл.

бурчак юзи билан тасвирланади. Бу $A_1B_1C_1$ учбурчак билан тасвирланган юзни фиктив юк юзи деб оламиз, уни тўртта участкага ажратиб, бу участкаларни тегишлича P_1, P_2, P_3, P_4 билан белгилаймиз-да, улар учун куч кўпбурчагини тузамиз (292-шакл, б). Бу кучларга тегишли арқон чизиги $abcdef$ синиқ чизик билан тасвирланган. Чегара шартларини қаноатлантириш учун арқон чизигининг ёпувчисини горизонтал йўналтириш лозим. Симметрик юклар учун, қутбни параллел кучлар тенг таъсир этувчисининг ўртасидан ўтказилган-дек чизик устида олиб, ёпувчи нурни горизонтал йўналтириш мумкин. Куч симметрик бўлмаган ҳолда, олдин ихтиёрий қутбга нисбатан ёпувчи нур йўналишини аниқлаб, кейин қутбни кўчириш билан у горизонтал вазиятга келтирилади. Масалан, икки таянчга тиралган балкага чап таянчидан a масофада таъсир қилувчи P куч қўйилган бўлсин. Бу ҳолда фиктив юкни тасвирловчи $A_1B_1C_1$ учбурчак тенгёнли бўлмайди, демак юк симметрик эмас. Бу ҳолда, олдин ихтиёрий қутб учун фиктив юклардан ҳосил бўладиган реакцияларни аниқловчи нурнинг йўналишини аниқлаб, кейин қутбни му-

вофиқ равишда кўчириш билан у горизонтал вазиятга келтирилади. 293-шаклда юқорида келтирилган мисол учун эластик чизик олдин ихтиёрий O қутб учун, кейин ёпувчи нур (8) нинг горизонтал ҳолатга келтирилган ҳоли (8') га тегишли O' қутб учун ясалган. Фиктив юкнинг юзаси еттита участкага ажратилиб, улар тегишлича $P_1, P_2, P_3, \dots, P_7$ билан белгиланган.

Яна битта характерли мисол келтирамиз. Чап учи билан қисилиб тиралган балканинг ўнг учига моменти M га тенг жуп куч қўйилган (294-шакл). Бу ҳол учун эластик чизикни арқон чизиги каби тузамиз. Ёгувчи момент эпюраси тўғри тўртбурчак бўлиб, биз уни тўртта тенг қисмларга ажратамиз, уларнинг юзларига тегишли фиктив юклар $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P$ бўлади. Бу ҳолда параллел кучларнинг тенг таъсир этувчиси қистириб тиралган таянч реакциясига тенг бўлганидан, ёпувчи нур охириги горизонтал нур бўлади. Балканинг салқилигини аниқловчи ордината (w) ни, мазкур 5-нурдан ҳисоблаш лозим. Ёпувчи нур горизонтал йўналган ҳолда, эластик чизикка A_1 нуқтада уринма бўлиб ўтгани учун чегара шартларини ҳам қаноатлантиради, яъни у ерда:

$$w = 0, \theta = \frac{dw}{dx} = 0$$

бўлади.

93- §. Графоаналитик усулда балканинг деформацияларини текшириш

Бундан олдинги параграфда эластик чизиқни арқон чизиғи каби ясаб ва арқон чизиғи билан унинг ёғувчиси орасидаги ординатасини маълум масштабда олиб балканинг салқилигини аниқладик. Аммо эластик мувозанатлашган кучлар учун арқон чизиғининг ординатаси шу кесимдаги ёғувчи моментга пропорционал, яъни:

$$y = \frac{M}{H}$$

бўлар эди.

Бу хулосани фиктив юк билан юкланган фиктив балкага татбиқ қилсак, эластик чизиқнинг ординатаси шу кесимдаги фиктив ёғувчи моментнинг қутб оралиғи ($H = EI$) га нисбатига тенг, яъни:

$$w = \frac{M_{\Phi}}{EI} \quad (93.1)$$

бўлади.

Бунда M_{Φ} — фиктив балкага қўйилган фиктив юклар ёғувчи моменти-нинг салқилиғи аниқланаётган жойдаги қиймати. Салқиликнинг x бўйича ҳосиласини олиб, қўндаланг кесимнинг айланиш бурчаги (θ) ни ҳам аниқлашимиз мумкин:

$$\theta = \frac{dw}{dx} = \frac{1}{EI} \frac{dM_{\Phi}}{dx} = \frac{Q_{\Phi}}{EI}; \quad (93.2)$$

бунда Q_{Φ} — фиктив кесиб ўтувчи куч.

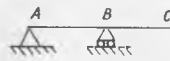
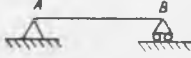
Демак, бирор қўндаланг кесимнинг айланиш бурчаги мазкур кесимдаги фиктив кесиб ўтувчи кучга пропорционал бўлар экан.

Аналитик усулда деформацияларни текширган вақтимизда дифференциал тенгламаларни интеграллаш натижасида ҳосил бўладиган ихтиёрий ўзгармасларни балка учларининг тиралиш шартларидан ва иккита қўшни участкаларни ажратувчи чегара кесимдаги деформацияларнинг тенглигидан аниқлаган эдик. Деформациялар графоаналитик усул билан, яъни (93.1) ва (93.2) тенгламалар ёрдамида аниқланганда, ихтиёрий ўзгармасларни излаш ўрнига, фиктив юклар билан юкланган фиктив балкаларни мослаб танлаш керак, яъни (93.1) ва (93.2) тенгламалар қўйидаги шартларни қаноатлантириши лозим:

1. Балканинг бирор кесимидаги салқилик $w = 0$ бўлса, тегишли фиктив балканинг шу кесимдаги фиктив ёғувчи моменти ҳам нолга тенг бўлиши керак. 2. Балканинг бирор кесимининг айланиш бурчаги $\theta = 0$ бўлса, тегишли фиктив балканинг шу кесимида фиктив кесиб ўтувчи куч нолга тенг бўлиши керак.

Балканинг бирор кесимдаги салқилик ёки айланиш бурчаги нолга тенг бўлмаса, тегишли фиктив балканинг шу кесимидаги фиктив ёғувчи момент (M_{Φ}) ва фиктив кесиб ўтувчи куч (Q_{Φ}) нолга тенг бўлмаслиги лозим.

Қўйидаги жадвалда асосий балка учларининг турли тиралиш шартларига фиктив балка мос учларининг қандай тиралиши тўғри келиши кўрсатилган.

Асосий балка		Фиктив балка	
асосий балка таянчларининг конструкцияси	w ва θ нинг мавжуд бўлиши	M_ϕ ва θ_ϕ га қўйилган талаб	фиктив балка таянчларининг конструкцияси
	$w_A = 0$ $w_B = 0$ $\theta_A \neq 0; \theta_B \neq 0$	$M_{\phi A} = 0$ $M_{\phi B} = 0$ $A_\phi \neq 0$ $B_\phi \neq 0$	
	$w_A = 0$ $\theta_A = 0$ $w_B \neq 0$ $\theta_B \neq 0$	$M_{\phi A} = 0$ $A_\phi = 0$ $M_{\phi B} \neq 0$ $B_\phi \neq 0$	
	$w_A = 0$ $\theta_A \neq 0$ $w_B = 0$ $\theta_B \neq 0$ $w_C \neq 0$ $\theta_C \neq 0$	$M_{\phi A} = 0$ $A_\phi \neq 0$ $M_{\phi B} = 0$ $B_\phi \neq 0$ $M_{\phi C} \neq 0$ $C_\phi \neq 0$	

Демак, берилган асосий балканинг бирор кесимидаги салқилиги (w) ни ёки кесимнинг бурилиш бурчаги (θ) ни графоаналитик усулда аниқлаш учун қуйидаги операцияларни кетма-кет бажариш лозим бўлар экан:

1. Берилган асосий балканинг қўйилган юклар билан бирга схемасини чизиш.
2. Эгувчи момент эпюрасини яшаш.
3. Эгувчи момент эпюрасининг ноль чизигини фиктив балканинг ўқи деб қабул қилиб, унга $M(x)$ юзи билан тасвирланган фиктив юкни қўйиш.
4. Фиктив балканинг конструкциясини асосий балкага мослаб, юқорида келтирилган жадвалдан танлаш.
5. Қўрсатилган кесимлар учун тегишли фиктив момент ва фиктив кесиб ўтувчи кучларни ҳисоблаб, асосий балканинг мазкур кесимларидаги салқилиги ва бурилиш бурчагини (93.1) ва (93.2) дан аниқлаш.

Фиктив юк интенсивлиги (куч X узунлик¹) ҳисобда ўлчангани учун, фиктив кесиб ўтувчи куч Q (куч X узунлик²) ҳисобида, фиктив момент эса (куч X узунлик³) ҳисобида ўлчанади.

Энди, графоаналитик усулни татбиқ қилиб, бир неча характерли масалалар ечамиз.

94- §. График — аналитик усулнинг конкрет ҳоллар учун татбиқи

92-масала. Бир учи билан қисилиб тиралган балканинг бошқа учига P куч қўйилган (295-шакл). Балка B учининг салқилиги (f) билан бурилиш бурчаги (θ_B) аниқлансин.

Ечиш. Эгувчи момент эпюраси A кесимидаги энг катта қиймати Pl га тенг бўлган учбурчакдир. Момент эпюрасининг абсцисса ўқини фиктив балканинг ўқи деб қабул қилиб, мазкур момент эпюрасини фиктив юкка айлантирамиз. Юқорида келтирилган жадвалга мувофиқ, фиктив балка конструкциясини танлаймиз. Фиктив балканинг B учи қисилиб тиралган ҳолда A учи эркин бўлиши керак.

Энди, фиктив балканинг B кесимидаги фиктив эгувчи момент билан фиктив кесиб утувчи кучни аниқлаймиз:

$$M_{\phi B} = -\frac{1}{2}Pl \cdot l \cdot \frac{2}{3}l = -\frac{Pl^3}{3}.$$

Буни балканинг бикирлиги (EI) га бўлиб, f ни топамиз:

$$f = -\frac{Pl^3}{3EI}. \quad (94.1)$$

Бу формула 89-параграфда чиқарилган (89.6) формуланинг худди ўзидир.

Фиктив балканинг B кесимидаги кесиб ўтувчи куч ($Q_{\phi B}$) фиктив юкни тасвирловчи учбурчакнинг юзига тенг:

$$Q_{\phi B} = -\frac{1}{2}Pl \cdot l = -\frac{Pl^2}{2};$$

B кесимнинг бурилиш бурчаги

$$\theta_B = \frac{Q_{\phi B}}{EI} = -\frac{Pl^2}{2EI} \quad (94.2)$$

бўлади.

93-масала. Икки таянчда ётувчи AB балканинг чап учидан a масофадаги нуқтага P куч қўйилган (296-шакл). Балканинг куч қўйилган жойидаги ва ўртасидаги салқилиги ва учларининг бурилиш бурчаклари аниқлансин.

Ечиш. Эгувчи момент эпюраси балка учларига нисбатан симметрик бўлмаган $A_1B_1C_1$ учбурчак билан тасвирланади. Момент эпюрасини фиктив юкка айлантирамиз, бу ҳолда фиктив юк мусбат бўлгани учун, юкорига томон йўналган. Фиктив балка конструкцияси асосий балкага мос келади. Фиктив юк тенг таъсир этувчиси $A_1B_1C_1$ учбурчакнинг юзи билан ифодланади, уни Ω билан белгилаймиз. Бу куч балканинг чап учидан $x_0 = \frac{l+a}{3}$ масофадаги кесимга қўйилган (296-шакл).

Унинг қиймати:

$$\Omega = \frac{1}{2}l \cdot \frac{P \cdot a \cdot b}{l} = \frac{Pab}{2}.$$

Фиктив реакция A_{ϕ} ва B_{ϕ} ни аниқлаймиз:

$$-B_{\phi}l + \Omega x_0 = 0; \text{ бундан } B_{\phi} = \Omega \frac{x_0}{l}$$

ёки

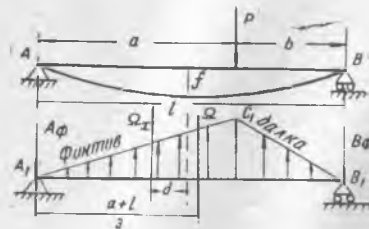
$$B_{\phi} = \frac{Pab(a+l)}{6l}; \text{ шунингдек,}$$

$$A_{\phi} = \frac{Pab(a+l)}{6l}.$$

Фиктив балканинг ўрта кесимидаги эгувчи момент (M_{ϕ}) ни аниқлаймиз:



295- шакл.



296- шакл.

$$M_{\phi} = -A_{\phi} \frac{l}{2} + \Omega_x d; \quad \Omega_x = \frac{Pb}{l} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{Pbl}{8};$$

$$d = \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{2} = \frac{l}{6}; \quad M_{\phi} = -\frac{Pab(b+l)}{6l} \cdot \frac{l}{2} + \frac{Pbl^2}{48} = -\frac{Pb(3l^2 - 4b^2)}{48}.$$

Энди, A_{ϕ} , B_{ϕ} ва M_{ϕ} ни балканинг биқирлиги (EI) га бўлиб, аниқла-
ниш лозим бўлган θ_A , θ_B ва f ни топамиз:

$$\theta_A = \frac{A_{\phi}}{EI} \frac{Pab(l+b)}{6EI}; \quad \theta_B = \frac{B_{\phi}}{EI} = \frac{Pab(l+a)}{6EI}; \quad (94.3)$$

$$f = -\frac{Pb(3l^2 - 4b^2)}{48EI}. \quad (94.4)$$

94-масала. Икки таянчга эркин тиралган балканинг учларига момент-
лари M_A ва M_B бўлган жуфт кучлар қўйилган ($M_A > M_B$). Балканинг чап
ва ўнг учларидаги кесимларининг бурилиш бурчаклари (θ_A ва θ_B) аниқлан-
син (297-шакл).

Е чи ш. Таянчлардаги M_A ва M_B нинг таъсирини алоҳида текшира-
миз. У ҳолда: $\theta_A = \theta'_A + \theta''_A$; $\theta_B = \theta'_B + \theta''_B$.

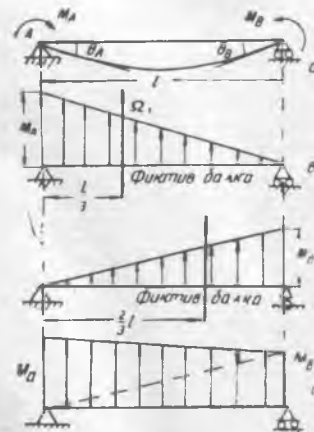
θ' бурчак M_A га, θ'' эса M_B га оиддир. 297-шакл, b ва c да тегишли
эпюралар ёки фиктив балкалар алоҳида чизилган.

$$A'_{\phi} = \frac{2}{3} \cdot \frac{M_A \cdot l}{2} = \frac{M_A \cdot l}{3}; \quad B'_{\phi} = \frac{1}{3} \cdot \frac{M_A \cdot l}{2} = \frac{M_A \cdot l}{6};$$

$$A''_{\phi} = \frac{1}{3} \cdot \frac{M_B \cdot l}{2} = \frac{M_B \cdot l}{6}; \quad B''_{\phi} = \frac{2}{3} \cdot \frac{M_B \cdot l}{2} = \frac{M_B \cdot l}{3};$$

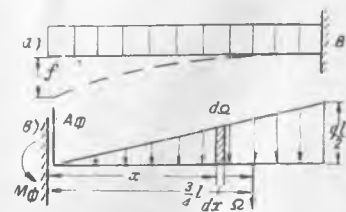
Демак:

$$\left. \begin{aligned} \theta_A &= \theta'_A + \theta''_A = \frac{A'_{\phi}}{EI} + \frac{A''_{\phi}}{EI} = \frac{M_A \cdot l}{3EI} + \frac{M_B \cdot l}{6EI} \\ \theta_B &= \theta'_B + \theta''_B = \frac{B'_{\phi}}{EI} + \frac{B''_{\phi}}{EI} = \frac{M_A \cdot l}{6EI} + \frac{M_B \cdot l}{3EI} \end{aligned} \right\} \quad (94.5)$$



297-шакл.

95-масала. Бир учи билан қисилиб ти-
ралган балкага узунлиги (l) давомида тенг
ёйилган q юк қўйилган. Балка эркин учи-
нинг салқилиги билан бурилиш бурчаги аниқ-
лансин (298-шакл).



298-шакл.

Ечиш. Бу ҳолда эгувчи момент $M_x = -\frac{qx^2}{2}$ тенглама билан ифодаланган квадратик парабола бўлгани учун, у билан юкланган фиктив балка конструкцияси 298-шакл, *b* да тасвирланганидек бўлади. Фиктив балканинг қисилиб тиралган кесимидаги кесиб ўтувчи куч билан эгувчи моментларни аниқлаймиз.

$A_\phi - \Omega = 0$; $M_\phi = \Omega x_0$; бунда Ω — фиктив юк юзи.

$$\Omega = \int_0^l d\Omega = \int_0^l M dx = \int_0^l \frac{qx^2}{2} dx = \frac{ql^3}{6};$$

$$M_\phi = - \int_0^l x d\Omega = - \int_0^l x \frac{qx^2}{2} dx = - \frac{ql^4}{8}; \quad x_0 = \frac{M_\phi}{\Omega} = \frac{dl^4}{8} : \frac{dl^3}{6} = \frac{3}{4} \cdot l.$$

Энди, A_ϕ билан M_ϕ ни балканинг бикирлиги (EI) га бўлиб, θ_A билан f_A ни топамиз:

$$\theta_A = \frac{A_\phi}{EI} = \frac{ql^3}{6EI}; \quad f_A = - \frac{M_\phi}{EI}. \quad (94.6)$$

96- масала. Икки таянчга эркин тиралган балканинг узунлиги l бўлиб бутун узунлиги давомида тенг ёйилган юк таъсир қилади (299-шакл, *a*) Балканинг ўртасидаги салкилиги билан уч кесимларининг бурилиши аниқлансин.

Ечиш. Эгувчи момент эпюраси $M = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}$ тенглама билан тасвирланадиган параболадир. Уни фиктив юкка айлантирсак, фиктив балка асосий балка каби икки таянчга тиралган ва парабола қонуни билан ўзгарувчи фиктив юк таъсирида бўлади (299-шакл, *б*). Фиктив юкнинг тенг таъсир этувчиси (Ω) парабола юзига тенг бўлиб, $\Omega = \frac{2}{3} \frac{ql^2}{8} \cdot l = \frac{ql^3}{12}$ дир. Юк симметрик бўлгани учун $A_\phi = B_\phi = \frac{ql^3}{24}$ бўлади; балканинг ўрта кесимидаги фиктив эгувчи моментни ҳисоблаймиз:

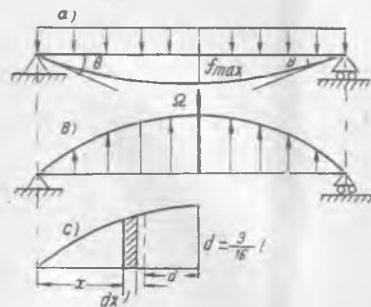
$$M_\phi = A_\phi \cdot \frac{l}{2} - \frac{\Omega}{2} \cdot d;$$

бунда d — параболанинг симметрия ўқидан ярим юзасининг марказигача бўлган масофа, у $\frac{3}{16} l$ га тенгдир. Буни исбот қиламиз. Бунинг учун парабола ярим юзасининг A га нисбатан статик моментини олиб, $\frac{\Omega}{2}$ га бўламиз (299-шакл, *с*):

$$x_c = \frac{2}{\Omega} \int_0^{\frac{l}{2}} x \left(\frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} \right) dx = \frac{5}{16} l;$$

$$d = \frac{l}{2} - \frac{5}{16} l = \frac{3}{16} l;$$

$$M_\phi = A_\phi \frac{l}{2} - \frac{\Omega}{2} \cdot \frac{3}{16} l = - \frac{5ql^4}{384}.$$

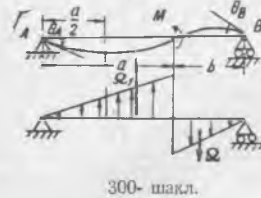


299-шакл.

Энди, A_ϕ ва M_ϕ ни EI га бўлиб, θ_A билан $f_{\max}$ ни аниқлаймиз:

$$\theta_A = \frac{ql^3}{24EI}; \quad f_{\max} = -\frac{5ql^4}{384EI}. \quad (94.7)$$

97- масала. Икки таянчда ётувчи балканинг узунлиги l бўлиб, чап учидан a масофадаги кесимига momenti M га тенг жуфт куч қўйилган (300-шакл). Балканинг A ва B учларидаги кесимларнинг бурилиш бурчаги (θ_A ва θ_B) ҳамда



300- шакл.

$\frac{a}{2}$ масофадаги салқилик аниқлансин.

Ечиш. Фиктив балканинг юклари 300-шаклда кўрсатилган. Фиктив реакциялар (A_ϕ ва B_ϕ) қуйидагича бўлади:

$$A_\phi = \frac{1}{l} \left[\frac{Ma^2}{2l} \left(b + \frac{a}{3} \right) - \frac{Mb^2}{2l} \cdot \frac{2b}{3} \right]$$

$$B_\phi = \frac{1}{l} \left[\frac{Ma^2}{2l} \cdot \frac{2a}{3} - \frac{Mb^2}{2l} \left(a + \frac{b}{3} \right) \right]$$

Буларни EI га бўлиб, θ_A ва θ_B ни аниқлаймиз:

$$\theta_A = \frac{M}{2EI} \left[a^2 \left(b^2 + \frac{a}{3} \right) - \frac{2b^3}{3} \right],$$

$$\theta_B = \frac{M}{2EI} \left[\frac{2}{3} a^3 - b^2 \left(a + \frac{b}{3} \right) \right] \quad (94.8)$$

$\frac{a}{2}$ масофадаги кесимнинг фиктив эгувчи моментини ҳисоблаймиз:

$$M_\phi = A_\phi \cdot \frac{a}{2} - \frac{Ma^2}{2l} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{a}{6} = \frac{Ma}{48l} [3a^2 + 8b(a-b)].$$

Буни EI га бўлиб, салқилик (f) ни топамиз:

$$f = \frac{Ma}{48EI} [3a^2 + 8b(a-b)]. \quad (94.9)$$

Агар $a = b = \frac{l}{2}$ бўлса,

$$\theta_1 = \theta_2 = \frac{Ml}{24EI};$$

$$f = \frac{Ml^2}{128EI}. \quad (94.10)$$

98- масала. Икки таянчга тиралган балканинг консол қисмига тенг ёйилган юк ва чап таянчига momenti M_0 га тенг жуфт куч қўйилган (301-шакл, а). A кесимнинг бурилиши ва C учининг салқилиги аниқлансин.

Ечиш. Масалани кучларнинг таъсирини қўшиш принциpidан фойдаланиб ечамиз. Бунинг учун олдин балканинг A кесимига қўйилган M_0 нинг таъсирини текшираемиз. Унинг таъсиридан BC консол қаттиқ жисм каби юқорига кўтарилади. Натижада балканинг C учи C_1 га кўчади: $CC_1 = f' = a\theta_B$. Балкадаги консол бир учи билан кистириб тиралган балка каби эгилиб, C нинг салқилиги $f'' = CC_2$ билан тасвирланади (301-шакл, с). Ундан ташқари ёйилган юкнинг балканинг AB қисмига кўрсатадиган таъсири $M_B = -\frac{qa^2}{2}$ билан алмаштирилса, бунинг натижасида балка 301-шакл,

d да тасвирлангандек эгилади. Шу билан бирга, BC консол қаттиқ жисм каби пастга оғади, C нуқта C_3 га кўчади. $CC_3 = f''' = a\theta_B''$ бўлади. Шундай қилиб, A кесимининг бурилиши ва C учининг салқилиги қуйидагича ёзилади:

$$\theta_A = \theta_A' - \theta_A''; \quad f_C = f_C' + f_C'' - f_C''$$

θ_A' , θ_A'' , f_C' , f_C'' ва f_C''' ларнинг қийматларини ҳар қайси элементар балкага тегишли фиктив балкалардан аниқлаймиз. Уларнинг схемалари тегишли элементар балкалар остида берилган (301-шакл, b, c, d).

$$\theta_A' = \frac{M_0 l}{3EI}; \quad \theta_A'' = \frac{Ml}{6EI} = \frac{qa^2 l}{12EI}; \quad \theta_B'' = \frac{qa^2 l}{6EI};$$

$$f_C' = \theta_B' a = \frac{M_0 l}{6EI} a; \quad f_C'' = \frac{qa^4}{8EI}; \quad f_C''' = \theta_B'' a = \frac{qa^3 l}{6EI}.$$

Демак:

$$\theta_A = \frac{M_0 l}{3EI} - \frac{qa^2}{12EI}; \quad f_C = \frac{qa^4}{24EI} (4l + 3a) - \frac{M_0 la}{6EI}$$

МАСАЛАЛАР

99. Икки таянчда ётувчи балканинг учларига 302-шаклда кўрсатилганидек, моменти M_0 бўлган бир хил жуфт куч қўйилган. Мазкур балка учун M , Q , θ ва w эпюралари ясалсин. Максимал салқилик ва ўрта кесимдаги салқилик аниқлансин.

Ечиш. Чап таянч реакцияси $A = -\frac{2M_0}{l}$ бўлади. Шунинг учун, абсциссаси x билан аниқланган кесимдаги эгувчи момент:

$$M = M_0 - \frac{2M_0}{l} x = M_0 \left(1 - 2\frac{x}{l}\right)$$

дир.

Эластик чизиқнинг дифференциал тенгламаси:

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} = M_0 \left(1 - 2\frac{x}{l}\right);$$

бу тенгламадан:

$$\theta = \frac{M_0 l}{6EI} \left[6\frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) - 1 \right],$$

$$w = \frac{M_0 l^2}{6EI} \left[\frac{x}{l} \left(-2\frac{x}{l} + 3\frac{x}{l} - 1\right) \right];$$

Q , M , θ ва w эпюралари 302-шакл, a, b, c ва d да тасвирланган.

$\theta = 0$ бўлган кесимда $w_{\max}$ бўлади. У ерда

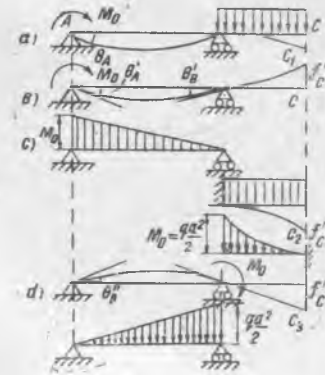
$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{3} \pm 1}{2\sqrt{3}} l$$

бўлиб,

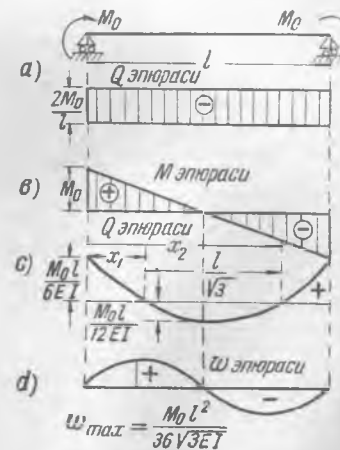
$$w_{\max} = \frac{M_0 l^2}{36\sqrt{3}EI}$$

дир.

100. Қарағай ёғочдан тилинган тахта балка икки таянчга тиралган бўлиб, ўртасига $P = 400$ кг куч қўйилган (303-шакл). Балканинг ўртасидаги салқилик (f) ўлчанганда $0,2$ см чиқди. Балка материалнинг эластиклик модули аниқлансин.



301-шакл.



302-шакл.

Кўрсатма.

$$I = \frac{Pl^3}{48EI}, \quad I = \frac{bh^3}{12} = \frac{20 \cdot 6^3}{12} = 360 \text{ см}^4.$$

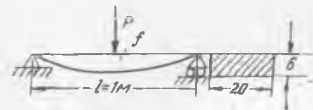
$$E = \frac{Pl^3}{48I} = \frac{400 \cdot 100^3}{48 \cdot 360 \cdot 0,2} \approx 1 \cdot 16 \cdot 10^8 \text{ кг/см}^2.$$

101. Ўнг учи билан қисилиб тиралган 12-номерли қўш таврли пулат балкага ёйилган юк қўйилган. Балка учининг бурилиш бурчаги $\theta_0 = 0,00612$ бўлса, ёйилган юkning интенсивлиги қанча бўлади?

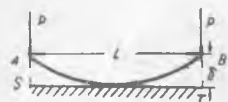
Кўрсатма.

$$\theta = \frac{ql^2}{8EI} \text{ дан: } q = \frac{8EI\theta}{l^2} = 400 \text{ кг/м.}$$

102. АВ пулат стерженининг бошланғич эгрилиги шундайки. унинг учларига P кучлар қўйилганда, 304-шаклда кўрсатилганидек тўғриланиб, қаттиқ таянч текислиги (ST) га стерженининг узунлиги бўйича тенг ёйилган босим кўрсатади. Стержени тўғрилаш учун зарур бўлган P куч ва стержендаги энг катта нормал кучланиш аниқлансин. $l = 50 \text{ см}$; $\delta = 0,25 \text{ см}$. Стерженининг қундаланг кесими томонлари $0,25 \text{ см}$ га тенг бўлган квадратдир.



303-шакл.



304-шакл.

Ечиш. Таянч текислигида тенг ёйилган босим ҳосил бўлиши учун, стерженининг бошланғич эгрилиги икки таянчда эркин ётувчи, интенсивлиги $q = \frac{2P}{l}$ га тенг бўлган ёйилган юк таъсиридаги балканинг эластик чизмги билан бир хил бўлиши лозим. У ҳолда.

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{2P}{l} \cdot \frac{l^2}{8} = \frac{Pl}{4}; \quad \delta = f = \frac{5ql^4}{384EI} = \frac{5}{384} \cdot \frac{2P}{l} \cdot \frac{l^4}{EI}.$$

бундан:

$$P = \frac{192EI}{5l^3} \delta; \quad \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{P \cdot l \cdot h}{8I} = \frac{24E\sigma \cdot h}{5l^2} = 2520 \text{ кг/см}^2.$$

$$P = 525 \text{ кг.}$$

103. Чап учи билан қисилган консолнинг узунлиги $l = 4 \text{ м}$ бўлиб, унинг учига $P = 1 \text{ т}$ юк қўйилган. Мустаҳкамлик ва бикрлик шартлари бўйича сортамент жадвалидан қўш таврли кесимнинг номери аниқлансин. Рухсат этилган кучланиш $[\sigma] = 1400 \text{ кг/см}^2$; рухсат этилган салқилик:

$$[f] = \frac{l}{400}.$$

Ечиш. $M_{\max} = Pl = 4000 \text{ кг/м}$. Зарур бўлган кесимнинг қаршилик моменти $W = \frac{400000}{1400} = 286 \text{ см}^3$; сортамент жадвалидан W нинг бу қийматига тегишли қўш таврнинг номери 20а мос келади. $W = 309 \text{ см}^3$; $I = 3400 \text{ см}^4$; балканинг бикрлигини текшириб қўраимиз.

$$f = \frac{Pl^3}{3EI} = \frac{1000 \cdot 400^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 3400} = 3 \text{ см.}$$

Нисбий салқилик:

$$\frac{f}{l} = \frac{3}{400} > \frac{1}{400}.$$

балканинг бикрлиги етарли эмас. Бикрлик шартидан кесимни танлаймиз:

$$\frac{Pl^3}{3EI} \leq [f]; \text{ бундан: } I = \frac{Pl^3}{3E \frac{[f]}{l}} = \frac{1000 \cdot 400^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{400}} = 10200 \text{ см}^4.$$

Бунга 33а номерли қўш тавр мос келади. Шунинг учун:

$$I = 11900 \text{ см}^4; \quad W = 721 \text{ см}^3;$$

бу ҳолда салқилик:

$$f = \frac{1000 \cdot 400^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^9 \cdot 11900} = 0,855 \text{ см} < \frac{l}{400} = 1 \text{ см},$$

кучланиш:

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{400 \cdot 000}{721} = 555 \text{ кг/см}^2 < 1400.$$

104. Консолнинг қисилиб тиралган кесими ў бурчакка бурилади. Балка эркин учининг бурилиши бурчаги (θ_A) ва салқилиги (W_A) аниқлансин (305-шакл).

Е ч и ш. Қисилиб тиралган кесим бурилмаса,

$$W_A = -\frac{ql^4}{8EI}, \quad \theta_A = -\frac{ql^3}{6EI}$$

булади, қисилиб тиралган кесимнинг бурилиши (305-шакл, б) натижасида балка қаттиқ жисм каби ў бурчакка бурилади. Натижада унинг учи кутарилади:

$$w_A = l\gamma, \quad \theta_B = \gamma.$$

Тула кўчиш қуйидагича булади:

$$w_A = -\frac{ql^4}{8EI} + l\gamma, \quad \theta_A = -\frac{ql^3}{6EI} + \gamma.$$

105. Дюралдан тайёрланган трубанинг ташқи диаметри $D=50$ мм, ички диаметри $d=44$ мм. Труба горизонтал вазиятда учлари билан икки таянчга эркин тиралган. Хусусий оғирлиги натижасида унинг максимал салқилиги $f = \frac{l}{200}$ дап ошмаслиги учун узунлиги қанча

булиши керак. Солиштирма оғирлиги:

$$\gamma = 2,6 \text{ т/м}^3,$$

$$E = 7,5 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2.$$

К ў р с а т м а.

$$q = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} \gamma; \quad f_{\max} = \frac{5ql^4}{384EI} \leq \frac{l}{200}; \quad l = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{32};$$

бундан:

$$l = 6,75 \text{ м.}$$

106. Балка ўз учларидан бир хил масофалардаги таянчларда ётади. Таянчлар оралиги (а) балка узунлиги (l) нинг қандай қисмини ташкил этганда, балканинг хусусий оғирлигидан ҳосил буладиган максимал салқилик минимум қийматга эга булади?

К ў р с а т м а. Координаталар боши балканинг чап учида олинса, универсал тенглама қуйидагича ёзилади:

$$w = w_0 + \theta_0 x + \frac{1}{EI} \left\{ -\frac{qx^2}{24} + \frac{ql}{2} \left(x - \frac{l-a}{2} \right) + \frac{ql}{2} \left(x - \frac{l+a}{2} \right) \right\};$$

$x = \frac{l-a}{2}$; $x = \frac{l+a}{2}$ бўлганда, $w = 0$ булади. Ундан w_0 ва θ_0 ни аниқлаб, $x = \frac{l}{2}$ га тенг бўлган кесимдаги салқилик ($w_{l/2}$) ни топиш лозим. Чиққан натижани w_0 билан солиштириб, қайси бири катта бўлса, ушандан а га нисбатан ҳосила олинади ва уни нолга тенглаштириш натижасида, минимал салқилик берадиган а нинг қиймати топилади.

Ж а в о б:

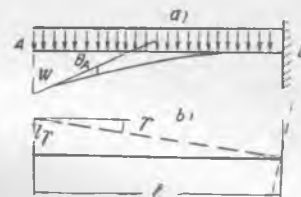
$$a = 0,52l.$$

107. ABC балканинг узунлиги 2l га тенг бўлиб, иккита А ва С таянчларига эркин тиралган ҳолда, биринчи ярми АВ га интенсивлиги q бўлган тенг ёйилган юк қўйилган.

А, В, С кесимларнинг айланish бурчаклари ва В даги салқиликнинг қуйидаги қийматларга тенг бўлиши исботлансин:

$$\theta_B = \frac{ql^3}{48EI}; \quad \theta_A = -\frac{3ql^3}{16EI}; \quad \theta_C = \frac{7ql^3}{48EI}; \quad w_B = -\frac{5ql^4}{48EI}.$$

К ў р с а т м а. Масала графоаналитик усулда ечилиши керак. Фиктив юкнинг ярмиси: парабола юзи билан, ярмиси учбурчак юзи билан тасвирланади.



305-шакл.

108. Узунлиги $l = 2$ м бўлган балка икки таянчда ётган ҳолда доира ёйи бўйича эгилади. Унинг ўртасидаги салқилиги $f = 0,5$ см; $E = 1 \cdot 10^6$ кг/см² ва $I = 230$ см⁴; эластик чизиқнинг эгрилик радиуси (ρ) ва эгувчи момент (M) аниқлансин.

Қўрсатма. Эластик чизиқ доира ёйи бўлса, балка соф эгилишда бўлиб, унинг узунлиги давомида эгувчи момент бир хил бўлади. Шунинг учун $f = \frac{Ml^2}{8EI}$; иккинчи то-

мондан, $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$ бўлгани учун:

$$f = \frac{l^2}{8} \frac{1}{\rho};$$

бундан:

$$\rho = 100 \text{ м};$$

$$M = \frac{EI}{\rho} = 2300 \text{ кгм}.$$

□

XIII боб

ЎЗГАРУВЧИ КЕСИМЛИ БАЛКАЛАР ҲИСОБИ

95- §. Эгилишга тенг қаршилиқ кўрсатувчи балкалар

Призматик стерженлардан тайёрланган балкаларнинг кўндаланг кесимларини танлаб олишда энг катта эгувчи момент таъсир қилаётган кесимнинг мустаҳкамлик шартларини қаноатлантиришига асосландик. Бундай балкаларнинг бошқа кўндаланг кесимлари ортиқча запас билан ишлайди. Аммо бошқа кесимларнинг ўлчамларини ҳам тегишли эгувчи моментларга мувофиқ олиш мумкин. Бундай тадбир амалга оширилса, балканинг ҳар бир кўндаланг кесимидаги максимал кучланиш ўзининг рухсат этилган қийматидан ошмайди. Бу шартни қаноатлантирувчи шаклдаги балкалар *эгилишга тенг қаршилиқ кўрсатувчи балкалар* деб аталади. Эгилишга тенг қаршилиқ кўрсатувчи балкаларнинг барча кесимлари қуйидаги умумий шартларни қаноатлантириши лозим:

$$\frac{M(x)}{W(x)} = [\sigma], \quad (95.1)$$

ёки:

$$W(x) = \frac{M(x)}{[\sigma]}. \quad (95.2)$$

$M(x)$ балка бўйича қандай қонун билан ўзгарса, $W(x)$ ҳам худди шундай қонун билан ўзгариши лозим. Акс ҳолда (95.2) шарт бажарилмайди. Бу (95.1) ёки (95.2) шартни кесимлари аста-секин ўзгарадиган балкалар учун татбиқ қилиш мумкин. Балканинг кесими кескин ўзгарса, бу жойда кучланиш тўплами ҳосил бўлиб, бу тўплам балка материали учун белгиланган рухсат этилган қийматидан ошиб кетиши мумкин. Шунинг учун Гук қонунини чегарасида татбиқ этиладиган формулалардан фойдаланиб бўлмайди. Тенг қаршилиқ кўрсатувчи балкаларнинг бир қанча хусусий ҳолларини текшираимиз.

96-§. Тенг қаршилик кўрсатувчи балкалар профили

Тўғри тўртбурчак кесимли тенг қаршилик кўрсатувчи балкалар учун (95.1) ёки (95.2) тенгلامани татбиқ этамиз. Тўғри тўртбурчакнинг кенглиги ўзгармай, баландлиги ўзгариши ёки баландлиги ўзгармай, кенглиги ўзгариши ёхуд иккала ўлчами ҳам маълум муносабатда ўзгариши мумкин. Бу ҳолларнинг ҳар қайсисини алоҳида текшираемиз. Олдин кенглиги ўзгармайдиган, яъни $b = \text{const}$ бўлган ҳолни текшираемиз.

Икки таянчда ётувчи тенг қаршилик кўрсатувчи балканинг ўртасига P куч қўйилган, деб фараз қилайлик (306-шакл). Балканинг бўйи давомийда кўндаланг кесими қандай қонун билан ўзгаришини, яъни бўйлама кесими контурининг тенгламасини (95.2) дан аниқлаймиз:

$$\begin{aligned} M(x) &= \frac{P}{2} x; & W(x) &= \frac{bh^2(x)}{6}; \\ h(x) &= 2z(x); & \frac{b4z^3}{6} &= \frac{Px}{2[\sigma]}; \\ z^3 &= \frac{3Px}{4b[\sigma]}. \end{aligned} \quad (96.1)$$

Бу тенглама параболянинг тенгламасидир. Баландлиги h га ва узунлиги l га тенг бўлган парабола сегментининг юзи худди шундай ўлчамлари бўлган тўғри тўртбурчак юзининг $\frac{2}{3}$ қисмига тенг. Шу муносабат билан тенг қаршилик кўрсатувчи балканинг ҳажми ва оғирлиги, кўндаланг кесими ўзгармайдиган балканинг ҳажми ва оғирлигининг $\frac{2}{3}$ қисмини ташкил этади.

Тенг қаршилик кўрсатувчи балка бир учи билан қисилиб тиралган, бошқа учига эса тўпланган P куч қўйилган бўлса (307-шакл), куч қўйилган кесимнинг баландлиги жуда кичик бўлгани учун, у ерда жуда катта кесувчи кучланишлар ҳосил бўлиши мумкин. Бундай кучланишларнинг ҳосил бўлишига йўл қўймаслик учун, балканинг учига кичкина супача ҳосил қилиш лозим. Унинг минимал баландлиги қуйидаги тенгламадан аниқланади:

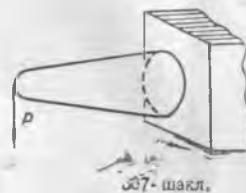
$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q_{\max}}{b \cdot z_{\min}} \leq [\tau]; \quad (96.2)$$

$$Q_{\max} = P \text{ бўлгани учун } z_{\min} = \frac{3P}{2b[\tau]}. \quad (96.3)$$

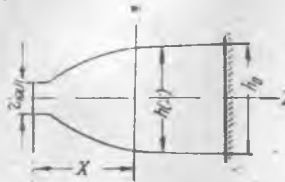
P ни қўйиш учун бу ўлчам билан ажратилган супачали балка 308-шаклда тасвирланган. Кейинги ҳол учун балка учининг салқилигини аниқ-



306-шакл.



307-шакл.



308-шакл.

лаймиз. Призматик стерженлар учун чиқарилган дифференциал тенгламадан фойдаланамиз:

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} = -Px; \quad (96.4)$$

бу ерда I — ўзгарувчи сон; у балканинг чап учидан x масофадаги кесим учун $I_y(x) = \frac{bh^3(x)}{12}$ кўринишда ёзилади. $h(x)$ ни (95.2) дан аниқлаймиз:

$$\frac{M_0}{W_0} = \frac{M(x)}{W(x)} = [\sigma] = \text{const};$$

бундан:

$$\frac{Pl}{bh_0^2} = \frac{Px}{bh^2(x)}; \quad h^2(x) = h_0^2 \cdot \frac{x}{l}; \quad h(x) = h_0 \sqrt{\frac{x}{l}}.$$

Буни $I(x)$ ифодасига қўйсак:

$$I_y(x) = I_0 \sqrt{\frac{x^3}{l^3}}$$

келиб чиқади.

(96.4) қуйидагича ёзилади:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{P\sqrt{l^3}}{EI_0} \cdot x^{-\frac{1}{2}}; \quad \frac{dw}{dx} = -\frac{2P\sqrt{l^3}}{EI_0} x^{\frac{1}{2}} + C_1.$$

$x = l$ бўлганда, $\frac{dw}{dx} = 0$. Шунинг учун:

$$C_1 = +\frac{2Pl^2}{EI_0}.$$

Яна бир марта интеграллаб, w учун:

$$w = -\frac{4}{3} \frac{P\sqrt{l^3}}{EI_0} x^{\frac{3}{2}} + \frac{2Pl^2}{EI_0} x + C_2$$

ифодани ҳосил қиламиз; $x = l$ бўлганда

$w = 0$ бўлади, шунинг учун:

$$C_2 = -\frac{2}{3} \frac{Pl^3}{EI_0}.$$

бу миқдор балка учининг салқилигидир.

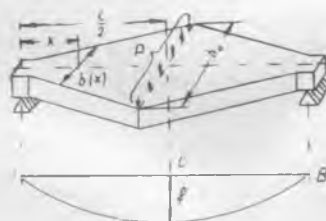
Шунинг учун, $x = 0$ бўлганда:

$$w_B = f = -\frac{2}{3} \frac{Pl^3}{EI_0}$$

бўлади.

Бу салқилик кўндаланг кесими bh га тенг бўлган призматик стержень салқилигининг икки ҳиссасига тенг бўлаётир. Демак, тенг қаршилик кўрсатувчи балкада материал тежалиши билан бирга унинг бикрлиги камаяди.

Энди, икки таянчда ётувчи ва тенг қаршилик кўрсатувчи балканинг тўғри тўрт бурчакли кўндаланг кесимининг баландлиги $h = \text{const}$ бўлиб, кенглиги (b) ўзгарсин, деб фараз қиламиз (309-шакл). Бу ҳолда (95.2) қуйидагича ёзилади:



309-шакл.

$$\frac{3M(x)}{b(x)h^2} = [\sigma], \text{ бундан: } b(x) = \frac{3M(x)}{[\sigma]h^2}.$$

Биз текшираётган ҳолда, $M = P \frac{x}{2}$ бўлгани учун

$$b(x) = \frac{3}{2} \frac{P}{[\sigma]h^2} \cdot x. \quad (96.5)$$

бўлади.

Балканинг иккинчи участкаси учун ҳам симметрия туфайли, худди шундай тенгламани ёзишимиз мумкин. Демак, бу ҳолда тенг қаршилиқ кўрсатувчи балканинг кенглиги тўғри чизиқ қонуни билан ўзгарар экан. Бундай балкага призматик балка материалига қараганда кам материал кетади.

Эластик чизиқни текшираимиз. Бу ҳолда дифференциал тенглама қуйидагича ёзилади:

$$EI(x) \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{P}{2} x, \text{ бунда: } I(x) = \frac{b(x)h^3}{12}.$$

$b(x)$ нинг қийматини (96.1) га кўра, қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$b(x) = 2b_0 \frac{x}{l}.$$

Чунки:

$$\frac{M_0}{W_0} = \frac{M(x)}{W(x)} = [\sigma] \quad (a)$$

ёки

$$\frac{3Pl}{2b_0 h^2} = \frac{3Px}{b(x)h^2} = [\sigma];$$

бундан (a) ни олаимиз. Шунинг учун:

$$I(x) = \frac{2b_0 h^3}{12} \cdot \frac{x}{l} = 2I_0 \frac{x}{l}$$

бўлади.

Энди, эластик чизиқнинг дифференциал тенгламасини қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{Pl}{4EI_0} = \frac{1}{\rho} = \text{const}. \quad (96.6)$$

Тенг қаршилиқ кўрсатувчи балканинг узунлиги бўйича унинг эгрилиги ўзгармаётир, демак, эластик чизиқ айлана ёйи билан тасвирланар экан.

Балканинг ўртасидаги максимал салқиликни қуйидаги мулоҳазадан топамиз. Айлананинг A нуқтасидан унинг диаметрига туширилган тик $AC = \frac{l}{2}$ нинг квадрати диаметрининг C нуқта билан бўлинган кесмалар кўпайтмасига тенгдир. Кесмалар эса тегишлича f ва $2\rho - f$ га тенг (309-шакл). Шунинг учун:

$$\left(\frac{l}{2}\right)^2 = f(2\rho - f);$$

f^2 ни ҳисобга олмасак, f учун (96.6) ни кўзда тутиб, қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз:

$$f = \frac{l^2}{8\rho} = \frac{Pl^3}{32EI_0} \quad (96.7)$$

Бу тарзда юкланган призматик балканинг эгилиши:

$$f_0 = \frac{Pl^3}{48EI_0}$$

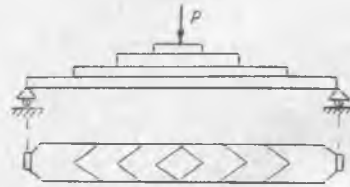
эди; шунинг учун: $f = \frac{3}{2} f_0$ бўлаётир.

(96.7) формулани балканинг қалинлиги орқали ифодалаймиз. Унинг учун I_0 нинг қийматини қуйидагича ёзамиз:

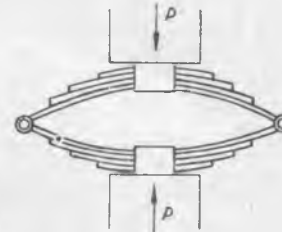
$$I_0 = W_0 \frac{h}{2} = \frac{M_0}{[\sigma]} \frac{h}{2} = \frac{Plh}{4[\sigma]};$$

бу кўзда тутилса, салқилик бундай бўлади:

$$f = \frac{[\sigma]l^2}{4Eh}$$



310- шакл.



311- шакл.

Демак, тенг қаршилиқ кўрсатувчи балканинг максимал салқилиги унинг қалинлигига тескари пропорционал бўлар экан. Эгилишга тенг қаршилиқ кўрсатувчи бу тарздаги балкалар листлардан тайёрланадиган рессораларда ишлатилади. Бундай рессораларнинг тепадан кўриниши ромб шаклида бўлади (309-шакл). Қўйиладиган юкнинг миқдори етарли даражада катта бўлса, рессоранинг кенглиги жуда катта бўлиб, бундай қўпол габаритдаги элементни иншоотларга, хусусан машиналарга ўрнатиш ноқулайдир. Бундай ноқулайликни йўқотиш учун, рессора ҳалиги ромбсимон балкадан кесилган полосалардан тузилади (310-шакл). Бундай полосалардан тузилган рессора мустаҳкамлик ва бикрлик жиҳатидан, асосий балкага тахминан эквивалент бўлади. Чунки уларнинг қаршилиқ моментлари билан инерция моментлари бир хилдир.

Дарҳақиқат, ҳалиги асосий ромб n та полосага ажратилса, ҳар қандай i -полоса учун W_i I_i қуйидагича бўлади:

$$W_i = \frac{bh^2}{6} = \frac{b}{n} \cdot \frac{h^2}{6}; \quad I_i = \frac{bh^3}{12} = \frac{b}{n} \cdot \frac{h^3}{12}.$$

Бундан рессора учун:

$$W_0 = \sum_{i=1}^n \frac{bh^2}{6} = \frac{h^2}{6} \sum_{i=1}^n b_i = \frac{bh^2}{6},$$

$$I_0 = \sum_{i=1}^n \frac{bh^3}{12} = \frac{h^3}{12} \sum_{i=1}^n b_i = \frac{bh^3}{12}.$$

Агар полосалар орасидаги ишқаланиш катта бўлмаса, бунда усулда тузилган рессоранинг салқилиги асосий балканинг салқилигидан фарқ қилмайди. Одатда, бундай рессорани салқилигининг йўналишига тескари томон-

га қараб бирмунча букилган ҳолда жуфтлаб ўрнатадилар. Бундай тадбир натижасида, қўйилган юк таъсиридан рессора янада кўп деформацияланиш қобилиятига эга бўлади (311-шакл). Шу муносабат билан рессора кўпроқ энергияни ўзига қабул қилиш имкониятига эга бўлади.

МАСАЛАЛАР

109. Кенглиги ўзгармас b га тенг, кўндаланг кесими тўғри тўрт бурчакли консол балка икки қисмдан иборат бўлиб, уларнинг баландлиги тегишлича h_0 ва h га тенгдир (312-шакл). $\frac{h}{h_0}$ ва $\frac{a}{l}$ нисбатларнинг қандай қийматида балканинг мустаҳкамлик шартлари қаноатлантирилган ҳолда, балка минимал оғирликка эга бўлади? Масалани қуйидаги икки ҳол учун ечиш лозим:

1. Консол учига тўпланма P куч қўйилган.
2. Балканинг бутун бўйига тенг ёйилган юк қўйилган.

Ечиш. Тўпланган юк таъсир этган ҳолда мустаҳкамлик шarti қуйидагича ёзилади:

$$\frac{M_0}{W_0} = \frac{M}{W} \quad \text{ёки} \quad \frac{Pl}{bh_0^2} = \frac{Pa}{bh^2}, \quad \text{бундан:} \quad \frac{a}{l} = \frac{h^2}{h_0^2}.$$

(1)

Бу муносабатни кўзда тутиб, балканинг оғирлигини қуйидагича ифодалаймиз:

$$G = \left[h_0 l - (h_0 - h)a \right] b \gamma = \left[h_0 - (h_0 - h) \frac{h^2}{h_0^2} \right] l b \gamma \quad (2)$$

Балканинг оғир-енгиллиги h га боғлиқ бўлаётир. Шунинг учун, G дан h га нисбатан ҳосила олиб, $\frac{h}{h_0}$ ва $\frac{a}{l}$ муносабатларини аниқтаймиз:

$$\frac{dG}{dh} = \frac{3h^2}{h_0^3} - \frac{2h}{h_0} = 0; \quad \frac{h}{h_0} = \frac{2}{3}; \quad \frac{a}{l} = \frac{4}{9}.$$

Худди шу хилдаги мулоҳаза билан иккинчи ҳол учун ҳам масаланинг жавобини олаемиз:

$$\frac{h}{h_0} = \frac{a}{l} = \frac{1}{2}.$$

110. Пулат листдан ишланган балка ўзгарувчи кесимли бўлиб, 313-шаклда кўрсатилганидек, бир учи билан қисилиб тиралган, бошқа учига эса P юк қўйилган. Мазкур юк қўйилган томондаги C нуқтанинг пасайиши аниқлансин. Балканинг барча ўлчамлари шаклда кўрсатилган.

Ечиш. C нуқтанинг пасайиши уч қисмдан иборат:

1. B нуқтанинг пасайиши, у:

$$f_1 = \frac{Pl^3}{2EI} + \frac{Pl^3}{3EI} = \frac{5Pl^3}{6EI} \quad (1)$$

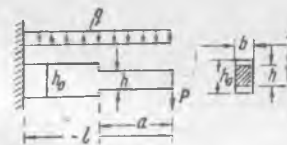
бўлади.

2. B кесимининг бурилиши натижасида, C нуқтанинг пасайиши, у:

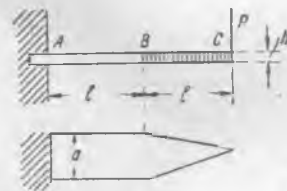
$$f_2 = \theta_B l = \frac{3Pl^3}{2EI} \quad (2)$$

бўлади, чунки:

$$\theta_B = \frac{Ml}{EI} + \frac{Pl^2}{2EI} = \frac{Pl^2}{EI} + \frac{Pl^2}{2EI} = \frac{3Pl^2}{2EI}.$$



312-шакл



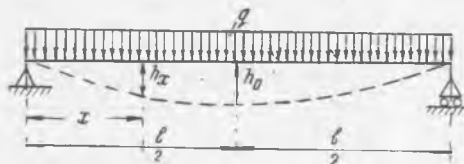
313-шакл.

3. BC қисмининг эгилиши натижасида C нуқтанинг пасайиши

$$f_3 = \frac{Pl^3}{2EI} \quad (3)$$

бўлади. C нуқтанинг тула пасайиши мана бундай:

$$f = f_1 + f_2 + f_3 = \frac{17Pl^3}{6EI}$$



314-шакл.

111. Икки учи билан таянчга эркин тиралган балкага 314-шаклда кўрсатилганидек, ёйилган юк қўйилган. Тўғри тўртбурчак кесимли балка тенг қаршилик кўрсатувчи шаклда бўлиши учун, кўндаланг кесимининг кенглиги (b) ўзгармаса, унинг баландлиги (h) балканинг узунлиги бўйича қандай қонун билан ўзгариши лозим?

Жавоби:

$$h_x^2 = \frac{4h_0^2}{l^2} (l-x)x.$$

□

XIV БОБ

СТАТИК АНИҚМАС БАЛКАЛАР ҲИСОБИ

97-§. Ортиқча боғланишлар

Балканинг мувозанатини таъмин этадиган таянч реакцияларини аниқловчи параметрларнинг сони мувозанат тенгламаларининг сонига тенг бўлганда масала статик аниқ, параметрларнинг сони мувозанат тенгламалари сонидан ортиқ бўлганда эса масала статик аниқмас бўлади. Қўпинча, конструкция элементларидан яхшироқ фойдаланиш учун, яъни уларнинг бикрлигини ошириб, эгилишга мойиллигини камайтириш учун қўшимча боғланишлар киритиш зарурати туғилади. Масалан икки таянчга эркин тиралган балканинг салқилигини камайтириш учун оралиғига қўшимча таянч қўйилса, балканинг салқилиги камайиб, бикрлиги ошади. Шу билан бирга, унда қўшимча реакция ҳосил бўлиб, масала статик аниқмас бўлади (315-шакл, a ва b). Ёки бир учи билан қисилиб тиралган балканинг бошқа эркин учи қўшимча таянчга эркин ёки қисилиб тиралса, балканинг эгилишга мойиллиги анча камайиб, бикрлиги анча ошади, шу билан бирга масала статик аниқмас бўлиб қолади (316-шакл, a , b ва c). Икки учи билан эркин тиралган ва тенг ёйилган юк таъсирида бўлган балканинг максимал салқилиги:

$$f = \frac{5ql^4}{384EI}$$

бўлади, учлари қисилиб тиралган ҳол учун бу балканинг максимал салқилиги:

$$f_1 = \frac{ql^4}{384EI}$$

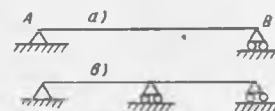
дир. Қўрамизки, балканинг учлари айланмайдиган қилиб қўйилиши натижасида, унинг максимал салқилиги беш марта камайиб, бикрлиги шунча кўпайди. Статик аниқмас балкалар, асосан, қуйидагилардан бирига мос келади.

1. Балка бир неча (иккитадан ортиқ) таянчга тиралади (315-шакл, б).

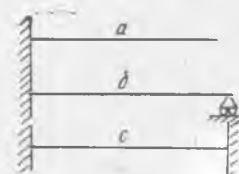
2. Бир учи билан қисилиб тирилади ва яна қўшимча битта ёки бир нечта таянчга суянади (316-шакл, б ва с).

3. Иккала учи билан қисилиб тиралган ҳолда оралиғида ҳам таянчлар бўлиши мумкин (317-шакл).

Бу тарздаги балкалар учун таянч-реакцияларини аниқловчи параметрларнинг сони мувозанат тенгламалари сонидан ортиқдир. Шунинг учун ҳозиргина келтирилган учала схемадаги балкалар статик аниқмас балкалар қаторига киради. Статик аниқмас балкалардаги ортиқча номаълумларни аниқлаш усулларини текширишга ўтамиз.



315-шакл.



316-шакл.



317-шакл.

98- §. Ортиқча номаълумларни аниқлаш усуллари

Статик аниқмас балкаларга оид масалалар қуйидаги усуллар билан ечилади

1. Балкалар деформациясини бевосита текшириш; бу тарзда қуйидаги икки усул билан статик аниқмас балкаларни ҳисоблаш мумкин:

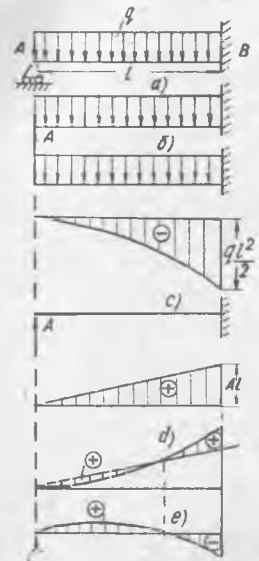
а) балка эгилган ўқининг дифференциал тенгламасини интеграллаш усули;

б) берилган статик аниқмас балкани бир нечта оддий балкаларга ажратиш, уларнинг тегишли нуқталаридаги деформацияларни ҳисоблаш усули.

2. Умуман, статик аниқмас эластик системаларни, шунингдек, статик аниқмас балкаларни махсус теоремаларни татбиқ этиб ҳисоблаш усули. Бу махсус теоремаларга асосланган усуллардан биз ҳозирча фақат уч момент теоремасига асосланган усулнинг устида тўхталиб ўтамиз. Махсус теоремаларга асосланган усуллар, асосан, деформациянинг потенциал энергияси билан боғлиқдир. Бу ҳақдаги тафсиллий маълумотларни курсимизнинг кейинги бобларда берамиз.

а) Статик аниқмас балка эгилган ўқининг дифференциал тенгламасини интеграллаш усули. Статик аниқмас балкалар учун эгилган ўқининг дифференциал тенгламалари тузилади. Бу дифференциал тенгламалар балкага қўйилган юклар билан бир қаторда, тегишли таянч реакцияларини ҳам ўз ичига олади. Балканинг ҳар қайси участкаси учун эгилган ўқ дифференциал тенгламаларининг интеграллари, номаълум реакциялар билан бирга, иккитадан ихтиёрий ўзгармасларни ўз

ичига олади. Статик аниқ балкалар учун бу ихтиёрий ўзгармасларнинг қай тартибда аниқланиши ҳақида 89-параграфда тула маълумот берилган эди. Ортиқча номаълум реакцияларни аниқлаш учун, қуйидаги мулоҳазалар асосида қўшимча шартлар тузилади. Ортиқча номаълум реакциялар қўшимча боғланишлар натижасида ҳосил бўлади. Қўшимча боғланишларни киритиш билан балканинг тегишли нуқталарининг ёки чизиқли элементларининг кўчишлари чекланади. Мазкур боғланган нуқталар ёки чизиқли элементларнинг деформацияланишидан қўшимча чегара шартлари тузилади. Балканинг нуқта ёки чизиқли элементларининг кўчиши қанча чекланган бўлса, шунча қўшимча чегара шартини тузиш мумкин.



318-шакл.

Эгилган ўқ дифференциал тенгламаларини интеграллашда ҳосил бўлган ихтиёрий ўзгармасларни аниқлаш учун тузилган шартлар билан қўшимча чегара шартларидан чиқарилган тенгламаларни мувозанат тенгламалари билан бирга ечиш натижасида ихтиёрий ўзгармаслар ва барча таянч реакциялари аниқланади. Масалан, балканинг иккала учи қисилиб тиралган бўлса, деформация натижасида қисилиб тиралган кўндаланг кесим бурилмайд, ўзининг олдинги ҳолатича қолади. Шунинг учун тегишли бурилиш бурчаклари нолга тенг бўлиб, иккита қўшимча чегара шартини беради. Бу усулни ойдинлаштириш учун қуйидаги масалани ечамиз.

112-масала. Чап учи эркин тиралган, ўнг учи эса қисилиб тиралган балкага тенг ёйилган юк қўйилган (318-шакл). Таянч реакциялари (A ва B) билан реактив момент (M_B) аниқлансин.

Ечиш. Эгилган ўқнинг дифференциал тенгламасини тузамиз. Чап таянчдан x масофадаги кесим учун эгувчи момент:

$$M = Ax - \frac{qx^2}{2}$$

бўлади. Шунинг учун:

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} = Ax - \frac{qx^2}{2}.$$

Бу тенгламанинг интегралини ёзамиз:

$$EI \frac{dw}{dx} = A \frac{x^2}{2} - \frac{qx^3}{6} + C_1;$$

$$EI w = A \frac{x^3}{6} - \frac{qx^4}{24} + C_1 x + C_2.$$

Ихтиёрий ўзгармас (C_1 ва C_2) ни ҳамда таянч реакцияси (A) ни аниқлаш учун қуйидаги шартларни оламиз:

$$x = 0 \text{ бўлганда, } w = 0; \quad (1)$$

$$x = l \text{ бўлганда, } w = 0; \quad (2)$$

$$x = l \text{ бўлганда, } \frac{dw}{dx} = 0. \quad (3)$$

Бу учта шартдан қуйидаги учта тенгламани чиқарамиз:

$$C_2 = 0; \quad A \frac{l^2}{6} - \frac{ql^3}{24} + C_1 = 0; \quad A \frac{l^2}{2} - \frac{ql^3}{6} + C_1 = 0;$$

бу тенгламалардан:

$$A = \frac{3}{8} ql; \quad C_1 = -\frac{ql^3}{48}.$$

Реакция (B) билан реактив момент (M_B) ни мувозанат тенгламаларидан аниқлаймиз:

$$A + B = ql; \quad -Bl + M_B + \frac{ql^2}{2} = 0$$

булардан:

$$B = -\frac{5}{8} ql; \quad M_B = \frac{pl^2}{8}.$$

Балкага қўйилган юклар балкани бир неча участкага ажратган тақдирда ҳам, ихтиёрий ўзгармасларнинг сони иккитадан ошмайди, уларни балка учларининг тиралиш шартларидан аниқлаш бизга маълум.

б) Статик аниқмас балкани статик аниқ балкаларга ажратиб ечиш усули. Статик аниқмас балка характерли нуқталарининг деформациялари маълум бўлган бир нечта содда балкаларга ажратилса, қўшимча тенгламаларни тузиш жуда осонлашади. Бунинг учун маълум типдаги юклар таъсирида бўлган статик аниқ балкалар характерли кесимларининг бурилиш бурчаклари ва салқиликлари олдиндан ҳисобланган бўлиши лозим. Биз энг типик юклар таъсиридаги статик аниқ балкаларнинг эгилган ўқи тенгламаларини, характерли кесимларида ҳосил бўладиган бурилиш бурчакларини ва салқиликларини ҳамда максимал эгувчи момент ва кесиб ўтувчи кўчларининг қийматларини XII бобда келтирдик.

Статик аниқмас балкалар оддий балкаларга ажратилиб қуйидаги тартибда ечилади:

1) Статик аниқмас балкадаги ортиқча боғланишлар ташланиб, уларнинг таъсири тегишли реакция ёки реактив моментлар билан алмаштирилади.

2) Балкага таъсир қилувчи юклар шундай энг оддий группаларга ажратиладик, уларга тегишли деформацияларни балканинг характерли кесимлари учун, справочниклардан аниқлаш ёки бевосита ҳисоблаш жуда осон бўлсин.

3) Номаълум реакциялар ва балкага қўйилган юклар таъсиридан ҳосил бўладиган бурилиш бурчаклари ҳамда салқиликларнинг ифодаси тузилади.

4) Номаълум реакциялар қўйилган кесимлар учун деформациянинг мослик шартлари тузилади. Абсолют бикр таянчлар учун тегишли деформациялар нолга тенг бўлади. Агар таянчлар эластик бўлса (деформацияга мойил бўлса), уларнинг деформациялари ҳалиги юк ва реакциялар таъсиридан ҳосил бўладиган деформацияга тенг бўлади.

5) Деформацияларнинг мослик шартларидан чиқарилган тенгламалар мувозанат тенгламалари билан бирга ечилиб, барча номаълум реакциялар аниқланади.

Баён этилганларни ойдинлаштириш учун юқорида келтирилган 113-масалани шу усулда ечамиз. A таянчни ташлаб, унинг таъсирини тегишли реакция (A) билан алмаштирамиз (318-шакл, a). Балканинг чап учи A таянчга тиралмаганда, у f_1 ча пасайган бўлар эди, аммо таянч балканинг

учини f_1 ча пасайишига қўймайди. Демак, таянч реакцияси (A) шундай микдордаги кучки, у балканинг учини юқорига қараб сон жиҳатидан f_1 га тенг бўлган f_2 микдорга кўтаради. Деформация натижасида балканинг чап учи (A) пасаймаганидан, $f_1 + f_2 = 0$ бўлиши керак. f_1 ва f_2 нинг қийматини 318-шакл, b , c схемаларга мувофиқ 89-параграфдаги 90-масаладан келтириб қўямиз:

$$f_1 = -\frac{ql^4}{8EI}, \quad f_2 = \frac{Al^3}{3E}.$$

Буларнинг қийматини юқоридаги тенгламага қўйсақ A нинг қиймати қуйидагича бўлади:

$$A = \frac{3}{8}ql.$$

B реакция билан M_B реактив моментни мувозанат тенгламаларидан олдиндагидек аниқлаймиз.

Статик аниқмас балкалар учун барча реакциялар юқорида айтнлган усуллардан фойдаланиб аниқлангач, тегишли эпюралар чизилиб, балканинг мустаҳкамлигини таъмин этувчи кўндаланг кесим ўлчамлари максимал эғувчи момент ва кесиб ўтувчи кучлар қийматига мувофиқ танланади. Масалан, юқорида чиқарилган 114-масала учун эғувчи моментлар эпюраси балкага таъсир этувчи ёйилган юклар ва A реакция учун алоҳида чизилган (318-шакл, b ва c) эпюраларни қўшиб умумий эпюрани ҳосил қиламиз. 318-шакл d да бу қўшиш тасвирланган. кейин бу эпюра координата ўқларининг йўналишига мувофиқлаб тасвирланган (318-шакл, e).

МАСАЛАЛАР

113. Бир учи билан қисилиб тиралган балканинг бошқа учига 319-шаклда кўрсатилгандек $P = 10 \text{ т}$ юк қўйилган.

Бу балка чап учидан $a = 2 \text{ м}$ ва ўнг учидан $2a = 4 \text{ м}$ масофадаги таянчга суяниб турди. Бу балка учун эғувчи моментлар ва кесиб ўтувчи кучлар эпюралари ясалсин. Рухсат этилган кучланиш $[\sigma] = 1000 \text{ кг/см}^2$; қўш таврли кесим танлансин ва юк қўйилган нуқтанинг салқилиги аниқлансин.

Ечиш. Масалани эгилган ўқнинг универсал тенгламалари (91.3) ва (91.4) дан фойдаланиб ечамиз. Олдин иккита мувозанат тенгламасини тузамиз, улар:

$$A + B = P. \quad (1)$$

$$M_B + 2Aa - 3Pa = 0 \quad (2)$$

бўлади.

Универсал тенгламалардан фойдаланишдан олдин, таянчлардаги деформация шартларини аниқлаб оламиз. $x = a$ бўлганда, $w_A = \theta_A = 0$.

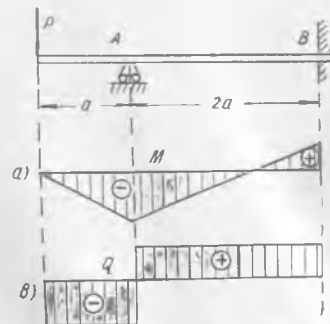
Шунингдек, $x = 3a$ бўлганда $w_B = 0$; $\theta_B = 0$; бу учта шартдан қуйидаги учта тенгламани оламиз:

$$w_0 + \theta_0 a - \frac{Pa^3}{6EI} = 0, \quad (3)$$

$$w_0 + 3\theta_0 a - \frac{27Pa^3}{6EI} + \frac{9Aa^3}{6EI} = 0, \quad (4)$$

$$\theta_0 - \frac{9Pa^2}{2EI} + \frac{4Aa^2}{2EI} = 0. \quad (5)$$

Бу тенгламаларни мувозанат тенгламалари (1) ва (2) билан биргачиб, бешта номатлум θ_0 , w_0 , A , B ва M_B ни аниқлаймиз.



319-шакл.

$\frac{a^3}{6EI} = \alpha$ десак, (3), (4) ва (5) тенгламалар қуйидагича ёзилади:

$$w_0 + \theta_0 a - aP = 0, \quad (3')$$

$$w_0 + 3\theta_0 a - 27aP + 8aA = 0. \quad (4')$$

$$\theta_0 a - 27Pa + 12Aa = 0. \quad (5')$$

Бу тенгламалардан:

$$A = \frac{7}{4}P, \quad \theta_0 = \frac{Pa^2}{EI}; \quad w_0 = -\frac{5Pa^3}{6EI}.$$

A нинг қийматини (1) ва (2) тенгламаларга қўйсак,

$$B = -\frac{3}{4}P \quad \text{ва} \quad M_B = -\frac{Pa}{2}$$

қелиб чиқади.

Энди, эгувчи моментлар билан кесиб ўтувчи кучлар эпюрасини чизамиз. Бунинг учун, улар ифодасини тузамиз. Биз текшираётган ҳолда балка иккита участкадан иборат; шунинг учун:

$$M_1 = -Px; \quad M_2 = -\frac{P}{4}(7a - 3x);$$

$$Q_1 = -P; \quad Q_2 = \frac{3}{4}P.$$

Бу тенгламаларга тегишли эпюралар 319- шакл, a ва b да тасвирланган. Қўрамизки энг катта эгувчи момент $M_{\max} = Pa$ бўлаётир. Бу моментга тегишли қўш таврнинг номерини аниқлаймиз:

$$W = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{10 \cdot 000 \cdot 200}{1000} = 2000 \text{ см}^3.$$

Ейма пўлатлар учун тузилган сориамент жадвалидан $W_x = 2080 \text{ см}^3$ қўш таврли профилни оламиз. Бунга тегишли номер 50^е дир.

114. Икки учи бидан қисилиб тиралган балканинг чап учидан то ўртасигача тенг ёйилган юк қўйилган. Ёйилган юкнинг интенсивлиги $q = 2 \text{ т/м}$ бўлиб, балканинг узунлиги $l = 4 \text{ м}$. Эгувчи моментлар ва кесиб ўтувчи кучлар эпюраси ясалсин ҳамда максимал эгувчи моментнинг қиймати ҳисоблансин (320- шакл).

Е ч и ш. Бу масалани ҳам эгилган ўқнинг унйверсал тенгламасини татбиқ қилиб ечамиз. Олдин мувозарат тенгламаларини тузамиз:

$$A + B = \frac{ql}{2}, \quad (1)$$

$$-M_A + M_B + \frac{ql^2}{8} - Bl = 0. \quad (2)$$

Унйверсал тенгламадан фойдаланиш учун қуйидагиларни кўзда тутамиз: $x = 0$ бўлганда, $w_0 = 0$, $\theta_0 = 0$. Ундан ташқари, $x = l$ бўлганда, $w_B = 0$, $\theta_B = 0$. Бу шартлар қуйидаги иккита тенгламани беради:

$$48M_A + 24Al - 7ql^2 = 0 \quad (3)$$

$$4 \cdot 48M_A + 4 \cdot 16Al - 15ql^2 = 0. \quad (4)$$

Мазкур (3) ва (4) тенгламалардан:

$$A = \frac{13}{32}ql; \quad M_A = \frac{11}{192}ql^2.$$

бўлади. Буларни (1) ва (2) га қўйсак, B ва M_B нинг қийматини топамиз:

$$B = \frac{3}{32}ql; \quad M_B = \frac{5}{192}ql^2.$$

Энди, эгувчи момент ва кесиб ўтувчи кучлар ифодасини тузиш қийин эмас. Балка икки участкадан иборат. Шунинг учун:

$$M_1 = A_x - M_A - \frac{qx^2}{2} = \frac{ql}{192}(78x - 11l) - \frac{qx^2}{2}; \quad Q_1 = \frac{13}{32}ql - qx;$$

$$M_2 = -M_B + B(l-x) = -\frac{ql}{192}(13l-18x); \quad Q_2 = -\frac{3}{32}ql.$$

бўлади. Бу тенгламаларга тегишли эпюралар 320-шакл, a ва b да тасвирланган. Ясалган эпюрада энг катта эгувчи момент:

$$M_{\max} = \frac{11}{192}ql^2$$

бўлади.

115. Юқорида келтирилган масала графоаналитик усулда ечилсин.

Е чи ш. Қисилиб гиралган кесимлар эркин тиралса, балка таянч моментлари (M_A , M_B) ва ёйилган юклар таъсирида бўлади (321-шакл). Ҳар қайси куч таъсирини алоҳида текшираимиз. У ҳолда иккита содда балкани олаимиз. Улар 321-шакл, a , b да тасвирланган. Иккала балканинг уч кесимлари бурилиш бурчакларини аниқлаймиз.

321-шакл, a даги балка учун олдин эгувчи момент эпюрасини чизиб, унинг юзини ва оғирлик маркази ҳолатини аниқлаймиз. Эпюра юзи балканинг ярмисигача парабола билан чегараланган юз бўлиб, балканинг иккинчи ярмисида учбурчакдир. Парабола қисмининг юзини Ω_1 десак, у:

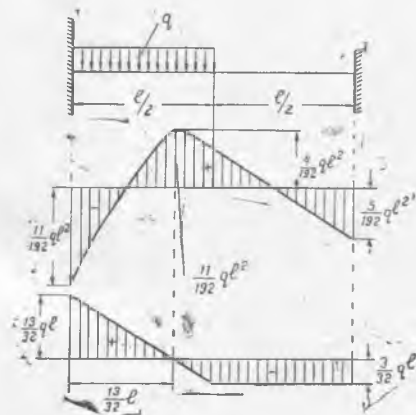
$$\Omega_1 = \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{3}{8}qlx - \frac{qx^2}{2} \right) dx = \frac{5}{192}ql^3$$

бўлади.

Мазкур юзанинг оғирлик марказини топамиз. Унинг учун олдин чап таянчдан ўтувчи ўққа нисбатан статик моментни ҳисоблаймиз:

$$S = \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{3}{8}qlx - \frac{qx^2}{2} \right) x dx = \frac{3}{384}ql^4;$$

$$x_0 = \frac{3}{10}l.$$



320-шакл.

Эпюра учбурчак қисмининг юзи:

$$\Omega_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{ql^2}{16} = \frac{ql^3}{64}.$$

Эпюранинг умумий юзи:

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 = \frac{8}{192}ql^3.$$

Эпюра юзасининг оғирлик маркази:

$$x_c = \frac{\Omega_1 \frac{3}{10}l + \Omega_2 \left(\frac{l}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{2} \right)}{\Omega} = \frac{7}{16}l.$$

321-шакл.

Энди, текширилаётган балканинг фиктив реакцияларини, шу билан бирга эса учларининг бурилишини аниқлаймиз:

$$A_\phi = \frac{9}{16}\Omega = \frac{9ql^3}{384}; \quad B_\phi = \frac{7}{16}\Omega = \frac{7ql^3}{384};$$

$$\theta_A = \frac{9ql^3}{384EI}; \quad \theta_B = \frac{7ql^3}{384EI}. \quad (*)$$

321- шакл, *b* даги балка учун тегишли бурилиш бурчакларининг қиймати (94.5) формулаларда берилган. Уларни тегишлича (*) билан қўшсак, M_A ва M_B ни аниқлаш учун қуйидаги икки тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\frac{9ql^3}{384EI} + \frac{M_A l}{3EI} + \frac{M_B l}{6EI} = 0, \quad \frac{7ql^3}{384EI} + \frac{M_A l}{6EI} + \frac{M_B l}{3EI} = 0.$$

Бу тенгламалардан:

$$M_A = \frac{11}{192} ql^2; \quad M_B = \frac{5}{192} ql^2,$$

реакцияларнинг қийматини статика тенгламаларидан аниқлаймиз.

Умумий эгувчи момент эпюрасини *a*, *b* балкалар учун чизилган эгувчи моментлар эпюраларини бир-бирига қўйиш билан чиқаришимиз мумкин. У 321- шакл, *d* да тасвирланган.

116. Бир учи билан қисилиб тиралган балкага тенг ёйилган юк таъсир қилади. Эркин учидан δ масофада таянч урнатилган (322- шакл). Шу таянчнинг реакцияси аниқлансин.

Ечнш. *A* таянчдаги деформация шартини қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$f_1 - f_2 = \delta,$$

f_1 — балкага қўйилган тенг ёйилган юк таъсиридан ҳосил бўлган салқилик; f_2 — аниқланиши лозим бўлган реакция кучи (*A*) таъсиридан ҳосил бўлган салқилик. Буларнинг қийматини аниқлаб, қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\frac{ql^4}{8EI} - \frac{Al^3}{3EI} = \delta;$$

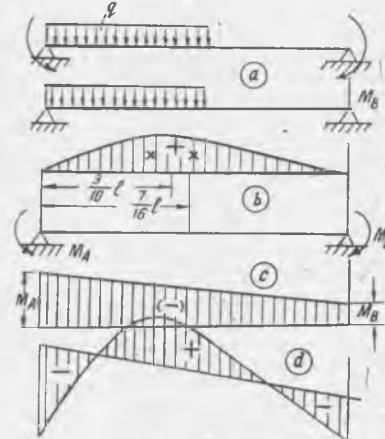
бундан:

$$A = \frac{3}{8} ql - \frac{3EI}{l^3} \delta.$$

117. Ҳеч қандай юк таъсирида бўлмаган *AB* балка иккала учи билан қисилиб тиралган.

Қуйидаги икки ҳолда балканинг қисилган кесимларида ҳосил бўладиган реактив моментлар аниқлансин:

1. Ўнг таянч θ_B га бурнлса (323- шакл).
2. Ўнг таянч δ га илгарилама қўзғатилади (324- шакл).



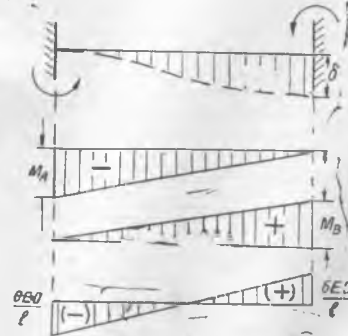
321- шакл.



322- шакл



323- шакл.



324- шакл.

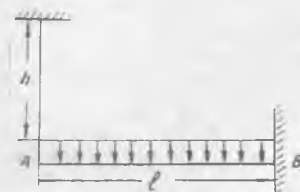
Ечиш. Масаланинг биринчи ҳолдаги жавобини (94.5) формулалардан оламиз:

$$\theta_A = \frac{M_A l}{3EI} + \frac{M_B l}{6EI} = 0; \quad \theta_B = \frac{M_A l}{6EI} + \frac{M_B l}{3EI}.$$

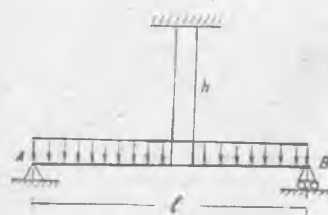
Булардан:

$$M_A = \frac{M_B}{2}; \quad M_B = \frac{4EI}{l} \theta_B.$$

Масаланинг иккинчи ҳолини қуйдагича ечиш мумкин. Балканинг ўнг учи вертикал йўналишда қўзғалгани учун, ундаги реакция нолга тенг, шу туфайли чап таянчдаги реакция ҳам нолга тенгдир. Мувозанат шarti $M_A + M_B = 0$ кўринишда ёзилади. Ўнг учи қўчишининг таянч моментлари орқали ифодасини графоаналитик усулдан фойдаланиб тузамиз:



325-шакл.



326-шакл.

$$-\frac{1}{EI} \left[\frac{M_A l}{2} \cdot \frac{2}{3} l + \frac{M_B l}{2} \cdot \frac{l}{3} \right] = \delta;$$

бундан:

$$M_A = -M_B = -\frac{6EI}{l^2} \delta.$$

118. Ўнг учи қисилиб тиралган пўлат балкага тенг ёйилган юк қўйилган бўлиб, балканинг чап учи шипга пўлат тортқи билан осилган (325-шакл). Балка кесимининг инерция momenti I , узунлиги l , тортқининг кўндаланг кесими F , узунлиги h бўлса, унда ҳосил бўладиган зўриқиш қандай?

Ечиш. Тортқи чўзилиб, балкани юқорига томон эгишга интилади. Шунинг учун балканинг A учининг пасайиши тортқининг чўзилишига тенг, яъни:

$$f_1 - f_2 = \Delta h;$$

f_1 — балкага қўйилган ёйиқ юк таъсиридан A нуқтанинг пасайиши; f_2 — тортқида ҳосил бўладиган зўриқиш таъсиридан A нуқтанинг юқорига кутарилиши; Δh — тортқининг абсолют чўзилиши. f_1 ва f_2 нинг қийматини олдий нул билан аниқлаб, тортқидаги зўриқиш X ни топамиз:

$$\frac{ql^4}{8EI} - \frac{Xl^3}{3EI} = \frac{Xh}{EF}.$$

бундан

$$X = \frac{3ql^4 F}{8(Fl^3 + 3hl)}.$$

119. Учлари билан икки таянчга тиралган пўлат балкага тенг ёйилган юк таъсир қилади. Балка пўлат тортқи билан ў тасидан юқорига тортиб қўйилган (326-шакл). Балканинг биқирлиги El , тортқиники EF ; таянч реакциялари билан тортқидаги зўриқиш аниқлансин.

Қўрсатма. Масаланинг жавобини олдинги масалада юргизилган мулоҳаза асосида оламиз:

$$A = B = \frac{3ql(Fl^3 + 128lh)}{16(Fl^3 + 48lh)}, \quad X = \frac{5ql^4 F}{8(Fl^3 + 48lh)}.$$

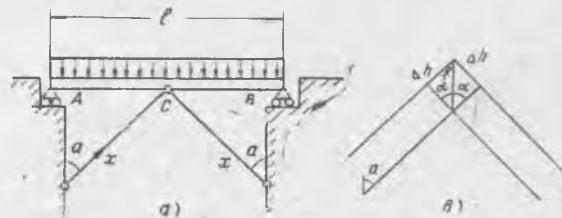
120. Қўприк балкаси киргоқларга эркин тиралган, ўнга тенг ёйилган юк таъсир қилади. Балканинг уртасига, 327-шаклдагидек, тиргаклар қўйилган. Балка учун l, l ва a , тиргаклар учун F, α берилган. Материал балка ва тиргаклар учун бир хилда. Тиргакларда ҳосил бўладиган зўриқиш аниқлансин.

Ечиш. Тиргаклардаги зўриқишни X десак, уларнинг тенг таъсир қилувчиси $2X \cos \alpha$ га тенг бўлади (327-шакл, а). Балканинг ўрта кесимидаги салқилиги f билан тиргакларнинг сиқилиши Δh орасидаги муносабатни 327-шакл, в дан аниқлаймиз:

$$\Delta h = f \cos \alpha; \quad (*)$$

f нинг қийматини оддий йўл билан ҳисоблаймиз:

$$f = \frac{5ql^4}{384EI} - \frac{2x\cos\alpha - l^3}{48EI}$$



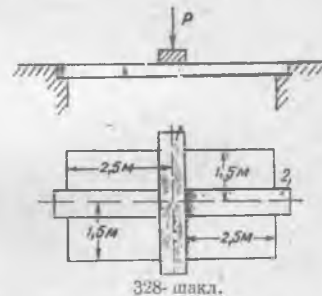
327-шакл.

Торқининг сиқилиши:

$$\Delta h = \frac{xl}{2EF\sin\alpha}$$

Буларни (*) га қўйсак:

$$X = \frac{5ql^3\sin 2\alpha}{16 \left(24 \frac{l}{F} + l^2\sin 2\alpha \cdot \cos\alpha \right)}$$



328-шакл.

келиб чиқади.

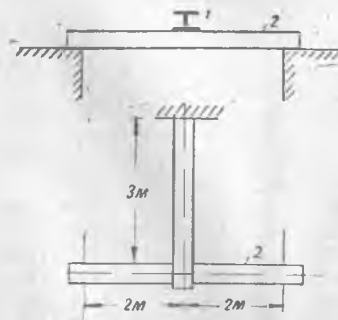
121. Тўғри тўрт бурчакли хонани ётувчи иккита ёғоч балка устма-уст крестга ўхшатиб қўйилган, бу балка ўртасига таъсир қилувчи $P = 2\text{ т}$ юкни кутариб туради (328-шакл). Балкаларнинг қўндаланг кесимлари: $h_1 = 20\text{ см}$; $b_1 = 12\text{ см}$; $h_2 = 30\text{ см}$; $b_2 = 12\text{ см}$. Балкаларнинг ўртасида ҳосил бўладиган эгувчи моментлар аниқлансин.

Жавоби. $M_1 = 867,5\text{ кгм}$. $M_2 = 1054\text{ кгм}$.

122. Юқоридаги масалада балкаларнинг учлари қисилиб тиралса, уларнинг ўртасида ҳосил бўладиган моментлар қиймати қандай ўзгаради?

Жавоби. $M_1 = 433,7\text{ кгм}$. $M_2 = 527\text{ кгм}$.

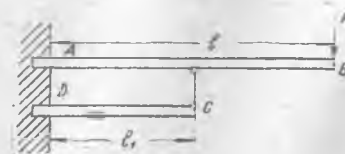
123. 10- номерли қўш таврли балка бир учи билан деворга қисилиб тиралган, бошқа учи икки таянчда ётувчи, қўндаланг кесими тўғри тўрт бурчакли ($h = 30\text{ см}$, $b = 24\text{ см}$) ёғоч балканинг ўртасига суяниган (329-шакл). Ҳар қайси балкага интенсивлиги $q = 100\text{ кг/м}$ бўлган тенг ёйилган юк қўйилган. Пулат балка учун $E_n = 2 \cdot 10^8\text{ кг/см}^2$, ёғоч балка учун $E_{ёғ} = 10^6\text{ кг/см}^2$. Балкаларда ҳосил бўладиган энг катта эгувчи моментлар ва нормал кучланишлар ҳисоблансин.



329-шакл.

Жавоби. $M_1 = 12320\text{ кгсм}$; $M_2 = 30980\text{ кгсм}$; $\sigma_1 = 341\text{ кг/см}^2$; $\sigma_2 = 8,6\text{ кг/см}^2$.

124. Қонсол (AB) нинг B учига P куч қўйилган бўлиб, у қалта қонсол (DC) га суяниб туради (330-шакл). Иккала қонсолнинг материали ва қўндаланг кесим ўлчамлари бир хил. Қонсолларнинг C нуқтадаги ўзаро босими аниқлансин.



330-шакл.

Ечиш. С нуқтада иккала консолнинг салқилиги бир хилла. С нуқтага тегишли салқиликларни иккала балка учун алоҳида аниқлаб, уларни тенглаштирамиз:

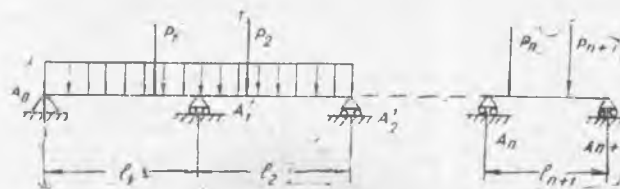
$$\frac{XI_1^3}{3EI} = \frac{P}{EI} \left(\frac{l_1^2}{2} - \frac{l_1^3}{6} \right) - \frac{XI_1^3}{3EI};$$

бундан.

$$X = \frac{3P}{4} \left(\frac{l}{l_1} - \frac{1}{3} \right).$$

99-§. Туташ балкалар ҳисоби

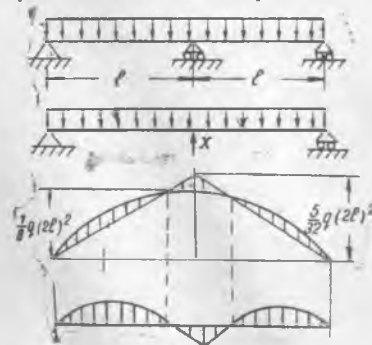
Иккитадан ортиқ таянчда ётиб, бир нечта ораликни қоплайдиган балкалар *туташ балкалар* деб аталади. Бундай балканинг фақат битта таянчидан қўзғалмас деб, қолган таянчларини қўзғалувчан деб фараз қиламиз (331-шакл), яъни битта қўзғалмас таянчдан бошқа барча таянчлар горизонтал



331-шакл.

йўналишда кўча олади. Бу тарзда тузилган таянчлар учун вертикал йўналишдаги юкларга тегишли реакциялар ҳам вертикал йўналишда бўлади. Шунинг учун номаълум реакциялар сони таянчлар сонига тенг бўлади. Бу ҳолда статика фақат иккита тенглама беради, улардан иккита номаълум реакцияни аниқлаш мумкин, холос. Қолган реакциялар «ортиқча» бўлиб, уларни аниқлаш учун юқорида келтирилган усуллардан фойдаланиш мумкин.

Масалан, энг оддий ҳоллардан учта таянчда ётувчи балкани текшира-миз. Ортиқча номаълум тарзида ўртадаги таянччи оламиз. Бу таянч балканинг шу таянчга суяниб турган кесимининг пасайишига йўл қўймайди. Агар бу таянччи ташлаб юборсак, икки таянчда ётувчи оддий балка ҳосил бў-



332-шакл.

лади. Бундай балка учун ҳар қандай кесимдаги салқиликни ҳисоблаш кийин эмас. Шунингдек, ораликдаги таянчга тегишли кесимдаги салқиликни ҳам аниқлаш осон. Балканинг мазкур ораликдаги таянчга тегишли кесимда таянч реакцияси таъсиридан ҳосил бўладиган салқилигини мазкур кесим учун қўйилган юк таъсиридан ҳосил бўлган салқилик билан солиштириб, ораликдаги таянч реакциясини аниқлаш тенгламасини ҳосил қиламиз.

Мисол учун, иккита бир хил ораликни қопловчи тенг ёйилган юк таъсиридаги балкани оламиз (332-шакл). Ораликдаги таянччи ташлаб юборсак,

тегишли кесимдаги салқилик қўйидагича ифодаланади:

$$f = \frac{5q(2l)^4}{384EI}. \quad (*)$$

В нуқтага таянчнинг таъсирини алмаштирувчи юқорига қараб йўналган реакция (X) ни қўйсак, бу нуқтадаги салқилик қўйидагича ифодаланади:

$$f_1 = \frac{X(2l)^3}{48EI}. \quad (**)$$

Энди, f билан f_1 ни тенглаштириб, X ни топамиз:

$$\frac{5}{384} \frac{q(2l)^4}{EI} = \frac{X(2l)^3}{48EI};$$

бундан:

$$X = \frac{5}{8}ql.$$

Қолган иккита реакция статика тенгламаларидан аниқланади.

Ораликдаги таянч иккита бўлса, худди юқоридагидек мулоҳаза асосида икки номаълумли тенгламалар системасини оламиз, улар:

$$\alpha_1 X + \beta_1 Y = f_1,$$

$$\alpha_2 X + \beta_2 Y = f_2$$

кўринишда бўлади. Бунда $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ — маълум коэффициентлар.

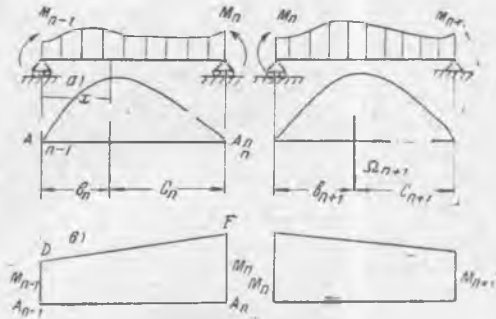
Биз текширган мисолда $\alpha_1 = \frac{(2l)^3}{48EI}$ бўлиб $\alpha_2 = 0, \beta_1 = \beta_2 = 0$ эди. f_1 ва f_2 эса ораликдаги таянч кесимларининг балкага қўйилган юклар таъсиридан ҳосил бўлган салқилигидир. Ораликдаги таянчлар бир нечта, масалан, n та бўлса, n та тенглама системасини тузишга тўғри келади. Бу хилдаги тенгламалар системасини ечиш принципиал жиҳатдан мумкин бўлса ҳам, амалий жиҳатдан жуда қийиндир. Шунинг учун туташ балкаларни ҳисоблашда бошқа усулларни излашга тўғри келади.

100-§. Уч момент теоремаси

Кўп таянчда ётувчи туташ (кесилмаган) балкаларнинг ҳисобини осонлаштириш мақсадида ортиқча номаълумлар учун ораликдаги таянч реакциялар ўрнига, таянч кесимларидаги эгувчи моментларни (таянч моментларини) олиш қулайдир.

Туташ балка бир нечта таянчда ётсин. $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ орқали кетма-кет таянчларни ва $l_1, l_2, \dots, l_n$ орқали ораликларнинг узунликларини белгилаймиз (331-шакл). Ҳар қайси ораликни таянч кесимлари бўйича кесилган деб фараз қилсак, икки таянчда ётадиган оддий балкалар ҳосил бўлади. Масалан, n -ораликни олсак, балканинг кесилмаган ҳолатда ишлаш шароитини сақлаш учун, кесилган таянч кесимлари A_{n-1} ва A_n бўйича ташлаб юборилган қисмларининг таъсирини алмаштирувчи зўриқишларни қўйишимиз лозим. Туташ балка вертикал юклар таъсирида бўлса, фикран кесиб ташланган қисмларнинг таъсирини тегишлича A_{n-1} ва A_n кесимлари марказига қўйилган битта вертикал куч билан бир жуфт кучга алмаштириш мумкинлиги статикадан маълум. Шунинг учун A_{n-1} ва A_n кесимлар бўйича кесим марказига қўйилган вертикал куч билан моментлари M_{n-1} ва M_n бўлган жуфтларни қўйиш лозим (333-шакл). Аммо вертикал кучлар бевосита таянчларга қўйилган бўлиб, ажратилган балканинг эгилишига ҳеч қандай таъсир кўрсатмайди. Шунинг учун биз ажратилган балкага бевосита

сита қўйилган юклар билан таянчлардаги номаълум моментлар (M_{n-1} ва M_n) гагина эътибор қиламиз. Бу моментларни топиш мумкин бўлса, ажратилган балканинг мустақамлигига оид масалани ечишнинг ҳеч қандай қийинлиги қолмайди. Балканинг ҳар қандай кесими учун эгувчи момент ва кесиб ўтувчи кучлар ифодасини жуда осонлик билан туза оламиз. Таянч реакцияларини ҳам аниқлаш қийин бўлмайди. $A_{n-1}C_nA_n$ эгри чи-



333- шакл.

зиқ билан чекланган юз n -ораликдаги юкнинг эгувчи моментини тасвирлайди, деб фараз қилайлик (333-шакл, а). Таянч моментлари (M_{n-1} ва M_n) нинг эпюралари $A_{n-1}DFA_n$ трапеция билан тасвирланган (333-шакл, в), n -ораликнинг чап таянчидан x масофада бўлган бирор кесимдаги эгувчи момент қуйидагича ифодаланади:

$$M_x = M_x^0 + M_{n-1} \frac{l_n - x}{l_n} + M_n \frac{x}{l_n}. \quad (100.1)$$

Бунда M_x^0 орқали текширилаётган ораликдаги юкнинг эгувчи momenti белгиланди. Учлари билан таянчларга эркин тиралган балкалар учун эгувчи моментлар қандай аниқланса, бу момент ҳам худди шундай аниқланади. Ҳалиги кесимдаги кесиб ўтувчи кучнинг қиймати қуйидагича бўлади:

$$Q_x = \frac{dM_x}{dx} = \frac{dM_x^0}{dx} + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n} = Q_x^0 + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n}. \quad (100.2)$$

Q_x^0 — текширилаётган ораликдаги юкнинг кесиб ўтувчи кучидир. Икки таянчга эркин тиралган балка учун кесиб ўтувчи куч қандай ҳисобланса, унинг миқдори ҳам худди шундай ҳисобланади.

Қуйидаги белгиларни киритамиз:

$$[Q_x^0]_{x=0} = A_n; \quad [Q_x^0]_{x=l_n} = B_n.$$

A_n ва B_n — икки таянчга тиралган n -ораликдаги оддий балкада ораликдаги юклардан ҳосил бўлган реакциялар. Булар кўзда тутилса, n -ораликнинг таянч кесимларидаги кесиб ўтувчи кучлар қуйидагича ёзилади:

$$[Q_x]_{x=0} = A_n + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n}; \quad [Q_x]_{x=l_n} = -B_n + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n}. \quad (100.3)$$

Чиқарилган бу формулаларни ҳар қандай оралик учун татбиқ қилиш мумкин. Бу формулалардан A_n таянч реакциясини ҳисоблаш учун фойдаланамиз. Бу таянч кесимнинг бевосита чап томонидаги кесиб ўтувчи куч:

$$[Q_x]_{x=l_{n-1}} = -B_n + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n}$$

бўлади.

Шунингдек, ҳалиги кесимнинг бевосита ўнг томонидаги кесиб ўтувчи куч:

$$[Q_x]_{x=l_n} = A_{n+1} + \frac{M_{n+1} - M_n}{l_{n+1}}$$

бўлади.

ε — чексиз кичик оралик. Таянч кесимига чексиз яқин бўлган кесимлардаги кесиб ўтувчи бу кучларнинг айирмаси таянч кесимидаги кесиб ўтувчи кучни, яъни таянч реакцияси (R) ни беради. (Албатта, таянчга бевосита қўйилган куч бўлмаса.) Бу реакциянинг қиймати:

$$R_n = A_{n+1} + B_n + \frac{M_{n+1} - M_n}{l_{n+1}} - \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n} \quad (100.4)$$

бўлади.

Агар A_n таянчга бевосита қўйилган юк бўлса, уни (100.4) формуладан ҳисобланган реакция қийматига қўшиш лозим.

Текширилаётган ораликка қўйилган юклар эпюрасининг юзини тегиш-лича Ω_n ва Ω_{n+1} билан, уларнинг оғирлик марказларининг чап ва ўнг таянчларга нисбатан вазиятини аниқловчи масофаларни b_n , c_n ва b_{n+1} , c_{n+1} билан белгилаймиз. У ҳолда n -ораликдаги икки таянчда ўтувчи бал-канинг ўнг таянчидаги кесимнинг бурилиши ($\theta_B^{(n)}$) қуйидагича ифодаланади:

$$\theta_B^{(n)} = \frac{1}{EI} \left[\frac{M_{n-1}l_n}{6} + \frac{M_n l_n}{3} + \frac{\Omega_n b_n}{l_n} \right]$$

Бунда

$$\left(\frac{M_{n-1}l_n}{6} + \frac{M_n l_n}{3} \right)$$

n -ораликнинг ўнг таянчида таянч моментларидан ҳосил бўлган фиктив ре-акцияси бўлиб, $\frac{\Omega_n b_n}{l_n}$ эса шу балканинг оралигига қўйилган юклардан ҳо-сил бўлган фиктив реакциядир. Худди шунингдек, $(n+1)$ -ораликдаги ик-ки таянчга тиралган балка чап кесимининг бурилиш бурчаги ($\theta_A^{(n+1)}$) ни қуйидагича ифодалаймиз:

$$\theta_A^{(n+1)} = \frac{1}{EI} \left[\frac{M_{n+1}l_{n+1}}{6} + \frac{M_n l_{n+1}}{3} + \frac{\Omega_{n+1} c_{n+1}}{l_{n+1}} \right]$$

A_n таянч устидан ўтказилган уринма (334-шакл) иккала участканинг умумий уринмаси бўлгани учун

$$\theta_B^{(n)} = -\theta_A^{(n+1)}$$

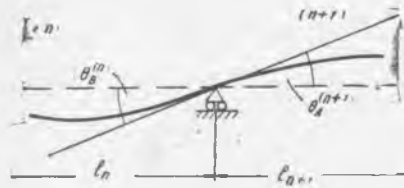
бўлиши керак, ёки:

$$\frac{M_n - l_n}{6} + \frac{M_n l_n}{3} + \frac{\Omega_n b_n}{l_n} = \frac{M_{n+1} l_{n+1}}{6} - \frac{M_n l_{n+1}}{3} - \frac{\Omega_{n+1} c_{n+1}}{l_{n+1}},$$

бундан:

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -6 \left(\frac{\Omega_n b_n}{l_n} + \frac{\Omega_{n+1} c_{n+1}}{l_{n+1}} \right) \quad (100.5)$$

Биз учта кетма-кет таянчдаги моментларни ўз ичига олган тенгламани ҳосил қилдик. Бу хилдаги тенгламаларни ҳар бир жуфт қўшни ораликлар учун тузишимиз мумкин. Натижада, туташ балканинг оралигида қанча таянч бўлса, шунча тенглама оламиз. Демак, шунча таянч моментларини аниқлаш имкониятига эга бўламиз. Балканинг учлари эркин тиралган бўлса, ундаги моментлар нолга тенг бўлади. Балка кесими қисилиб тиралган бўлса, бу кесимнинг бурилиш бурчаги нолга тенг бўлиб, бу шарт, масалан, чап таянч учун қуйидагича ифодаланади:

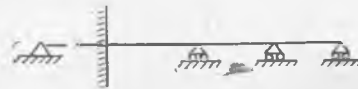


334-шакл.

$$\theta_n = \frac{1}{EI} \left(\frac{M_0 l}{3} + \frac{M_1 l}{6} + \frac{q_1 c_1}{1} \right) = 0$$

ёки

$$2M_0 l_1 + M_1 l_1 = -6 \frac{q_1 c_1}{l_1}$$



335-шакл.

Бу шартни бошқача мулоҳаза юргизиб чиқариш ҳам мумкин. Туташ балкани фикран давом эттириб, яна бир оралик қўшамиз ва унинг учини эркин тиралади, деб фараз қиламиз (335-шакл). У ҳолда, фикран қўшилган оралик билан қўшни ораликка уч момент тенгламасини татбиқ этиб, яна юқоридаги натижани чиқарамиз. Чиқарилган бу натижалар туташ балканинг барча ораликларида бикирлик (EI) бир хил бўлган ҳоллар учун тўғридир.

МАСАЛАЛАР

125. Учта бир хил ораликдан иборат туташ балкага тенг ёйилган юк қўйилган (336-шакл). Шу балка учун эғувчи момент ва кесиб ўтувчи кучлар эпюраси ясалсин.

Ечиш. Икки таянчга тиралган ва устига тенг ёйилган юк қўйилган балканинг эғувчи momenti эпюраси парабола бўлиб, унинг юзи қуйидагичадир:

$$\Omega_n = \frac{2}{3} \cdot \frac{q l_n}{8} = l_n \frac{q l_n^2}{12}$$

Оғирлик маркази эса балканинг ўртасига тўғри келади, шунинг учун

$$b_n = c_n = \frac{l_n}{2}$$

буларни (100.5) га қўйсак,

$$M_{n-1} l_n + 2M_n (l_n + l_{n+1}) + M_{n+1} l_{n+1} = -\frac{q l_n^3}{4} - \frac{q l_{n+1}^3}{4}$$

келиб чиқади. Буни текшираётган масалага татбиқ қилсак, чап ва ўнг таянчдаги моментларнинг нолга тенглигини ҳисобга олганимизда, биринчи жуфт қўшни ораликлар учун қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$4M_1 l + M_2 l = -\frac{q l^3}{2}$$

Ўртадаги оралик ваки четдаги ораликка нисбатан симметрик бўлгани учун: $M_1 = M_2$ бўлади.

Шунинг учун юқоридаги тенгламадан: $M_1 = -\frac{ql^2}{10}$ ни ҳосил қиламиз. Бу момент ва қўйилган юкларга тегишли эгувчи момент эпюраси 336- шакл, а да тасвирланган (336- шакл, б да бу эпюра координата ўқларининг йуналишига мослаштирилган).

1- таянч реакциясини ҳисоблаймиз:

$$R_0 = \frac{ql}{2} - \frac{ql^2}{10} \cdot \frac{1}{l} = \frac{4}{10} ql.$$

2- таянч реакциясини ҳисоблаймиз:

$$R_1 = ql + \frac{ql^2}{10} \cdot \frac{1}{l} = \frac{11}{10} ql.$$

Кесиб ўтувчи кучга тегишли эпюра 336- шакл, с да тасвирланган.

126. Битта консолли уч ораликли балка 337- шаклдагидек юкланган. Шу балканинг эгувчи моменти ва кесиб ўтувчи кучи эпюралари ясалсин ва таянч реакциялари аниқлансин.

Е ч и ш. Ораликдаги таянч иккита бўлиб, ортиқча номатўумлар сони ҳам иккита бўлгани сабабли уларни аниқлаш учун иккита тенглама тузамиз. Биринчи жуфт ораликлар учун:

$$M_0 l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 l_2 = -6 \left(\frac{\Omega_1 q_1}{l_1} + \frac{\Omega_2 c_2}{l_2} \right). \quad (*)$$

Иккинчи ва учинчи ораликлар учун:

$$M_1 l_1 + 2M_2(l_2 + l_3) + M_3 l_3 = -6 \left(\frac{\Omega_2 b_2}{l_2} + \frac{\Omega_3 c_3}{l_3} \right). \quad (**)$$

Биз текшираётган ҳолда:

$$M_0 = 0, M_3 = -P_3 l_4 = -3 \text{ тм};$$

337- шакл, а дан:

$$\Omega_1 = \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot \frac{1 \cdot 6^3}{8} = 18 \text{ тм}^2; b_1 = 3 \text{ м};$$

$$\Omega_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot 5 = 7,5 \text{ тм}^2; b_2 = \frac{7}{3} \text{ м}; c_2 = \frac{4+1}{3} = \frac{5}{3};$$

$$\Omega_3 = 8 \text{ тм}^2; c_3 = 2 \text{ м}$$

ларни оламиз. Булар кўзда тутилса, юқоридаги (*) ва (**) тенгламалар қуйидагича ёзилади

$$80M_1 + 16M_2 = -291,$$

$$16M_1 + 64M_2 = -153.$$

Бу тенгламаларни ечиб, M_1 ва M_2 ларнинг қийматини топамиз:

$$M_1 = -3,32 \text{ тм}; M_2 = -1,56 \text{ тм}.$$

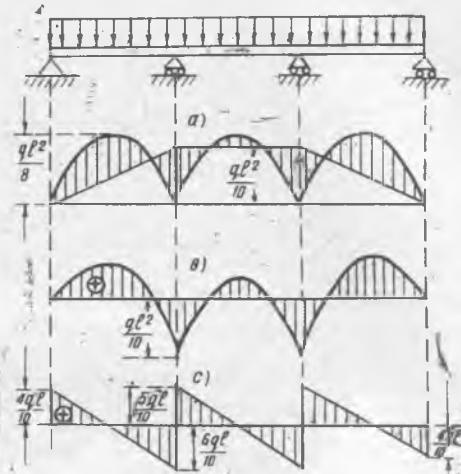
Эгувчи моментлар билан кесиб ўтувчи кучлар эпюрасини яшаш учун (100.1) ва (100.2) тенгламалардан фойдаланамиз.

1 оралик учун:

$$M_x^I = M_1^0 + M_0 \cdot \frac{l_1 - x}{l_1} + M_1 \cdot \frac{x}{l_1}$$

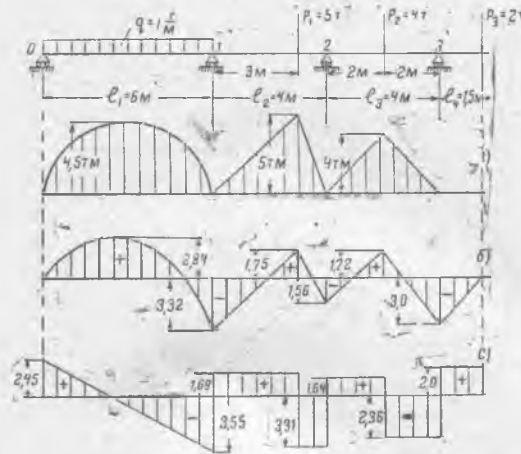
ёки

$$M_x^I = 3x - \frac{x^2}{2} - \frac{3,32}{6} x = 2,45x - 0,5x^2;$$



336- шакл.

$x = 0$ бўлганда, $M_x^I = 0$; $x = \frac{l_1}{2} = 3$ м бўлганда, $M_x^I = 2,84$ тм; $x = l_1 = 6$ м бўлганда, $M_x^I = -3,32$ тм; $Q_x^I = 3 - x - \frac{3,32}{6} = 2,45 - x$; $x = 0$ бўлганда, $Q_x^I = 2,45$ т; $x = l_1 = 6$ м бўлганда, $Q_x^I = -3,55$; $Q_x^I = 2,45 - x = 0$; $x = 2,45$ м бўлганда, $Q_x^I = 0$ бўлар экан.



337- шакл.

II оралик учун:

$$M_x^{II} = M_x^0 + M_1 \frac{l_2 - x}{l_2} + M_2 \frac{x}{l_2}.$$

Биринчи участка учун:

$$\begin{aligned} M_x^{II} &= 1,69x - 3,32; & x=0, & M_x^{II} = -3,32 \text{ тм}, \\ x=3 \text{ м}, & M_x^{II} &= 1,75 \text{ тм}, & Q_x^{II} &= 1,69 \text{ т}. \end{aligned}$$

Иккинчи участка учун:

$$\begin{aligned} M_x^{II} &= 11,68 - 3,31 x, \\ x=4 \text{ м}, & M_x^{II} &= -1,56 \text{ тм}, & Q_x^{II} &= -3,31 \text{ т}; \end{aligned}$$

III оралик учун:

$$M_x^{III} = M_x^0 = M_2 \frac{l_3 - x}{l_3} + M_3 \frac{x}{l_3}.$$

Биринчи участка учун:

$$\begin{aligned} M_x^{III} &= 1,64x - 1,56; & x=0, & M_x^{III} &= -1,56 \text{ тм}, \\ x = \frac{l_3}{2} = 2 \text{ м}, & M_x^{III} &= 1,72 \text{ тм}, & Q_x^{III} &= 1,64 \text{ т}. \end{aligned}$$

Кейинги иккита участка учун тегишли тенгламаларни тузишни ўқувчиларимизнинг ўзларига тавсия этамиз.

Бу тенгламалардан фойдаланиб тузилган эпюралар 337- шаклнинг (б) ва (с) қисмларида тасвирланган.

Таянч реакцияларини (100.4) формуладан аниқлаймиз:

$$R_1 = A_1 + \frac{M_1}{l_1} = \frac{ql_1}{2} + \frac{M_1}{l_1} = \frac{1 \cdot 6}{2} + \frac{3,32}{6} = 2,45 \text{ т.}$$

$$R_2 = A_2 + B_2 + \frac{M_2 - M_1}{l_2} - \frac{M_1}{l_1} = \frac{ql_1}{2} + \frac{P_1 b_1}{l_2} + \frac{M_2 - M_1}{l_2} - \frac{M_1}{l_1} = 5,24 \text{ т.}$$

$$R_3 = A_3 + B_2 + \frac{M_3 - M_2}{l_3} - \frac{M_2 - M_1}{l_2} = 4,95 \text{ т.}$$

$$R_4 = B_3 + P_3 - \frac{M_3 - M_2}{l_3} = 4,36 \text{ т.}$$

Аниқланган таянч реакцияларининг тўғрилигини кесиб ўтувчи кучлар эпюрасидан текшириб кўриш мумкин:

Дарҳақиқат, 1-таянчдаги кесиб ўтувчи куч:

$$Q_x^I = 2,45 \text{ т} = R_1;$$

Иккинчи таянчда:

$$Q_x^{II} - Q_x^I = 1,64 + 3,55 = 5,24 \text{ т} = R_2.$$

Учинчи таянчда:

$$Q_x^{III} - Q_x^{II} = 1,64 + 3,31 = 4,95 \text{ т} = R_3.$$

Тўртинчи таянчда эса:

$$Q_x^{IV} - Q_x^{III} = 2,0 = 2,36 = 4,36 \text{ т} - R_4$$

булади.

127. Уч ораликли туташ балканинг иккига консоли бўлиб, 338-шаклда кўрсатилган-дек юкланган. Эгувчи момент эпюрасини ясаб, таянч реакцияларини аниқланг.

Е ч и ш. Бу балканинг иккала томонида ҳам консол бўлгани учун, биринчи ва охириги таянчлардаги моментлар нолга тенг бўлмайди, улар 1-таянчда:

$$M_0 = -\frac{qa^2}{2} = -1,62 \text{ тм.}$$

4-таянчда:

$$M_3 = -3 \text{ тм}$$

булади.

Биринчи жуфт ораликлар учун уч момент тенгламасини ёзамиз:

$$M_0 l_1 + 2M_1 (l_1 + l_2) + M_2 l_2 = -6 \frac{ql^3}{24}.$$

Иккинчи жуфт ораликлар учун:

$$M_1 l_2 + 2M_2 (l_2 + l_3) + M_3 l_3 = -6 \frac{Pa}{2} (l - a).$$

Берилган рақамларни қўйсак, юқоридаги тенгламалар қуйидагича ёзилади:

$$18M_1 + 4M_2 = -23,15,$$

$$4M_1 + 20M_2 = -27.$$

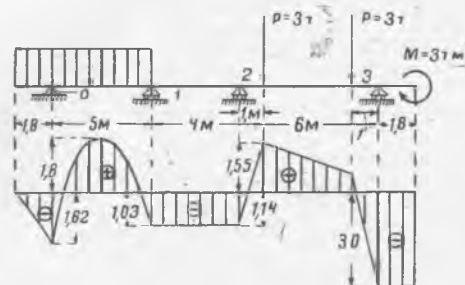
Бу тенгламаларни ечсак, $M_1 = -1,03 \text{ тм}$, $M_2 = -1,14 \text{ тм}$ келиб чиқади. Буларга тегишли эгувчи моментлар эпюраси 338-шаклда тасвирланган.

Таянч реакцияларини аниқлаймиз. R_0 ни аниқлаш учун иккинчи таянчнинг чап томонидаги куч ва жуфтларнинг 2-таянчга нисбатан моментлари йиғиндисини нолга тенглашти-рамиз:

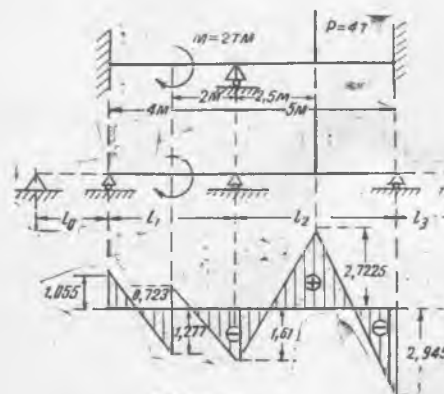
$$\Sigma M_B = 5R_0 - 1 \cdot 6,8 \cdot 3,4 + 1,03 = 0,$$

бундан:

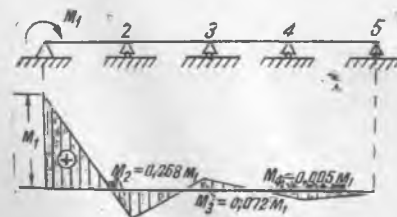
$$R_0 = 4,42 \text{ т.}$$



338- шакл.



339- шакл.



340- шакл.

Учинчи таянчнинг чап томонидаги куч ва жуфтларнинг моментларини нолга тенглаштирамиз:

$$\Sigma M_c = 4,42 \cdot 9 - 1 \cdot 6,8 \cdot 7,4 + 1,14 + 4R_1 = 0;$$

бундан:

$$R_1 = 2,35 \text{ т}$$

Учинчи таянчнинг ўнг томонидаги куч ва жуфтларнинг моментларини нолга тенглаштирамиз:

$$\Sigma M_c = 3 - 6R_3 - 1,14 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = 0;$$

бундан:

$$R_3 = 3,31 \text{ т.}$$

Барча кучларнинг ва реакцияларнинг йиғиндисини нолга тенглаштирамиз:

$$\Sigma P = 6,8 + 3 + 3 - 4,42 - 2,35 - 3,31 + R_2 = 0;$$

$$R_2 = 2,72 \text{ т.}$$

128. Иккала учи қисилиб тиралган туташ балка 339- шаклдагидек юкланган бўлиб, оралигига таянч қўйилган. Эгувчи момент ва кесиб ўтувчи кучлар эпюраси ясалсин.

Еч и ш. Бу масалада учта таянч momenti номаълум. Уларни аниқлаш учун учта тенглама тузиш лозим. Қисилиб тиралган таянчларнинг ўнг ва чап томонларига фиктив ораликлар қўшамиз (339- шакл, а). l_0 ва l_1 ораликлар учун уч момент тенгламасини ёзамиз:

$$M_0 l_0 + 2M_1(l_0 + l_1) + M_2 l_1 = 6 \frac{M l_1}{24}$$

Аммо, $M_0 = 0$ ва $l_0 = 0$ бўлгани учун, юқоридаги тенглама бундай кўринишда ёзилади:

$$4M_1 + 2M_2 = 1. \quad (1)$$

l_1 ва l_2 ораликлар учун:

$$\begin{aligned} M_1 l_1 + 2M_2(l_1 + l_2) + M_3 l_2 = \\ = -6 \left(\frac{M l_1}{24} + \frac{P l_2^2}{16} \right), \end{aligned}$$

ёки:

$$4M_1 + 18M_2 + 5M_3 = -39,5.$$

l_2 ва l_3 ораллиқлар учун:

$$M_2 l_2 + 2M_3 (l_2 + l_3) + M_4 l_3 = -6 \frac{Pl_2^2}{15} \quad (2)$$

$M_4 = 0$ ва $l_3 = 0$ бўлгани учун

$$5M_2 + 10M_3 = 37,5 \quad (3)$$

бўлади.

Бу учта тенглама системасини ечсак, қуйидагилар чиқади:

$$M_1 = 1,005 \text{ тм}; M_2 = -1,61 \text{ тм}; M_3 = -2,945 \text{ тм}.$$

Эгувчи момент ва кесиб ўтувчи кучлар эпюраларини яшаш учун (100.1) ва (100.2) дан фойдаланиб, уларнинг ифодаларини тузиш лозим. Эгувчи момент эпюраси 339-шакл, б да тасвирланган.

129. Бир неча бир хил ораллиқдан иборат туташ балканинг чап таянчига моменти M_1 га тенг жуфт куч қўйилган (340-шакл). Шу балка учун эгувчи моментлар эпюраси ясалсин.

Е ч и ш. Биринчи икки ораллиқ учун уч момент тенгламасини ёзамиз:

$$M_1 l + 2M_2 (l_1 + l) + M_3 l = 0;$$

бундан:

$$1 + 4 \frac{M_2}{M_1} + \frac{M_3}{M_1} = 0, \quad 1 + 4 \frac{M_2}{M_1} + \frac{M_3}{M_2} \cdot \frac{M_2}{M_1} = 0,$$

ёки

$$\frac{M_3}{M_1} = \frac{M_3}{M_2} = k \text{ десак, } 1 + 4k + k^2 = 0 \text{ тенгламасини ҳосил қилимиз, бундан:}$$

$$k = -2 \pm \sqrt{3}; k_1 = -0,27, k_2 = -3,73.$$

k_1 ни олсак таянч моментларининг қийматлари борган сари ошадиган, ҳолбуки, улар таянчдан-таянчга ўтганда камая бориши керак. Шунинг учун k_2 ни оламиз. Демак:

$$M_2 = -\frac{M_1}{3,73} = -0,268 M_1; \quad M_3 = -\frac{M_2}{3,73} = +0,072 M_1$$

бўлади ва ҳоказо.

Қўрамызки, таянч моментларининг қийматлари тобора камайиб боради (340-шакл).

XV боб

КОНСТРУКЦИЯ ЭЛЕМЕНТЛАРИНИНГ УСТИВОРЛИГИ

101-§. Устивор ва устивормас мувозанатлар

Бутун курсимиз давомида иншоот ва машиналарнинг ҳар хил қисмларини турлича юкланган ҳолларда ҳисоблаш билан танишдик ва уларнинг кўндаланг кесим ўлчамларини мустаҳкамлик шартларидан аниқладик. Аммо призматик стерженлар, эгри стерженлар, шунингдек, цилиндрлик ёки айланлиш сирти кўринишидаги идишлар (резервуарлар) фақат мустаҳкамлик шарти бузилгандагина ишдан чиқмай, балки уларга конструктор томонидан берилган муайян шакллар ўзгарганда ҳам ишдан чиқади. Бу ҳолда ҳалиги элементлардаги кучланиш ҳолатининг характери ҳам ўзгаради. Энг характерли ҳол сифатида геометрик ўқи бўйлаб қўйилган сиқувчи P куч таъсиридаги стерженни оламиз. Бундай юкланган стерженнинг мустаҳкамлик шартини

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq [\sigma]$$

кўринишда ёзган эдик. Бу шарт ёзилганда σ кучланишнинг қиймати то σ ёки σ_b га эришгунча ҳам стержень фақат ўқи бўйлаб сиқилишга ишлайди, деб фараз қилган эдик. Аммо ингичка стерженлар учун бундай

фараз қилиш тўғри натижалар бермайди, чунки ингичка стерженлар тўғри чизиқли ҳолатини сақлаб тура олмайди. улар тасодифий сабаблар оқибатида бирор томонга эгилади (341- шакл). Бунинг натижасида сиқувчи P куч эгувчи момент ҳосил қилади. Сиқувчи кучдан ҳосил бўладиган кучланишга эгилишдан ҳосил бўладиган кучланиш қўшилади. Бу кучланишларнинг биргаликда таъсир этиши натижасида стержень устивор мувозанатини йўқотади. Шунинг учун, сиқилишга ишловчи ингичка стерженларнинг ва юпқа деворли профилларнинг мустаҳкамликнинг текширишда, мувозанатнинг устивор бўлишига ҳам албатта эътибор бериш лозим.



341- шакл.

Конструкция элементларининг мувозанати устивор бўлса, яъни олдиндан белгиланган шакли ва ҳолати ўзгармаса, қўйилган кучлар таъсиридан ҳосил бўладиган деформация, конструкция элементларининг ишлаш характерини ўзгартирмайди.

Мувозанатнинг устивор бўлишини таъмин этиш учун ингичка стерженлар мувозанатининг бузилиш сабабларини ўрганиш лозим. Бир учи билан қисилиб тиралган ингичка стержень бошқа томондан ўқи бўйлаб йўналган аста-секин ўсадиган сиқувчи P куч таъсирида бўлсин (341- шакл). Сиқувчи куч ҳали етарли даражада кичик қийматда бўлганда, стержень ўзининг тўғри чизиқли шаклини сақлайди. P кучнинг бундай қийматларида стерженга қисқа муддат ичида қўндаланг куч билан таъсир қилинганда, яъни қўндаланг йўналишда туртки берилганда ҳам, у бирмунча вақт тебраниб, яна ўзининг олдинги тўғри чизиқ шаклидаги мувозанат ҳолатига қайтади. P кучнинг миқдори катталашган сари стерженнинг ҳалигидек туртки натижасида ҳосил бўладиган тебранишдан ўзининг олдинги мувозанат ҳолатига қайтиши қийинлаша боради. P кучнинг қийматини шу даражагача олиб бориш мумкинки, унинг бу қийматида ҳалигидек туртки натижасида стержень тўғри чизиқли мувозанат ҳолатига қайтмасдан, эгилганича қолади. P кучнинг бу қийматида стерженни олдинги тўғри чизиқли ҳолатига қайтариб бўлмайди.

Сиқувчи P кучнинг бу қиймати *критик қиймат* ёки *критик куч* дейилади ва P_k билан белгиланади. Сиқувчи куч критик қийматга эришганда, призматик стержень ўзининг олдинги тўғри чизиқли шаклини сақлай олмайди. Сиқувчи P куч ўзининг критик қиймати (P_k) га бирданига эришади. Сиқувчи кучни критик қийматидан бир оз озайтириш билан стерженни тўғри чизиқли шаклига қайтариб мувозанатни устивор қилиш мумкин. Шунингдек, бу куч бир оз кўпайтирилса, мувозанатнинг устиворлиги йўқолиб стержень яна янги эгилган шакли олади. Қўпинча, тўғри чизиқли сиқилган стерженлар устивор мувозанатининг бузилиши *бўйлама эгилиш* дейилади, чунки бу ҳолда стержень қўндаланг куч эмас, бўйлама куч таъсиридан эгилади. Критик куч (P_k) сиқилувчи стерженда критик кучланиш (σ_k) ни ҳосил қилади. Унинг қиймати

$$\sigma_k = \frac{P_k}{F} \quad (101.1)$$

бўлади. Бу кучланиш стержень учун хавфлидир.

Шунинг учун, P куч таъсирида сиқилувчи тўғри чизиқли стерженнинг устивор мувозанатини таъминлаш мақсадида, мустаҳкамлик шарти

$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} \leq [\sigma]$ ни қаноатлантириш билан бирга, мувозанатнинг устивор бўлиш шarti

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq [\sigma_y] \quad (101.2)$$

ни ҳам қаноатлантириши зарур. Бунда $[\sigma_y]$ — устиворлик учун рухсат этилган кучланиш; бу кучланиш:

$$[\sigma_y] = \frac{\sigma_k}{n_y}$$

бўлади; бунда n_y — устиворлик запас коэффициенти.

102-§. Критик кучни аниқлаш учун Эйлер формуласи

Критик кучланиш (σ_k) ни ҳисоблаш учун критик куч (P_k) ни аниқлаш лозим. Бу масалани биринчи бўлиб 1744 йилда Л. Эйлер ечган эди. Бу масала курсимиз давомида ечилган масалалардан ўзининг қўйилиш жиҳатидан тамоман фарқ қилади. Ҳозиргача призматик стерженларда қўйилган юклар таъсиридан ҳосил бўладиган деформацияларни аниқлаган бўлсак, энди сиқувчи P кучнинг қандай қийматида стерженнинг тўғри чизиқли ўқи маълум эгри чизиқ шаклини олиб, шу кўринишда мувозанатда бўлишини текшираемиз.

Учлари шарнир воситаси билан туташтирилган ва қўндаланг кесими бутун узунлиги бўйича ўзгармайдиган призматик стерженни олиб, унга ўқи бўйлаб йўналган сиқувчи P кучни қўямиз (342-шакл). Сиқувчи куч $P = P_k$ бўлганда, стержень бикирлиги минимал бўлган текисликда тўғри чизиқли ҳолатидан бир оз огдирилса, у эгилади ва бу ҳолатда мувозанатда бўлади. Стерженнинг деформацияси жуда кичик бўлганидан, қўйилган масалани ечиш учун эгилган ўқнинг тақрибий дифференциал тенгламасидан фойдаланишимиз мумкин. Координата ўқларининг йўналишини 342-шаклда тасвирланганидек танлаб, эгилган ўқ дифференциал тенгламасини қуйидагича ёзамиз:

$$EI_{\min} \frac{d^2 w}{dx^2} = M(x).$$

Координаталар бошидан x масофадаги кесимни оламиз. Эгилган ўқнинг ўша кесимдаги ординатаси w бўлсин, у ҳолда бу кесимдаги эгувчи момент:

$$M = -Pw$$

бўлади. Юқорида келтирилган дифференциал тенглама қуйидагича ёзилади:

$$EI_{\min} \frac{d^2 w}{dx^2} = -Pw. \quad (102.1)$$

Бу тенгламанинг иккала томонини $EI_{\min}$ га бўлиб, $\frac{P}{EI_{\min}} = k^2$ десак, тенглама қуйидагича ёзилади:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + k^2 w = 0. \quad (102.2)$$

Бу тенглама математик маятник ҳаракатининг дифференциал тенгламасига ўхшайди, шунинг учун унинг умумий интегрални қуйидагича ёзилади:



342-шакл.

$$w = A \sin kx + B \cos kx. \quad (102.3)$$

Бу ифода учта номаълумни, яъни A , B ва k ўзгармасларни ўз ичига олади.

Стержень учларининг бириктирилиш шarti қуйидаги икки тенгламани беради:

A нуқтада, $x = 0$ бўлганда, салқилик $w = 0$ бўлади;

B нуқтада, $x = l$ бўлганда, салқилик $w = 0$ бўлади.

Биринчи шартдан: $B = 0$; шунинг учун, эгилган ўқнинг тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$w = A \sin kx. \quad (102.4)$$

Иккинчи шартдан:

$$A \sin kl = 0 \quad (102.5)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенгламадан:

$$A = 0 \text{ ёки } \sin kl = 0$$

келиб чиқади.

A нолга тенг бўлиши мумкин эмас, чунки бу ҳолда стерженнинг ўқи туғри чизиқлигича қолади ва бу масала шартига зид бўлади. Шунинг учун $\sin kl = 0$ бўлади. Бу тенглама k учун қуйидаги чексиз кўп илдишларни беради:

$$kl = 0, \pi, 2\pi, \dots, n\pi; \quad (102.6)$$

n — ҳар қандай бутун сон; бундан: $k = \frac{n\pi}{l}$. Аммо

$$k^2 = \frac{P}{EI_{\min}} \text{ бўлгани учун } \frac{P}{EI_{\min}} = \frac{n^2\pi^2}{l^2}.$$

бундан:

$$P = \frac{EI_{\min} \pi^2}{l^2} \cdot n^2. \quad (102.7)$$

Бундан кўраимизки, стерженни эгилган ҳолатда мувозанатда тутиб турувчи куч назарий жиҳатдан бир неча қийматга эга бўлар экан. Аммо бўйлама эгилишини вужудга келтирувчи ўқ бўйлаб йўналган сиқувчи кучнинг минимал қийматини аниқлаш амалий жиҳатдан муҳим аҳамиятга эгадир. Шу туфайли сиқувчи P кучнинг $n = 1$ бўлгандаги қийматини олиш зарур. Эгилган ҳолдаги мувозанатни таъмин этувчи сиқувчи кучнинг энг кичик қиймати

$$P_k = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2} \quad (102.8)$$

бўлади. Бу формула Эйлер формуласи деб аталади. Эгилган ўқнинг бунга оид шакли қуйидагича ифодаланади:

$$w = A \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (102.9)$$

Бунда A нинг қиймати аниқсизлигича қолади. Унинг қийматини аниқлаш қийин эмас: $x = \frac{l}{2}$ бўлганда, $w_{\max} = A$ бўлади.

Демак, A — терженнинг ўртасидаги салқилиги экан. Бунинг қиймати ни аниқлаш учун эгилган ўқ дифференциал тенгламасини

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{M}{EI_{\min}}$$

кўринишда олиш керак. Аммо бу тенглamani интеграллаш мураккаб математик аппаратни талаб қилгани сабабли биз уни интегралламай қолдирамиз. Бундан ташқари, олдимизга қўйилган масалада эгилган ўқнинг тенгламасини аниқлаш талаб ҳам қилинмайди.

Критик P_k кучни аниқлагач унга тегишли критик кучланиш (σ_k) ни ҳам ҳисоблашимиз мумкин. σ_k нинг қийматини ҳисоблашдан олдин, стерженнинг қўндаланг кесими юзасининг инерция моментини инерция радиуси орқали ифодалаймиз: $I_{\min} = Fr_{\min}^2$; бу кўзда тутилса, σ_k қуйидагича ифодаланади:

$$\sigma_k = \frac{P_k}{F} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2 F} = \frac{\pi^2 E r_{\min}^2}{l^2} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l}{r_{\min}}\right)^2} \quad (102.10)$$

$\frac{l}{r_{\min}}$ нисбат стерженнинг эгилувчанлиги деб аталади. Берилган материал учун эластиклик модули (E) ўзгармас деб қаралса, (102.10) нинг сурати ўзгармас сон бўлади. У ҳолда критик кучланиш (σ_k) эгилувчанлик $\left(\frac{l}{r_{\min}}\right)$ нинг функцияси бўлади.

103-§. Учлари турлича маҳкамланган стерженлар учун критик куч ифодаси

Биз юқорида учлари шарнирлар воситаси билан маҳкамланган стержень учун критик куч ва кучланишни аниқладик. Бошқа кўринишларда маҳкамланган стерженлар учун критик куч ва кучланиш ифодасини кўриниш жиҳатидан худди (102.8) ва (102.10) га ўхшаш формулалар шаклида олишимиз мумкин. Агар стержень тўғри чизиqli мувозанат ҳолатидан чиқарилса, у бир нечта ярим тўлқинлардан иборат мувозанат ҳолатларга ўтади. Масалан, биз текширган ҳолда P нинг минимал қиймати учун $n = 1$ эди. Турлича маҳкамланган ҳолларда n нинг қийматини мувофиқлаб танлаш лозим. Бунинг учун (102.7) формуладан фойдаланамиз. У формулани қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$P_k = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{\left(\frac{l}{n}\right)^2} \quad (103.1)$$

$\frac{l}{n} = l'$ — ҳар ярим тўлқиннинг узунлиги; бу узунликини келтирилган узунлик деб, уни қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$l' = \frac{l}{n} = \mu l; \quad \text{бунда } \mu = \frac{1}{n}.$$

У ҳолда (103.1) қуйидагича ёзилади:

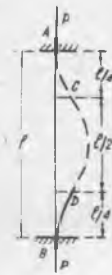
$$P_k = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(l')^2} \quad (103.2)$$

Бу формула (102.7) формуладан ҳеч нарса билан фарқ қилмайди, фақат стерженнинг ҳақиқий узунлиги (l) ўрнига келтирилган узунлик (l') қў-

йилган. (μ) коэффициенти стержень учларининг таянчларда маҳкамланиш турларини назарга олувчи узунлик коэффициенти деб аталади. Энди, турли усуллар билан маҳкамланган стерженлар учун μ нинг қийматларини аниқлаймиз. Масалан, бир учи билан қисилиб тиралган стерженни оламиз (343- шакл). Буни 342- шакл билан солиштирсак, ярим тўлқин $2l$ узунликка мос келади. Шунинг учун $l' = 2l$; $\mu = 2$



343- шакл.



344- шакл.

Иккала учи билан қисилган стерженни олсак (344- шакл), ярим тўлқин стерженнинг $\frac{l}{2}$ узунлигига тўғри келади; шунинг узун: $l' = \frac{l}{2}$; $\mu = \frac{1}{2}$.

Қуйидаги жадвалда турлича маҳкамланган стерженлар учун μ нинг қийматлари берилган.

Учлари турли усуллар билан маҳкамланган стерженлар
учун μ нинг қийматлари

Маҳкамланиш усуллари	μ
Стерженнинг иккала учи шарнир воситаси билан маҳкамланган.	1
Стерженнинг бир учи қисилиб тиралган.	2
Стерженнинг иккала учи қисилиб тиралган.	0,5
Стерженнинг бир учи шарнир билан ва бошқа учи қисилиб тиралган.	0,7

Бундан кўраимизки, узунлик коэффициенти (μ) ёрдами билан ҳар қандай турдаги таянчлар учун критик кучни аниқловчи формуланинг ифодасини асосий формула кўринишида ёзиш мумкин экан. Критик кучланиш муайян турдаги таянчлар учун қуйидагича ифодаланади:

$$\sigma_k = \frac{P_k}{F} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{F (l')^2} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l'}{r_{\min}}\right)^2} \quad (103.3)$$

Эгилувчанлик $\left(\frac{l'}{r_{\min}}\right)$ ни ҳисоблашда келтирилган узунлик $l' = \mu l$ ни таянч турларига мослаб олиш лозим.

104- §. Эйлер формуласининг татбиқ этилиш чегараси

Критик кучланиш (σ_k) ни аниқловчи (103.3) формуланинг сурати ўзгармас сондир, чунки E ҳар бир материал учун пропорционаллик чегарасигача ўзгармайди. Тўғри бурчакли координаталар системасини олиб, абсцисса ўқи бўйлаб эгилувчанлик $\left(\frac{l'}{r_{\min}}\right)$ ни, ордината ўқи бўйлаб критик кучланиш (σ_k)

ни қўйсак, (103.3) тенглама гипербола чизиғи билан тасвирланади (345-шакл). Бу чизиқ Эйлер гиперболаси дейилади.

Эгилувчанлик $\left(\frac{l'}{r_{\min}}\right)$ нинг ҳар бир қиймати учун σ_k нинг тегишли қиймати гиперболанинг ординатаси билан ўлчанади. Масалан, пўлат Ст. 3 учун $E = 2 \cdot 10^6$ кг/см², $\pi^2 \approx 10$ деб қабул қилинса, эгилувчанлик $\left(\frac{l'}{r_{\min}}\right)$ нинг қиймати 150,

100, 80 ва 50 бўлганда σ_k нинг қиймати тегишлича 870, 2000, 3300 кг/см² га тенг бўлади. Аммо пўлат Ст. 3 учун пропорционаллик чегараси $\sigma_n = 2000$ кг/см² бўлади, шунинг учун Эйлер формуласи (103.3) дан аниқланадиган σ_k нинг

қиймати, шу чегарадан ошмаслиги керак. Чунки у формула чиқарилганда Гук қонуни асос қилиб олинган эди, яъни стерженнинг эгилган ўқини аниқлаш учун Гук қонуни асосида чиқарилган дифференциал тенгламадан фойдаланилган эди. Шунинг учун Эйлер формуласидан факат пропорционаллик чегарасигача фойдаланишимиз мумкин, яъни $\sigma_k \leq \sigma_n$ шарт бузилмаслиги керак. Бу шартни (103.3) га қўйиб, Эйлер формуласидан фойдаланиш чегарасини аниқлаймиз:

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l'}{r_{\min}}\right)^2} \leq \sigma_n \quad (104.1)$$

бундан:

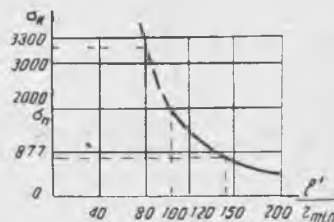
$$\frac{l'}{r_{\min}} \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_n}} \quad (104.2)$$

Эгилувчанлик $\frac{l'}{r_{\min}}$ бу чегарадан пастда бўлса, σ_k ни Эйлер формуласидан аниқлаб бўлмайди. Масалан, пўлат Ст. 3 учун Эйлер формуласининг татбиқ қилиниш чегараси $\frac{l'}{r_{\min}} \geq 100$ бўлса, Ст. пўлат Ст. 5 учун $\sigma_n = 3000$ кг/см² бўлганидан, $\frac{l'}{r_{\min}} \geq 85$ дир; чўян учун $\frac{l'}{r_{\min}} \geq 80$; қарағай ёғоч учун 110 ва ҳоказо.

σ_k тегишли пропорционаллик чегарасидан ошиб кетса

$$\frac{l'}{r_{\min}} = \left(\frac{\mu l}{r_{\min}}\right) < \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_n}}$$

бўлади. Бу ҳолда эластиклик модули (E) пропорционаллик чегарасидан юқорида бўлгани учун ўзгарувчи миқдор бўлади. Шу сабабли, критик кучланиш (σ_k) нинг қиймати Эйлер гиперболасининг тегишли ординаталарига қараганда бирмунча кичик бўлади. Бундай кучланиш стерженда пластик деформация ҳосил қилади. Пропорционаллик чегарасидан кейин критик кучланишнинг қиймати, асосан, эксперимент йўли билан аниқланади. Ҳозирги даврда пластиклик назариясининг айниқса Совет Иттифоқидаги гарақ-қиёти бу масалани назарий жиҳатдан ечишга имкон берса ҳам, биз бу китобда назарий текширишлар усули устида тўхтамасдан, эксперимент йўли билан чиқарилган натижаларгагина эътибор берамиз.



345- шакл.

Критик кучланишнинг қийматини пропорционаллик чегарасидан кейин битта формула билан ифодалаб бўлмайди. Масалан, калта стерженлар учун эгиловчанлик $\frac{l'}{r_{\min}}$ нинг қиймати 0 дан 30—40 гача ўзгаради; бундай стерженлардаги сиқувчи кучланиш, асосан, оқиш чегараси (σ_T) га ёки мустақамлик чегараси (σ_b) га эришиш натижасида, сиқилувчи стерженни ишдан чиқаради. Шунинг учун эгиловчанлиги 30 ÷ 40 орасида ўзгарадиган стерженларнинг устивор мувозанати ҳақида фикр юргизиш ортиқчадир.

Сиқилишдаги стерженлар икки хил шаронда ишлайди: калта стерженлар юк кўтариш қобилиятини сиқилиш натижасида ҳосил бўладиган кучланишнинг қиймати σ_T ёки σ_b га эришуви натижасида йўқоғса, ингичка, узун стерженлар тўғри чизиqli устивор мувозанат ҳолатидан оғиши натижасида юк кўтариш қобилиятини йўқотади. Демак, стерженнинг бўйлама ўлчами билан кўндаланг ўлчамлари нисбатининг ўзгариши унинг ишдан чиқиш характерини тамомила ўзгартирар экан. Эгиловчанлик 30 ÷ 40 дан юқори бўлган, яъни (104.1) шартни қаноатлантирмайдиган ҳолни олайлик. Масалан, пўлат Ст. 3 учун эгиловчанлик 40 ÷ 100 чегарада ўзгарадиган конструкция элементлари тажрибада жуда кўп учрайди. Бу чегарада ҳосил бўладиган критик кучланишнинг қиймати пропорционаллик чегарасига тегишли кучланишдан баланд бўлиб, оқиш чегарасидан пастдир. Бу чегарада критик кучланишнинг қийматини аниқлаш учун жуда кўп тажрибалар ўтказилган. Энг муҳим хулосалар чиқаришга эришганлардан бири профессор Ф. Ясинскийдир. Бу олим ўзи ўтказган тажрибалар асосида бир қанча материаллар учун эгиловчанлик $\left(\frac{l'}{r_{\min}}\right)$ нинг турли қийматларига тегишли σ_k нинг жадвалларини тузди. Мазкур жадваллар сиқилишдаги стерженларнинг устиворлигини текширувчи назариянинг асоси бўлиб қолди. Ўтказилган тажрибалар критик кучланишнинг қиймати пропорционаллик чегарасидан паст бўлган ҳолларда Эйлер формуласининг тўғрилигини тасдиқлайди. Эгиловчанлиги «ўртача» қийматга эга бўлган ҳоллар учун профессор Ф. Ясинский қуйидаги эмпирик формулани тавсия этди:

$$\sigma_k = a - b \left(\frac{l'}{r_{\min}} \right). \quad (104.3)$$

a ва b коэффициентлар сиқилувчи стерженнинг материалига ва эгиловчанлиги $\left(\frac{l'}{r_{\min}}\right)$ га боғлиқ коэффициентлардир. Турли материаллар учун a ва b нинг қийматлари қуйидаги жадвалда берилган.

Эмпирик формула коэффициентларининг жадвали

Материал	$\frac{l'}{r_{\min}}$	$a, \text{ кг/см}^2$	$b, \text{ кг/см}^2$
Қарағай ёғоч	< 110	293	1,94
Чўян	< 80	7760	12,0
Пўлат Ст. 3	< 105	3100	11,4
Пўлат Ст. 5	< 89	3350	6,2

Келтирилган бу маълумотлардан фойдаланиб, ҳар бир материал учун критик кучланишнинг тўла графигини ясашимиз мумкин. Масалан, пўлат Ст. 3 учун:

$$\sigma_T = 2400 \text{ кг/см}^2,$$

$$\sigma_n = 2000 \text{ кг/см}^2$$

бўлиб, тегишли график 346- шаклда тасвирланган. Қўрамизки, бу график

уч қисмдан иборат. $\frac{l'}{r_{\min}} > 100$

бўлганда, критик кучланиш гра-

фиги Эйлер гиперболасидан, $40 \leq$

$\frac{l'}{r_{\min}} \leq 100$ ораликда Ф. Ясинский-

нинг эмпирик тўғри чизигидан ва

$\frac{l'}{r_{\min}} < 40$ бўлганда, горизонтал

чизикдан иборат.

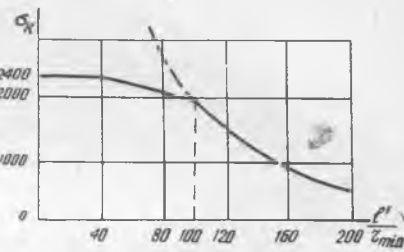
Шундай қилиб, ҳар қандай

эгиловчанликка эга бўлган сиқи-

лувчи стержень учун критик куч-

ланишни аниқлаш масаласи ҳал

бўлди.



346- шакл.

105- §. Сиқилган стерженларнинг устивор мувозанатини текшириш

Сиқилишга ишловчи стерженлар икки хил текширишдан: стержень мустаҳкамлигини

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq [\sigma] \quad (105.1)$$

формула ёрдами билан текшириш ва мувозанатининг устиворлигини

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq [\sigma_y] \quad (105.2)$$

формула ёрдами билан текширишдан ўтказилиши лозим; бунда $[\sigma_y]$ — муво-
занатнинг устивор бўлишини таъмин этувчи рухсат этилган кучланиш.
Унинг қиймати қуйидагичадир:

$$[\sigma_y] = \frac{\sigma_k}{n_y}; \quad (105.3)$$

критик кучланиш (σ_k) нинг қийматини қандай қилиб аниқлашни юқорида кўриб ўтдик.

$[\sigma_y]$ ни аниқлаш учун устиворлик запас коэффициенти n_y ни тайин-
лаш лозим. Эйлер формуласининг татбиқ этилиш чегарасида пўлат учун
 $n_y = 1,8$ килиб олинади. σ_k эмпирик формуладан аниқланса, $n_y = 3 \div 3,5$
қилиб олинади. Чўян учун $n_y = 2,8 \div 3,2$, ёғоч учун $n_y = 5 \div 5,5$ чегара-
сида олинади.

Мустаҳкамликни таъмин этиш учун рухсат этилган кучланиш қуйида-
гича аниқланган эди:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n} \text{ ёки } [\sigma] = \frac{\sigma_k}{n}; \quad (105.4)$$

$[\sigma_y]$ билан $[\sigma]$ орасидаги муносабатни аниқлаш учун уларнинг нисбатини оламиз:

$$\frac{[\sigma_y]}{[\sigma]} = \frac{\sigma_k n}{\sigma_t n_y}; \quad \text{ёки} \quad [\sigma_y] = \frac{\sigma_k}{\sigma_t} \cdot \frac{n}{n_y} [\sigma];$$

$[\sigma]$ олдидаги коэффициентни

$$\frac{\sigma_k}{\sigma_t} \cdot \frac{n}{n_y} = \varphi \quad (105.5)$$

орқали белгилаймиз. У ҳолда $[\sigma_y]$ учун қуйидаги ифодани оламиз:

$$[\sigma_y] = \varphi [\sigma]; \quad (105.6)$$

бунда φ — сиқилиш учун олинган рухсат этилган кучланишни камайтирувчи коэффициент. Бу коэффициент σ_k , σ_t , n ва n_y га боғлиқ. Аммо ҳар бир материал учун σ_t , n ва n_y ўзгармас сон бўлади. Шунинг учун φ ҳар бир материал учун σ_k нинг, демак эгилювчанлик $\left(\frac{r'}{r_{\min}}\right)$ нинг функциясидир. Эгилювчанлик $\left(\frac{r'}{r_{\min}}\right)$ нинг турли қийматлари учун φ нинг қийматлари ҳисобланиб, тегишли жадваллар тузилади. Иншоотларни лойиҳалашда ишлатиладиган техник справочникларда ҳар хил материаллар учун тузилган шундай жадваллар бор.

Бундай жадвалдан фойдаланиб, сиқилган элементнинг кўндаланг кесимини аниқлашимиз мумкин. Кўндаланг кесимнинг шаклини танлаб, унинг ўлчамларини тайинлаймиз. Буларга тегишли минимал инерция радиусини ҳисоблаб, эгилювчанликни аниқлаймиз. Бу эгилювчанликка тегишли φ нинг қийматини жадвалдан толамиз ва (105.6) формуладан $[\sigma_y]$ ни ҳисоблаймиз. Стерженьнинг кўндаланг кесимида ҳосил бўладиган $\sigma = \frac{P}{F}$ кучланишни устиворликни таъмин этувчи рухсат этилган кучланиш $[\sigma_y]$ билан солиштириш лозим. Агар устиворлик шarti:

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq [\sigma_y]$$

қаноатлантирилмаса ёки жуда катта запас билан қаноатлантирилса, кўндаланг кесим ўлчамларини ўзгартириб, ҳисобни такрорлаш лозим. Устиворлик шarti билан бирга, албатта мустаҳкамлик шartини қаноатлантириш зарур. Мустаҳкамлик шartини қаноатлантиришда энг заиф кўндаланг кесимни, масалан, парчин михлар воситаси билан бириктирилган элементлар учун кўндаланг кесимнинг нетто юзини олиш, яъни:

$$\sigma = \frac{P}{F_{\text{netto}}} \leq [\sigma]$$

шartни қаноатлантириш лозим. Айтилган бу фикрларни конкрет масалалар билан ойдинлаштирамиз.

МАСАЛАЛАР

130. Учлари шарнирлар воситаси билан туташтирилган пўлат стержень учун Эйлер бўйича критик куч билан рухсат этилган сиқувчи P куч аниқлансин (347-шакл). Стержень ўлчамлари: $60 \times 60 \times 8$ мм бўлган пайвандланган тўртта бурчакликдан иборат.

$$E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2;$$

$$[\sigma_c] = 1400 \text{ кг/см}^2; \quad \sigma_n = 2200 \text{ кг/см}^2.$$

Е.ч.и.ш. Эйлер формуласидан P_k ни аниқлаш учун $I_{\min}$ ни ҳисоблаймиз. Бунинг учун кўндаланг кесимнинг марказий бош инерция ўқлари ҳолатини аниқлаймиз. Кўндаланг кесим

симда симметрия ўқлари бўлгани учун улар бош марказий инерция ўқлари ҳам бўлади. Уларни X ва Y десак, $I_x = I_y$ бўлади. Ейма пўлатларнинг сортамент жадвалидан бурчакликнинг қирғоғидан ўтувчи ўқига нисбатан инерция моментини топамиз, у $58,2 \text{ см}^4$ га тенг. Бутун кўндаланг кесимнинг инерция моменти:

$$I_x = 4 \cdot 58,2 = 232,8 \text{ см}^4$$

бўлади. Эйлер формуласига мувофиқ:

$$P_k = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2} = \frac{9,85 \cdot 2,1 \cdot 10^8 \cdot 232,8}{(340)^2} = 41700 \text{ кг.}$$

Ҳалиги сортамент жадвалидан кўндаланг кесим юзини аниқлаймиз:

$$F = 4 \cdot 9,03 = 36,12 \text{ см}^2.$$

Критик кучланиш:

$$\sigma_k = \frac{P_k}{F} = \frac{41700}{36,12} = 1150 < 2200 \text{ кг/см}^2$$

бўлади.

Критик кучланиш пропорционаллик чегарасидан пастда бўлгани учун, бу ҳолда Эйлер формуласидан фойдаланиш лозим.

Энди, рухсат этилган сиқувчи P куччи аниқлаймиз. Бунинг учун эгилувчанликни ҳисоблаш керак. Биз текшираётган ҳолда ҳар бир марказий ўқ бош ўқ бўлиб, унга нисбатан $I = 232,8 \text{ см}^4$ ва $F = 36,12 \text{ см}^2$ бўлганидан кесимнинг инерция радиуси:

$$r_{\min} = \sqrt{\frac{I}{F}} = \sqrt{\frac{2328}{36,12}} = 2,54 \text{ см,}$$

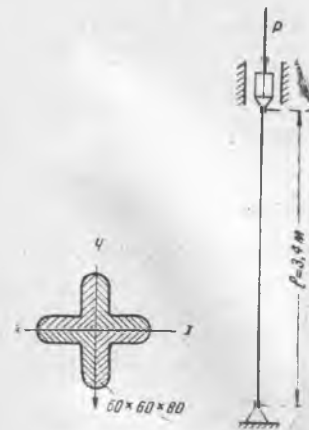
эгилувчанлик эса:

$$\frac{l'}{r_{\min}} = \frac{340}{2,54} = 134$$

бўлади. φ коэффициентни аниқловчи жадвалдан $\frac{l'}{r_{\min}} = 130$ учун $\varphi = 0,40$ ва $\frac{l'}{r_{\min}} = 140$

учун $\varphi = 0,36$ қийматларни оламиз. Интерполяция ёрдами билан эгилувчанлик $\frac{l'}{r_{\min}} = 134$ учун φ нинг қийматини аниқлаймиз:

$$\varphi = 0,40 - \frac{0,40 - 0,36}{10} \cdot 4 = 0,40 - 0,016 = 0,384.$$



347- шакл.



348- шакл.

Устиворлик учун рухсат этилган кучланиш бундай бўлади:

$$[\sigma_y] = \varphi [\sigma_c] = 0,384 \cdot 1400 = 537 \text{ кг/см}^2.$$

Устивор мувозанатни таъмин этувчи рухсат этилган сиқувчи куч:

$$P = [\sigma_y] F = 537 \cdot 36,12 = 19400 \text{ кг}$$

бўлади. Бу ҳол учун устиворлик коэффициенти:

$$n_y = \frac{P_k}{P} = \frac{41700}{19400} = 2,15$$

бўлади.

131. Призматик стержень бутун узунлиги бўйича эритиб уланган иккита тенг ёқли бурчакликдан иборат бўлиб, $P = 24 \text{ т}$ сиқувчи куч таъсиридадир (348- шакл). Сиқилиш учун рухсат этилган кучланиш $[\sigma_c] = 1400 \text{ кг/см}^2$; кўндаланг kesim улчамлари топилсин. Ёчиш. Сиқилувчи стерженнинг кўндаланг kesимида ҳосил бўладиган кучланиш (σ) қуйидаги устивор мувозанат шартини қаноатлантириши лозим:

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq [\sigma_y].$$

Бу тенгламада иккита номаълум бор, улар: F ва $[\sigma_y]$.

Шунинг учун, булардан биттасини ихтиёрий равишда танлаб олиш керак. Олинган бу миқдор орқали қолган номаълум аниқланади. Булар устиворлик ва мустаҳкамлик шартларини қаноатлантирса, масала ечилган бўлади; акс ҳолда ҳалиги ихтиёрий танланган миқдорни тегишлича ўзгартириб ҳисобни яна бошидан бошлаш лозим. Бу тарзда ҳисобни икки-уч марта такрорлаб, ниҳоят, қаноатланирли натижани топиб олиш мумкин.

Олда, ихтиёрий танланган миқдор учун камайтирувчи коэффициент (φ) нинг қиймати олинади. $\varphi < 1$ бўлганидан, уни дастлабки ҳисоб учун $\varphi = 0,6$ деб оламиз. У ҳолда:

$$[\sigma_y] = \varphi [\sigma_c] = 0,6 \cdot 1400 = 840 \text{ кг/см}^2.$$

Бунга тегишли юз:

$$F = \frac{P}{[\sigma_y]} = \frac{24000}{840} \approx 30 \text{ см}^2$$

бўлади.

Бунга мослаб, сортамент жадвалидан иккита $75 \times 75 \times 10 \text{ мм}$ ўлчамли бурчакликини оламиз. Бу бурчакликларнинг юзи: $2 \cdot 14,1 = 28,2 \text{ см}^2$. Танланган юзнинг тўғрилигини текширишни kesimнинг минимал инерция моментини аниқлашдан бошлаймиз. Бунинг учун олдин марказий бош инерция ўқларининг ҳолатини аниқлаймиз. y ўқи kesimнинг симметрия ўқи бўлгани учун у бош ўқлардан биттаси бўлиб, kesimнинг маркази ҳам шу ўқ устида ётади. Унинг ҳолати ҳар қайси бурчаклиkning марказини туташтирувчи чизиқ (C_1C_2) билан y ўқининг кесишган нуқтасида бўлади. y ўқига тик йўналиб, kesim марказидан ўтувчи x ўқи иккинчи бош ўқ бўлади. Энди, бу x ва y ўқларга нисбатан инерция моментлари (I_x ва I_y) ни ҳисоблаб, улардан кичигини олиш лозим. Сортамент жадвалидан:

$$I_x = 2 \cdot 72,2 = 144,4 \text{ см}^4; I_y = 2 \cdot 142 = 284 \text{ см}^4.$$

Демак:

$$I_{\min} = 144,4 \text{ см}^4; F = 2 \cdot 14,1 = 28,2 \text{ см}^2.$$

Минимал инерция радиуси:

$$r_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{F}} = \sqrt{\frac{144,4}{28,2}} = 2,26 \text{ см}.$$

Биз текшираётган схема учун, 103- параграфдаги жадвалга мувофиқ, келтирилган узунлик:

$$l' = \mu l = 0,7 \cdot 280 = 196 \text{ см}.$$

Эгилувчанлик:

$$\frac{l'}{r_{\min}} = \frac{196}{2,26} = 86,7.$$

Бунга тегишли камайтирувчи коэффициент (φ) нинг қиймати:

$$\varphi = 0,75 - \frac{0,75 - 0,69}{10} \cdot 86,7 = 0,71.$$

Тегишли рухсат этилган кучланиш:

$$[\sigma_y] = \varphi [\sigma_c] = 0,71 \cdot 1400 = 965 \text{ кг/см}^2.$$

Стержень кесимида ҳосил бўладиган кучланиш:

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{24000}{28,2} = 850 \text{ кг/см}^2.$$

Етишмайдиган кучланиш миқдори:

$$\frac{965 - 850}{965} \cdot 100\% = 12,1\%.$$

Етишмайдиган кучланишнинг бунчалик катта бўлиши масаланинг бошқа қулайроқ ечилишини излашни талаб қилади.

Иккинчи вариантда иккита $65 \times 65 \times 10$ мм ли бурчакликни олампз. Бизга олдинги вариантдан I_x инерция моменти минимум эканлиги маълум:

$$I_x = I_{\min} = 2 \cdot 45,8 = 91,6 \text{ см}^4,$$

$$F = 2 \cdot 12,1 = 24,2 \text{ см}^2.$$

$$r_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{F}} = \sqrt{\frac{91,6}{24,2}} = 1,94 \text{ см.}$$

$$\frac{l'}{r_{\min}} = \frac{196}{1,94} \approx 100.$$

Бунга тегишли камайтирувчи коэффициент:

$$\varphi = 0,6; [\sigma_y] = 0,6 \cdot 1400 = 840 \text{ кг/см}^2$$

Стержень кесимида ҳосил бўладиган кучланиш:

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{24000}{24,2} = 990 \text{ кг/см}^2.$$

Ортиқча кучланиш:

$$\frac{990 - 840}{840} \cdot 100\% = 17,9\%.$$

Бу кадар ортиқча кучланишга йул қўйиб бўлмайди. Шунинг учун учинчи варианты олишга туғри келади. Бу вариант учун $75 \times 75 \times 8$ мм ли иккита бурчакликни олампз. Бунинг юзи иккинчи вариантдаги $65 \times 65 \times 10$ мм бурчаклик юзидан кичик бўлса ҳам, аммо минимал инерция моментининг қиймати ошиқдир, яъни:

$$I_x = I_{\min} = 2 \cdot 60,1 = 120,2 \text{ см}^4; F = 2 \cdot 11,5 = 23 \text{ см}^2,$$

$$r_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{F}} = \sqrt{\frac{120,2}{23}} = 2,29,$$

$$\frac{l'}{r_{\min}} = \frac{196}{2,29} = 85,5.$$

Бунга тегишли камайтирувчи коэффициент:

$$\varphi = 0,75 - \frac{0,75 - 0,69}{10} \cdot 5,5 = 0,75 - 0,033 = 0,717.$$

Рухсат этилган кучланиш:

$$[\sigma_y] = \varphi [\sigma_c] = 0,717 \cdot 1400 = 1000 \text{ кг/см}^2.$$

Стержень кесимида ҳосил бўладиган кучланиш:

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{24000}{23} = 1042 \text{ кг/см}^2.$$

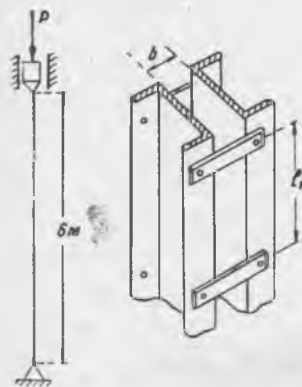
Ортиқча кучланиш:

$$\frac{1042 - 1000}{1000} \cdot 100\% = 4,2\% < 5\%.$$

Ортиқча кучланиш 5% дан кам, бу эса унча катта эмас. Демак, бу вариант ҳамма талабни тула қондиради.

132. Баландлиги $h = 6$ м бўлган устуннинг қўндаланг кесими иккита швеллердан иборат бўлиб, учлари шарнирлар воситаси билан туташтирилган. Устунга қўйилган юк $P = 14$ т бўлиб, устиворлик коэффициенти $n = 4$ бўлса, унинг улчамлари қандай?

Еч иш. $I_x = I_y$ бўлганда, швеллерлардан рационал фойдаланган бўламиз (349-шакл). Кесимнинг улчамларига тегишли масала $I_{\min}$ ни аниқлаш билан ечилади. $I_{\min}$ нинг қийматини Эйлер формуласидан аниқлаймиз:



349-шакл.

$$I_{\min} = \frac{P_k l^2}{\pi^2 E} = \frac{14000 \cdot 4 \cdot 360\,000}{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^6} \approx 1000 \text{ см}^4.$$

Битта швеллер учун:

$$I_x = \frac{I_{\min}}{2} = 500 \text{ см}^4.$$

Сортамент жадвалидан бунга мос бўлган 14^а номерли швеллерни оламиз, унинг учун $I = 564 \text{ см}^4$; иккита швеллер учун: $I_x = 1128 \text{ см}^4$. Бу профил учун Эйлер формуласини татбиқ қилиш мумкинчилигини текшираемиз:

$$r = \sqrt{\frac{I_{\min}}{F}} = \sqrt{\frac{1128}{2 \cdot 18,5}} = 5,52 \text{ см.}$$

Эгилувчанлик:

$$\frac{l'}{r_{\min}} = \frac{600}{5,52} = 109 > 100.$$

Демак, Эйлер формуласини татбиқ қилиш мумкин.

Швеллерлар оралиғи (b) ни аниқлаймиз. $I_x = I_y$ шартидан:

$$I_y = 2 \left[58,2 + 18,5 \left(\frac{b}{2} + 1,71 \right)^2 \right] = I_x = 1128 \text{ см}^4.$$

Бу тенгламадан:

$$b = 7 \text{ см.}$$

Устун бўйича бу ораликни таъминлаш учун швеллерлар полосалар билан боғланади (349-шакл). Белбоғ полосаларнинг оралиғи (l_1) шундай мулоҳазадан аниқланади. Полосалар оралиғидаги ҳар бир швеллер учлари шарнир билан туташтирилган ҳолда $\frac{P}{2}$ юк таъсирида мустақил ишлайди, деб Эйлер формуласидан фойдаланамиз:

$$\frac{P}{2} = \frac{\pi^2 E I}{n l_1^2},$$

бундан:

$$l_1 = \sqrt{\frac{\pi^2 E I}{n \frac{P}{2}}} = \sqrt{\frac{10 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 58,2}{4 \cdot 7000}} = 204 \text{ см.}$$

133. Қўш таврли устунга сиқувчи $P = 50$ т юк қўйилган. Устуннинг баландлиги $h = 2,5$ м бўлиб, учлари шарнирлар воситаси билан боғланган. Мустаҳкамлик коэффициенти $n = 3,5$ ва $\sigma_T = 3100 \text{ кг/см}^2$ бўлса, қўндаланг кесимнинг улчамлари қандай бўлади? Еч иш. Эйлер формуласидан $I_{\min}$ ни аниқлаймиз:

$$I_{\min} = \frac{P n l^2}{\pi^2 E} \approx 546 \text{ см}^4.$$

Сортамент жадвалидан бунга 36^а номерли қўш таврли балка тўғри келади. Унинг учун $I = 552 \text{ см}^4$, тегишли инерция радиуси $= 2,69 \text{ см}$, эгилувчанлик:

$$\frac{l'}{r_{\min}} = \frac{250}{2,69} = 93 < 100.$$

Шунинг учун Эйлер формуласини татбиқ қилиб бўлмайди. Ҳисобни Ф. Ясинский формуласи асосида бажарамиз. Олдин оддий сиқилиш учун рухсат этилган кучланишни аниқлаймиз:

$$[\sigma_c] = \frac{\sigma_T}{n} = \frac{3100}{3,5} = 885 \text{ кг/см}^2.$$

Дастлабки ҳисоб учун $\varphi = 0,6$ қабул қилиб, $[\sigma_y]$ ни ҳисоблаймиз:

$$[\sigma_y] = \varphi [\sigma_c] = 0,6 \cdot 885 = 530 \text{ кг/см}^2.$$

$$F = \frac{P}{[\sigma_y]} = \frac{50000}{530} = 90 \text{ см}^2.$$

Қўш таврли балкалар жадвалида бунга яқини бўлган 36^с номерли балка учун:

$$F = 90,9 \text{ см}^2;$$

$$r_{min} = 2,6.$$

Буларга тегишли эгилувчанлик:

$$\frac{l'}{r_{min}} = \frac{250}{2,6} = 95.$$

Бунга тегишли камайтирувчи коэффициент (φ) ни жадвалдан интерполяция ёрдами билан аниқлаймиз:

$$\varphi = 0,645.$$

Демак:

$$[\sigma_y] = \varphi [\sigma_c] = 0,645 \cdot 885 \approx 570 \text{ кг/см}^2.$$

Бунга оид юз:

$$F = \frac{P}{[\sigma_y]} = \frac{50000}{570} \approx 88 \text{ см}^2.$$

Бу юз дастлаб танланган юздан жуда оз, яъни:

$$\frac{90 - 88}{90} \cdot 100\% = 2\%$$

фарқ қилади. Шунинг учун 36^с номерли қўш таврли балка жуда ҳам мосдир.

□

XVI боб

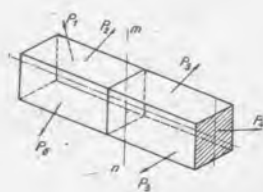
МУРАККАБ ҚАРШИЛИК

Курсимизнинг илгари ўтган бобларида конструкция элементларида бир турдаги оддий деформацияларни ҳосил қилувчи кучлар таъсиринигина текширдик. Масалан, стерженнинг ўқи бўйлаб қўйилган кучлар таъсирида стерженда ҳосил бўладиган чўзилиш ёки сиқилиш, шунингдек, стерженнинг кўндаланг кесими текисликларида ётган жуфт кучлар таъсирида ҳосил бўладиган буралиш, стерженнинг геометрик ўқи ва кўндаланг кесимининг бош инерция ўқларидан биттаси орқали ўтувчи текисликда ётган жуфт кучлар ёки мазкур текисликда ётиб, стержень ўқига тик йўналган кўндаланг кучлар таъсирида ҳосил бўладиган эгилиш оддий деформациялардандир. Аммо амалда шундай ҳоллар ҳам учрайдики, иншоот элементларига ёки машина қисмларига юқорида келтирилган оддий деформацияларнинг бир нечтаси бир йўла таъсир қилади. Масалан, машина валлари буралиш билан

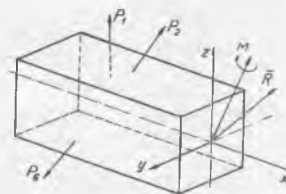
бирга эгилиши ҳам мумкин. Қўприк ва кран фермаларининг қистириб тиралган стерженлари чўзилишга қаршилик кўрсатиш билан бирга, эгилишга ҳам қаршилик кўрсатади. Қўйилган юклар таъсирида стерженларда оддий деформацияларнинг комбинациялари ҳосил бўладиган барча ҳоллар *мураккаб қаршилик* деб аталади.

Мураккаб қаршилик тушунчасига оид мулоҳазалар

Призматик брус унга ихтиёрий равишда қўйилган фазовий кучлар таъсирида мувозанатда бўлсин (350-шакл). Бруснинг бирор кўндаланг кесими ни олиб, брусни шу кесим орқали ўтказилган *mn* текислик билан фикран икки қисмга ажратамиз ва унинг ўнг қисmini ташлаб, чап қисмининг му-



350-шакл



351-шакл

возанатини текшираимиз. Текширилаётган қисмга ташланган қисмнинг таъсирини алмаштирувчи кучларнинг тенг таъсир этувчилари қўйилган деб фарз қилсак, бу тенг таъсир этувчилар, энг умумий ҳолда, бир бош вектор билан бир бош моментдан иборат бўлади. Бу бизга назарий механиканинг статика қисмидан маълумдир. Бош векторни R ва бош моментни M ҳарфлари билан белгилаймиз (351-шакл). Бу зўриқишларнинг брусга кўрсатадиган таъсирини ва улардан ҳосил бўладиган деформация турларини аниқлаш учун олдин уларнинг махсус танланган координата ўқларидаги проекцияларини ҳисоблаймиз. Координата ўқларининг марказини кесим марказида турадиган қилиб олиб, y ва z ўқларини кесимнинг бош инерция ўқлари бўйлаб, x ўқини эса бруснинг геометрик ўқи бўйлаб йўналтираимиз. Бош вектор билан бош моментнинг мазкур ўқлардаги проекцияларини тегишлича:

$$N_x, Q_y, Q_z \text{ ва } M_x, M_y, M_z$$

ҳарфлари билан белгилаймиз. Буларнинг ҳар қайсиси, бруснинг фикран ташлаб юборилган қисмига қўйилган барча куч ва жуфтларнинг тегишли ўқларга нисбатан олинган проекциялари ва моментларининг йиғиндисига тенгдир. Масалан, N_x ташлаб юборилган қисмга қўйилган барча кучларнинг x ўқидаги проекцияларининг йиғиндисига, M_y эса ташлаб юборилган қисмга қўйилган барча кучларнинг y ўқида нисбатан олинган моментларининг йиғиндисига тенг.

Энди, бу олти компонентдан ҳар қайсисининг брусга кўрсатадиган таъсирини алоҳида текшираимиз. N_x кесим *mn* га қўйилган чўзувчи (ёки сиқувчи) куч бўлиб, Q_y ва Q_z эса шу кесимнинг бош инерция ўқлари бўйлаб йўналган кўндаланг учлардир. M_x бруснинг геометрик ўқида нисбатан олинган момент бўлгани учун, y буровчи моментдир. M_y ва M_z эса кесимнинг бош инерция ўқларига нисбатан олинган вертикал ва горизонтал

текисликлардаги эгувчи моментлардир. Бир текисликка мос келган эгувчи момент билан қўндаланг кучнинг таъсири қўшиб текширилса, (M_y, Q_z) ва (M_z, Q_y) нинг ҳар бири оддий эгилишларни ҳосил қилади, лекин энг умумий ҳолда брус бирданига чўзилиш, буралиш ва икки бош текисликда қўндаланг эгилиш деформацияларига дуч келиши мумкин. Аммо бундай умумий ҳол кам учрайди. Амалда кўпроқ учратиладиган энг муҳим хусусий ҳоллар қуйидагилардир:

1. Мураккаб эгилиш ёки қийшиқ эгилиш (икки бош текисликда бирданига ҳосил бўладиган эгилиш).

2. Мураккаб ёки оддий эгилишнинг чўзилиш ёки сиқилиш билан бирга таъсири.

3. Мураккаб ёки оддий эгилишнинг буралиш билан бирга таъсири.

Мураккаб қаршиликка онд масалаларни ечишда қуйидаги икки тип конструкциянинг фарқига бориш зарур.

1. Конструкция элементларида ҳосил бўладиган деформациялар жуда кичик бўлгани сабабли, уларга қўйилган ташқи кучлар абсолют қаттиқ жисмга таъсир кўрсатганидек ўз йўналишини ва таъсир этиш характерини ўзгартирмайди. Бундай типдаги конструкциялар *бикр конструкциялар* деб аталади.

2. Конструкция элементлари эгиловчан бўлиб, деформацияларининг миқдори шу қадарки, уларнинг куч компонентларини миқдорига ва йўналишига кўрсатадиган таъсирини ҳисобга олмай бўлмайди.

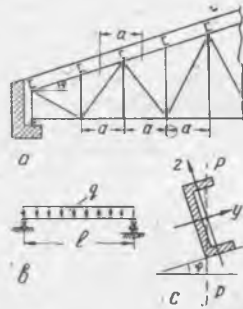
Биринчи тип конструкциялар амалда жуда кўп учрайди. Масалан, иншоот элементлари ва машина қисмлари асосан шу типдаги конструкциялар қаторига киради. Иккинчи тип конструкциялар амалда бирмунча кам учраса ҳам, улар қурилиш техникасида махсус ўрин эгаллайди. Масалан, самолёт ва дирижабль конструкцияларининг элементлари, шунингдек, ўлчаш асбобларидаги элементларнинг деформациялари маълум даражада катта бўлади.

Биринчи тип конструкция элементларини ҳисоблашда кучларнинг бири-бирига боғлиқсиз таъсир кўрсатиши принциpidан фойдаланиш мумкин, яъни конструкция элементига куч компонентларининг бир нечтаси бирданига таъсир кўрсатганда уларнинг умумий таъсирини ҳар қайси алоҳида кўрсатадиган таъсирларнинг йиғиндисига тенг деб қараш мумкин. Биз бу усулни назарий механикада кучлар таъсирини қўшиш усули деган эдик. Бироқ иккинчи тип конструкция элементлари эгиловчан бўлгани сабабли, уларга кучлар таъсирини қўшиш принципини татбиқ этиб бўлмайди. Бу бобда бикр элементлардан иборат конструкциялар ҳисобига онд маълумотларгина берилади.

106- §. Мураккаб эгилиш [қийшиқ эгилиш]

Қўндалангига эгилган балкаларда ҳосил бўладиган нормал кучланишларни ҳисоблашда ҳозиргача $\sigma = \frac{M}{I_y} \cdot z$ формуладан фойдаланиб келдик. Аммо бу формуладан балкага қўйилган кучлар унинг бирор бош инерция текислигида ётгандагина фойдаланиш тўғридир. Бу ҳолда балканинг эгилган ўқи куч ётган текисликда, нейтрал ўқ эса кесимнинг иккинчи инерция ўқи бўйлаб куч текислигига тик йўналган бўлади. Тажрибада кўпинча шундай ҳоллар ҳам учрайдики, бунда балкага қўйилган кучлар унинг ўқига тик бўлган ҳолда, бош инерция ўқларидан ўтмайдиган текисликларда ётади. Шунинг учун балканинг бундай ҳоллардаги эгилиш *қийшиқ*

эгилиш деб аталади. Томларни ёпишда ишлатиладиган обрешёткаларга шундай кучлар таъсир қиладики, бу кучлар ётган текисликлар обрешёткалар кўндаланг кесимларининг бош инерция ўқлари орқали ўтувчи текисликлар билан хийлагина бурчак ҳосил қилади (352-шакл). Масалан, куч ётган $P-P$ текислик балка кесимининг бош инерция ўқи oz билан φ бурчак ҳосил қилади дейлик (353-шакл). Балканинг бирор кесимидаги эгувчи момент ва кўндаланг кучлар вектори $\vec{M}$ ва $\vec{Q}$ бўлсин. Момент векторининг



352-шакл.



353-шакл.

куч ётган текисликка тик йўналиши назарий механика курсидан маълум. Шунинг учун, мусбат момент вектори $\vec{M}$ куч ётган $P-P$ текисликка тик қилиб олинди. Умуман бу вектор текширилаётган кесимнинг ўрнини аниқловчи x нинг функцияси.

Момент вектори $\vec{M}$ ни кесимнинг бош инерция ўқлари y ва z бўйлаб иккита ташкил этувчига ажратиб, уларни M_y ва M_z ҳарфлари билан белгиласак:

$$M_y = M \cos \varphi; \quad M_z = M \sin \varphi \quad (106. 1)$$

бўлади. Кесим текислигининг биринчи чорагида координатлари y ва z бўлган бирор C нуқтани олиб, ундаги кучланишни аниқлаймиз. Бу нуқтадаги нормал кучланишни текис эгилиш учун чиқарилган формуладан фойдаланиб ҳисоблаймиз. Бунинг учун OXY ва OXZ текисликлардаги M_y ва M_z эгувчи моментлардан ҳар қайсисининг таъсирини алоҳида-алоҳида текшира-миз. C нуқтада эгувчи момент M_y таъсирида сиқувчи кучланиш ҳосил бўлади, уни қуйидаги формула билан ифодалаш мумкин:

$$-\frac{M_y}{I_y} z = -\frac{M \cdot z}{I_y} \cos \varphi,$$

бу ерда I_y — кўндаланг кесимнинг y ўқига нисбатан инерция моменти, чунки балка M_y таъсирида эгилганда шу ўқ кўндаланг кесимнинг нейтрал ўқи бўлади. C нуқтада M_z момент чўзувчи кучланиш ҳосил қилади, бу кучланиш қуйидаги формула билан ифодаланади:

$$\frac{M_z}{I_z} \cdot y = \frac{M \cdot y}{I_z} \sin \varphi,$$

бу ерда I_z — кўндаланг кесимнинг z ўқига нисбатан инерция моменти. C нуқтадаги тула кучланиш юқорида ҳисобланган кучланишларнинг алгебраик йиғиндисига тенгдир, яъни

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z = M \left(\frac{y \sin \varphi}{I_z} - \frac{z \cos \varphi}{I_y} \right). \quad (106. 2)$$

C нуқтани ихтиёрий равишда танлаб олдик, шунинг учун бу формула ёрдамида ҳар қандай кўндаланг кесимнинг турли нуқталаридаги кучланишларни ҳисоблай оламиз. Масалан, C нуқтани кесим юзасининг иккинчи чорагида олсак, нуқта координаталаридан z манфий ишорали, (106. 2) формуланинг иккала қўшилувчиси мусбат бўлади. Ҳақиқатан ҳам бу чоракдаги барча нуқталарда M_y ва M_z моментлар таъсирида қўзувчи кучланишлар ҳосил бўлади.

Энг катта кучланишни аниқлаш учун олдин балканинг энг хавfli кесимини аниқлаб, шундан кейин бу кесимда энг катта кучланиш ҳосил бўладиган нуқтани топиш керак. Балканинг хавfli кесими ҳамма вақт эгувчи момент энг катта бўлган нуқтага тўғри келади. Бу ҳол (106. 2) формуладан яққол кўриниб турибди.

Текис эгилишда нормал кучланишга тегишли деформация кесимнинг нейтрал ўқ атрофида айланиши билан ифодаланар эди. Кесимдаги энг катта кучланган нуқтанинг нейтрал ўқдан энг узоқ масофада туриши бизга аввалдан маълум.

Биз текшираётган ҳол, яъни қийшиқ эгилишда балканинг кўндаланг кесими кесим марказида кесишувчи иккита ўзаро тик бўлган нейтрал ўқ атрофида бирданига айланаётир.

Кинематикадан маълумки, иккита кесишувчи ўқ атрофидаги айланиш ҳаракатини мазкур ўқлар кесишган нуқтадан ўтувчи бир ўқ атрофида айлантириш билан алмаштириш мумкин. Демак, қийшиқ эгилишда ҳам ҳар бир кўндаланг кесим учун шундай бир чизиқ топиш мумкин эканки, балканинг деформацияси текширилаётган кўндаланг кесими ўша чизиқ атрофида айланади. Ана шу чизиқ балканинг қийшиқ эгилиш ҳолатида текширилаётган кўндаланг кесими *учун нейтрал ўқ бўлади*. Биз шу ўқни нуль чизиқ деб оламиз ва уни $n-n$ билан белгилаймиз (354-шакл). Нейтрал ўқдан энг узоқ нуқталарда энг катта нормал кучланишлар ҳосил бўлади. Шунинг учун қийшиқ эгилишда кўндаланг кесимнинг энг кучланган нуқтасини топиш унинг нейтрал ўқини топишдан ва бу ўққа нисбатан кесимнинг энг *узоқ нуқтасининг ҳолатини аниқлашдан иборатдир*. Нейтрал ўқнинг тенгламасини қуйидаги шартдан топамиз. Нейтрал ўқ устида нормал кучланиш йулга тенг бўлади. Нейтрал ўқ устидаги нуқталарнинг координаталарини y_0 , z_0 билан белгилаб, уларни (106. 2) га қўйсак, σ нинг қиймати нулга тенг бўлади: $\sigma=0$ ёки:

$$M \left(\frac{y_0 \sin \varphi}{I_z} - \frac{z_0 \cos \varphi}{I_y} \right) = 0; \quad M \neq 0.$$

шунинг учун бу тенглама қуйидагича ёзилади:

$$\frac{y_0 \sin \varphi}{I_z} - \frac{z_0 \cos \varphi}{I_y} = 0 \quad (106. 3)$$

Бу, кўндаланг кесимнинг марказидан ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасидир: тенгламани $y_0=0$, $z_0=0$ қаноатлантираётир. Бу тенглама нейтрал ўқнинг тенгламасидир.

Ноль чизиқнинг y ўқига нисбатан оғиш бурчаги α ни қуйидаги тенгламадан аниқлаймиз (354-шакл).

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{z_0}{y_0} = \frac{I_y}{I_z} \operatorname{tg} \varphi. \quad (106.4)$$

$I_y = I_z$ бўлса, эгилиш текислиги куч ётган текислик устида ётади яъни $\alpha = \varphi$ бўлади. Бу ҳолда куч балканинг геометрик ўқидан ўтувчи ҳар қандай текисликда бўлса ҳам, эгилиш шу текисликка тўғри келади. Аммо умумий ҳолда кесимнинг иккала бош инерция ўқига нисбатан инерция моментлари ҳар хил бўлгани сабабли, эгилиш текислиги нейтрал текисликка тик бўлиб, куч текислигига қиядир (354-шакл).

Нейтрал ўқ ҳолати аниқлангандан кейин, кесим бўйича нормал кучланишнинг эпюрасини чизиш қийин эмас. 354-шаклда қийшиқ эгилишдаги балка учун кўндаланг кесимнинг иккала бош инерция ўқи орқали ўтувчи текисликлардаги эгилишларга онд нормал кучланишлар эпюраси ҳамда кўндаланг кесимнинг умумий нейтрал ўқ атрофида айланиши натижасида ҳосил бўлган кучланишларнинг умумий эпюраси тасвирланган.

Кесимнинг инерция эллипсидан фойдаланиб, нейтрал ўқни график усулда аниқлаш қоидасини чиқарамиз. Масалан, r_y ва r_z кўндаланг кесимнинг бош инерция радиуслари бўлсин. У ҳоҳда:

$$I_y = Fr_y^2, \quad I_z = Fr_z^2$$

формулалар назарга олинса, юқоридаги (106.4) тенглама бундай кўринишда ёзилади:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r_y^2}{r_z^2} \operatorname{tg} \varphi. \quad (106.4')$$

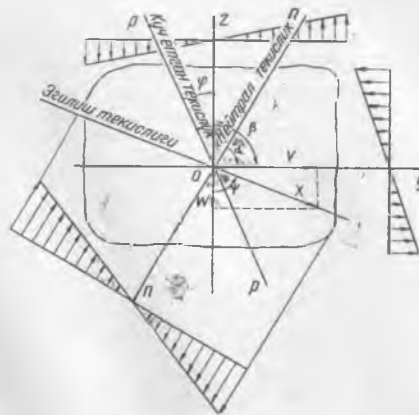
Куч текислиги $P-P$ нинг ҳолатини oy ўқига нисбатан β бурчак билан белгилаймиз (354-шакл). У ҳолда $\beta = \varphi + 90$, $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{\operatorname{tg} \beta}$ бўлади. Бу муносабатни (106.4) га қўйсак, нейтрал ўқ ҳолатини аниқловчи бурчак тангенсини учун қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= -\frac{r_y^2}{r_z^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}; \\ \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta &= -\frac{r_y^2}{r_z^2}. \end{aligned} \quad (106.5)$$

Эллипснинг қўшма диаметрлари қуйидаги муносабат билан ифодаланиши аналитик геометриядан маълум:

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Бу ерда a ва b эллипснинг ярим ўқларидир. Бу муносабатни юқоридаги (106.5) муносабат билан солиштириб, қуйидаги хулосани чиқарамиз: қийшиқ эгилишдаги нейтрал ўқ ва куч ётган текислик-



354-шакл.

нинг кўндаланг кесим текислиги билан кесишган чизиғи кўндаланг кесим инерция эллипсининг қўшма диаметрларини ҳосил қилар экан. Инерция эллипси ярим ўқларининг r_y ва r_z га тенглиги бизга маълум (152-бет). Бу хулосадан фойдаланиб, қий-шиқ эгилишдаги нейтрал чизиқ ҳолатини график усулда аниқлашимиз мумкин. Бунинг учун кўндаланг кесимнинг инерция эллипсини чизиб, куч текислигининг кўндаланг кесим билан кесишган чизиғи $P-P$ га параллел ватар ўтказамиз. Бу ватарнинг ўртасидаги бирор D нуқта билан кесим маркази орқали ўтказилган чизиқ ҳалиги куч текислиги чизиғи билан инерция эллипсининг қўшма диаметрларини ҳосил қилади (355-шакл). Шу билан бирга, юқоридаги хулосага мувофиқ, бу чизиқ кесимнинг

нейтрал чизиғи бўлади. Нейтрал ўқнинг ҳолати аниқлангандан кейин кесимнинг энг катта кучланишли нуқтасини аниқлаш қийин эмас; кўндаланг кесимнинг симметрия ўқлари аниқ бўлса, энг катта кучланишли нуқталар ҳолатини аниқлаш масаласи яна ҳам осонлашади. Масалан кўндаланг кесим тўғри тўрт бурчақдан иборат бўлсин (356-шакл). Нейтрал чизиқ $n-n$ нинг қандай ҳолатда бўлишидан қатъи назар, энг катта кучланишлар тўғри тўртбурчакнинг бурчакларидаги нуқталарга тўғри келади. Куч текислиги $p-p$ да ётувчи юклардан ҳосил бўлган ағувчи момент M 357-шаклда кўрсатилгандек мусбат бўлсин. У ҳолда бу моментнинг бош инерция ўқларидаги проекциялари M_y ва M_z ҳам мусбат бўлади. M_y момент тўғри тўртбурчакнинг пастки томони DB даги толаларида энг катта чўзувчи кучланиш ва юқори томони AC даги толаларида эса энг катта сиқувчи кучланиш ҳосил қилади. Биз уларни (+) ва (—) ишоралари билан белгиладик. Бу кучланишларнинг

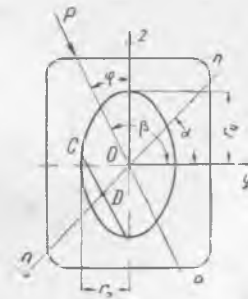
максимал қиймати $\pm \frac{M_y}{W_y}$ га тенг бўлади;

шунингдек, M_z ҳам кесимнинг ўнг томонидаги энг четки толаларида максимал чўзувчи кучланиш ва чап томонидаги энг четки толаларида максимал сиқувчи кучланиш ҳосил қи-

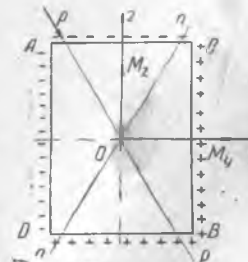
лади; уларнинг қиймати $\pm \frac{M_z}{W_z}$ га тенг. Ик-

кала моментнинг бирданига таъсир қилишидан ҳосил бўлган кучланиш A ва B нуқталарда қўшилиб, D ва C нуқталарда айрилади. Бинобарин, кесимда энг кучланган нуқталар A ва B экан. Бу энг кучланган нуқталардаги кучланишларнинг абсолют қиймати:

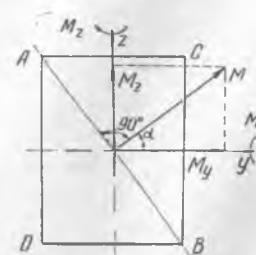
$$\sigma_{\max} = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} \quad (106. 6)$$



355-шакл.

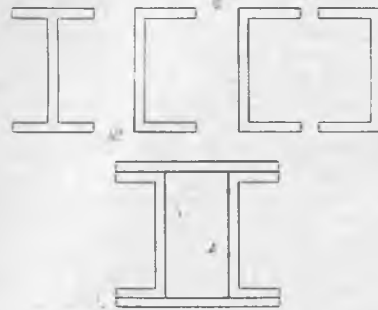


356-шакл.



357-шакл.

бўлади. Бу формуладан тўртта бурчаги тўғри тўртбурчакнинг бурчаклари-га тўғри келадиган ва унга ички равишда чизилган контурли кесимлар-учун ҳам фойдаланилса бўлади (масалан, қўш тавр, швеллер ва шунга ўхшаган кесимлар учун, 358-шакл). Бошқа ҳолларда энг катта кучланишлар-ни ҳисоблаш учун (106. 2) формуладан фойдаланишга тўғри келади. Бу ҳолда аввал кесим нейтрал ўқининг ҳолати ва ундан энг узоқда бўлган нуқталарнинг координаталари аниқланади.



358-шакл.

Қийшиқ эгилишда кўндаланг юклар таъсирида M_y ва M_z эгувчи моментлардан ташқари, тангенциал кучланишларни ҳосил қилувчи кўндаланг кучлар Q_y ва Q_z ҳам пайдо бўлади. Булардан ҳосил бўладиган тангенциал кучланишлар текис кўндаланг эгилиш учун чиқарилган формуладан аниқланади:

$$\tau = \frac{QS_y}{I_y b}.$$

Қийшиқ эгилишда кўндаланг кесимни танлаш текис эгилишдагига қараганда бирмунча мураккабдир. Ҳақиқатан ҳам хавфли кесим учун M_y ва M_z ни аниқлаб, (106. 2) га мувофиқ қуйидаги мустаҳкамлик тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$\frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z \leq [\sigma]. \quad (106. 7)$$

Бу тенгламада тўртта номаълум I_y , I_z , y ва z лар бор. Бунда y , z кесимда ги энг катта кучланишли нуқтанинг координаталаридир. Масалани ечиш учун кўндаланг кесим инерция моментларининг рационал нисбати $\frac{I_y}{I_z}$ нинг қийматини олдиндан белгилаб олишга тўғри келади. Аммо тўғри тўрт бурчакли ва тўғри тўртбурчакка ички чизилган контурларнинг кўндаланг кесимини танлашда (106. 6) формуладан фойдаланиш мумкин. Фақат $\frac{W_y}{W_z}$ нисбат олдиндан танланса, бир номаълумли тенглама ҳосил бўлади. Шунинг ҳам эслатиб ўтиш керакки, тўғри тўртбурчакли кесим учун $\frac{W_y}{W_z}$ нисбат тўғри тўртбурчак томонларининг нисбатига тенг бўлади:

$$\frac{W_y}{W_z} = \frac{bh^3}{6} : \frac{hb^3}{6} = \frac{h}{b}$$

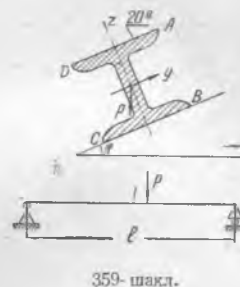
бу нисбатни олдиндан танлаш лозим. Ёйма кесимлар учун бу нисбат анчагина ўзгаради ва у профилларнинг номерига боғлиқ бўлади. Масалан, қўш таврли кесим учун $y \div 11,7$ оралигида ўзгариб туради, баъзан ундан ҳам кўп бўлади. Умуман, қурилиш тажрибасида бу нисбат ёйма кесимларнинг профилига қараб, махсус белгилаб олинади.

107- §. Балкаларнинг қийшиқ эгилишдаги деформациялари

Нейтрал ўқнинг ҳолатини аниқловчи (106. 4) формуладан кўриниб турибдики, қийшиқ эгилишда нейтрал ўқнинг ҳолати фақат кучлар текислигининг йўналишига боғлиқдир. Шу туфайли нейтрал чизик барча кесимлар билан ўзаро параллел бўлади. Аммо кўндаланг кесим юзаси қийшиқ эгилишда ҳам текис қолгани учун эгилиш, текис эгилишдагидек нейтрал қатламга тик текисликда ҳосил бўлади. Бу текислик *эгилиш текислиги* деб аталади. Эгилиш текислиги 354-шаклда кўрсатилганидек кучлар текислиги ρ — ρ га қия йўналган бўлади. Эгилиш текислигидаги салқилик векторини $\bar{H}$ билан ифодалаб, уни иккита бош инерция текисликлари OXY ва OXZ бўйича ташкил этувчиларга ажратамиз, бу ташкил этувчиларни тегишлича v ва w билан белгилаймиз. v ва w ни аналитик ёки графоаналитик усуллар билан аниқлаш мумкин.

Аналитик усулда қуйидаги дифференциал тенгламаларни интеграллашга тўғри келади:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 v}{dx^2} &= \frac{M_z}{EI_z} \\ \frac{d^2 w}{dx^2} &= \frac{M_y}{EI_y} \end{aligned} \right\} \quad (107.1)$$



359-шакл.

Графоаналитик усулда v ва w қуйидаги формулалардан аниқланади:

$$v = \frac{(M_z)_{\text{фикт}}}{EI_z}; \quad w = \frac{(M_y)_{\text{фикт}}}{EI_y}. \quad (107.2)$$

Бу ерда $(M_y)_{\text{фикт}} = M_{\text{фикт}} \cdot \cos \varphi$; $(M_z)_{\text{фикт}} = M_{\text{фикт}} \cdot \sin \varphi$ бош инерция текисликларидаги фиктив эгувчи моментлардир. v ва w аниқлангандан кейин oz ўқига нисбатан эгилиш текислигининг ҳолатини ва бу текисликдаги салқилик вектори $\bar{H}$ ни қуйидаги тенгламалардан аниқлаш қийин эмас:

$$\left. \begin{aligned} \bar{H} &= \sqrt{v^2 + w^2}; \\ \operatorname{tg} \psi &= \frac{v}{w}. \end{aligned} \right\} \quad (107.3)$$

Бу ерда ψ — салқилик вектори $\bar{H}$ билан бош инерция ўқи z орасидаги бурчак.

ҚИЙШИҚ ЭГИЛИШГА ОИД МАСАЛАЛАР

134. Икки таянчда ётувчи балканинг кўндаланг кесими 20^а номерли қўш тавр бўлиб, ўнинг ўртасига вертикал йўналишда $P = 200$ кг юк қўйилган. Таянчлар оралиги $l = 400$ см. Балка кўндаланг кесимининг девори вертикал билан $\varphi = 30^\circ$ бурчак ҳосил қилади (359-шакл). Кўндаланг кесим юқори тоқчасининг энг четки нуқталарида ҳосил бўладиган кучланишлар ҳисоблансин.

Е ч и ш. Дастлаб сортаментлар жадвалидан 20^а номерли қўш таврга оид маълумотларни оламиз:

$$\left. \begin{aligned} W_y &= 237 \text{ см}^3, \\ W_z &= 31,5 \text{ см}^3. \end{aligned} \right\}$$

Энди максимал эгувчи моментни ҳисоблаймиз:

$$M_{\max} = \frac{Pl}{4} = \frac{200 \cdot 400}{4} = 20\,000 \text{ кгсм.}$$

Эгувчи моментнинг y ва z ўқлардаги проекцияларини ҳисоблаймиз:

$$M_y = M \cos \varphi = 20000 \cdot 0,866 = 17\,300 \text{ кгсм,}$$

$$M_z = M \sin \varphi = 20000 \cdot 0,5 = 10\,000 \text{ кгсм.}$$

$\sigma = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z}$ формула ёрдамида кесимнинг A , B , C ва D нуқталаридаги кучланишларни ҳисоблаймиз.

A нуқтадаги кучланиш:

$$\sigma_A = -\frac{M_y}{W_y} - \frac{M_z}{W_z} = -\frac{17\,320}{237} - \frac{10\,000}{31,5} = -73 - 317 = -390 \text{ кг/см}^2.$$

B нуқтадаги кучланиш:

$$\sigma_B = \frac{M_y}{W_y} - \frac{M_z}{W_z} = +73 - 317 = -244 \text{ кг/см}^2.$$

C нуқтадаги кучланиш:

$$\sigma_C = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} = +73 + 317 = 390 \text{ кг/см}^2$$

ва, ниҳоят, D нуқтадаги кучланиш:

$$\sigma_D = -\frac{M_y}{W_z} + \frac{M_z}{W_y} = -73 + 317 = 244 \text{ кг/см}^2.$$

Балканинг куч қўйилган нуқтасидаги салқиликни ҳисоблаймиз, бунинг учун аввал салқилчқнинг y ва z ўқларидаги проекцияларини ҳисоблаймиз:

$$f_y = \frac{P \sin \varphi l^3}{48EI_z} = \frac{2\,000 \cdot 0,5 \cdot (400)^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 158} = 0,42 \text{ см,}$$

$$f_z = \frac{P \cos \varphi \cdot l^3}{48E \cdot I_y} = \frac{2\,000 \cdot 0,866 \cdot (400)^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 2\,370} = 0,048 \text{ см}$$

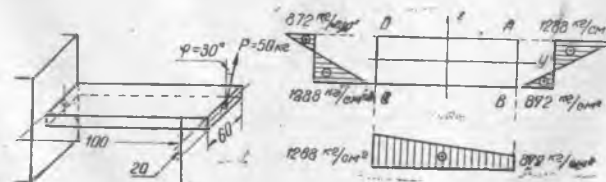
Ҳула салқилик:

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2} = \sqrt{(0,42)^2 + (0,048)^2} \approx 0,42 \text{ см}$$

бўлади.

135. Консолли балканинг қўндаланг кесими $6 \times 2 \text{ см}^2$ ли тўғри тўртбурчак бўлиб, унинг учига қўндаланг кесим текислигида ётувчи $P=50 \text{ кг}$ юк қўйилган. Балканинг хавфли кесими учун нормал кучланиш эпюраси қурилсин ҳамда унинг мустаҳкамлик шarti текширилсин (360-шакл). Балканинг материали пўлат бўлиб, унинг учун $[\sigma] = 1400 \text{ кг/см}^2$, $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$.

Ечиш. Бу масалани ечишда (106. 2) формулага кирган қавс ичидаги ҳадларнинг ишораларини механик равишда ҳисобга олишни ўрганамиз. Бунинг учун координаталар системасини шундай танлаб оламизки, балкага таъсир қилган куч биринчи чоракка тўғри келсин; шунда қавс ичидаги ҳадларнинг ишораси кучланиши топилаётган нуқталарга таал-



360-шакл.

луқли бўлган координаталарнинг ишоралари билан ўз-ўзидан аниқланади. Шарҳланган қонда асосида берилган масалани ечамиз.

Хавфли кесим балканинг маҳкамланган ерида бўлади, бу кесимга нисбатан олинган максимал эғувчи момент:

$$M_{\max} = Pl = 50 \cdot 100 = 5000 \text{ кгсм}$$

бўлади. Кесим юзасининг қирралари бўйича нормал кучланиш эпюраларини чизиш учун A , B , C ва D нуқталардаги кучланишларни (106. 2) формула ёрдамида ҳисоблаш керак. Аввало кесим юзасининг y ва z ўқларга нисбатан инерция моментларини топамиз.

$$I_y = \frac{bh^3}{12} = \frac{6 \cdot 2^3}{12} = 4 \text{ см}^4,$$

$$I_z = \frac{b^3h}{12} = \frac{6^3 \cdot 2}{12} = 36 \text{ см}^4.$$

Энди кучланишларни ҳисоблаймиз:

A нуқта учун ($y_A = 3 \text{ см}$; $z_A = 1 \text{ см}$):

$$\sigma_A = -5000 \left(\frac{1 \cdot 0,866}{4} + \frac{3 \cdot 0,5}{36} \right) = -1288 \text{ кг/см}^2.$$

B нуқта учун ($y_B = 3 \text{ см}$; $z_B = -1 \text{ см}$):

$$\sigma_B = -5000 \left(-\frac{1 \cdot 0,866}{4} + \frac{3 \cdot 0,5}{36} \right) = 872 \text{ кг/см}^2.$$

C нуқта учун ($y_C = -3 \text{ см}$; $z_C = -1 \text{ см}$):

$$\sigma_C = -5000 \left(\frac{1 \cdot 0,866}{4} - \frac{3 \cdot 0,5}{36} \right) = 1288 \text{ кг/см}^2.$$

D нуқта учун ($y_D = -3 \text{ см}$; $z_D = 1 \text{ см}$):

$$\sigma_D = -5000 \left(-\frac{1 \cdot 0,866}{4} - \frac{3 \cdot 0,5}{36} \right) = -872 \text{ кг/см}^2.$$

Ҳисобланган кучланишларга кўра кесим томонларига тааллуқли нормал кучланиш эпюралари 360-шаклда кўрсатилган.

Энг четки B ва C нуқталардаги нормал кучланишлар рухсат этилган кучланишлардан кичик. Демак, балка етарлича мустаҳкамдир, чунончи:

$$\sigma_C = 1288 \text{ кг/см}^2 < [\sigma] = 1400 \text{ кг/см}^2$$

ва

$$\sigma_B = 872 \text{ кг/см} < [\sigma] = 1400 \text{ кг/см}^2.$$

Ниҳоят, бош инерция ўқлари бўйлаб ҳосил бўладиган салқиликларни ҳисоблаймиз:

$$f_y = \frac{P \sin \varphi \cdot l^3}{3EI_z} = \frac{50 \cdot 0,5 \cdot 100^3}{3 \cdot 2,1 \cdot 10^8 \cdot 36} = \frac{25}{226,8} = 0,11 \text{ см},$$

$$f_z = \frac{P \cos \varphi \cdot l^3}{3EI_y} = \frac{50 \cdot 0,866 \cdot 100^3}{3 \cdot 2,1 \cdot 10^8 \cdot 4} = \frac{43,3}{25,2} = 1,72 \text{ см}.$$

Тўла салқилик:

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2} = \sqrt{(0,11)^2 + (1,72)^2} = 1,73 \text{ см}$$

бўлади. Тўла салқиликнинг йўналишини топамиз:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f_y}{f_z} = \frac{0,11}{1,72} = 0,064 \text{ ва } \alpha = 3^\circ 40'$$

Тўла салқилик бош вертикал z ўқ билан α бурчак ҳосил қилади.

136. Узунлиги $l = 4 \text{ м}$, қўндаланг кесим ўлчамлари $(80 \times 80 \times 8)$ бўлган шўлт балка (бурчаклик) учлари билан икки таянчга эркин тиралган. Бурчакликнинг тошчалари горизонтал ва вертикал ҳолатда ўрнатилган. Балканинг ўз оғирлигидан ҳосил бўладиган энг катта кучланиш ва горизонтал ҳамда вертикал текисликлардаги салқиликларни аниқлансин. $E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ кг/см}^2$.

Жавоб: $\sigma_{\max} = 178 \text{ кг/см}^2$; $v = 0,20 \text{ см}$; $w = 0,32 \text{ см}$.

137. Кўндаланг кесими ўлчамининг номери 20^a бўлган қўш таврли консолнинг учига вертикал текислик билан $\varphi=30^\circ$ ҳосил қилувчи P куч қўйилган. Нейтрал ўқнинг вертикал ўқ z билан ҳосил қиладиган бурчаги ҳамда консол тўла салқилигининг йўналиши аниқлансин.

Жавоб: нейтрал ўқ вертикал ўқ oz билан $6^\circ 40'$ бурчак ҳосил қилади. Тўла салқилик нейтрал ўққа тик бўлган текисликда ётади.

138. Томнинг саррови (прогон) 16^a номерли швеллер бўлиб, унинг тагига ҳар $4,2$ м да таянч қўйилган. Қор ва прогоннинг оғирликлари биргаликда $q=200$ кг/м² бўлган, вер-

тикал йўналишида тенг тақсимланган юк ҳосил қилади. Том қиялиги горизонт билан $\varphi=20^\circ$ бурчак ҳосил қилади. Прогонни узунлиги $l=4,2$ м ли икки таянчга тиралган балка деб ҳисоблаб, унда ҳосил бўладиган энг катта кучланиш ҳисоблансин (361-шакл).

Жавоб: прогон кўндаланг кесимининг A нуқтасида энг катта сиқувчи кучланиш ҳосил бўлиб, у $\sigma_{\max}=1340$ кг/см².

B нуқтасида энг катта қўзувчи кучланиш ҳосил бўлиб, у: $\sigma_{\max}=780$ кг/см² дир.

139. Қийшиқ эгилган балканинг кўндаланг кесими тўғри тўртбурчак бўлиб, унинг нейтрал ўқи кесимнинг диагоналига мос келади; бу

ҳол учун кўндаланг кесим юзасидаги куч таъсир чизигининг ҳолати аниқлансин.

Жавоб: тўғри тўртбурчакнинг иккинчи диагонали кучнинг таъсир чизигига мос келади.

140. Симметрия ўқлари бўлмаган кўндаланг кесимнинг ихтиёрий нуқтаси C даги нормал кучланиш σ аниқлансин.

Ечнш. Қийшиқ эгилишда ҳам кўндаланг кесим текис қолгани учун, унинг ҳар қандай нуқтасидаги нормал кучланиш қуйидагича ифодаланади:

$$\sigma = Ay + Bz, \quad (1)$$

бу ерда y ва z — C нуқтанинг бош ўқ бўлмаган ҳар қандай марказий ўққа нисбатан координатаси. Кўндаланг кесимдаги нормал кучланишлардан ҳосил бўлган моментлар ташқи кучлар momenti билан мувозанатлашиши лозим. Шунинг учун y ва z ўқларига нисбатан ички кучлар моментини тегишлича ташқи кучлар моментига тенглаштирамиз:

$$\begin{aligned} \int \sigma dF \cdot z &= A I_{yz} + B I_y = M_y, \\ \int \sigma dF \cdot y &= A I_z + B I_{zy} = M_z. \end{aligned}$$

Бу тенгламалардан A ва B ни аниқлаймиз:

$$A = \frac{I_y M_z - I_{zy} M_y}{I_y I_z - I_{zy}^2}; \quad B = \frac{I_z M_y - I_{yz} M_z}{I_z I_y - I_{yz}^2}. \quad (2)$$

Буларни (1) га қўйсак, нормал кучланиш учун қуйидаги формулани ҳосил қиламиз:

$$\sigma = \frac{I_y M_z - I_{zy} M_y}{I_y I_z - I_{zy}^2} y + \frac{I_z M_y - I_{yz} M_z}{I_z I_y - I_{yz}^2} z. \quad (3)$$

y ва z ўқлари кўндаланг кесимнинг бош инерция ўқлари бўлса, яна юқорида чиқарилган (106. 2) формулани оламиз; ҳақиқатан ҳам, бош инерция ўқлари учун:

$$\begin{aligned} I_{yz} &= 0, \\ \sigma &= \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z. \end{aligned}$$

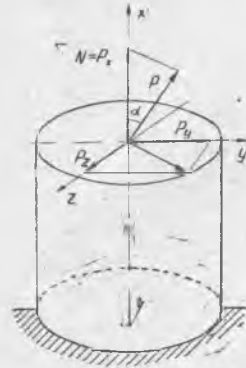
108-§. Чўзилиш ёки сиқилишнинг эгилиш билан бирга таъсири

Кўпинча, иншоот элементларига қўйилган кучлар уларнинг геометрик ўқларини турли бурчаклар остида кесиб ўтади. Бу ҳолда призматик стерженлар эгилиш билан бирга чўзилиш ёки сиқилишга ҳам дуч келади. Бу эса юқорида келтирилган мураккаб кучланишни ҳосил қилувчи олти та параметр-

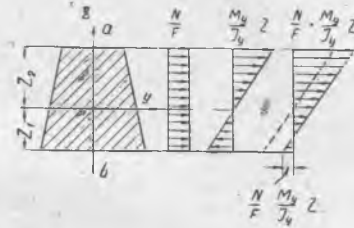


361-шакл

дан учтаси M_y , M_z ва N қилишини тақозо қилади. Ҳақиқатан ҳам, пастки учи билан қистирилган призматик стерженнинг юқори учига унинг ўқи билан α бурчак ҳосил қилувчи P куч таъсир қилаётган бўлса (362-шакл), бу кучнинг стержень ўқи ва қўндаланг кесими юзасидаги проекциялари стерженда чўзилиш ва қийшиқ эгилиш ҳосил қилади. Қўндаланг кесим юзасидаги кучни бош инерция текисликлари бўйича ажратиб, уларга тегиш-



362-шакл.



363-шакл.

ли моментларни M_y ва M_z билан белгилаймиз. P кучнинг стержень ўқи бўйлаб йўналган компонентини N деймиз. Қўндаланг кесимнинг ихтиёрий нуқтасидаги нормал кучланиш (106. 2) формула билан ифодаланадиган кучланиш ва марказий чўзилишдан ҳосил бўладиган кучланиш $\frac{N}{F}$ ни қўшиш натижасида аниқланади:

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z + \frac{N}{F}. \quad (108. 1)$$

Ҳалиги P куч стерженнинг ўқини кесиб ўтган ҳолда, бош инерция текисликларидан бирортасида ётса, у ҳолда (108. 1) қуйидагича ёзилади:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_z}{I_z} y \quad (108. 2)$$

ёки

$$\sigma = \frac{N}{F} - \frac{M_y}{I_y} z. \quad (108.3)$$

Бу формулалардан бирига, яъни (108.3) га тегишли кучланишнинг эпюраси 363-шаклда тасвирланган. Чўзувчи ёки сиқувчи N куч таъсирида ҳосил бўлган кучланишлар барча кесимлар учун бир хилда ўзгармас миқдор бўлади ва у ҳар қайси кесим учун текис тақсимланади. Бинобарин, толаларнинг кучланишлари эгувчи моментгагина боғлиқ равишда ўзгаради. Демак, энг кучланган толалар хавфли кесимнинг энг четида бўлади. У толалар учун эгилишдан ҳосил бўладиган максимал кучланиш $\pm \frac{M_{\max}}{W}$ га тенг. Шу туфайли хавфли кесимнинг энг четидаги a ва b нуқталарда ҳосил бўладиган кучланишлар қуйидагича бўлади:

$$\sigma_{1,2} = \frac{N}{F} \pm \frac{M_{\max}}{W}. \quad (108.4)$$

Стерженнинг мустаҳкамлигини текшириш учун

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = \frac{N}{F} - \frac{M_{\max}}{W} \quad (108.5)$$

кучланиш олинади. N сиқувчи куч бўлса, уни

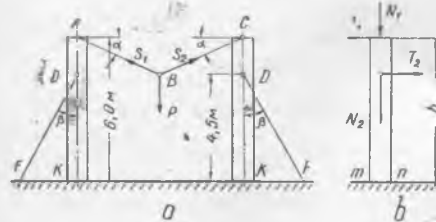
$$\sigma_{\max} = - \left(\frac{N}{F} + \frac{M_{\max}}{W} \right) \quad (108.5^1)$$

кўринишда олиш лозим. Буларнинг иккаласини битта формула билан ифода-
далаб, чўзилиш ёки сиқилиш билан текис эгилишга баробар қаршилик
кўрсатувчи стерженнинг мустаҳкамлик шартини қуйидагича ёзамиз:

$$\sigma_{\max} = \pm \left(\frac{N}{F} + \frac{M_{\max}}{W} \right) \leq [\sigma]. \quad (108.6)$$

МАСАЛАЛАР

141. Баландлиги $h=6$ м, кўндаланг kesimi доиравий, унинг диаметри эса $d=20$ см бўлган ёғоч устун 364-шаклда тасвирлангандек юкланган. ABC симга осилган P юкнинг оғирлиги 30 кг; DF тортқиларда ҳосил бўладиган чузувчи зўриқишларнинг ҳар қайсиси $S_1=500$ кг. $\lg \alpha = 0,1$; $\sin \beta = 0,2$ бўлиб, қолган ўлчамлар шаклда кўрсатилган. Устунда ҳосил бўладиган сиқувчи кучланиш аниқлансин.



364-шакл.

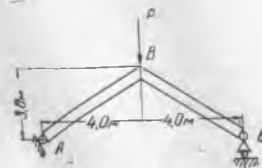
Е ч и ш. B нуқтанинг мувозанатидан BC симдаги зўриқиш S_2 ни топиб, унинг вертикал ва горизонтал ташкил этувчилари N_1 ва T_1 ни аниқлаймиз. $N_1=15$ кг, $T_1=150$ кг. Тортқи DF даги зўриқишнинг ташкил этувчилари тегишлича $N_2=490$ кг, $T_2=100$ кг. Бу кучлар билан юкланган устун 364-шаклнинг b қисмида алоҳида тасвирланган. Энг катта эгувчи момент устуннинг қистириб тиралган $m-n$ kesimidadir. $M_{\max}=45\,000$ кгсм. Устуннинг шу kesimдаги ўқи бўйлаб йўналган кучлардан ҳосил бўлган

босим $N_1+N_2=505$ кг. m нуқтадаги энг катта сиқувчи кучланиш:

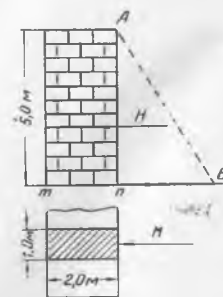
$$\sigma = - \left(\frac{505}{\frac{\pi d^2}{4}} + \frac{45\,000}{\frac{\pi d^3}{32}} \right) = - (1,6 + 57,2) = - 58,8 \text{ кг/см}^2.$$

142. ABC ёғоч конструкцияси B нуқтада бикр қилиб бириктирилган бўлиб, A нуқтада қўзғалмас, C нуқтада эса қўзғалувчи шарнирли таянчларга тиралган (365-шакл). Конструкциянинг бошқа ўлчамлари шаклда кўрсатилган. B нуқтага $P=900$ кг юк қўйилган. AB ва BC ёғоч брусларнинг кўндаланг kesimлари 25×25 см² ўлчамли квадратдан иборат. Конструкцияда ҳосил бўладиган энг катта сиқувчи кучланиш аниқлансин.

Е ч и ш. A нуқтага нисбатан момент олиб, C реакцияни аниқлаймиз:



365-шакл.



366-шакл.

$$\sum M_A = P_4 \cdot 4 - C8 = 0; \quad C = \frac{P}{2}.$$

С нинг CB йўналишдаги проекцияси $N = \frac{P}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10} P$. Энг катта сиқувчи кучланиш B кесимнинг юқори нуқтасида ҳосил бўлади:

$$\sigma_{\max} = - \left(\frac{N}{F} + \frac{M_{\max}}{W} \right) = - \left(\frac{3 \cdot 900}{10 \cdot 25^2} + \frac{900 \cdot 400}{2 \cdot \frac{25^3}{6}} \right) = -69,8 \text{ кг/см}^2.$$

143. Фишдан кўтарилган деворнинг баландлиги $h = 5$ м, қалинлиги $b = 2$ м бўлиб, у орқасига уйилган қум боқимининг таъсирида туради (366-шакл). Деворнинг тагидаги нуқталарда ҳосил бўладиган энг катта сиқувчи ва чўзувчи кучланишлар ҳисоблансин. Девор 1 м^3 ҳажмининг оғирлиги $\gamma = 2400$ кг, қум деворнинг ҳар метр узунлигида $H = 5000$ кг куч билан таъсир қилади. Бу куч у деворнинг баландлиги бўйлаб 366-шаклда кўрсатилгандек чизикли қонун билан ёйилган.

Жавоби: девор тагидаги m нуқтада ҳосил бўладиган сиқувчи кучланиш:

$$\sigma_m = - \frac{2400 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1}{200 \cdot 100} - \frac{5000 \cdot 500}{3 \cdot \frac{100 \cdot 200^2}{6}} = -2,45 \text{ кг/см}^2;$$

n нуқтадаги кучланиш чўзувчи кучланиш бўлиб, унинг қиймати:

$$\sigma_n = - \frac{2400 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1}{200 \cdot 100} + \frac{5000 \cdot 500}{3 \cdot \frac{100 \cdot 200^2}{6}} = 0,25 \text{ кг/см}^2.$$

144. B нуқтасида шарнири бўлган доиравий кесимли AB стержень A нуқтаси билан силлиқ вертикал деворга тиралган ҳолда ўз оғирлиги таъсирида мувозанатда туради (367-шакл). Стерженьнинг шундай бир $m-n$ кесимини топиш керакки, ундаги сиқувчи кучланишнинг қиймати максимал бўлсин.

Е чи ш. Стерженьнинг узунлик бирлигидаги оғирлигини q , узунлигини l ва горизонт билан тузган бурчагини α орқали белгилаймиз. A нуқтадаги горизонтал реакция:

$$R = \frac{ql}{2} \operatorname{ctg} \alpha.$$

Стерженьнинг A учидан x оралиқдаги кўндаланг кесим $m-n$ даги сиқувчи зўриқиш ва эгувчи момент тегишлича:

$$N = qx \sin \alpha + \frac{ql \cos^2 \alpha}{2 \sin \alpha},$$

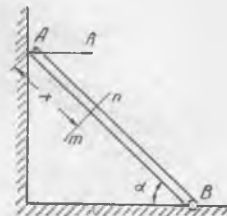
$$M = \frac{qlx}{2} \cos \alpha - \frac{qx^2}{2} \cos \alpha$$

бўлади. Бу кесимдаги энг катта сиқувчи кучланиш:

$$\sigma = - \left[\frac{4}{\pi d^2} \left(qx \sin \alpha + \frac{ql \cos^2 \alpha}{2 \sin \alpha} \right) + \frac{32}{\pi d^3} \left(\frac{ql}{2} - \frac{qx}{2} \right) x \cos \alpha \right],$$

бу ерда d — стерженьнинг диаметри. σ нинг x га нисбатан ҳосиласиния полга тенглаштириб, максимал кучланиш ҳосил бўладиган кесимнинг ҳолатини аниқлаймиз:

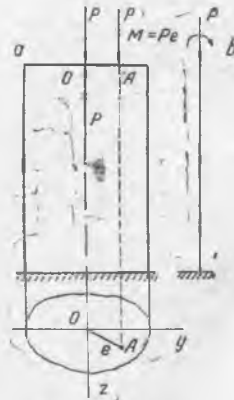
$$x = \frac{l}{2} + \frac{d}{8} \operatorname{tg} \alpha.$$



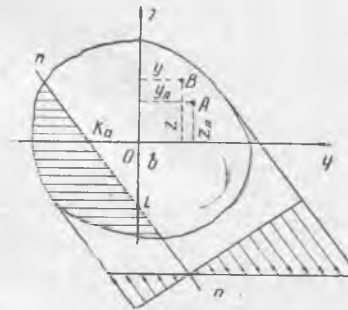
367-шакл.

109-§. Марказий қўйилмаган чўзувчи ёки сиқувчи кучлар таъсири

Призма шаклидаги стерженга унинг ўқиға параллел йўналишда таъсир қилувчи куч кўндаланг кесимининг марказига қўйилмаган бўлса, бундай куч таъсирида юқорида текширилган эгилиш билан чўзилиш ёки сиқилиш деформациясининг биргаликдаги таъсири ҳосил бўлади. Аммо марказий қўйилмаган куч таъсирида ҳосил бўладиган деформация 108- параграфда текширилган ҳолнинг хусусий кўринишидир.



368-шакл.



369-шакл.

Призма шаклидаги стерженнинг ўқиға параллел йўналишдаги куч P призма кўндаланг кесимининг A нуқтасига қўйилган бўлсин (368-шакл). Куч қўйилган бу нуқтани *қутб* деб атаймиз; мазкур қутб билан стержень ўқи орасидаги масофа *эксцентриситет* деб аталади. У аналитик геометриядагидек e орқали белгиланади. Бизнинг вазифамиз мазкур P куч таъсирида стерженда ҳосил бўладиган энг катта кучланишни аниқлаб, стерженнинг мустаҳкамлик шартини текширишдир. Бу масалани ечиш учун куч қўйилган кесимнинг маркази O нуқтага стерженнинг ўқи бўйлаб қарама-қарши йўналган икки кучни қўямиз. У кучларнинг ҳар бирини стерженга қўйилган P кучга тенг қилиб оламиз. Бундай система таъсирида стерженнинг мувозанати бузилмайди ва, шу билан бирга, кўндаланг кесимларидаги кучланишлар ҳам ўзгармайди. Аммо шаклда икки чизиқ билан тасвирланган $P - P$ кучлар моменти Pe га тенг бўлган жуфт куч ҳосил қилади. Бу жуфт кучнинг моменти ўзгармас бўлгани учун стерженда соф эгилиш ҳосил бўлади. Кўндаланг кесим маркази O га қўйилган P куч эса стерженда оддий сиқилиш ҳосил қилади. Стерженда моменти $M = Pe$ га тенг жуфт куч билан стержень ўқи бўйлаб йўналган P куч таъсири натижасида ҳалиги айтилган мураккаб деформация ҳосил бўлади.

Шу тарзда юкланган стерженни ҳисоблаш схемаси 368-шакл, b да тасвирланган. Аммо эгувчи жуфт куч ётган OA текислик бош инерция текисликларидан бирортасига ҳам мос келмаслиги мумкин. Бу ҳолда призма шаклидаги стержень бўйлама сиқилиш билан бирга соф қийшиқ эгилишга дуч келади. Соф эгилишда барча кесимлар учун кучланиш бир хил бўл-

ганидан, марказий қўйилмаган куч таъсиридаги кучланишни стерженнинг ҳар қандай кесими учун ҳисобласа ҳам бўлаверади.

Стерженнинг бирор қўндаланг кесимини олиб, унинг бош инерция ўқлари орқали ou ва oz ўқларини ўтказамиз (369-шакл). Куч қўйилган нуқта A , яъни қутб координаталар текислигининг биринчи чорагида бўлиб, унинг координаталари y_A ва z_A бўлсин. У ҳолда бош инерция текисликларидаги жуфтларнинг моментлари қуйидагича ёзилади:

$$M_y = P \cdot z_A; \quad M_z = P \cdot y_A.$$

Булар, ўз навбатида, эгувчи момент M нинг бош инерция ўқларидаги проекцияларидир.

Энди, қўндаланг кесимнинг координаталари y ва z бўлган бирор B нуқтада ҳосил бўладиган нормал кучланишни аниқлаймиз. Бу нуқтадаги нормал кучланиш уч қисмдан иборатдир.

1. Кесимнинг барча нуқталари учун бир хилда бўлган ва P кучдан ҳосил бўладиган $\frac{P}{F}$ сиқувчи кучланиш.

2. XOY текислигида ётган момент таъсирида кесим текислигининг oz нейтрал ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўладиган эгилишдаги $\frac{M_z \cdot Y}{I_z}$ сиқувчи кучланиш.

3. XOZ текислигидаги момент таъсирида кесим текислигининг нейтрал ўқи ou атрофида айланишидан ҳосил бўладиган эгилишдаги $\frac{M_y Z}{I_y}$ сиқувчи кучланиш.

Бу кучланишларни қўшсак, B нуқтадаги кучланиш учун қуйидаги формулани ҳосил қиламиз:

$$\sigma = - \left(\frac{P}{F} + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z \right).$$

Бу формулага M_y ва M_z ларнинг қийматини қўйсак, y қуйидагича ёзилади:

$$\sigma = - \left(\frac{P}{F} + \frac{P y_A y}{I_z} + \frac{P z_A z}{I_y} \right) \quad (109.1)$$

Бу формула билан қўндаланг кесимнинг ҳар қандай нуқтасидаги кучланишни аниқласа бўлади. Фақат кучланиши аниқланаётган нуқтанинг координаталари y ва z ни тегишли ишоралари билан олиш лозим. Марказий қўйилмаган P куч чўзувчи куч бўлган (109.1) формуланинг олдидаги манфий (—) ишорани мусбат (+) қилиб олиш лозим. Қўндаланг кесим юзасининг инерция моментларини инерция радиуслари орқали ифодаланган $I_y = Fr_y^2$, $I_z = Fr_z^2$ формулалар билан алмаштирсак, (109.1) формула қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\sigma = - \frac{P}{F} \left(1 + \frac{y_A y}{r_z^2} + \frac{z_A z}{r_y^2} \right). \quad (109.2)$$

Бу формуланинг қавслар ичидаги ҳадларига тегишли ишоралар, қутб ва кучланиш топиладиган нуқтага тааллуқли координаталарнинг ишоралари билан ўз-ўзидан аниқлана беради.

Маълумки, эгилишда кесимнинг нейтрал ўқдан энг узоқ нуқталарида максимал кучланишлар ҳосил бўлади. Шунинг учун, қийшиқ эгилишдагидек, бу ҳолда ҳам нейтрал ўқ ҳолатини аниқлаш зарур. Нейтрал ўқ устида

кучланиш нолга тенг бўлгани учун, ундаги нуқталарнинг координаталарини y_0, z_0 десак, нейтрал ўқ тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$-\frac{P}{F} \left(1 + \frac{y_A y_0}{r_z^2} + \frac{z_A z_0}{r_y^2} \right) = 0$$

ёки

$$1 + \frac{y_A y_0}{r_z^2} + \frac{z_A z_0}{r_y^2} = 0 \quad (109.3)$$

Тўғри чизик тенгламасини координата кесмалари орқали кўрсатилган тенглама шаклида ёзамиз, яъни уни қуйидаги кўринишга келтираемиз:

$$\frac{y}{a} + \frac{z}{b} = 1.$$

Бунинг учун (109.1) ни қуйидагича ёзамиз:

$$\frac{\frac{y_0}{r_z^2}}{\left(-\frac{r_z^2}{y_A}\right)} + \frac{\frac{z_0}{r_y^2}}{\left(-\frac{r_y^2}{z_A}\right)} = 1. \quad (109.3')$$

Бу тенгламадан кўришиб турибдики, нейтрал ўқ бош инерция ўқларидан қуйидаги кесмаларни ажратади:

$$a = -\frac{r_z^2}{y_A}, \quad b = -\frac{r_y^2}{z_A}. \quad (109.4)$$

Демак, бирор кесим учун нейтрал ўқнинг ҳолати фақат куч қўйилган нуқтанинг ҳолатигагина боғлиқ бўлиб, куч миқдорининг эса аҳамияти йўқ.

Нейтрал ўқнинг координата ўқларидан ажратадиган кесмалари a ва b нинг ишораси қутб координаталарининг ишораларига тескаридир. Шунинг учун қутб A координата текислигининг биринчи чорагига тўғри келганда, нейтрал чизик $n-n$ албатта учинчи чорақда бўлади ва K ҳам L нуқталар орқали ўтади (369-шакл). Нейтрал ўқнинг ҳолати аниқлангандан кейин кесим бўйича нормал кучланиш эпюрасини кўриш қийин эмас; у 369-шаклда тасвирланган.

109.4 тенгликлар орқали ифодаланган a ва b кесмалар билан қутб координаталари y_A ва z_A орасидаги муносабат устида тўхтаб ўтамиз. У тенгламалардаги координата кесимларини ифодаловчи a ва b ҳарфлар билан қутб координаталарини ифодаловчи y_A ва z_A ҳарфларининг ўринларини алмаштирсак, тенгламалар ўз кучини йўқотмайди, яъни:

$$y_A = -\frac{r_z^2}{a}, \quad z_A = -\frac{r_y^2}{b}. \quad (109.4')$$

Бу муносабатдан қуйидаги хулосани чиқариш мумкин: *куч координаталари a ва b бўлган янги бир A' қутбга қўйилса, унга бошқа бир нейтрал ўқ $n'-n'$ мос келади, бу янги ўқ бош инерция ўқларидан эски A қутбнинг координаталари y_A ва z_A га тенг бўлган кесмалар ажратади* (370-шакл). Демак, A қутбнинг координаталари y_A, z_A ва нейтрал ўқнинг ажратган кесмалари a ва b ўзаро боғланган бўлади. A қутб кесимнинг марказидан узоқлашган сари a ва b кесмалар кичиклашиб, нейтрал ўқ кесим марказига яқинлашади. A қутб кесим марказига етганда $y_A = 0, z_A = 0$ бўлиб, $a = \infty$ ва $b = \infty$ бўлади; бу ҳолда призма шаклидаги стержень оддий чўзилган ёки сиқилган бўлади. A қутбнинг маълум бирор ҳо-

лати учун нейтрал ўқ кесим контурининг бирор нуқтасига уриниб ўтиши мумкин. Нейтрал ўқ кесим контурининг бирор C нуқтасига уриниб ўтади деб фараз қилайлик. У ҳолда кучланиш бу нуқтада нолга тенг бўлиб, нейтрал чизиқдан энг узоқ жойлашган D нуқтада эса максимал қийматга эришади. Тегишли кучланиш эпюраси учбурчак билан тасвирланади (371-шакл).

Нейтрал ўқ билан қутб орасида яна қуйидаги бир муҳим муносабат бор: *нейтрал ўқ ўзи устида олинган бирор нуқта атрофида айланса, A қутб тўғри чизиқ устида кўчади.*

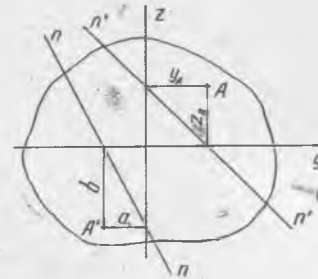
Буни исботлаймиз. $A(y_A, z_A)$ қутбга тегишли нейтрал ўқ $n-n$ бўлсин (372-шакл). Мазкур $n-n$ нейтрал ўқ устида бирор $C(y_C, z_C)$ нуқтани оламиз. Нейтрал ўқ $n-n$ ни шу C нуқта атрофида айлантириб, A қутбнинг ҳолатини кузатамиз, яъни қутб координаталарининг қандай қонун билан ўзгаришини ўрганамиз. Нейтрал ўқ $n-n$ ҳар қандай вазиятда ҳам C нуқта орқали ўтгани учун, унинг координаталари y_C, z_C (109.3) тенгламани қаноатлантириши керак. Шунинг учун (109.3) даги y_0, z_0 ўрнига y_C, z_C ни қўйсак:

$$\frac{y_A y_C}{r^2} + \frac{z_A z_C}{r^2} + 1 = 0 \quad (109.5)$$

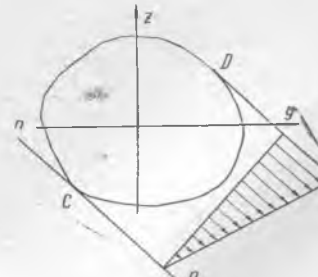
тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенгламани ўзгарувчи координаталари y_A, z_A бўлган тўғри чизиқнинг тенгламаси деб ҳисоблаш мумкин. У ҳолда, нейтрал ўқ C нуқта атрофида айланганда A қутб (109.5) тенглама билан ифодаланган $k-l$ тўғри чизиқ устида кўчади. Аммо (109.5) тенгламага тааллуқли y_C, z_C координаталари билан A қутбнинг координаталари y_A, z_A тенгламада бир хил ўрин тутгани учун ҳалиги таърифланган теореманинг тескарисини ҳам исботлашимиз мумкин, яъни:

A қутб тўғри чизиқ бўйлаб кўчганда, нейтрал ўқ $n-n$ ўз устида олинган бирор C нуқта атрофида айланади.

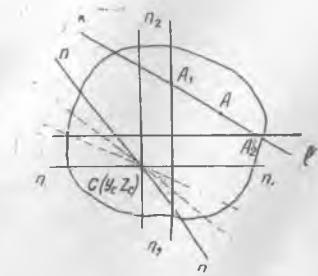
Қутб $k-l$ тўғри чизиқнинг A_1 ва A_2 нуқталарига тўғри келганда, буларга тегишли нейтрал ўқлар n_1-n_1 ва n_2-n_2 ҳолатида бўлиб, уларнинг кесишган нуқтаси C нейтрал ўқнинг айланиш марказини аниқлайди. A_1 ва A_2 қутбларга тегишли нейтрал ўқлар C орқали ўтиб, кесимнинг бош инерция ўқларига параллел бўлган ҳолда, улардан y_C ва z_C кесимларини ажратади (372-шакл). A қутб тўғри чизиқ $k-l$ устида кўчса нейтрал ўқ $n-n$ ўзининг устида олинган бирор C нуқта атрофида айлана экан.



370-шакл.



371-шакл.



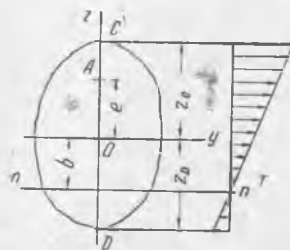
372-шакл.

Энди, бир муҳим хусусий ҳол устида тўхтаб ўтамиз, A қутб кесим бош инерция ўқларидан биттасининг устида, масалан oz ўқида бўлсин. У ҳолда $z_A = e$, $y_A = 0$ бўлади; қўндаланг кесимнинг ҳар қандай нуқта-сидаги нормал кучланиш (109.2) га мувофиқ қуйидагича ифодаланади:

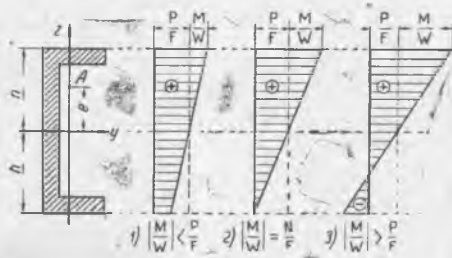
$$\sigma = -\frac{P}{F} \left(1 + \frac{ze}{r_y^2} \right). \quad (109.6)$$

Бу ҳол учун нейтрал ўқнинг тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$1 + \frac{e}{r_y^2} z = 0 \quad (109.7)$$



373-шакл.



374-шакл.

Нейтрал ўқ кесим марказидан $b = -\frac{r_y^2}{e}$ масофада oy ўқига параллел йўналади (373-шакл). Қўрамизки, нейтрал ўқ билан A қутб бош инерция ўқи oy нинг турли томонларидадир. Энг катта чузувчи ва сиқувчи кучланишлар кесимнинг нейтрал ўқдан энг узоқ нуқталари C ва D да ҳосил бўлади. Шунинг ҳам эслатиб ўтиш керакки, нейтрал ўқнинг қутб ётган томондаги кучланишнинг ишораси кучнинг ишорасига мос келади.

C ва D нуқталарнинг координаталари z_C ва z_D ни (109.6) га қўйсак, максимал ва минимал кучланишлар учун қуйидаги формулаларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= -\frac{P}{F} \left(1 + \frac{z_C e}{r_y^2} \right) = -\left(\frac{P}{F} + \frac{M_y z_C}{I_y} \right) = -\left(\frac{P}{F} + \frac{M_y}{W_C} \right), \\ \sigma_{\min} &= -\frac{P}{F} \left(1 - \frac{z_D e}{r_y^2} \right) = -\left(\frac{P}{F} - \frac{M_y z_D}{I_y} \right) = -\left(\frac{P}{F} - \frac{M_y}{W_D} \right). \end{aligned} \quad (109.8)$$

Бунда W_C ва W_D қўндаланг кесимнинг энг четки C ва D нуқталарига нисбатан қаршилик моментларидир. Қўндаланг кесим oy ўқига нисбатан симметрик бўлса, $z_C = z_D = \frac{h}{2}$ бўлиб, $W_C = W_D = W_y$ бўлади. Шунинг учун бу ҳолда (109.8) қуйидагича ёзилади:

$$\sigma_{\max/\min} = -\left(\frac{P}{F} \pm \frac{M_y}{W_y} \right) = -\frac{P}{F} \left(1 \pm \frac{h \cdot e}{2r_y^2} \right). \quad (109.9)$$

Бу формулага мувофиқ, қуйидаги уч ҳол учун (374-шаклда) нормал кучланиш эпюраси тасвирланган.

$$1) \frac{M_y}{W_y} < \frac{P}{F}; \quad 2) \frac{M_y}{W_y} = \frac{P}{F}; \quad 3) \frac{M_y}{W_y} > \frac{P}{F}.$$

Бу эпюралар оддий сиқилишда ҳосил бўлган кучланиш билан эгилиш кучланишларини алгебраик қўшиш натижасида олинган. Энг кейинги ҳолда кесим юзида кучланишнинг ишораси ҳар хилдир, яъни:

$$1 - \frac{h \cdot e}{2} < 0 \text{ ёки } \frac{h \cdot e}{2} > 1;$$

бунга тегишли эксцентриситет $e > \frac{2}{h}$ бўлади.

Иккинчи ҳолда кесимнинг энг четки нуқталаридаги кучланишлар тегишлича:

$$\sigma_{\max} = \frac{2P}{F}; \quad \sigma_{\min} = 0$$

бўлади, бу ҳолда $e = \frac{2r^2 y}{h}$.

Қўндаланг кесим баландлиги h , кенглиги b бўлган тўғри тўртбурчак шаклида бўлсин, у ҳолда (109.9) қуйидагича ёзилади:

$$F = hb; \quad r_y^2 = \frac{I_y}{F} = \frac{bh^3}{12bh} = \frac{h^2}{12};$$

$$\sigma_{\max} = -\frac{P}{bh} \left(1 \pm \frac{6e}{h} \right). \quad (109.10)$$

Бу формуладан, одатда, марказий қўйилмаган куч таъсиридаги тўғри тўртбурчак кесимли устунлар, аркалар ва тиргак деворлар каби иншоот қисмларини ҳисоблашда фойдаланилади. Бу хилдаги иншоот қисмлари, кўпинча, сиқилишга яхши қаршилиқ кўрсатган ҳолда, чўзилишга жуда ҳам ёмон қаршилиқ кўрсатади. Шунинг учун уларда чўзувчи кучланишлар ҳосил бўлишига йўл қўймаслик зарур. Қўндаланг кесим юзасида фақат сиқувчи кучланиш ҳосил бўлиши учун қуйидаги шарт бажарилиши зарур:

$$1 - \frac{6e}{h} \geq 0 \text{ ёки } \frac{6e}{h} < 1.$$

бундан:

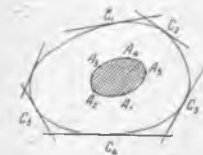
$$e \leq \frac{h}{6}.$$

110- §. Кесим ядроси

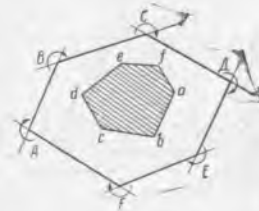
А қутбнинг маълум ҳолатида кесим бўйича бир хил ишорадаги кучланишлар ҳосил бўлишини юқорида келтирилган хусусий ҳол учун кўрсатган эдик. Энди, амалий жиҳатдан катта аҳамияти бўлган оу ҳолни умумлаштирамиз. Ҳар қандай кўринишдаги қўндаланг кесим учун марказий бўлмаган куч таъсирида кесим юзасида бир хил ишорали кучланиш ҳосил бўлишини таъмин этадиган умумий қондани чиқарамиз.

Нейтрал чизиқ кесим юзасини кесиб ўтса, унинг бир томонида сиқувчи, иккинчи томонида эса чўзувчи кучланишлар ҳосил бўлиши бизга маълум. Нейтрал ўқ кесим марказидан узоклашган сари, А қутб кесим марказига яқинлашади. Нейтрал ўқ кесим контурига уринма бўлганда, кучланиш бутун кесим юзаси бўйича бир хил ишорада ва нейтрал ўқ уринган нуқтада нолга тенг бўлади. Нейтрал ўқнинг бу ҳолатига тегишли А қутбнинг ўрнини аниқлаш қийин эмас. Уни (109.4') тенгликлардан аниқлаш мумкин, чунки нейтрал ўқнинг ҳолати берилганлигидан, унинг кесим бош инерция ўқларида ажратган кесмалари маълумдир. Энди нейтрал чизиқни кесим кон-

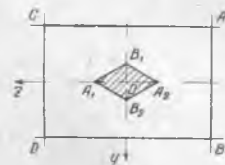
турига уринма ҳолда унинг атрофида айлантира бошласак (375-шакл), нейтрал ўқнинг ҳар бир ҳолатига тўғри келган қутб нуқталарининг геометрик ўрни кесим юзасининг маркази атрофида битта ёпиқ контур ҳосил қилади. Бу контур билан чегараланган юза *кесим ядроси* деб аталади. У 375-шаклда штрихлаб кўрсатилган. Демак, қутб кесим ядросида ёки унинг контурида бўлса, кесим юзаси бўйича кучланиш бир хил ишорали бўлади. Қутб ядродан ташқариде бўлса, унга тегишли нейтрал ўқ кесим контурини кесиб ўтади ва кесим юзасида икки хил ишорали кучланиш ҳосил қилади.



375-шакл.



376-шакл.



377-шакл.

Қўндаланг кесим кўпбурчак шаклида бўлса, бундай кесимга тегишли ядро ҳам кўпбурчак шаклида бўлади. Қўндаланг кесим *ABCDEF* кўпбурчакдан иборат деб фараз қилайлик (376-шакл). Нейтрал ўқ қўндаланг кесимнинг *AB* томонига мос келганда, унга тегишли қутб *a* нуқтада бўлсин. Нейтрал чизиқни *AB* ҳолатидан *BC* ҳолатига кўчириш учун уни *B* нуқта атрофида айлантириш лозим. Нейтрал ўқнинг айланиши натижасида қутбнинг *ab* тўғри чизиқ бўйича кўчишини юқорида исбот қилган эдик. Кесим юзининг *AB* томони орқали ўтувчи нейтрал ўқ *B* нуқта атрофида айланиб, унинг *BC* томонини қоплаганда қутб *a* тўғри чизиқ бўйича кўчади ва *b* нуқтага келиб тўхтайд. Бу *a* ва *b* нуқталарни туташтириб, кесим ядросининг бир томони *ab* ни аниқлаган бўламиз. Худди шу тарзда кесим юзининг *BC* томонидан ўтувчи нейтрал ўқни *e* нуқта атрофида кесим юзи то *CD* томони билан устма-уст тушгунча айлантириб, нейтрал ўқнинг бу ҳолатига тегишли қутб *c* ни оламиз. Бу *c* нуқтани олдин аниқланган *b* нуқта билан тугаштириб, ядронинг иккинчи томони *bc* ни аниқлаймиз. Бу мулоҳаза асосида кўпбурчак кесим ядросининг барча томонларини аниқлаймиз. Ҳосил бўлган ядро *abcdef* 376-шаклда штрихлаб кўрсатилган.

Бу айтилганларни ойдинлаштириш учун бир нечта оддий мисоллар келтирамиз.

Тўғри тўртбурчак учун кесим ядросини қурамыз (377-шакл). Нейтрал ўқ кесимнинг *AB* томонидан ўтганда, *y* бош инерция ўқи *oz* дан

$b = -\frac{h}{2}$ кесмани ажратади ва *oy* ўқи билан чексизликда кесишади. Шунинг учун $a = \infty$ бўлади. Нейтрал ўқнинг бу ҳолатига тегишли A_1 қутбнинг координаталари:

$$z_{A_1} = -\frac{r^2 y}{b} = +\frac{2h^2}{12h} = \frac{h}{6}, \quad y_{A_1} = 0.$$

Нейтрал ўқ *CD* орқали ўтганда, A_2 қутбнинг координаталари $z_{A_2} = -\frac{h}{6}$, $y_{A_2} = 0$ бўлади. Нейтрал ўқ *BD* ва *AC* орқали ўтганда, қутбнинг координаталари тегишлича

$$z_B = 0; \quad y_{B_2} = \pm \frac{b}{6} \text{ бўлади.}$$

Энди бу координаталар билан аниқланган қутбларни туташтирсак, $A_1B_1A_2B_2$ ромб ҳосил бўлади. Демак, тўғри тўртбурчак кесимнинг ядроси диагоналлари $\frac{h}{3}$ ва $\frac{b}{3}$ га тенг ромб бўлар экан.

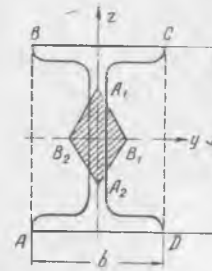
Қўштавр кесим учун (378-шакл) нейтрал чизиқнинг энг четки ҳолатлари AB, BC, CD ва AD чизиқлар билан аниқланади. Қўштавр кесимнинг ички контуридаги чизиқлар орқали нейтрал ўқлар ўтказилса, улар кесимни кесиб ўтади. Шунинг учун улар текширилмайди. Ядрони қуриш учун нейтрал чизиқнинг ҳалиги тўртта ҳолатига тегишли қутбларни аниқлаш лозим. Кесимнинг симметрия ўқлари бўлгани учун бу ҳолда ҳам ядро ромб бўлади. Ромбнинг учларини аниқловчи нукталарнинг координаталари (109.4') дан аниқланади. Масалан, A_1 ва A_2 қутбларнинг координаталари учун:

$$z_{A_1} = \pm \frac{2r^2}{h} y;$$

шунингдек, B_1 ва B_2 қутбларнинг координаталари учун:

$$y_{B_1} = \pm \frac{2r^2}{b} z$$

r_y^2 ва r_z^2 ларнинг қийматлари берилган қўштавр учун сортаментлар жадвалидан аниқланади. Худди шундай мулоҳазалар юргизиб, турли шаклдаги кесимлар учун кесим ядроларини қуришимиз мумкин.



378-шакл.

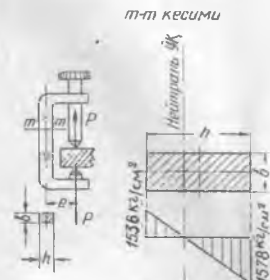
МАСАЛАЛАР

145. 379-шаклда кўрсатилган қисқич устунининг кўндаланг кесими $m-m$ тўғри тўртбурчакдир. $P = 200$ кг, $e = 60$ мм, $b = 10$ мм ва $|\sigma| = 1600$ кг/см², кесим баландлиги h аниқлансин.

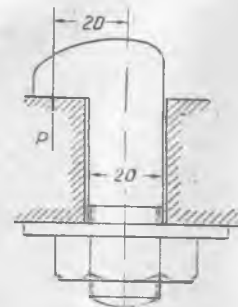
Ечиш. Тўғри тўртбурчак кесимли стержень марказий бўлмаган қўзувчи куч таъсиридадир. Бу ҳолга тегишли мустақамлик шarti:

$$\frac{P}{hb} \left(1 + \frac{6e}{h} \right) \leq |\sigma|$$

кўринишда ёзилади.

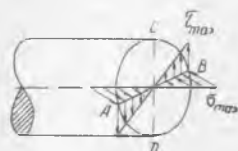


379-шакл.

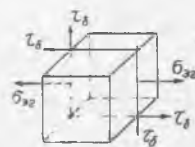


380-шакл.

сий оғирлиги таъсирида ва шу туфайли айланиш вақтида ҳосил бўладиган марказдан қочма инерция кучи таъсирида эгилади. Трансмиссион ва тир-сакли валлар ҳамда шестернялар ўрнатилган валлар буралиш билан бирга, шубҳасиз, эгилади ҳам. Биз олдин буралиш билан эгилиш таъсирига бир-галикда дуч келган вал ёки бошқа бир машина қисмининг кўндаланг кеси-мини доира шаклида деб олиб, унинг энг хавфли кўндаланг кесими юза-сидаги кучланишларни текшираемиз (385-шакл).



385-шакл.



386-шакл

Даставвал мазкур кесимда эгилишдан ҳосил бўладиган нормал кучланишни ҳисоблаб, кейин унга буралишдан ҳосил бўладиган тангенциал кучланишни қўшамиз.

Доира шаклидаги кўндаланг кесим учун эгувчи момент қандай текисликда ётса ҳам, текис эгилиш ҳосил бўлади. Шунинг учун эгувчи моментнинг қандай текисликда ётишининг аҳамияти йўқ. Эгувчи момент горизонтал текисликда ётибди деб фараз қилайлик. У ҳолда текшири-лаётган кесим учун энг катта нормал кучланиш горизонтал диаметрининг учларидаги A ва B нуқ-таларида ҳосил бўлади. Буралишдан ҳосил бў-ладиган максимал тангенциал кучланиш кўнда-ланг кесимнинг четки нуқталарида ҳосил бўли-ши бизга маълум. A ва B нуқталарда ҳам тан-генциал кучланишлар энг катта қийматга эга бўлади. Шундай қилиб, кесимдаги A ва B нуқ-таларда энг катта нормал ва тангенциал кучла-нишлар ҳосил бўлар экан.

Вертикал диаметрининг учларидаги C ва D нуқталарда эса буралишдан ҳосил бўладиган энг катта тангенциал кучланиш билан эгилишдан ҳосил бўладиган энг катта тангенциал кучланиш алгебраик равишда қўшилади. Аммо бу кучланишларнинг қиймати A ва B нуқталардаги кучланишларга қараганда жуда кичикдир, шунинг учун уларни ҳисобга олинмаса ҳам бў-лади, чунки материалнинг мустаҳкамлигини текширганда унинг учун хавф-ли кучланиш ҳолати A ва B нуқталарда бўлишини тегишли ҳисоблар би-лан тасдиқлаш мумкин. A ёки B нуқталарга яқин жойда стержендан ёқлари текширилаётган кўндаланг кесим юзасига параллел ва унга тик бўлган куб шаклидаги бир элемент ажратади (386-шакл). Бу кубнинг тўртала ёғига тангенциал кучланиш τ_x таъсир қилади; бу ёқларнинг иккита қарама-қар-ши вертикал томонларига нормал кучланишлар ҳам таъсир қилади. Унинг қолган икки ёғига кучланишлар таъсир қилмайди. Шунинг учун ажратил-ган элемент текис кучланиш ҳолатида бўлади. Бундай ҳолларда материал-нинг мустаҳкамлигини текшириш учун аввало бу кучланиш ҳолатига тегиш-ли бош кучланишлар σ_1 ва σ_2 ни аниқлаб, сўнг уларнинг қийматини мус-таҳкамлик назариялардан бирортасига қўйиш лозим.

Биз текшираётган ҳол учун 36-параграфда берилган бош кучланиш-ларни ифодаловчи (36.5) формуладан фойдаланамиз. бироқ ундаги нормал ва тангенциал кучланишлар ўрнига эгилиш ва буралишдаги нормал ва тангенциал кучланишларнинг қийматларини қўямиз. Тўртала мустаҳкамлик назариясининг ҳар бирига мувофиқ қуйидаги ҳисоб тенгламаларини оламиз:

1. Энг катта нормал кучланиш назариясига мувофиқ:

$$\frac{1}{2} (\sigma_{\text{эг}} + \sqrt{\sigma_{\text{эг}}^2 + 4 \tau^2}) \leq [\sigma]. \quad (111.1)$$

II. Энг катта нисбий чўзилиш назариясига мувофиқ:

$$(0,35 \sigma_{\text{эг}} + 0,65 \sqrt{\sigma_{\text{эг}}^2 + 4 \tau_{\text{эг}}^2}) \leq [\sigma]. \quad (111.2)$$

III. Энг катта тангенциал кучланиш назарияга мувофиқ:

$$\sqrt{\sigma_{\text{эг}}^2 + 4 \tau_{\text{эг}}^2} \leq [\sigma]. \quad (111.3)$$

IV. Энергетик назарияга мувофиқ:

$$\sqrt{\sigma_{\text{эг}}^2 + 3 \tau_{\text{эг}}^2} \leq [\sigma]. \quad (111.4)$$

Тўртала мустаҳкамлик назариясига мувофиқ чиқарилган бу ҳисоб тенгламаларини мустаҳкамлиги текшириладиган вал ёки доира шаклидаги кесимли бошка жисмнинг ўлчамлари ва унга қўйилган буровчи ҳамда эгувчи моментлар билан боғлаш лозим. Бунинг учун машина ёки иншоотнинг буралиш билан эгилиш таъсирига биргаликда дуч келадиган элементига таъсир кўрсатадиган буровчи ва эгувчи моментларни ҳисоблаш лозим. Буларни ҳисоблаш усулини трансмиссион вал учун келтириб ўтамин.

Трансмиссион валлар ўз оғирлигидан, улардаги шкив ва шестернялар оғирлигидан, шкивларни айлантирувчи тасмаларнинг тортилишидан эгилади. Валга ўрнатилган шкив l ни етакловчи деб фараз қилайлик. Уни айлантирувчи тасма етакловчи томонининг тортилиши T , эргашувчи томонининг тортилиши T_0 бўлсин (387-шакл). Механизм ва машиналар назарияси кўрсатадиган тасманинг етакловчи учидagi тортилиш билан эргашувчи учидagi тортилиш орасидаги муносабат қуйидаги формула билан берилади:

$$T = T_0 e^{f\varphi}.$$

бу ерда φ — шкивнинг тасма қоплаган ёйини аниқловчи марказий бурчак; f — тасма билан шкив сирти орасидаги ишқаланиш коэффициенти; e — натурал логарифмнинг асоси. Ҳайвон терисидан тайёрланган тасманинг етакловчи ва эргашувчи учлари параллел бўлган ҳолда сирти силлиқланган чўян шкив учун $e^{f\varphi} = 2$ бўлади. Шунинг учун:

$$T = 2T_0. \quad (111.5)$$

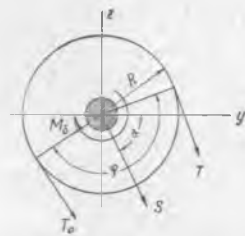
Шкив айланасидаги зўриқишни P десак, тасманинг етакловчи учидagi тортилиш $T_0 = P$ бўлади. Энди бу тортилиш кучларини вал маркази O га келтирамиз. Келтириш натижасида вал маркази O да бир томонга қараб йўналган $T = 2P$ ва $T_0 = P$ кучлар билан моментлари $2PR$ ва PR бўлган жуфт кучлар ҳосил бўлади; бунда R — шкивнинг радиуси. Булар мос ҳолда қўшилса, вал марказига қўйилган:

$$S = T + T_0 = 3P \quad (111.6)$$

куч билан, momenti:

$$M_0 = TR - T_0 R = (T - T_0) R = PR \quad (111.7)$$

бўлган жуфт куч ҳосил бўлади. Тасма учлари параллел бўлмаган ҳолларда $S < 3P$ бўлади. Аммо, ҳисобни мураккаблаштирмаслик учун бундай ҳолларда ҳам $S = 3P$ деб қабул қилинади.



387-шакл.

Валнинг ҳар минутдаги айланиш сони n , шкив орқали узагиладиган қувват N (от кучи ҳисобида) маълум бўлса, буровчи момент қуйидагича ифодаланиши бизга маълум:

$$M_6 = 71620 \frac{N}{n} \text{ кгсм.} \quad (111.7')$$

Буни (111.6) билан солиштириб, айланадаги зўриқишни аниқлаймиз:

$$P = \frac{M_6}{R} = 71620 \frac{N}{Rn}. \quad (111.8)$$

Айланадаги зўриқиш P аниқлангандан кейин эгувчи моментни ҳисоблаш қийин эмас, чунки вал марказига қўйилган $S = 3P$ кучни вертикал ва горизонтал ташкил этувчиларга ажратиб, қуйидаги кучларни ҳосил қиламиз:

$$S_y = 3P \cos \alpha, \quad S_z = 3P \sin \alpha.$$

Бунда oy ўқи горизонтал, oz ўқи эса вертикал йўналтирилди.

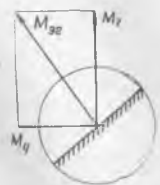
Бу кучларга тегишли эгувчи момент эпюраларини қуришда, уларнинг вертикал ташкил этувчисига шкивнинг оғирлиги G ни қўшиш лозим. Валга бир неча шкив ўрнатилган бўлса, ҳар қайси шкивдаги қайишлар тортилишидан ҳосил бўладиган айланадаги зўриқишни алсҳида аниқлаб, унга тегишли эгувчи куч S ни ҳисоблаш зарур. Агар валнинг учиди кривошип ёки тишли филдирак бўлса, тегишли айланадаги зўриқиш қуйидаги формуладан аниқланади:

$$P = \frac{M_6}{a},$$

бу ерда a — кривошипнинг узунлиги ёки тишли филдиракнинг босим P қўйилган нуқтасидан вал марказигача бўлган масофа. Валнинг шкив шестерня ёки кривошип ўрнатилган кесимларидаги зўриқишларнинг вертикал ва горизонтал ташкил этувчилари аниқлангандан кейин, тегишли текисликлардаги эгувчи моментларнинг эпюраларини қуриш қийин эмас. Уларни қуриб, валнинг ҳар қайси кесими учун вертикал ва горизонтал текисликлардаги эгувчи моментларни геометрик қўшиб, тўла эгувчи момент $M_{\text{эг}}$ ни ҳисоблаш мумкин. Бирор қўндаланг кесимдаги эгувчи момент вектори $M_{\text{эг}}$ 388-шаклда тасвирланган. Ҳар бир кесим учун бу эгувчи момент вектори $M_{\text{эг}}$ нинг йўналиши ҳар хил бўлади. Шунинг учун валнинг ўқи бўйлаб бу вектор ўз йўналишида қўйиб борилса, уларнинг учини туташтирувчи чизик қандайдир винтсимон фазовий эгри чизикни ҳосил қилади. Аммо доира шаклидаги кесим юзаси учун ҳар қандай марказий ўққа нисбатан олинган қаршилик моментлари тенг бўлгани сабабли бу моментларнинг натурал қийматларини вал ўқи бўйлаб вертикал текисликка ўнатишимиз мумкин. Эгувчи момент эпюрасининг бу хилда қурилиши ҳисоб натижасига таъсир қилмайди. Бу айтилганларни кейинча конкрет масалалар ечиб ойдинлаштирамиз.

Эгувчи ва буровчи моментлар аниқлангач, уларга тегишли нормал ва тангенциал кучланишларни ҳисоблаш қийин эмас. Уларнинг энг катта қийматлари қуйидагича ёзилади:

$$\sigma_{\text{эг}} = \frac{M_{\text{эг}}}{W}; \quad \tau_6 = \frac{M_6}{W_6}.$$



388-шакл.

Доира шаклидаги кесим учун эгилиш ва буралишдаги қаршилик моментлари:

$$W = \frac{\pi d^3}{32}; \quad W_0 = \frac{\pi d_0^3}{16}$$

бўлади, буларни солиштирсак, $W_0 = 2W$ муносабатни оламиз. Бу муносабатга кўра, тангенциал кучланиш қуйидагича ёзилди:

$$\tau_0 = \frac{M_0}{2W}$$

Кучланишларнинг бу қийматларини юқорида чиқарилган мустаҳкамлик шартларини ифодаловчи (III.1), (III.2), (III.3) ва (III.4) формулаларга қўйсак, қуйидаги ҳисоб формулаларини оламиз:

$$\frac{1}{2} \left[\frac{M_{\text{эг}}}{W} + \sqrt{\left(\frac{M_{\text{эг}}}{W} \right)^2 + 4 \left(\frac{M_0}{2W} \right)^2} \right] = \frac{M_{\text{эг}} + \sqrt{M_{\text{эг}}^2 + M_0^2}}{2W} \leq [\sigma], \quad (\text{III.1}')$$

$$\frac{0,35 M_{\text{эг}} + 0,65 \sqrt{M_{\text{эг}}^2 + M_0^2}}{W} \leq [\sigma], \quad (\text{III.2}')$$

$$\frac{\sqrt{M_{\text{эг}}^2 + M_0^2}}{W} \leq [\sigma], \quad (\text{III.3}')$$

$$\frac{\sqrt{M_{\text{эг}}^2 + 0,75 M_0^2}}{W} \leq [\sigma]. \quad (\text{III.4}')$$

Бу формулаларнинг ҳаммасини бирлаштириб, битта формула кўринишида ёзиш мумкин. Бунинг учун чап томондаги касрларнинг суратларини M_x деб белгилаб, уни ҳисоб моменти деб атаймиз ва қуйидаги ҳисоб тенгламасини оламиз:

$$\frac{M_x}{W} \leq [\sigma]. \quad (\text{III.9})$$

Ҳисоб моменти M_x эгувчи момент $M_{\text{эг}}$, буровчи момент M_0 ва мустаҳкамлик назарияларига боғлиқдир. Ҳисоб моменти M_x нинг қиймати тўртта назарияга мувофиқ қуйидагича бўлади:

$$\left. \begin{aligned} M_{x1} &= \frac{1}{2} (M_{\text{эг}} + \sqrt{M_{\text{эг}}^2 + M_0^2}), \\ M_{x2} &= 0,35 M_{\text{эг}} + 0,65 \sqrt{M_{\text{эг}}^2 + M_0^2}, \\ M_{x3} &= \sqrt{M_{\text{эг}}^2 + M_0^2}, \\ M_{x4} &= \sqrt{M_{\text{эг}}^2 + 0,75 M_0^2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.10})$$

Ҳисоб тенгламаси (III.9) кўриниши жиҳатидан оддий эгилишдаги балкани нормал кучланишга текшириш учун чиқарилган ҳисоб тенгламасига ўхшайди, фақат ҳисоб моменти M_x мураккаб қаршилиқда ҳисоблаб чиқарилган моментни ифодалайди, холос.

Агарда вал эгилиш билан буралишдан ташқари, яна N куч таъсирида сиқилса ёки чўзилса, бунга кучланиш $\sigma_0 = \frac{N}{F}$ ни эгилишдан ҳосил бўлган нормал кучланиш $\sigma_{\text{эг}}$ га қўшиш лозим (N критик қийматига етмаган бўлиши керак).

Валнинг мустаҳкамлигини таъмин этувчи диаметри (111.9) дан ҳисоблашимиз мумкин:

$$W = \frac{\pi d^3}{32} \geq \frac{M_x}{[\sigma]}.$$

Бундан, вал диаметри

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 M_x}{\pi [\sigma]}} \approx \sqrt[3]{10 \frac{M_x}{[\sigma]}}. \quad (111.11)$$

чунки $\frac{32}{\pi} \approx 10$. Бу формуладан фойдаланиш учун мустаҳкамлик назарияларидан қайси бири ишлатилишини олдиндан танлаб, тегишли ҳисоб моменти M_x ни аниқлаб олиш керак бўлади.

Баллар одатда пўлатдан, умуман, пластик материаллардан тайёрланади. Бундай материалларнинг ҳисоби учун биринчи мустаҳкамлик назариясини ишлатиш мумкин эмаслиги маълумдир. Шу вақтгача машинасозликда пластик материаллар учун, очикдан-очик нотўғри натижа беришига қарамай, иккинчи назарияга катта эътибор берилиб келинмоқда. Унга асосланиб тузилган ҳисоб формуласи баъзан Сен-Венан формуласи деб юритилади, у қуйидагича ёзилади:

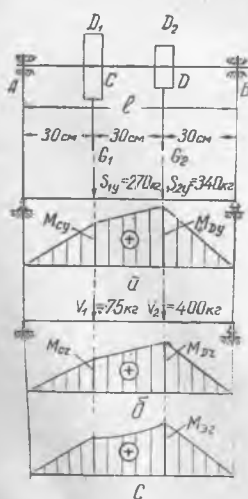
$$\frac{1}{W} [0,35 M_{gr} + 0,65 \sqrt{M_{gr}^2 + M_0^2}] \leq [\sigma].$$

Кейинги вақтларда пластик материалларни ҳисоблашда учинчи ёки тўртинчи (энергетик) назариядан фойдаланилмоқда.

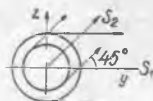
Энди бу айтилганларни қуйида келтирилган масалалар билан ойдинлаштирамиз.

МАСАЛАЛАР

151. 389-шаклда тасвирланган пўлат трансмиссион валнинг диаметри II, III ва IV назарияларга мувофиқ аниқлансин. Вал $N=7$ от кучи қувватни шаклда кўрсатилгандек ўрнатилган ва оғирлиги $G_1 = 75$ кг, диаметри $D_1 = 900$ мм бўлган С шкив ҳамда оғирлиги $G_2 = 60$ кг, диаметри $D_2 = 500$ мм бўлган D шкив орқали станокка узатади. С шкивдаги тасмаларнинг йўналиши горизонтал бўлиб, шкивдаги тасмалар горизонт билан 45° бурчак ҳосил қилади. Вал минутига $n = 125$ марта айланади. Эгилишга рухсат этилган нормал кучланиш $[\sigma] = 1000$ кг/см².



389-шакл.



Ечиш. Аввал вални эгувчи тасма тортилишларини аниқлаймиз. С шкивдаги айлана зўриқиш P_1 бўлса, валнинг бу шкив ўтказилган кесимидаги горизонтал эгувчи куч $S_1 = 3P_1$ бўлади. D шкивдаги айлана зўриқиш P_2 бўлса, валнинг бу шкив ўрнатилган кесимидаги эгувчи куч $S_2 = 3P_2$ бўлиб, у горизонт билан 45° бурчак ҳосил қилади. Бу кучни горизонтал ва вертикал ташкил этувчиларга ажратамиз. Бунинг учун олдин иккала шкивдаги айлана зўриқишини аниқлаймиз.

(111.7) формулага мувофиқ:

$$P_1 = \frac{M_0}{R_1} = \frac{2M_0}{D_1}; \quad P_2 = \frac{2M_0}{D_2};$$

$$M_0 = 71620 \frac{N}{n} = 71620 \frac{7}{125} = 4010 \text{ кгсм};$$

$$P_1 = 90 \text{ кг}; \quad P_2 \approx 160 \text{ кг}.$$

$$S_1 = 3P_1 = 270 \text{ кг}; \quad S_2 = 3P_2 = 480 \text{ кг}.$$

S_1 горизонтал йўналишда бўлгани учун, унинг вертикал ташкил этувчиси:

$$\begin{aligned} S_{1z} &= 0, & S_{1y} &= S_1 = 270 \text{ кг}; \\ S_{2y} &= S_2 \cos 45^\circ = 480 \cdot 0,77 = 340 \text{ кг}; \\ S_{2z} &= S_2 \sin 45^\circ = 480 \cdot 0,77 = 340 \text{ кг}. \end{aligned}$$

Вертикал ташкил этувчиларга тегишлича шкивларнинг оғирлиги қўшилади:

$$V_1 = G_1 = 75 \text{ кг}; \quad V_2 = S_{2z} + G_2 = 340 + 60 = 400 \text{ кг}.$$

Вални икки таянчга тиралган балка деб қараб, ҳар қайси текисликдаги кучлар билан юкланган ҳолатларини алоҳида текширамиз; улар 389-шаклнинг a ва b қисмларида тасвирланган. Иккала ҳол учун эгувчи моментлар эпюраси ҳам шу шаклларда қўрилган. Уларнинг ҳар қайси кесимдаги геометрик йиғиндиси 389-шакл, c да тасвирланган. Энг катта эгувчи момент D кесимда ҳосил бўлиши кўриниб турибди. Унинг қиймати:

$$M_{эг} = \sqrt{M_{0z}^2 + M_{0y}^2} = \frac{1}{3} \sqrt{B_y^2 + B_z^2} = 30 \sqrt{304^2 + 293^2} = 12\,720 \text{ кгсм}.$$

Горизонтал B_y ва вертикал B_z реакцияларнинг қийматларини ҳисоблаб момент эпюралари қўришни ўқувчиларимизга қолдирдик.

Буровчи моментни юқорида аниқлаган эдик. Энди учала мустаҳкамлик назарияси учун чиқарилган формулалардан фойдаланиб, вал диаметрини аниқлаймиз.

II назарияга мувофиқ:

$$M_{х2} = 0,35 M_{эг} + 0,65 \sqrt{M_{эг}^2 + M_0^2} = 13\,029 \text{ кгсм};$$

(111.11) формулага мувофиқ:

$$d = \sqrt[3]{10 \frac{M_{х2}}{[\sigma]}} = \sqrt[3]{10 \frac{13\,029}{1000}} = 5,07 \text{ см}.$$

III назарияга мувофиқ:

$$M_{х3} = \sqrt{M_{эг}^2 + M_0^2} = 13\,350 \text{ кгсм}.$$

$$d = \sqrt[3]{10 \frac{13\,350}{1000}} = 5,10 \text{ см}.$$

IV назарияга мувофиқ:

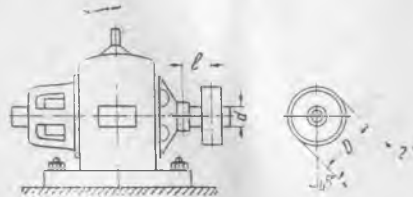
$$M_{х4} = \sqrt{M_{эг}^2 + 0,75 M_0^2} = 13\,200 \text{ кгсм}; \quad d = \sqrt[3]{10 \frac{13\,200}{1000}} = 5,09 \text{ см}.$$

Учала назария ҳам биз текширган ҳол учун бир-бирдан кам фарқ қиладиган натижаларни берди.

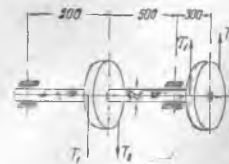
152. Электр двигателининг қуввати (N) 12 от кучига тенг бўлган вали минутига $n = 800$ марта айланади. Ҳаракат тасма орқали узатилади. Шкивнинг диаметри $D = 250$ мм, оғирлиги $G = 70$ кг (390-шакл). Валнинг диаметри III мустаҳкамлик назариясига асосланган аниқлансин. Ватни uzunлиги $l = 120$ мм бўлган консол деб қараш мумкин. Рухсат этилган кучланиш $[\sigma] = 1000$ кг/см².

Бу масала худди юқоридаги масала каби ечилади.

Жавоб: $d = 3,4$ см.



390-шакл.

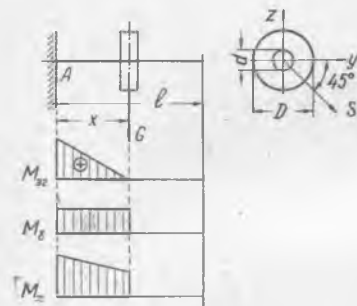


391-шакл.

153. Вал боровчи момент $M_6 = 15000 \text{ кг см}$ таъсирида буралиб, эгувчи момент $M_{\text{эг}} = 8000 \text{ кг см}$ таъсирида эгилади. Унинг диаметри мустаҳкамлик назариясига мувофиқ аниқлансин. Рухсат этилган кучланиш $[\sigma] = 1000 \text{ кг/см}^2$.

Жавоб: $d = 5,35 \text{ см}$.

154. $N = 10$ от кучини узатиб, минутига $n = 300$ марта айланувчи валга диаметри бир хилда $D = 700 \text{ мм}$ бўлган иккита шкив ўрнатилган (391-шакл). Рухсат этилган кучланиш $[\sigma] = 900 \text{ кг/см}^2$. Валнинг диаметри d аниқлансин.



392-шакл.

Кўрсатма: тасмаларнинг тортилиши вертикал йўналишда бўлгани учун вал шу текисликда эгилади. Ҳисоб схемаси икки таянчда ётувчи балка бўлади. Энг катта эгувчи момент таянчлар оралигининг қоқ ўртасида бўлиб, унинг қиймати:

$$M_{\text{эг}} = 163,2 \cdot 50 = 8160 \text{ кг см};$$

$$M_{\text{х2}} = 8370 \text{ кг см}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{8370}{10 \cdot 900}} = 4,52 \text{ см}.$$

155. Минутига $n = 120$ марта айланувчи ва диаметри $d = 8 \text{ см}$ бўлган трансмиссион валнинг узунлиги $l = 80 \text{ см}$ бўлган консолига диаметри $D = 100 \text{ см}$, оғирлиги $G = 200 \text{ кг}$ ва $N = 16$ от кучига тенг қувватни узатувчи шкив ўрнатиш керак (392-шакл). Шкив тасмаларнинг тортилиши горизонтга 45° қия. Валнинг ҳавфсиз ишлаши учун шкивни А таянчдан қандай x масофада ўрнатиш лозим? Ҳисоб III мустаҳкамлик назариясига мувофиқ бажарилсин. Рухсат этилган кучланиш $[\sigma] = 700 \text{ кг/см}^2$.

Ечиш. Аввало боровчи моментни аниқлаймиз:

$$M_6 = 71620 \frac{N}{n} = 71620 \frac{16}{120} = 9449,2 \text{ кг см};$$

айлана зўрқиш:

$$P = \frac{2M_6}{D} = 188,98 \text{ кг}.$$

$$S = 3P = 566,94 \text{ кг}.$$

$$S_y = S \cos 45^\circ = 566,94 \cdot 0,77 = 436,5 \text{ кг},$$

$$S_z = S \sin 45^\circ = 566,94 \cdot 0,77 = 436,5 \text{ кг}.$$

Вертикал йўналишдаги S_z га шкив оғирлигини қўшамиз:

$$V = S_z + G = 436,5 + 200 = 636,5 \text{ кг}.$$

Эгувчи моментни ҳисоблаймиз:

$$M_{\text{эг}} = x \sqrt{S_y^2 + V^2} = x \sqrt{436,5^2 + 636,5^2} = 771,8 \text{ х}.$$

Энди $M_{\text{эг}}$ билан M_6 нинг қийматини (6.10) даги учинчи формулага қўямиз:

$$M_{\text{х3}} = \sqrt{M_6^2 + M_{\text{эг}}^2} = \sqrt{9449,2^2 + 771,8^2}.$$

Буни (111.9) формулага қўйиб, x нинг қийматини аниқлаймиз:

$$\sqrt{9449,2^2 + 771,8^2} = 700 \frac{\pi d^3}{32},$$

бундан:

$$x = 42,8 \text{ см}.$$

112-§. Энг оддий тирсақли валларнинг ҳисоби

Тирсақли валларнинг ҳисоби билан танишамиз. Бунинг учун бир тирсақли энг оддий вални оламиз. У 393-шаклда барча ўлчамлари билан тасвирланган. Унинг маълум қисмлари эгилиш билан буралиш ва нормал зўриқиш таъсирига биргаликда дуч келади. Тирсақли вал асосан қуйидаги қисмлардан иборат:

1. Подшипникларга тиралган иккита асосий бўйинлар A ва B .

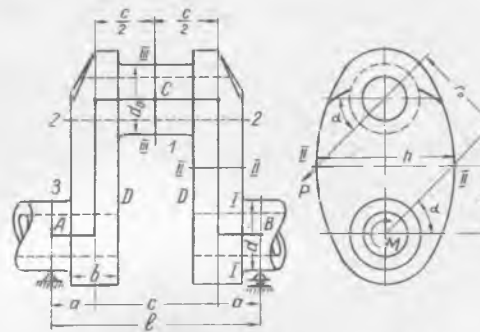
2. Горизонт билан α бурчак ҳосил қилувчи шатун босими P ни қабул қилиб, вални айлантирувчи бўйин C ; бу мотило бўйни деб юритилади.

3. Иккита тўғри тўртбурчак кесимли қисмлар (D). Улар валнинг чеккалари дейилади. Асосий бўйин B нинг подшипникдан чиқиб турган учига (консолига) маховик шкиви ўтказилиб, у тасма орқали узатувчи вазифасини ўтайди. Ҳалиги мотило бўйни орқали шатундан қабул қилинадиган босим P нинг вал ўқиға нисбатан моменти $M_{AB} = Pr \cos \alpha$ шкив орқали валға бериладиган реактив момент M_0 билан мувозанатлашади.

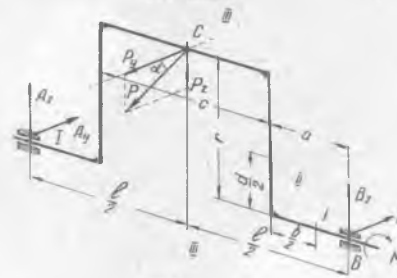
Тирсақли вал икки таянчга тиралган синиқ ўқли стержень деб қаралади (394-шакл). Аммо тирсақли вални бу тарзда тасвирлаш ҳисоб схемасини тузиш учун қилинган бир шартли тадбирдир. Подшипникларни оддий таянч сифатида қарашдан мақсад ҳисоб схемасини соддалаштиришдир, ҳолос.

Аслида эса подшипниклардаги валларни эластик муҳитга қистириб тиралган деб қараш лозим. Шунинг учун тирсақли валларнинг элементар ҳисобини жуда ҳам тақрибий ҳисоб деб қараш керак.

Валнинг барча қисмларидаги нормал зўриқиш ва бурувчи ҳамда эгувчи моментларни ҳисоблаш учун C мотило бўйнига қўйилган P кучни иккита ташкил эгувчига ажратамиз. Улардан тирсақ текислигида ётувчисини P_x билан, у текисликка тик йўналишдагисини P_y билан белгилаймиз (394-шаклда кўрсатилгандек). Шунга мос равишда подшипник реакциялари A ва B ни ҳам шундай ташкил ётувчиларга ажратамиз. Уларнинг қиймати иккала текисликдаги кучларнинг мувозанатлашиш шартидан аниқланади. Текширилаётган тирсақли валнинг энг хавфли кесимлари қуйидагилардир: 1) асосий бўйин билан чекканинг туташтирилган жойидаги I—I кесими; 2) чекканинг пастки кесими II—II; 3) мотило бўйни C нинг ўртасидаги куч қўйилган III—III кесимлар.



393-шакл.



394-шакл.

Бу кесимлардаги нормал зуриқишларни, буровчи ва эгувчи моментларни ҳисоблашда координата системаларини ҳар қайси текширилатган кесим учун бундан олдин танланганидек танлаймиз, яъни x ўқини бруснинг ўқи бўйлаб, y ва z ўқларини кесимнинг оғирлик маркази орқали ўтказамиз. У ҳолда ҳар бир кесим учун x га нисбатан олинган момент буровчи бўлиб, y ва z га нисбатан олинган моментлар тирсак текислигидаги ва унга тик текислиқдаги эгувчи моментлардир.

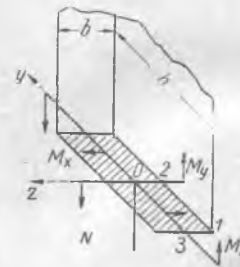
Энди, ҳалиги айтилган кундаланг кесимлардаги нормал куч, буровчи ва эгувчи моментларни текширилатган кесимнинг ўнг томонидаги куч ва жуфт кучларга нисбатан ҳисоблаймиз. Уларнинг учала кесимдаги қийматларини қуйидаги жадвалга тўплаймиз.

Валнинг қисми	Кесим	Кесимдан ўнг таянчга бўлган масофа	Турли кесимлардаги N , M_x , M_y ва M_z ларнинг ифодаси			
			N	M_x	M_y	M_z
Валнинг асосий бўйни	I	$a - \frac{b}{2}$	0	$M_0 = P_y r$	$B_z \left(a - \frac{b}{2}\right)$	$B_y \left(a - \frac{b}{2}\right)$
Валнинг ўнг чеккаси	II	$a \frac{d}{2}$	$-B_z$	$B_y a$	$B_z a$	$M_0 - B_y \frac{d}{2}$
Мотило бўйни	III	$\frac{l}{2}$	0	$M_0 = B_y r$	$B_z \frac{l}{2}$	$-B_y \frac{l}{2}$

II кесимдаги моментларни ҳисоблашда 395-шаклдаги схемага эътибор қилинсин.



395-шакл.



396-шакл

I ва III кесимлардаги кучланишлар бирданига буровчи ва эгувчи моментларнинг қўшма таъсирида ҳосил бўлади. Мазкур кесимлардаги эгувчи моментларнинг қиймати қуйидагича бўлади:

$$M_{эгI} = \left(a - \frac{b}{2}\right) \sqrt{B_y^2 + B_z^2} = \left(a - \frac{b}{2}\right) B_y = \frac{1}{2} \left(a - \frac{b}{2}\right) P,$$

$$M_{эгIII} = \frac{l}{2} \sqrt{B_y^2 + B_z^2} = \frac{l}{2} B = \frac{Pl}{4}.$$

Бу кесимлар учун мустаҳкамлик шартини учинчи назарияга мувофиқ ёзамиз:

$$\frac{\sqrt{M_{\text{гр}}^2 + M_0^2}}{W} = \frac{32}{\pi d_0^3} \sqrt{M_{\text{гр}}^2 + \frac{1}{4} \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 P^2} \leq [\sigma],$$

$$\frac{\sqrt{M_{\text{гр}}^2 + M_0^2}}{W} = \frac{32}{\pi d_0^3} \sqrt{\frac{P^2 l^2}{16} + (M_0 - B_y r)^2} \leq [\sigma].$$

Бу тенгламалардан асосий бўйин билан мотило бўйиннинг диаметрлари d ва d_0 аниқланади. II кесимда буровчи ва эгувчи моментлардан ташқари, яна сиқувчи куч N ҳам таъсир кўрсатаётир (396-шакл.)

Чекка материалнинг мустаҳкамлиги текширилганда кесимнинг шаклда кўрсатилган учта нуқтаси 1, 2, 3 даги кучланишларни аниқлаш лозим. Биринчи нуқтада $\tau_1 = 0$ бўлиб, ундаги нормал кучланиш қуйидагичадир:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -\frac{N}{F} - \frac{M_y}{I_y} z_1 - \frac{M_z}{I_z} y_1 = \frac{B_z}{bh} + \frac{B_z a}{\frac{h^3 h}{12}} \cdot \frac{b}{2} + \frac{\left(M_0 - B_y \frac{d}{2}\right)}{\frac{h^3 b}{12}} \cdot \frac{h}{2} = \\ &= \frac{bz}{bh} \left(1 + \frac{6a}{b}\right) + \frac{6 \left(M_0 - B_y \frac{d}{2}\right)}{h^2 b} \leq [\sigma] \end{aligned} \quad (1)$$

Иккинчи нуқтада M_z таъсирида ҳосил бўладиган кучланиш нолга тенгдир, шунинг учун:

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= -\frac{N}{F} - \frac{M_y}{I_y} z_2 = \frac{B_z}{bh} + \frac{B_z a}{\frac{h^3 h}{12}} \cdot \frac{b}{2} = \frac{B_z}{h^2} (b + 6a), \\ \tau_2 &= \tau_{\max} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{B_y a}{\frac{ab^3}{3}}. \end{aligned}$$

Тўғри тўртбурчак кесим учун α коэффициентининг қиймати 53-параграфдаги жадвалда берилган. Бу нуқта учун мустаҳкамлик шarti қуйидагича ёзилади:

$$\sigma_{P_2} = \sqrt{\sigma_2^2 + 4\tau_2^2} = \frac{1}{h^2} \sqrt{B_z^2 (b + 6a)^2 + 4 \frac{B_y^2 a^2 h^2}{\alpha^2 b^3}} \leq [\sigma]. \quad (2)$$

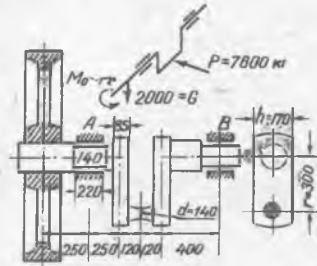
Учинчи нуқтада M_y дан ҳосил бўладиган нормал кучланиш нолга тенг.

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= -\frac{N}{F} - \frac{M_z}{I_z} y_3 = \frac{B_z}{bh} + \frac{6 \left(M_0 - B_y \frac{d}{2}\right)}{bh^2}, \\ \tau_3 &= \tau_{\max} = \frac{B_y a}{b^3} \cdot \frac{\gamma}{\alpha}. \end{aligned}$$

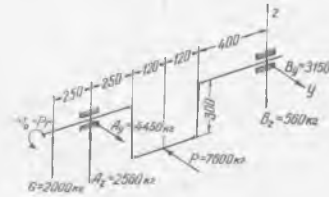
γ нинг қиймати ҳам юқорида айтиб ўтилган жадвалда берилган. Бу ҳолда мустаҳкамлик шarti қуйидагича ёзилади:

$$\sigma_{P_3} = \sqrt{\sigma_3^2 + 4\tau_3^2} = \sqrt{\frac{1}{bh^2} \left[B_z h + 6 \left(M_0 - B_y \frac{d}{2}\right) \right]^2 + 4 B_y^2 a^2 \left(\frac{h^2 \gamma}{b^3 \alpha} \right)^2} \leq [\sigma]. \quad (3)$$

$\frac{h}{b}$ нисбатнинг қиймати маълум бўлса, вал чеккасининг ўлчамларини учала (1), (2), (3) шартлардан аниқлашимиз мумкин. Бу учта формуладан қайси бири чекка ўлчамлари учун энг катта қийматни берса, шу қийматни қабул қилиш лозим. Бу айтилганларни битта конкрет масала билан ойдинлаштирамиз.



397-шакл



398-шакл

156. 397-шаклда тасвирланган тирсакли валнинг асосий ва мотило бўйни (шатун цапфаси) диаметрлари d_1 , d_2 ва чекка ўлчамлари b , h ланинг учинчи мустақамлик назариясига мувофиқ тўғри танланганлиги текширилсин. Ҳисоб тирсакли валнинг шаклда тасвирланган энг қулайсиз ҳолати учун бажарилсин. Тегишли юкларнинг қиймати шаклда курсатилган. Вал ва чекка материали учун рухсат этилган кучланиш $[\sigma] = 900 \text{ кг/см}^2$.

Ечиш. Тирсакли вал схематик равишда 398-шаклда тасвирланган.

Тирсакли валнинг асосий бўйнидаги боровчи момент:

$$M_0 = 7600 \cdot 30 = 228000 \text{ кгсм.}$$

Вертикал текислик ағи эгувчи момент (А кесим учун):

$$M_{\text{эг}} = 2000 \cdot 25 = 50000 \text{ кгсм.}$$

III назарияга мувофиқ ҳисоб моменти:

$$M_x = \sqrt{M_{\text{эг}}^2 + M_0^2} = 233000 \text{ кгсм.}$$

Ҳисоб тенгламаси:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_x}{W} = \frac{233000}{0.14^3} = 865 \text{ кг/см}^2 < [\sigma] = 900 \text{ кг/см}^2.$$

Асосий бўйинининг мустақамлиги етарлидир.

Мотило бўйнидаги боровчи ва эгувчи моментларни таянч реакциялари аниқлангандан кейин ҳисоблашимиз мумкин. y_A , z_A ва y_B , z_B ўқларга нисбатан тирсакли валга қўйилган кучларнинг моментлари йиғиндисини нолга тенглаштириб, таянч реакциялари A_y , A_z , B_y , B_z ни топаемиз:

$$\begin{aligned} A_y &= 4450 \text{ кг;} & A_z &= 2560 \text{ кг;} \\ B_y &= 3150 \text{ кг;} & B_z &= 560 \text{ кг.} \end{aligned}$$

Мотило бўйнида боровчи момент:

$$M_0 = 3150 \cdot 30 = 94500 \text{ кгсм.}$$

Горизонтал ва вертикал текисликлар ағи эгувчи моментлар:

$$M_z = 3130 \cdot 52 = 164000 \text{ кгсм.}$$

$$M_y = 560 \cdot 52 = 29100 \text{ кгсм.}$$

Тула эгувчи момент:

$$M_{\text{эг}} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{(29100)^2 + (164000)^2} = 166000 \text{ кгсм.}$$

Ҳисоб моменти:

$$M_x = \sqrt{M_{\text{эг}}^2 + M_0^2} = \sqrt{(166000)^2 + (94500)^2} = 192000 \text{ кгсм.}$$

Мотило бўйидаги келтирилган кучланиш:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_p}{W} = \frac{192\,000}{0,1 \cdot 14^3} = 710 < [\sigma] = 900 \text{ кг/см}^2.$$

Чекканинг энг хавфли кесими чап чекканинг юқори кесимидир. Бу кесимдаги зўриқишлар 399-шаклда тасвирланган бўлиб, уларнинг қиймати қуйидагича ҳисобланади:

$$M_x = M_0 = A_y \cdot 25 = 4\,450 \cdot 25 = 111\,200 \text{ кг см};$$

$$N_x = A_z - G = 560 \text{ кг};$$

$$M_z = M_0 = 22\,800 \text{ кг см};$$

$$Q_z = 0;$$

$$M_y = G \cdot 50 - A \cdot 25 = 2\,000 \cdot 50 - 2\,560 \cdot 25 = 36\,000 \text{ кг см};$$

$$Q_y = 4\,450 \text{ кг}.$$

Кесимда ҳосил бўладиган бу зўриқишларга тегишли кучланишларни аниқлаймиз:

$$\tau_{M_0} = \frac{M_0}{a h b^2} = \frac{111\,200}{0,25 \cdot 17 \cdot 8,5^2} = 365 \text{ кг/см}^2; \quad \tau_{M_0} = \gamma \tau' M_0 = 0,795 \cdot 365 = 290 \text{ кг/см}^2;$$

$$\sigma_N = \frac{N_x}{F} = \frac{560}{17 \cdot 8,5} = 4 \text{ кг/см}^2;$$

$$\sigma_{M_z} = \frac{M_z}{W_z} = \frac{22\,800 \cdot 6}{8,5 \cdot 17^2} = 560 \text{ кг/см}^2;$$

$$\sigma_{M_y} = \frac{M_y}{W_y} = \frac{36\,000 \cdot 6}{17 \cdot 8,5^2} = 176 \text{ кг/см}^2;$$

$$\tau_{Q_y} = \frac{3Q_y}{2bh} = \frac{3 \cdot 4\,450}{2 \cdot 8,5 \cdot 17} = 46 \text{ кг/см}^2.$$

399-шаклда кесим бўйича бу кучланишлар эпюраси тасвирланган. Чекка хавфли кўндаланг кесимининг мустаҳкамлигини ундаги А ва В нуқталарга нисбатан текшираемиз. Улардаги энг катта нормал ва тангенциал кучланишлар қуйидагича бўлади:

$$\sigma_{\text{ч.А}} = 4 + 560 + 176 = 740 \text{ кг/см}^2 < [\sigma] = 900 \text{ кг/см}^2, \quad \tau_A = 0$$

А нуқтанинг кучланиши:

$$\sigma_{\text{ч.А}} = \sqrt{\sigma_A^2 + 4\tau_A^2} = 740 \text{ кг/см}^2 < [\sigma] = 900 \text{ кг/см}^2.$$

В нуқтанинг кучланишлари:

$$\sigma_{\text{ч.В}} = 4 - 176 = -172 \text{ кг/см}^2; \quad \tau_B = 365 + 46 = 411 \text{ кг/см}^2.$$

Бу нуқтадаги ҳисоб кучланиши:

$$\sigma_{\text{ч.В}} = \sqrt{\sigma_B^2 + 4\tau_B^2} = \sqrt{(172)^2 + 4 \cdot (411)^2} = 840 \text{ кг/см}^2 < [\sigma] = 900 \text{ кг/см}^2$$

С нуқтанинг кучланишлари:

$$\sigma_C = 4 + 560 = 564 \text{ кг/см}^2; \quad \tau_C = 290 \text{ кг/см}^2$$

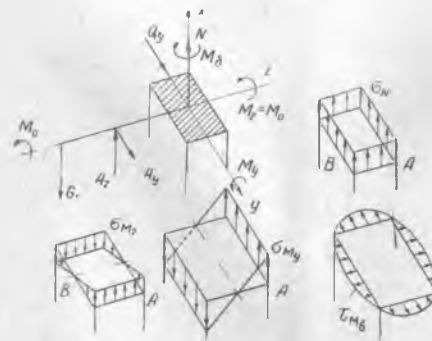
ва шу нуқтанинг ҳисоб кучланиши:

$$\sigma_{\text{ч.С}} = \sqrt{\sigma_C^2 + 4\tau_C^2} = \sqrt{(564)^2 + 4 \cdot (290)^2} = 620 \text{ кг/см}^2 \leq [\sigma] = 900 \text{ кг/см}^2.$$

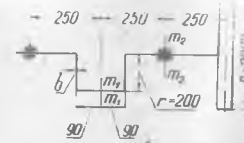
Чекканинг мустаҳкамлиги етарлидир.

Хавфли кўндаланг кесимдаги энг кучланган В нуқтанинг мустаҳкамлиги етарлидир. 157. Бир цилиндрли горизонтал машина $N = 25$ от кучи қувват беради (400-шакл).

Валнинг минутига айланиш сон $n = 200$. Валнинг тирсак текислиги шатун билан бир текисликда ётганда, шатуннинг мотило бўйига кўрсатадиган босими 4 000 кг бўлиб, тирсак текислигининг вертикал ҳолатида 2 300 кг га тенгдир (кейинги ҳолда босимни горизонтал йўналишда деб қабул қилиш мумкин). Тирсакли валнинг ўнг учига



399-шакл.



400-шакл.

ўрнатилган маховикининг диаметри $D = 2$ м бўлиб, оғирлиги $G = 1\,000$ кг. Тасмадарнинг тортилишидан валга таъсир қиладиган босим айлана зуриқишининг уч ҳисса қийматига тенгдир. Валнинг қолган ўлчамлари шаклда берилган. III мустаҳкамлик назариясига мувофиқ, $m_1 — m_1$ ва $m_2 — m_2$ кесимларнинг диаметрлари d_1 ва d_2 аниқлансин. Чекканинг турри тўртбурчак қўндаланг кесими баландлиги h ни ҳалиги диаметрлардан каттасининг 1,2 ҳиссасига ва кенглигини $b = 0,5h$ га тенг деб қабул қилиб, чекканинг мустаҳкамлиги текширилсин. Тасмалар горизонтал ҳолатда шатун томонга қараб йўналган. Рухсат этилган кучланиш $[\sigma] = 800$ кг/см².

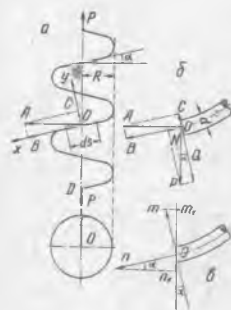
Жавоб. $d_1 = 8,9$ см; $d_2 = 8,7$ см; $h = 11$ см; $b = 5,5$ см. Ҳисоб кучланиши:

$$\sigma_4 = 745 \text{ кг/см}^2 < [\sigma] = 800 \text{ кг/см}^2.$$

113- §. Цилиндрик винтсимон пружиналар ҳисоби.

Умумий ҳол

54-параграфда қадами кичик цилиндрик винт пружиналарни буралиш-гагина ҳисоблаган эдик. Энди, цилиндрик пружиналар ҳисобининг умумий ҳолини кўриб чиқамиз. Қадами катта цилиндрик винт пружинага ўқи бўйлаб чўзувчи P куч таъсир этади, деб фараз қилайлик (401-шакл). Винтсимон пружина ўрамининг бирор O нуқтасидан пружина



401-шакл

ўқига ўтказилган уринма бўйлаб x ўқини йўналтирамиз. y ўқини шундай танлаймизки, y O нуқтада x ўқи билан бирга пружина ўралган цилиндрнинг уринма текислигини ҳосил қилсин. O нуқтадан пружина ўрамининг ўқига (x ўқига) тик текислик билан ўрамни икки қисмга ажратиб, бир қисми кесимининг O нуқтасига P кучни келтирамиз (401-шакл, б). Натижада текширилаётган қисмда P кучдан ташқари, HOY текислигида ётувчи ва моменти PR га тенг бўлган жуфт куч ҳам ҳосил бўлади. Бу жуфт моменти OA вектор билан тасвирлаймиз. Векторнинг йўналишини ўнақай винт системаси қоида-сига мувофиқ танлаймиз, яъни OA векторнинг учи A дан момент йўналишини соат стрелкаси

айланишига тескари томонга каратиб қурамиз. Энди, текширилаётган қўндаланг кесимга қўйилган момент ва куч векторларини ox ва oy ўқлари бўйича ажратиб, ҳар қайси компонентнинг таъсирини алоҳида текширамиз.

Момент векторининг винт ўқига уринма бўлган ox ўқидаги проекцияси OB буровчи момент бўлиб, унинг қиймати қуйидаги ифодадан топилади:

$$M_x = PR \cos \alpha. \quad (a)$$

Момент векторининг oy ўқидаги проекцияси OC вектор эгувчи момент бўлиб, унинг қиймати:

$$M_y = PR \sin \alpha. \quad (b)$$

бўлади. Булардан ташқари кесим марказига нормал куч $N = P \sin \alpha$ билан кесиб ётувчи куч $Q = P \cos \alpha$ таъсир қилади. Қадами кичик винт ҳисобини текширганимизда кесиб ётувчи куч таъсиридан ҳосил бўладиган кучланиш жуда кичик бўлгани сабабли уни ҳисобга олмаган эдик. Бунда ҳам нормал ва кесиб ётувчи кучлар таъсирини юқоридаги мулоҳазага кўра, эгувчи ва буровчи моментларга нисбатан ҳисобга олмаймиз. Текширилаётган нуқта атрофидан ажратилган элементар кубик мураккаб кучланиш ҳо-

латида бўлгани сабабли, олдин у нуқтадаги бош кучланишларни аниқлаймиз. Пружина кесимидаги энг катта нормал ва тангенциал кучланишларни топишда, буралиш билан эгилишнинг бирга таъсиридан ҳосил бўладиган кучланишни аниқлаш учун чиқарилган (111.1) ва (111.3) формулаларидан фойдаланамиз.

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_{\text{sr}} + \sqrt{\sigma_{\text{sr}}^2 + 4\tau_y^2}) = \frac{M_y + \sqrt{M_y^2 + M_x^2}}{W_6} = \frac{16PR}{\pi d^3}(1 + \sin \alpha) \quad (113.1)$$

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_{\text{sr}}^2 + 4\tau_6^2} = \frac{\sqrt{M_y^2 + M_x^2}}{W_6} = \frac{16PR}{\pi d^3} \quad (113.2)$$

бу ерда d — пружина ўрамининг диаметри. (113.2) формула (54.2) формулага мос келаётир. Пружинанинг чузилиши δ ни аниқлаш учун пружина деформациясининг потенциал энергиясини ҳисоблаймиз. Пружинадан ажратилган ds узунликдаги элементда тўпланган энергия буралиш ва эгилишдан ҳосил бўлган энергиялар йиғиндисига тенгдир. Буралишдаги потенциал энергияни (52.2) формула ёрдамида ҳисоблаган эдик, у ажратилган элемент учун $\frac{M_x}{2GI_p}$ га тенг. Эгувчи момент таъсирида ажратилган ds элементининг

икки учига тегишли кесимлари бир-бирига нисбатан оғиб, $d\varphi$ бурчагини ҳосил қилади. Бу оғишда эгувчи момент M_y иш бажаради, бу иш $\frac{M_y d\varphi}{2}$

га тенг; бу ерда $d\varphi = \frac{ds}{2} \cdot \frac{1}{\rho}$ нинг қиймати эгувчи момент M_y орқали (87.4) формула билан ифодаланган. Шунинг учун, ажратилган элементда эгилишдан ҳосил бўлган потенциал энергия $\frac{M_y^2 ds}{2EI_y}$ га тенг. Ажратилган элементдаги тўла потенциал энергия қуйидаги формула билан ифодаланади:

$$dU = \left(\frac{M_x^2}{2GI_p} + \frac{M_y^2}{2EI_y} \right) ds.$$

Пружинада тўпланган тўла потенциал энергия қуйидаги формула орқали аниқланади:

$$U = \int_0^l \left(\frac{M_x^2}{2GI_p} + \frac{M_y^2}{2EI_y} \right) ds = PR^2 \left(\frac{\cos^2 \alpha}{2GI_p} + \frac{\sin^2 \alpha}{2EI_y} \right) l, \quad (113.3)$$

бу ерда l — пружина ўрамининг ёйилгандаги узунлиги бўлиб, унинг қиймати:

$$l = \frac{2\pi Rn}{\cos \alpha}, \quad (113.4)$$

бу ерда n — ўрамлар сони. Пружина δ қадар чузилганда чузувчи куч P қуйидаги ишни бажаради:

$$A = \frac{P\delta}{2}.$$

Бу иш пружинада тўпланган потенциал энергияга миқдор жиҳатидан тенг бўлади; шунинг учун юқорида U ва A учун ҳосил бўлган ифодаларни тенглаштириб, δ ни аниқлаймиз:

$$\delta = \frac{32 PR^2 l}{\pi d^4} \left(\frac{2 \sin^2 \alpha}{E} + \frac{\cos^2 \alpha}{G} \right). \quad (113.5)$$

Бу формулада $\alpha = 0$ бўлса, унда (54.4) формула ҳосил бўлади. Пружина чўзилганда унинг учларига тегишли кесимлар цилиндр ўқиға нисбатан айланади. Бу айланишда ҳосил бўлган φ бурчакни ажратилган ds элементнинг бурчак деформациялари орқали ифодалаймиз. ds элементнинг бурилиш бурчаги (49.2) формулага мувофиқ $\frac{M_x dx}{GI_p}$ га тенг. Бу бурчак кесимларнинг ox ўқиға нисбатан айланишидан ҳосил бўлади. Кинематика курсидангидек, айланиш бурчагини вектор тарзида тасвирласак, у ox ўқи бўйлаб йўналган $\overline{on}$ вектори бўлади. Унинг чўзувчи P куч йўналишидаги проекцияси $\overline{on}_1$ дир (401-шакл, в):

$$\overline{on} = \frac{M_x dx}{GI_p} \sin \alpha. \quad (c)$$

Пружинадан ажратилган элементнинг эгилиши натижасида унинг кесимлари айланади, бу айланиш бурчаги (87.4) формулага мувофиқ $\frac{M_y dx}{EI_p}$ га тенг.

Айланиш Q_y ўқи атрофида бўлади. Уни $\overline{om}$ вектор билан тасвирлаймиз (401-шакл, в). Бу векторнинг P куч йўналишидаги проекцияси $\overline{om}_1$ бўлади:

$$\overline{om}_1 = \frac{M_y dx}{EI_y} \cos \alpha. \quad (d)$$

ds элементнинг P куч йўналиши атрофида тўла айланиш бурчаги:

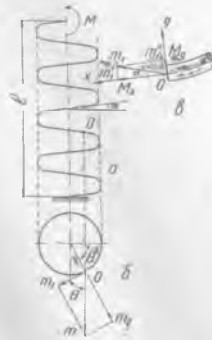
$$d\varphi = \left(\frac{M_x \sin \alpha}{GI_p} - \frac{M_y \cos \alpha}{EI_y} \right) ds$$

Пружинанинг бир учи маҳкамланган бўлса, бошқа учининг айланиш бурчагини топиш учун юқоридаги ифодани интеграллаймиз:

$$\varphi = \int_0^l \left(\frac{M_x \sin \alpha}{GI_p} - \frac{M_y \cos \alpha}{EI_y} \right) ds = \left(\frac{M_x \sin \alpha}{GI_p} - \frac{M_y \cos \alpha}{EI_y} \right) l. \quad (f)$$

Бу ифодада M_x ва M_y ларнинг қийматларини қўйиб ва доира шаклидаги сим учун $I_p = 2I_y$ эканлигини эътиборга олиб, φ учун қуйидаги формулани оламиз:

$$\varphi = \frac{32}{\pi d^4} \frac{\mu}{E} PRl \sin 2\alpha. \quad (113.6)$$



402-шакл.

Пружинанинг жуфт куч таъсирида эгилиши

Пружинаға унинг шакл текислигида ётувчи ва моменти M бўлган жуфт куч қўйилган бўлсин (402-шакл). Бундай ҳол амалда жуда кўп учрайди. Бунда пружина жуфт куч ётган текисликда эгилади. Шунинг учун пружина ўрамининг ҳар бир қўндаланг кесимидаги ички зўриқишларнинг бош момент вектори шакл текислигига тик йўналган. Шунга кўра, пружинанинг бирор кесимидаги ички кучларнинг моменти (402-шакл, б) да кўрсатилганидек $\overline{om}$ вектори бўлсин. Координата ўқларини бундан олдин танланганидек танлаб, $\overline{om} = \overline{M}$ векторини координата ўқлари бўйлаб ажратамиз:

$$\overline{om}_2 = \overline{M}_1 = M \sin \theta. \quad (a)$$

M_1 момент пружина стерженининг цилиндрга O нуқтадан ўтказилган уринма текислик сатҳида ётади. M_2 моменти O нуқта билан винт чизиги ўралган цилиндр ўқи орқали ўтувчи текисликда ётгани сабабли уни иккита ташкил этувчига ажратамиз (402-шакл, в). $\overline{om}_1$ моментнинг ou ўқидаги ташкил этувчиси:

$$\overline{om}_1'' = -om \sin \alpha = -M \sin \theta \sin \alpha \quad (b)$$

булади, бу ерда om_1'' эгувчи моментдир, уни (a) ифода билан геометрик қўшиб, текширилатган кесимдаги тўла эгувчи моментни топамиз:

$$M_{\text{эг}} = M = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \sin^2 \alpha}$$

$\overline{om}_1$ векторнинг ox ўқидаги проекцияси буровчи момент бўлиб, унинг қиймати қуйидагига тенг:

$$om'_1 = om_1 \cos \alpha = M \sin \alpha \cos \alpha. \quad (c)$$

Эгувчи ва буровчи моментлар топилгач, кучланишни ҳисоблаш қийин эмас. Энди пружинанинг деформациясини ҳисоблашга ўтамиз. Пружинадан ажратилган ds элементда тўпланган потенциал энергия:

$$dU = M^2 \left\{ \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \sin^2 \alpha}{2EI_y} + \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \alpha}{2GI_p} \right\} ds, \quad (d)$$

$$ds = \frac{Rd\theta}{\cos \alpha}.$$

Тўла потенциал энергияни топиш учун (d) ни $\theta = 0$ ва $\theta = 2\pi n$ чегарасида интеграллаймиз. Интегрални ҳисоблашда $\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \pi$ эканлигини кўзда тутиб, U нинг қийматини топамиз:

$$U = \frac{M^2 R \pi n}{\cos \alpha} \left\{ \frac{1 + \sin^2 \alpha}{2EI_y} + \frac{\cos^2 \alpha}{2GI_p} \right\}. \quad (e)$$

Пружина тепа учининг айланиш бурчаги ψ ни аниқлаш учун, қўйилган жуфт куч моменти M нинг бажарган ишини U га тенглаштирамиз:

$$\frac{M\psi}{2} = \frac{M^2 R \pi n}{\cos \alpha} \left\{ \frac{1 + \sin^2 \alpha}{2EI_y} + \frac{\cos^2 \alpha}{2GI_p} \right\},$$

бундан:

$$\psi = \frac{MR \pi n}{EI_y} \left\{ \frac{1 + \sin^2 \alpha}{EI_y} + \frac{\cos^2 \alpha}{GI_p} \right\}. \quad (113.7)$$

Пружина стерженининг узунлиги $l = \frac{2\pi R n}{\cos \alpha} \sin \alpha$ ни кўзда тутиб, (113.7) ни қуйидагича ёзамиз:

$$\psi = \frac{M 2\pi R n \sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\left\{ \frac{1 + \sin^2 \alpha}{2EI_y} + \frac{\cos^2 \alpha}{2GI_p} \right\}}{\sin \alpha} = \quad (113.8)$$

бу ерда

$$B = \frac{\sin \alpha}{\frac{1 + \sin^2 \alpha}{2EI_y} + \frac{\cos^2 \alpha}{2GI_p}}. \quad (113.9)$$

Бир учи билан қистириб тиралган балканинг бошқа учига жуфт куч қўйилган ҳолда, бу учининг айланиш бурчаги $\varphi = \frac{Ml}{EI}$ эди. Буни ҳозиргина чиқарилган (113.8) формула билан солиштириб, B ни пружинанинг соф эгилишдаги бикрлиги деб ҳисобласа бўлади. Бу хулосадан фойдаланиб, пружинанинг турли ҳолларда эгилишидаги қўчишларига (эгилиш, айланишига) оддий консол балкалар учун чиқарилган формулаларни қўлласа бўлади, бунда оддий бикрлик ўрнига (113.9) билан ифодаланган B бикрлик қўйилса kifоя. Масалан, пастки учи билан маҳкамланган пружинанинг тепа учига горизонтал йўналган P куч қўйилган бўлса (403- шакл), пружина тепа учининг горизонтал қўчиши



403- шакл.

$$\delta = \frac{Pl^3}{3B}$$

бўлади. Пружинанинг қадами кичик бўлса, тақрибан

$$\sin^2 \alpha = 0, \cos^2 \alpha = 1 \text{ деб } \sin \alpha = \frac{l}{s},$$

$$l = \sin \alpha \frac{2\pi Rn}{\cos \alpha} \sin \alpha$$

ни ҳосил қиламиз. Пружинанинг эгилишдаги бикрлиги қуйидаги формуладан аниқланади:

$$B = \frac{2El_y l}{s} - \frac{1}{\frac{E}{1+2G}}. \quad (113.10)$$

XVII БОБ

БАЛКАЛАРНИНГ ЭГИЛИШИГА ОИД БАЪЗИ МУРАККАБ ҲОЛЛАР

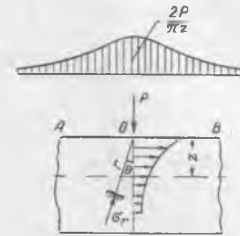
114- §. Эгилишда ҳосил бўлган кучланишларнинг тўпланиши

Эгилишда ҳосил бўлган нормал кучланишлар учун юқорида чиқарилган формулалар куч қўйилган нуқталардан анча узоқда бўлган кесимлар учун қаноатланарли натижалар беради. Куч қўйилган нуқталардан бу кесимларгача бўлган масофа камида кўндаланг кесим ўлчамларига тенг бўлиши керак. Шу сабабли, балка кўндаланг ўлчамлари узунлигига қараганда қанча кичик бўлса, олинган натижалар шунча аниқроқ бўлади. Куч қўйилган нуқталар яқинида кучланишлар тўплами ҳосил бўлиб, уларга кучланишлар учун олдин чиқарилган ўзгариш қонунлари тўғри келмайди. Тўпланма куч таъсирида кучланишлар бўйлаб тўпланиш қонуни мураккаб характерда бўлиб, уни элементар назария асосида текшириб бўлмайди. Тўпланма кучдан ҳосил бўладиган кучланишлар тўпламини кўз олдимизга келтиришимиз учун баланд балка оламит ва унинг тепасига қўйилган тўпланма P кучдан кесим юзасида ҳосил бўладиган кучланишнинг тўпланиш қонунини ифодаловчи формула билан танишамиз (404- шакл).

Бу масаланинг эластиклик назарияси асосида аниқ ечилиши шуни кўрсатадики, балканинг ҳар бир нуқтасида, шу нуқтани куч қўйилган O нуқта билан туташтирувчи радиус бўйлаб, O нуқтага қараб йўналган сиқувчи кучланиш ҳосил бўлади. Бундай кучланиш *радиал кучланиш* деб аталади ва у σ_r билан белгиланади. Унинг қиймати қуйидаги формуладан аниқланади:

$$\sigma_r = \frac{P}{\pi b} \cdot \frac{\cos \theta}{r}. \quad (114.1)$$

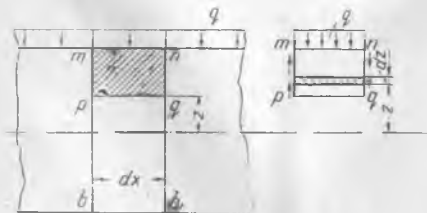
Бу формуладаги P ва θ нинг қиймати 404-шаклда кўрсатилган; b —балканинг қалинлиги. Қўрамизки, A нуқта куч қўйилган O нуқтадан узоқлашган сари, радиал кучланиш σ_r тез камаяди. Шунинг учун кучланишлар тўплаиши фақат куч қўйилган нуқтадагина аҳамиятга эгадир. Кучланишнинг P куч таъсир чизиги бўйича ўзгариш графиги ҳам 404-шаклда тасвирланган.



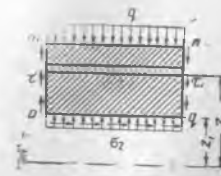
404-шакл.

Балка ёйилган юк таъсиридан эгилса, унда ҳосил бўладиган кучланишлар тўпламини элементар мулоҳазалар асосида тақрибий равишда текшириш мумкин 405-шаклда текис ёйилган юк таъсирдаги тўғри тўртбурчак кесимли балка тасвирланган. Балканинг тепа юзига қўйилган ёйилма юк унинг бўйлама толаларини бир-бирига сиқади. Бунинг натижасида балка ўқида тик йўналишда қўшимча сиқувчи кучланишлар ҳосил бўлади. Шу кучланишларнинг нейтрал қатламдан z масофадаги pq юзада ҳосил бўладиган қийматини аниқлаймиз. Бунинг учун балкадан бир-бирига чексиз яқин кўндаланг кесимлар ва ҳалиги pq текислик билан $mnpq$ элементни ажратамиз. Бу элементнинг юқори томони mn балканинг ёйилган юк қўйилган сиртига мос келади (406-шакл). Шунинг учун бу томонга qdx куч таъсир қилади; mp ва nq томонларга эса нормал ва тангенциал кучланишлар таъсир қилади. $mnpq$ элементнинг мувозанатини текшириш учун унга қўйилган кучларнинг вертикал oz ўқдаги проекциялари йиғиндисини нолга тенглаштирамиз. Шунинг учун расмда ҳалиги элементнинг mp ва nq томонларига таъсир этувчи кучланишлардан тангенциал кучланишларгина тасвирланган.

mp кесимдаги кесиб ўтувчи куч Q бўлиб, у oz ўқи бўйлаб юқорига йўналган деб фараз қилайлик, у ҳолда nq кесимдаги кесиб ўтувчи куч



405-шакл.



406-шакл.

$(Q-qdx)$ га тенг бўлади. Нейтрал қаватдан z_1 масофадаги элементни олсак, ундаги тангенциал кучланишлар pm ва qn томонлари учун тегишлича:

$$\tau = \frac{QS(z_1)}{I_y b}; \quad \tau_1 = \frac{(Q-qdx)S(z_1)}{I_y b}$$

бўлади. Бу кучланишларнинг pm ва qn бўйича кўрсатадиган таъсирини T ва T_1 десак, улар тегишлича:

$$T = \frac{Q}{I_y b} \int_z^{h/2} S(z_1) b dz; \quad T_1 = \frac{(Q-qdx)}{I_y b} \int_z^{h/2} S(z_1) b dz$$

бўлади. pq томони бўйича таъсир кўрсатаётган нормал кучланишни σ_z билан белгилаймиз. Бу номаълум кучланишни dx мобайнида тенг ёйилган деб фараз қиламиз. У ҳолда pq юза бўйича таъсир қилувчи нормал куч $\sigma_z dx$ га тенг бўлади. Энди, ажратилган элементнинг мувозанат тенгламасини тузамиз:

$$\sum Z = -qdx - \frac{(Q-qdx)}{I_y b} \int_z^{h/2} S(z_1) b dz_1 + \frac{Q}{I_y b} \int_z^{h/2} S(z_1) b dz_1 + \sigma_z dx = 0,$$

бундан:

$$\sigma_z = \frac{q}{b} \left[1 - \frac{1}{I_y z} \int_z^{h/2} S(z_1) dz_1 \right] \quad (114. 2)$$

келиб чиқади.

Статик момент $S(z_1)$ ва инерция моменти I_y нинг қийматини

$$S(z_1) = \frac{bh^2}{8} \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right); \quad I_y = \frac{bh^3}{12}$$

формулалардан (114. 2) га қўйсак, σ_z учун қуйидаги ифодани оламиз:

$$\sigma_z = \frac{q}{2b} \left(1 + 3 \frac{z}{h} - 4 \frac{z^2}{h^2} \right). \quad (114. 3)$$

Бу радиал кучланишнинг қийматини баҳолаш учун оралиғи $l = 4$ м бўлган икки таянчга тиралган 20⁶-номерли қўштавр балкани оламиз. Балкага интенсивлиги $q = 2$ т/м бўлган ёйилган юк қўйилган; балканинг юқори юзидаги максимал сиқувчи кучланиш $\sigma_{\max}$ нинг қийматини шу юзада ҳосил бўладиган радиал кучланиш $(\sigma_z)_{\max}$ билан таққослаб кўрамиз.

20⁶-номерли қўштавр учун: $W = 250$ см³, $b = 1,02$ см. Балканинг юқори юзидаги максимал сиқувчи кучланишни ҳисоблаймиз:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y} = \frac{ql^2}{8W_y} = \frac{20 \cdot 400^2}{8 \cdot 250} = 1600 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$$

Максимал радиал кучланиш:

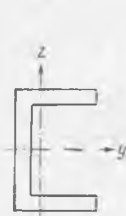
$$(\sigma_z)_{\max} = \frac{q}{b} = \frac{20}{1,02} \approx 19 \text{ кг/см}^2$$

бўлади.

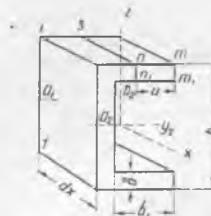
Агар бу кучланишни кўндаланг кесимда ҳосил бўладиган $\sigma_{\max}$ билан таққослаб кўрсак, унинг ҳақиқатан ҳам эътиборга олмаслик даражада кичик эканлигини кўрамиз.

115-§. Бош текислик симметрия текислиги бўлмаган ҳолдаги эгилиш. Эгилиш маркази

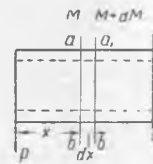
Балкаларнинг соф эгилиши текширилганда эгувчи момент бош эгилиш текисликларидан биттасида ётса, эгилишнинг ҳам шу текисликда бўлиши кўрсатиб ўтилган эди. Аммо амалда ҳамма балкалар ҳам ана шундай хусусиятга эга бўлавермайди. Масалан, бир симметрия текислиги бўлмаган балка, унинг бош текислигида ётган кўндаланг куч таъсирида бўлса, у ҳолда балка эгилиш билан бирга, албатта буралади ҳам.



407-шакл.



408-шакл.



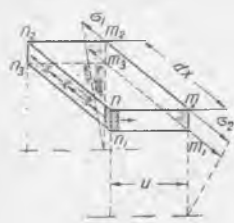
409-шакл.

Эгилган балкаларда бурилиш деформацияси рўй бериши хусусан юпқа деворли профиллар учун жуда ҳам хавфлидир. Балканинг куч ётган бош текислигини ўз-ўзига параллел кучириш йўли билан эгилган балкаларда рўй берадиган бурилишни йўқотиш мумкин. Кўндаланг кесим юзидан битта симметрия ўқи бўлган энг оддий ҳолларни текшираемиз. Балкага қўйилган юк симметрия текислигига тик бўлган бош текисликда ётсин. Масалан, ОУ кўндаланг кесимнинг симметрия ўқи бўлиб, балкани эгувчи куч шу ўққа тик йўналсин. 407-шаклда схематик равишда тасвирланган швеллер кесим учун буралишдан холи бўлган кўндаланг эгилишни таъмин этувчи куч ётадиган вертикал текислиkning ҳолатини аниқлаймиз.

Координата ўқларини қуйидагича танлаймиз: кесимнинг симметрия ўқи бўйлаб y ўқини, унинг иккинчи бош ўқи бўйлаб юқорига қаратиб Z ўқини, балканинг геометрик ўқи бўйлаб эса x ўқини йўналтираемиз. Тангенциал кучланишларни яна илгаригидек координата ишоралари билан белгилаймиз, яъни x ўқига тик юзада Z ўқига параллел йўналган тангенциал кучланишни τ_{xz} билан, шунингдек, ҳалиги юзадаги y ўқига параллел бўлганларини τ_{xy} билан белгилаймиз. Кўндаланг кесимнинг вертикал деворидаги тангенциал кучланиш τ_{xz} ни аниқлаш учун (81. 3) формуладан фойдаланамиз. Кесиб ўтувчи куч Q ни вертикал девор асосан ўзи қабул қилиши ҳақида айтиб ўтган эдик. Модомики, $Q_z \cong Q = \int_F \tau_{xz} dF$ экан, яъни вертикал девордаги тангенциал кучланишлар шу девор марказига қўйилган ва вертикал йўналишдаги $Q_z \cong Q$ кучига келтирилса, қўшимча буралиш қаердан ҳосил бўлади, деган савол туғилади.

Буралиш деформациясининг кўндаланг кесимда ётувчи жуфт кучдан ҳосил бўлиши бизга маълум. Бундай жуфт куч кесимнинг токчаларида горизонтал йўналган қўшимча тангенциал кучланишлар ҳосил бўлгандагина вужудга келиши мумкин. Бу қўшимча тангенциал кучланишларнинг ҳосил бўлишини ва уларнинг қандай миқдорда бўлишини ҳамда кўндаланг кесим

юзида қандай қонун билан тақсимланишини текшираемиз. Масалани мураккаблаштирмаслик учун, бир учи билан қистириб қўйилган ва бошқа учи-га вертикал бош текисликда ётувчи P куч қўйилган консолни оламиз (408-шакл). Бу балканинг учидан x ва $x+dx$ масофада ўтказилган ab ҳамда a_1b_1 вертикал текислик ёрдамида ундан бир бўлак ажратамиз. Бу бўлак 409-шаклда тегишли ўлчамлари билан тасвирланган. Мазкур бўлакнинг тепасида-



410-шакл.

ги тоқчасидан, шаклда кўрсатилганидек, u масофада mn_1n_2 элементини ажратамиз. Бу элементнинг (410-шакл) nn_1n_2 ва $m_1m_2m_3$ ёқлари-га M ва $M+dM$ моментлар билан боғлиқ бўлган қўзғувчи N_1 ва N_2 нормал зўриқишлар таъсир қилади. $N_2 > N_1$ бўлгани учун тоқчадан ажратилган бу элементнинг деворга параллел mn_1m_1 кесимида тангенциал кучланиш τ_{yx} ҳосил бўлиши керак. Акс ҳолда ажратилган элемент мувозанатда бўлмайди. mn_1m_1 кесим бўйича таъсир қилувчи тангенциал кучланиш чексиз кичик юзада:

$$dT = \tau_{xy} t dx$$

бўлади. Бу кучланиш ҳалиги нормал зўриқишлар айирмаси $N_2 - N_1$ билан мувозанатлашади; шунинг учун:

$$N_2 - N_1 = \tau_{xy} t dx. \quad (115.1)$$

Энди N_1 ва N_2 нормал зўриқишларни аниқлаймиз. Ҳалиги ажратилган элементнинг nn_1m_1 ва $n_2n_3m_3m_4$ кесимлардаги нормал кучланишлар йиғиндисини, яъни N_1 ва N_2 кучлар тегишлича:

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \int_{F_1} \sigma_1 dF = \frac{M}{I_y} \int_{F_1} z dF, \\ N_2 &= \int_{F_1} \sigma_2 dF = \frac{M+dM}{I_y} \int_{F_1} z dF \end{aligned} \right\} \quad (115.2)$$

бўлади F_1 юза кўндаланг кесимнинг тепа тоқчасидан u ораликда ажратилган элементнинг nn_1m_1 кесимига оиддир. Шунинг учун 115-формулардаги статик моментни ифодаловчи интеграл қуйидагига тенг:

$$\int_{F_1} z dF = \int_{F_1} z u dz \approx u t \frac{h}{2}.$$

Буни кўзда тутиб, мувозанат тенгламаси (10.1) ни қуйидагича ёзамиз:

$$\frac{M+dM}{I_y} u t \frac{h}{2} - \frac{M}{I_y} u t \frac{h}{2} = \tau_{xy} t dx.$$

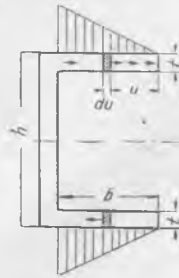
Бу тенгламадан қўшимча тангенциал кучланиш τ_{xy} ни аниқлаймиз:

$$\tau_{xy} = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{h}{2I_y} u = \frac{Qh}{2I_y} u. \quad (115.3)$$

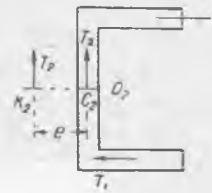
Тангенциал кучланишларнинг жуфтлик принципига мувофиқ, mn_1n_1 юзага тик бўлган nn_1n_2 юзада ҳам $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ тангенциал кучланиш ҳосил бўлади. (115.3) формуладан бу кучланиш (τ_{xy}) нинг u га пропорционал

равишда ўзгариши яққол кўриниб турибди. Ажратилган элементнинг tt қиррасида $u=0$ бўлгани учун $\tau_{xy}=0$ бўлади.

Худди шундай кучланишлар қундаланг кесимнинг пастки токчасида ҳам, лекин тескари ишора билан ҳосил бўлади. Бу қўшимча кучланишлар графиги 411-шаклда тасвирланган. Горизонтал йўналишдаги бу қўшим-



411- шакл.



412- шакл.

ча тангенциал кучланишдан токчаларнинг юзи бўйлаб ҳосил бўладиган тангенциал зўриқиш T_1 ни аниқлаймиз. Бунинг учун тепа токчанинг ўнг қиррасидан u масофада битта элементар юзача ажратамиз. Юзачанинг кенглиги du бўлсин. Бу юзача 411-шаклда штрихлаб кўрсатилган. Мазкур юзачадаги тангенциал зўриқиш dT_1 қуйидагича ифодаланади:

$$dT_1 = \tau_{yx} \cdot t du = \frac{Qh}{2I_y} t du.$$

Токчанинг бутун юзаси бўйича бу ифоданинг йиғиндисини олсак, T_1 ни топган бўламиз:

$$T_1 = \int_0^{b_1} \frac{Qh}{2I_y} t du = \frac{Qh}{4I_y} t b^2. \quad (115. 4)$$

Худди шу хилдаги куч кесим пастки токчасининг юзасига ҳам қўйилган, аммо T_1 га тескари йўналган бўлади. Токчалар юзасига қўйилган бу кучлар 412-шаклда тасвирланган. Булардан ташқари, кесим деворининг юзаси бўйлаб вертикал йўналган τ_{xz} кучланишдан ҳосил бўлган вертикал тангенциал зўриқиш T_2 ҳам шу шаклда тасвирланган.

Токчалар юзасидаги вертикал тангенциал кучланишларни, агар улар девордаги тангенциал кучланишларга нисбатан эътиборга олинмаса, девор маркази C_2 га қўйилган $T_2 = \int_{F_g} \tau_{xz} dF$ ни кесиб ўтувчи куч Q га тенг дейиш мумкин. Демак, текширилаётган кесим юзасига жуфт ҳосил қилувчи T_1 , T_1 кучлар ва девор марказига қўйилган вертикал йўналишдаги, $T_2 \approx Q$ куч таъсир қилади.

Мазкур кучлар системасини девор марказидан $C_2 K_2 = e$ масофадаги K_2 нуқтага қўйилган битта T_2 куч билан алмаштиришимиз мумкин. Бунинг учун кучлар системасининг келтириш маркази K_2 ни шундай танлашимиз керакки, кучлар системасининг бу нуқтага нисбатан кесим юзидаги моменти нолга тенг бўлсин. У ҳолда, система мазкур K_2 нуқтага қўйилган вер-

тикал йўналишдаги биргина куч билан алмаштирилиб, кесим юзида ҳосил бўладиган буровчи жуфт куч моменти бўлмайди. Шу шартга кўра:

$$T_1 h - Qe = 0. \quad (115.5)$$

Бу ерда биз (T_1, T_2) жуфтининг елкаси учун қўндаланг кесим баландлиги h ни олдик. (10.5) дан:

$$e = \frac{T_1 h}{Q}; \quad (115.6)$$

T_1 нинг қийматини (115.4) дан келтириб қўйсак, (10.6) формула қуйидаги кўринишни олади:

$$e = \frac{h^2 b_1^2 t}{4I_y}. \quad (115.7)$$

Шу тарзда аниқланган нуқта *эгилиш маркази* деб аталади.

Куч ётган текислик симметрия текислиги бўлмаганда, балка нейтрал ўқи Y бўлган оддий эгилиш ҳолатида бўлиши учун, куч текислигини ўз-ўзига параллел ҳолда кўчириб, эгилиш марказидан ўтказиш лозим. Куч бундан бошқа текисликда ётган тақдирда эгилиш буралиш билан бирга вужудга келади ва кучланиш $\sigma = \frac{M}{I_y} z$ каби оддий кўринишда бўлмай, анчагина мураккаблашади.

Швеллер кесим учун эгилиш марказининг ҳолати (115.7) формула ёрдамида аниқланади. Бу формулани бирмунча соддароқ кўринишга келтириш мумкин. Бунинг учун кесимнинг инерция моменти I_y ни девор ва токчалар инерция моментларининг йиғиндиси тарзида ифодалаймиз. Токчаларнинг инерция моментини ҳисоблашда уларнинг ўз ўқиға нисбатан инерция моментларини эътиборга олмаимиз.

У ҳолда:

$$I_y = \frac{t_\delta h^3}{12} + 2b_1 t \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} b_1 t h^2 \left(1 + \frac{1}{6} \frac{t_\delta h}{b_1 t} \right)$$

бўлади. Девор ва токчаларнинг юзаларини тегишлича F_δ , F_m деб белгиласак: $F_\delta = t_\delta h$, $F_m = b_1 t$ бўлади, буларни кўзда тутиб, I_y нинг қийматини қуйидагича ёзамиз:

$$I_y = \frac{1}{2} b_1 t h^2 \left(1 + \frac{1}{6} \frac{F_\delta}{F_m} \right).$$

Бунинг (115.7) формулага қўйиб, қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз

$$e = \frac{h^2 b_1^2 t}{4I_y} = \frac{\frac{b_1}{2}}{1 + \frac{1}{6} \frac{F_\delta}{F_m}}. \quad (115.8)$$

Бу ифодадан кўриниб турибдики, швеллер кесим учун e масофа токча кенлигининг ярмисидан кичик бўлар экан, яъни:

$$e < \frac{1}{2} b.$$

Қўндаланг кесим бурчаклик бўлса (413-шакл), унинг тепа токчасининг учидан u масофада бўлган m чизикда ҳосил бўладиган тангенциал кучла-

нишлар швеллер кесим учун чиқарилган формулага ўхшаш формула билан топилади:

$$\tau = \frac{Q}{I_y t} \int_E z dF$$

бунда $\int_E z dF$ — шаклда штрихлаб кўрсатилган юзанинг y ўқига нисбатан статик моменти. У биз текшираётган ҳол учун қуйидагича ифодаланади:

$$\int_E z dF = \int_{b-u}^b (b-u) \cos 45^\circ t dv = \frac{tu^2}{\sqrt{2}}$$

Буни назарда тутиб, бурчакликнинг тепа тоқчасига таъсир қилувчи тангенциал зўриқиш T ни аниқлаймиз. Бунинг учун олдин idu юзадаги dT ни топамиз, у:

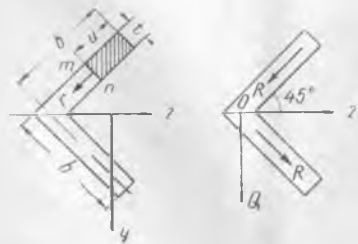
$$dT = \tau t du$$

бўлади. Бурчакликнинг тепа тоқча юзаси бўйича бу ифоданинг йиғиндисини олсак, T ни топган бўламиз.

Бурчакликнинг пастки тоқчасига ҳам худди шундай катталиқдаги, лекин пастга қараб йўналган тангенциал зўриқиш таъсир қилади (413-шакл). Бу икки кўчнинг тенг таъсир этувчиси Q тоқчалар ўрта чизиқларининг кесишган нуқтаси O га қўйилган бўлиб, пастга томон йўналган. Шунинг учун O нуқта бурчаклик кесимнинг эгилиш маркази бўлади.

Худди шундай мулоҳаза билан Z шаклидаги кесим учун ҳам T нинг катталигини топиш мумкин. Бу ҳолда кесимнинг иккала тоқчасидаги зўриқишлар бир томонга йўналган бўлади. Шунинг учун уларнинг тенг таъсир этувчиси кесимнинг маркази C дан ўтади. Бу тенг таъсир этувчининг кесим деворидаги вертикал тангенциал кучланишлар йиғиндисидан ҳосил бўлган тангенциал зўриқиш Q_z билан геометрик қўшиб, эгилиш текислигининг бош вертикал ўқ z га нисбатан йўналишини топамиз (414-шакл). Бу ҳолда ҳам эгилиш маркази кесим маркази C га мос келади.

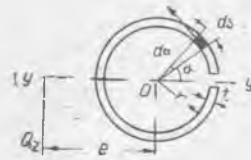
Текширилган ҳодисанинг амалий аҳамияти жуда ҳам каттадир. Юпқа деворли профиллар жуда ҳам осон буралади. Шунинг учун бундай ҳоллар-



413-шакл.



414-шакл.



415- шакл.

да кўндаланг юкларни эгилиш марказидан ташқарига қўйиш балкаларда катта қўшимча деформациялар ҳосил қилишга олиб боради.

Эгилиш марказига оид бу айtilган мулоҳазаларнинг ҳаммаси юпқа деворли элементлар учунгина ўринлидир. Кўндаланг кесим ўлчамлари бир хил тартибли бўлса, эгилиш марказини аниқлаш масаласи анчагина мураккаблашади. Бундай ҳолларда масалани эластиклик назарияси усуллари билан ечиш мумкин.

158-масала. Юпқа деворли труба ясовчиси бўйича кесилган (415-шакл). Труба кўндаланг кесимининг ўртача радиуси r , деворининг қалинлиги t . Мазкур кесим учун эгилиш маркази аниқлансин.

Ечиш. Эгилиш маркази кесимнинг симметрия ўқида ётади. Унинг ҳолатини топиш учун ички тангенциал кучлар тенг таъсир этувчиси қўйилган нуқтани аниқлаймиз. Қесиб ўтувчи куч Q таъсирида труба кўндаланг кесимида тангенциал кучланиш τ ҳосил бўлади. Унинг қиймати қуйидаги формуладан топилади:

$$\tau = \frac{Q_z}{I_y t} \int_F z dF.$$

415-шаклдан:

$$dF_2 = t ds = t r d\alpha; \quad z = r \sin \alpha$$

$$\tau = \frac{Q_z}{I_y} r^2 \int_0^\alpha \sin \alpha d\alpha = \frac{Q_z}{I_y} r^2 (1 - \cos \alpha).$$

Эгилиш марказини аниқлаш учун мазкур марказга нисбатан олинган ички кучлар моменти билан қесиб ўтувчи куч Q_z моментининг йиғиндисини нолга тенг деб оламиз:

$$Q_z e - \int_F \tau r dF = 0.$$

Бундан:

$$e = \frac{\int_F \tau r dF}{Q_z}$$

келиб чиқади. Бу ифодага τ , dF ва $I_y = \pi r^3 t$ ларнинг қийматини қўйиб, уни интегралласак, эгилиш марказининг ҳолатини аниқловчи елка e ни топамиз:

$$e = \frac{t r^3}{I_y} \int_0^{2\pi} (1 - \cos \alpha) d\alpha = 2r.$$

116-§. Улама балкалар ва уларнинг ҳисоби

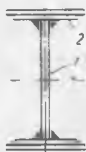
Инженерлик иншоотларида, хусусан, саноат биноларида, катта куприкларда ишлатиладиган балкаларнинг кўндаланг кесим ўлчамлари ёйилма профиллар учун сортамент жадвалларида бериладиган ўлчамлардан анча катта бўлади. Масалан, ёйилма профиллардан энг кўп ишлатиладигани — қўштаврли кесимнинг энг катта номери 70^а дир; бу номердаги балканинг баландлиги 700 мм бўлади. Ҳолбуки, ҳақиқи айtilган иншоотларда ишлатиладиган балкаларнинг баландлиги қўпи билан 5 метрга етади. Шунинг

учун бундай ҳолларда листлар ва бурчакликлардан тузилган улама балкалар ишлатилади. Улама балкалар таркибидаги элементлар парчин михлар ёрдамида ва пайвандлаш усули билан туташтирилади.

Парчин михлар ёрдамида туташтирилган балка вертикал лист (1), бир нечта горизонтал лист (2) ва бурчакликлардан иборат бўлади (416-шакл). Пайвандлаб уланадиган балкалар эса вертикал ва горизонтал листлардан иборат бўлади (417-шакл).



416-шакл.



417-шакл.

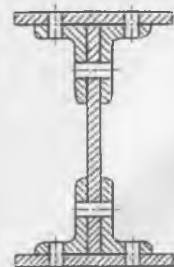
Энди, икки усулда уланган ана шу балкалар ҳисобининг асосий моментлари билан танишиб чиқамиз.

Улама балкаларнинг ҳисоби, асосан, мустақамлик шартидан фойдаланиб кўндаланг кесимнинг қаршилик моментини аниқлашдан ва топилган қаршилик моментига асосланиб, кўндаланг кесим таркибидаги элементларнинг ўлчамларини аниқлашдан иборат. Мустақамликни таъминловчи қаршилик momenti қуйидаги тенгламадан топилади:

$$W_{\text{нето}} = \frac{M_{\text{мах}}}{[\sigma]}, \quad (116.1)$$

Бу ерда $W_{\text{нето}}$ — кўндаланг кесимнинг тўла юзасидан парчин михлар тешигига тўғри келадиган юзачалар чиқариб ташланган соф юзанинг қаршилик momenti. 418-шаклда тасвирланган кесимда соф юза штрихлаб кўрсатилган.

$W_{\text{нето}}$ нинг кийматидан кесим таркибидаги элементларнинг ўлчамларини бевосита аниқлаб бўлмайди, чунки ҳар қайси элементнинг ўлчами кесимнинг умумий юзасига боғлиқ бўлмаган ҳолда топилади, яъни турли ўлчамлардаги элемент-



418-шакл.

лардан маълум кийматдаги $W_{\text{нето}}$ га эга бўлган кесимни олиш мумкин. Шунинг учун улама балка кесимидаги элементларнинг ўлчамини танлашда, балканинг асосий элементи бўлган деворининг баландлигини олдиндан белгилаб олиш лозим.

Улама балканинг баландлиги, асосан, балка материалининг рухсат этилган кучланиши $[\sigma]$ га ва максимал эгилишнинг балка узунлигига бўлган нисбати $\frac{1}{l}$ га боғлиқ бўлиб, иқтисодий мулоҳазалар ҳам назарга олинган ҳолда қуйидаги эмпирик формулалардан аниқланади:

$$\left. \begin{aligned} h &\cong \sqrt[3]{220 W_{\text{нето}} - 15} \\ h &\cong 1.2 \sqrt{W_{\text{нето}}} \end{aligned} \right\} \quad (116.2)$$

Дастлабки ҳисоблашда, балка баландлиги девор баландлигига тахминан тенг қилиб олинади. Девор қалинлигини аниқлашда, кўндаланг кучни асосан деворга тушади деб фараз қилиб, тангенциал кучланишга мувофиқ ҳисоблаш тенгламасини тузиш лозим:

$$\tau_{\text{мах}} = \frac{3}{2} \frac{Q_{\text{мах}}}{\delta_d h_d} \leq [\tau]; \quad (116.3)$$

бундан:

$$\delta_d = \frac{3 Q_{\max}}{2 h_d [\tau]}. \quad (116. 4)$$

Конструктив ва иқтисодий мулоҳазалар назарда тутилиб δ_d , кўпинча, қуйидаги содда муносабатдан аниқланади:

$$\delta_d = 7 + \frac{3h}{1000}. \quad (116. 5)$$

Бу муносабат фақат соддалиги жиҳатидан қулай, бироқ (116. 4) муносабат қатъийроқдир.

Балканинг дастлабки баландлиги h_d (116. 2) дан аниқлангандан кейин, кесимнинг инерция моменти осонгина ҳисобланади:

$$I_{\text{нетто}} = W'_{\text{нетто}} \frac{h_d}{2}. \quad (116. 6)$$

Кесимнинг парчин михлар тешиги ҳисобига заифланишини дастлабки нисбатда тахминан 20% деб қабул қилиб, $I_{\text{брутто}}$ учун қуйидаги формула-ни оламиз:

$$I_{\text{брутто}} = 1,2 W'_{\text{нетто}} \frac{h_d}{2} = \frac{1,2 M_{\max}}{[\sigma]} \cdot \frac{h_d}{2}. \quad (116.7)$$

Бу формула билан аниқланадиган катталиқ улама балка кесимини танлаш учун асосий маълумотдир. $I_{\text{брутто}}$ кўндаланг кесим таркибидаги элементларга тегишли инерция моментларининг йиғиндисига тенг бўлгани учун энди инерция моментларини ҳисоблаймиз.

Деворнинг инерция моменти:

$$I_d = \frac{\delta_d h_d^3}{12}.$$

Бурчакликларнинг қалинлиги ва тоқчасининг кенглиги, умуман олганда, номери, кесим тоқчасининг қалинлигига боғлиқ. Тоқчанинг қалинлиги эса балканинг узунлиги ва баландлигига боғлиқдир. Бурчакликларнинг кенглиги билан балканинг баландлиги орасида маълум муносабат бор. Бу муносабат конструктив мулоҳазалар асосида белгиланади. Масалан, баландлиги 1,5 м дан ошмайдиган балкалар учун $b_{\text{бур}} \approx \frac{h_d}{10}$ деб олинади. Бу муносабат тақрибий бўлиб, ундан бурчакликнинг кенглигини чамалаш учун фойдаланилади. Катта микдордаги юклар таъсиридаги балкалар учун кесим тоқчаси юзасининг 30 проценти бурчакликлар юзаси учун ажратилади. Бурчакликларнинг қалинлиги, одатда, девор қалинлиги билан бир хил қилиб олинади.

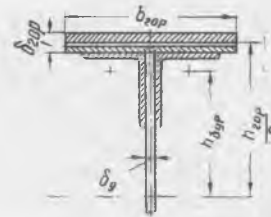
Бурчакликларнинг тегишли ўлчамлари аниқлангач, уларнинг инерция моментларини ҳисоблаш унча қийин эмас. Ҳар бир бурчакликнинг ўз марказий ўқиға нисбатан инерция моменти ($I_{\text{бур}}$) ни, юзаси ($F_{\text{бур}}$) ни ҳисоблаймиз, кейин бурчаклик марказидан нейтрал ўққача бўлган масофани a билан белгилаб, кесим тоқчасининг маълум қисмини ташкил қилувчи тўртта бурчакликнинг нейтрал ўққа нисбатан инерция моментини қуйидаги формула билан аниқлаймиз:

$$I_{\text{бур}} = 4 (I_{\text{бур}} + a^2 F_{\text{бур}}); \quad (116. 8)$$

бу формуладаги $I_{\text{бур}}$ ва $F_{\text{бур}}$ нинг қиймати сортамент жадвалларидан олинади. $(I_{\text{бур}} + I_d)$ — балка кесимининг минимал инерция моменти. Қуйидаги:

$$\Delta I = I_{\text{брутто}} - (I_{\text{бур}} + I_d) \quad (116. 9)$$

айирма кесим токчасидаги горизонтал листларга тўғри келадиган инерция моментидир. Агар $\Delta I \leq 0$ бўлса, токча учун ҳеч қандай қўшимча горизонтал листга зарурат қолмайди. Кесим бу ҳолда девор билан тўртта бурчакликдангина иборат бўлади. Аммо кесимни етарли даражада бикр қилиш учун девор ва бурчакликларнинг ўлчамларини камайтириш ҳисобига токчани горизонтал листлар билан таъминлаш зарур. Агар $\Delta I > 0$ бўлса, у ҳолда токчага қўшиладиган горизонтал листларнинг ўлчамлари ҳисобланади. Горизонтал листларнинг кенглиги токчадаги иккита бурчакликнинг кенглиги билан девор кенглигининг йиғиндисидан 10 мм ортиқроқ бўлиши керак. Горизонтал лист бурчакликнинг чиқиб турадиган қисмини ёпиб туриши лозим (418-шакл). Бу горизонтал листларнинг ўз марказий ўқига нисбатан инерция моментини ҳисобга олмай, фақат нейтрал ўқка нисбатан инерция моментини ҳисоблаймиз:



419-шакл

$$I_{\text{гор}} = 2 \left[F_{\text{гор}} \cdot \left(\frac{h_{\text{гор}}}{2} \right)^2 \right] = b_{\text{гор}} \cdot \delta_{\text{гор}} \cdot \frac{h_{\text{гор}}^2}{2}, \quad (116.10)$$

бу ерда $b_{\text{гор}}$ — горизонтал листларнинг кенглиги; $\delta_{\text{гор}}$ — умумий қалинлиги, $h_{\text{гор}}$ — горизонтал листлар марказлари орасидаги масофа (419-шакл), $h_{\text{гор}} \cong h_{\delta}$ (116.9) билан (116.10) формулани солиштириб, горизонтал листларнинг умумий қалинлиги (тешиклар кенглиги ҳам шу ҳисобга киради) $\delta_{\text{гор}}$ ни аниқлаймиз:

$$\Delta I = I_{\text{гор}} = b_{\text{гор}} \cdot \delta_{\text{гор}} \cdot \frac{h_{\delta}^2}{2};$$

бундан:

$$\delta_{\text{гор}} = \frac{2\Delta I}{b_{\text{гор}} \cdot h_{\delta}^2}. \quad (116.11)$$

$\delta_{\text{гор}}$ нинг қийматидан фойдаланиб, горизонтал листларнинг қалинлигини стандарт ўлчамларга келтирамиз. Агар $\delta_{\text{гор}}$ нинг қиймати жуда катта чиқса у ҳолда горизонтал листлар сони кўпайтирилади ва бир неча қават қилиб қўйилади. Ҳар ҳолда горизонтал листнинг қалинлиги бурчакликнинг қалинлигидан кам бўлмаслиги лозим.

Юқоридаги мулоҳазалар билан улама балка кўндаланг кесими таркибидаги элементларнинг ўлчамлари аниқлангач, мазкур элементлардан ҳосил бўлган кесим балканинг мустаҳкамлик шартини қаноатлантириши керак. Буни текшириб кўрамиз, чунки кўп ўлчамларни, турли мулоҳазалар асосида чамалаш билан танладик. Бунинг учун кўндаланг кесимнинг дастлабки чамалаб танланган ўлчамларига мувофиқ I , W ва S ларнинг аниқроқ қийматларини ҳисоблаймиз. Булар мустаҳкамлик шартларини қаноатлантирса, дастлабки ҳисобимиз тўғри бўлади. Кўндаланг кесимнинг юзаси парчинмих тешиклари билан заифлангани учун (418-шакл), балканинг мустаҳкамлигини текширишда буни ҳисобга олиш лозим. Парчинмих тешикларига тўғри келадиган юзачалар инерция моментларининг йиғиндиси қуйидагича аниқланади:

$$I_{\text{парч}} = \sum \delta \cdot d \cdot z^2; \quad (116.12)$$

бу ерда z_i — ҳар бир парчин мих тешигининг марказидан нейтрал ўққача бўлган масофа. $I_{\text{парч}}$ ни парчин михларни ўрнатишдан олдин ҳисоблашга тўғри келгани учун z_i ларнинг аниқ қиймаги маълум эмас. Аммо олдин бажарилган ҳисоблар парчин мих тешикларига тегишли инерция моменти девор инерция моментининг 18% ини ташкил этишини кўрсатади. Шунинг учун деворнинг заифланиши туфайли инерция моменти 18% камаяди деб оламиз.

Кесим токчасидаги парчин мих тешикларининг инерция моментларини ҳақиқий юзаси бўйича ҳисоблаш лозим. Бу мулоҳазаларга мувофиқ, $I_{\text{парч}}$ учун қуйидаги ифодани оламиз:

$$I_{\text{парч}} = 0,18I_3 + \sum \delta_T \cdot d \cdot z_T^2, \quad (116.13)$$

бу ерда δ_T — токчанинг тўла қалинлиги (бурчакликнинг қалинлиги билан бирга); z_T — токчадаги парчин мих тешиги марказидан нейтрал ўққача бўлган масофа. Йиғинди кесим токчасидаги парчин михлар сонига кўра олинади. Булар кўзда тутилса, ҳақиқий инерция моменти ва қаршилик моменти қуйидагича ёзилади:

$$I_{\text{ҳақ}}^{\text{нето}} = I_{\text{ҳақ}}^{\text{брутто}} - I_{\text{парч}} \quad (116.14)$$

$$W_{\text{ҳақ}} = \frac{2I_{\text{ҳақ}}^{\text{нето}}}{h_0} \quad (116.15)$$

Энди максимал ҳақиқий кучланишни аниқлаймиз:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{max}}}{W_{\text{ҳақ}}} \leq [\sigma]. \quad (116.16)$$

Шунингдек, максимал ҳақиқий тангенциал кучланишни аниқлаймиз:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{C_{\text{max}} \cdot S_{\text{брут}}^{\text{ҳақ}}}{I_{\text{брут}}^{\text{ҳақ}} \cdot \delta_0} = \frac{Q_{\text{max}}}{e \cdot \delta_0} = \frac{1,17 \cdot Q_{\text{max}}}{h_0 \delta_0} \leq [\tau]. \quad (116.17)$$

Бундан:

$$\frac{I_{\text{ҳақ}}^{\text{брутто}}}{S_{\text{ҳақ}}^{\text{брутто}}} = e \cong 0,8 \cdot 5h_0$$

бўлади, бу эса ички жуфтнинг елкасидир.

Девор билан токча қўшилган жойда нормал ва тангенциал кучланишлар катта бўлганидан, бу ердаги элементларда ҳосил бўладиган бош кучланишларни ҳисоблаш зарур. Парчин михлар билан туташтирилган улама балкаларда, бурчакликнинг девор билан туташтириладиган қисми, яъни парчин михлардан пастки қисмида деворни бурчакликдан мустақил деб қаралади. Бу ҳолда энг хавфли элемент бурчакликнинг парчин михлар горизонтал ўрнатилган жойига мос келади. Шунинг учун текширишни ана шу элементларга нисбатан ўтказиш қабул қилинган. Бундай элементлар учун нормал кучланиш $\sigma = \frac{M_{\text{max}}}{I_{\text{ҳақ}}^{\text{нето}}} z_0$ формуладан, тангенциал кучланиш эса

$\tau = \frac{Q_{\text{max}} \cdot S_T}{I_{\text{ҳақ}}^{\text{брутто}} \delta_0}$ формуладан тспилади, бу ерда S_T — бурчакликнинг горизонтал ўрнатилган парчин михлар ўқидан юқоридаги юзанинг нейтрал ўққа нисбатан статик моменти. Балканинг мустақамлигини биринчи назария-

га мувофиқ, яъни максимал бош нормал кучланиш назариясига мувофиқ текшираимиз:

$$\frac{1}{2}(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}) \leq (\sigma). \quad (116.18)$$

Аммо металл конструкцияларни энергетик назарияга мувофиқ текшириш тавсия этилади. Шунинг учун:

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (116.19)$$

Улама балка элементларини туташтириш учун зарур бўлган парчин миҳлар сонини ҳисоблашга ўтишдан аввал, юқорида тавсиф этилганларни ўзлаштириш учун бир масала ечамиз.

159-масала. Икки таянчда ўтувчи балканинг узунлиги $l = 10$ м; балкага интенсивлиги $q = 9$ т/м бўлган ёйилма юк таъсир қилади. Материал Ст. 3 маркали пулат бўлиб, унинг узунлик бирлигидаги оғирлиги 0,25 т/м га тенг (419-шакл). Балканинг қўндаланг кесими танлансин.

Ечиш. Балкага қўйилган ёйилма юкнинг интенсивлиги $q = 9 + 0,25 = 9,25$ т/м. Максимал эгувчи момент:

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{9,25 \cdot 10^2}{8} = 115,6 \text{ т. м.}$$

Максимал кесиб ўтувчи куч:

$$Q_{\max} = \frac{ql}{2} = \frac{9,25 \cdot 10}{2} = 46,25 \text{ т.}$$

$M_{\max}$ га бардош берадиган қаршилик моменти:

$$W_{\text{нетто}} = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{11\,560\,000}{1\,400} = 8\,257 \text{ см}^3;$$

(116.2) формуладан балканинг дастлабки баландлиги h_d ни аниқлаймиз:

$$h_d = \sqrt[3]{220 \cdot 8257} - 15 \approx 121 - 15 = 106 \text{ см.}$$

Кесимнинг инерция моментини ҳисоблаймиз:

$$I_{\text{нетто}} = \frac{W_{\text{нетто}} h_d}{2} = \frac{8220 \cdot 105}{2} \approx 436\,000 \text{ см}^4.$$

$$I_{\text{брутто}} = 1,2 I_{\text{нетто}} = 1,2 \cdot 436\,000 \approx 520\,000 \text{ см}^4.$$

Энди кесим элементлари ўлчамини аниқлашга ўтамиз. Деворнинг қалинлигини (116.4) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\delta_d = \frac{3Q_{\max}}{2h_d [\tau]} = \frac{3 \cdot 46250}{2 \cdot 106 \cdot 1000} = 0,66 \text{ см.}$$

(116.5) муносабатга мувофиқ: $\delta_d = 0,73$ см. Аммо биз $\delta_d = 10$ мм деб оламиз. Балканинг девори бундан юпқа бўлса, балка эгилмасдан туриб девори қийшайиб кетади.

Бурчаклиқнинг томонларини $b_{\text{бур}} \approx \frac{h_d}{10}$ муносабатда аниқлаймиз:

$$b_{\text{бур}} = 10 \text{ мм.}$$

Бурчаклиқнинг қалинлигини девор қалинлигига тенг қилиб танлаб, энг кўп ишлатиладиган $100 \times 100 \times 10$ ўлчамли бурчаклиқни оламиз. Бу, сортамент жадвалида 10-номерга туғри келади. Деворнинг баландлигини $h_d = 1\,000$ мм деб оламиз. У ҳолда:

$$I_d = \frac{\delta_d h_d^3}{12} = \frac{1 \cdot 1000^3}{12} \approx 83\,000 \text{ см}^4$$

бўлади. Бурчаклиқлар девордан 5 мм юқри чиқиб туради. Шунинг учун бурчаклиқларнинг ташқи текисликлари оралиғи $h_T = 1010$ мм бўлади. Бурчаклиқлар маркази билан нейтрал ўқ оралиғи $a = 505 - 28 = 477 \text{ мм} \approx 48 \text{ см.}$ Сортамент жадвалидан танланган

профиль учун $z_0 = 2,83$ см ни олдик. Тўртта бурчакликнинг нейтрал ўққа нисбатан инерция моменти қуйидагича бўлади:

$$I_{\text{бурч}} = 4(I_0^{\text{бурч}} + a^2 F_{\text{бурч}}) = 4(176.3 + 482 \cdot 19,17) = 177\,000 \text{ см}^4.$$

Девор ва бурчакликларнинг инерция моментлари:

$$I_{\partial} + I_{\text{бурч}} = 83\,000 + 177\,000 = 260\,000 \text{ см}^4$$

бўлади. Токчаларнинг горизонтал листларига тўғри келган инерция моментлари:

$$\Delta I = I_{\text{брутто}} - (I_{\partial} + I_{\text{бурч}}) = 520\,000 - 260\,000 = 260\,000 \text{ см}^4.$$

Горизонтал листларнинг маркази билан бурчакликнинг ташқи текислиги орасидаги масофани 10 мм деб олсак, у ҳолда горизонтал листлар орасидаги масофа $h_{\text{гор}} = 1\,010 + 20 = 1\,030$ мм бўлади. Горизонтал листларнинг кенглиги $b_{\text{гор}}$ ни қуйидагича танлаймиз:

$$b_{\text{гор}} = 2b_{\text{бурч}} + \delta_{\partial} + 10 \text{ мм} = 250 \text{ мм}.$$

Бунни қўзда тутиб, (116. 11) формуладан горизонтал листнинг қалинлиги $\delta_{\text{гор}}$ ни аниқлаймиз:

$$\delta_{\text{гор}} = \frac{2\Delta I}{b_{\text{гор}} h_{\text{гор}}^2} = \frac{2 \cdot 260\,000}{25 \cdot 103^2} \approx 1,96 \text{ см}.$$

Қалинлиги 10 мм дан бўлган иккита горизонтал листни оламиз. Улар учун:

$$I_{\text{гор}} = b_{\text{гор}} \cdot \delta_{\text{гор}} \cdot \frac{h_{\text{гор}}^3}{12} = 25 \cdot 2 \cdot \frac{103^3}{12} = 265\,000 \text{ см}^4.$$

Энди кесимнинг тўғри танланганлигини текшириб қўрамиз.

Танланган кесимнинг ҳақиқий инерция моменти $I_{\text{брутто}}^{\text{ҳақ}}$ нинг қиймати қуйидагича бўлади:

Деворнинг инерция моменти	83 000 см ⁴
Тўртта бурчакликнинг инерция моменти	177 000 см ⁴
Горизонтал листларнинг инерция моменти	265 000 см ⁴
	$I_{\text{брутто}}^{\text{ҳақ}} = 525\,000 \text{ см}^4$

Кесим деворнинг парчин миҳ тешиклари билан заифланишини ҳисобга олиб, шунингдек, парчин миҳлар диаметрини $d = 20$ мм деб қабул қилиб, (116. 13) формуладан $I_{\text{парч}}$ учун қуйидаги қийматни оламиз:

$$I_{\text{парч}} = 0,18 I_{\partial} + \sum \delta_{\text{ТД}} \cdot z^2 = 0,18 \cdot 83\,000 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 51^2 = 77\,000 \text{ см}^4.$$

Кесимнинг ҳақиқий инерция ва қаршилик моментлари:

$$I_{\text{ҳақ}}^{\text{нетто}} = 525\,000 - 77\,000 = 448\,000 \text{ см}^4$$

$$W_{\text{ҳақ}}^{\text{нетто}} = \frac{2 I_{\text{ҳақ}}^{\text{нетто}}}{h_{\text{г}}} = \frac{2 \cdot 448\,000}{105} \approx 8\,530 \text{ см}^3.$$

Балканинг хавфли кесимида ҳосил бўлалган ҳақиқий кучланиш:

$$\delta = \frac{M_{\text{мах}}}{W_{\text{ҳақ}}^{\text{нетто}}} = \frac{11\,560\,000}{8\,530} \approx 1\,350 \text{ кг/см}^2 < 1\,400 \text{ кг/см}^2$$

Рухсат этилган кучланиш $[\sigma] = 1\,400 \text{ кг/см}^2$ га қараганда запас

$$\frac{1\,400 - 1\,350}{1\,400} 100\% \approx 3,5\% \text{ ни ташкил этади.}$$

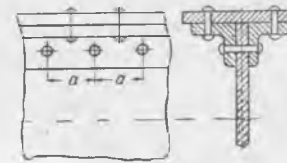
Тангенциал кучланишга нисбатан текширишнинг зарурати йўқ, чунки деворнинг қалинлиги унинг кесилиш шартидан танланган қийматига кўра 30% ортқ олиган эди. Шундай бўлишига қарамай, ҳақиқий $\tau_{\text{мах}}$ ни ҳисоблаб чиқамиз. (116. 17) формулага мувофиқ:

$$\tau_{\text{мах}} = \frac{1,17 Q_{\text{мах}}}{h_s \delta_{\partial}} = \frac{1,17 \cdot 46\,250}{105 \cdot 1} \approx 516 \text{ кг/см}^2 < 1\,000 \text{ кг/см}^2.$$

Биз қўриб чиққан мисолда $M_{\text{мах}}$ таъсир қиладиган кесим учун $Q = 0$ бўлгани сабабли бош кучланишларга нисбатан текширишнинг ҳам зарурати йўқ.

117-§. Улама балкалар элементларини туташтирувчи парчин михлар ҳисоби

Улама балкалар таркибидаги элементлар бир-бири билан туташтирилмаса, бир бутун бўлиб ишлай олмайди. Шу билан бирга, уларни тугаштирувчи парчин михларнинг мустаҳкамлигини балка элементлари бўйича тўғри жойлаштирилишининг муҳим аҳамияти бор. Бурчакликлар балканинг вертикал ва горизонтал листлари билан туташтирилади (420-шакл). Вертикал листлар (балканинг девори) горизонтал парчин михлар билан, горизонтал листлар эса вертикал парчин михлар билан туташтирилади. Биз бу ерда асосан, бурчакликларни вертикал девор билан туташтирувчи горизонтал парчин михларнинг ҳисоби устида сўз юргизишимиз керак. Чунки бурчакликнинг вертикал дсвори билан вертикал листнинг туташтирилган жойида каттароқ тангенциал кучланишлар ҳосил бўлади. Бу кучланишлар йиғиндисидан ҳосил бўладиган тангенциал зўриқиш T кесим токчасини (бурчакликлар билан бирга горизонтал листларни қўшиб) деворга нисбатан силжитишга интилади. Бурчакликлар билан вертикал девор орасидаги ишқаланишни ҳисобга олмасак, тангенциал зўриқиш T горизонтал парчин михларга таъсир қилади. Бу зўриқишнинг қиймати яхлит балканинг нейтрал қатламга параллел бўлган қатламин учун 84- параграфда аниқланган эди. Шунинг учун бу ерда T ни ҳисоблаб ўтирмасдан, тайёр формула (111.3) дан фойдаланамиз. Горизонтал парчин михлар оралиғи, яъни қадамини a деб белгилаймиз; бу қадам мобайнида кесиб ўтувчи куч Q ўзгармаса, шу оралиқда таъсир қилувчи T_a куч қуйидагича бўлади:



420-шакл.

$$T_a = \frac{QS_T}{I_y} a, \quad (117.1)$$

бу ерда S_T —кўндаланг кесим юзасининг мустаҳкамлиги текширилаётган парчин михлардан юқоридаги қисмининг нейтрал ўққа нисбатан статик моменти (брутто); I_y —бутун кесим юзасининг инерция моменти (брутто). Бу куч таъсирига парчин мих икки кесим бўйича қаршилик кўрсатиши лозим (421-шакл). Шунинг учун парчин мих кесимидаги уринма кучланиш:

$$\tau = \frac{T_a}{2\left(\frac{\pi d^2}{4}\right)} = \frac{QS_T a}{2I_y \frac{\pi d^2}{4}} \leq [\tau] \quad (117.2)$$

бўлади. Парчин михнинг сирти эзилмаслиги учун қуйидаги шарт қаноатлантирилиши лозим:

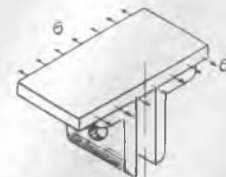
$$T_a = \delta_a \cdot d [\sigma]_{\text{эз}}$$

ёки

$$\frac{QS_T}{I_y} a = \delta_a \cdot d [\sigma]_{\text{эз}}$$

бундан парчин михлар орасидаги a масофани аниқлаймиз:

$$a = \frac{I_y \delta_a d}{QS_T} [\sigma]_{\text{эз}}. \quad (117.3)$$



421-шакл.

Девор a масофа мобайнида δ_d билан чегараланган икки текислик бўйича кесилмаслиги учун қуйидаги шарт қаноатлантирилиши зарур:

$$T_a = 2(a - d)\delta_d[\tau] \quad \text{ёки} \quad \frac{QS_T}{I_y} a = 2(a - d)\delta_d[\tau].$$

Бундан

$$a = \frac{2\delta_d d[\tau]}{2\delta_d[\tau] - \frac{QS_T}{I_y}}. \quad (117.4)$$

(117.3) ва (117.4) формулалар билан девордаги горизонтал парчин михларнинг оралиғи (қадами) аниқланади. Горизонтал листларни бурчакликлар билан туташтирувчи вертикал парчин михлар горизонтал парчин михларга қараганда анча хавфсиз шароитда ишлайди. Чунки токчанинг кенглиги b_T девор кенглигига нисбатан бир неча марта катта бўлиши ва бунинг устига горизонтал листлар юзасининг нейтрал ўққа нисбатан статик моменти жуда кичик бўлиши туфайли, у ердаги тангенциал кучланишлар жуда ҳам кичик бўлади. Шунинг учун горизонтал листлар билан бурчакликларни туташтирувчи вертикал парчин михлар ҳисобига тўхталмаймиз. Конструктив мулоҳазаларга кўра, улар горизонтал парчин михлар билан бир хил қилиб олинади.

160- масала. Оралиғи $l=12$ м бўлган икки таянчда ётувчи балкага интенсивлиги $q=6$ Т/м бўлган текис ёйилган юк таъсир қилади. Балканинг кўндаланг кесими қўш тавр улама балкадир; унинг деворидаги горизонтал парчин михлар орасидаги масофа аниқлансин. Парчин михлар тешигининг диаметри $d=20$ мм, рухсат этилган кучланишлар $[\sigma_{ss}]=2400$ кг/см², $[\tau]=1050$ кг/см². Балка кесими таркибидagi элементлар ўлчами: вертикал листлар 1100×10 , тўртта бурчаклик $100 \times 100 \times 10$ ва иккита горизонтал лист 220×10 (422- шакл).

Е чи ш. Дастлаб максимал кесиб ўтувчи кучни аниқлаймиз:

$$Q_{\max} = \frac{ql}{2} = \frac{6 \cdot 12}{2} = 36 \text{ т.}$$

Кўндаланг кесимнинг геометрик характеристикаси қуйидагича:

$$F \text{ см}^2 \quad I_y \text{ см}^4 \quad S \text{ см}^3$$

Вертикал лист учун (1100×10)	110	111 000	1 510
Тўртта бурчаклик учун ($100 \times 100 \times 10$)	70	213 000	2 020
Иккита горизонтал лист учун (220×10)	44	138 000	1 230
	231	462 000	4 760

Токча юзасининг горизонтал парчин михлардан юқориги қисмининг статик моменти:

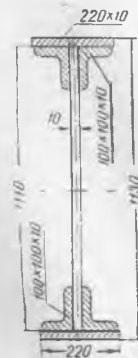
$$S_T = 2020 + 1230 = 3250 \text{ см}^3.$$

S_T дан ҳамда (117.3) ва (117.4) формулалардан фойдаланиб, парчин михлар орасидаги a масофани топамиз:

$$a = \frac{I_y \delta_d d}{QS_T} [\sigma]_{ss} = \frac{462000 \cdot 1 \cdot 2}{36000 \cdot 3250} \cdot 2400 \approx 19 \text{ см.}$$

$$a = \frac{2\delta_d d[\tau]}{2\delta_d[\tau] - \frac{QS_T}{I_y}} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1050}{2 \cdot 1 \cdot 1050 - \frac{6000 \cdot 3250}{462000}} \approx 2,3 \text{ см.}$$

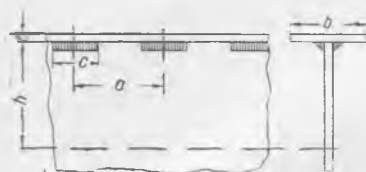
a нинг энг катта қиймати 19 см, энг кичиги 2,3 см. Одатда, парчин михлар қадами (4÷8) а га қадар, яъни (8÷16) см гача олинади.



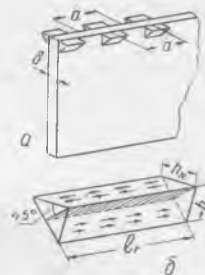
422- шакл.

118-§. Пайвандлаб уланган улама балкалар ҳисоби

Пайвандлаб уланган улама балкалар кўндаланг кесилишнинг таркибидаги элементлар ўлчамини танлаш усули парчин михлар ёрдами билан туташтирилган улама балкалар учун берилган усулдан кўп фарқ қилмайди. Бунда кесимнинг парчин михлар учун тешилгандаги заифланиши ҳисобга олинмайди, ҳолос. Пайвандлаб уланган балкаларда бурчакликлар ва парчин михлар ўрнида эритиб ҳосил қилинган чоклар бўлади (423-шакл). Энг



423-шакл.



424-шакл.

кўп қўлланиладиган ва ҳосил қилиниши жиҳатидан қулай чок уч бурчакли валиқдир.

Пайвандлаб уланадиган балкалар лойиҳаловчи инженернинг вазифаси эритиб ҳосил қилинган чокларнинг устаҳкам бўлишини таъминлашдир.

Кесимнинг девори билан тоқчасини туташтирувчи иккита чок уланувчи элементларнинг узунаси бўйлаб таъсир қиладиган силжитувчи куч T га бардош бериши лозим. Чоклар сидирға (бошдан оёқ) ёки маълум узунликда бўлган қисқа (сидирғамас) чоклар кўринишида бўлиши мумкин. Биз олдин сидирғамас чокнинг мустаҳкамлигини текшириб, кейин сидирға чокка ўтамыз. Сидирғамас чокдаги энг хавфли кесим, унинг тўғри бурчаги биссектрисаси орқали ўтувчи кесимдир (424-шакл, a , b). Бу кесимнинг юзаси:

$$F_{\text{чок}} = l_{\text{чок}} h_{\text{чок}} \cos 45^\circ = 0.7 l_{\text{чок}} h_{\text{чок}}$$

бўлади.

Иккала чокнинг кесилиш юзаси бўйича таъсир этаётган кесувчи зўриқиш T қуйидагича аниқланади:

$$T = 2F_{\text{чок}}[\tau_3] = 2 \cdot 0.7 l_{\text{чок}} \cdot h_{\text{чок}}[\tau_3]. \quad (118.1)$$

Иккита қўшни участкадаги чокларнинг марказлари орасидаги масофа a мобайнида (424-шакл, a) кесиб ўтувчи куч ўзгармаса, кесувчи зўриқиш T нинг қийматини қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$T_a = \frac{QS_T}{l_a} a.$$

Буни юқоридаги (117. 1) тенгламага қўйсак, сидирғамас чокнинг қалинлиги учун қуйидаги муносабатни оламіз:

$$h_{\text{чок}} = \frac{QS_T a}{1,4 l_{\text{чок}} l_y [\tau_3]} \quad (118.2)$$

$h_{\text{чок}}$ нинг қиймати 4 мм дан кам бўлмаслиги керак. Чокнинг қалинлиги берилган бўлса, (118. 2) дан $\frac{a}{l_{\text{чок}}}$ нисбатни аниқлаш мумкин:

$$\frac{a}{l_{\text{чок}}} = \frac{1,4 h_{\text{чок}} l_y}{Q \cdot S_T [\tau_3]} \quad (118.3)$$

a нинг энг катта қиймати 16 δ_δ дан ошмаслиги лозим (δ_δ — кесим деворининг қалинлиги). Чокнинг минимал узунлиги 40 мм қилиб олинади.

Чок сидирға бўлса, мустаҳкамлик шарти қуйидагича ёзилади.

$$\tau = \frac{QS_T}{1,4 h_{\text{чок}} l_y} \leq [\tau_3];$$

бундан:

$$h_{\text{чок}} = \frac{QS_T}{1,4 l_y [\tau_3]} \quad (118.4)$$

келиб чиқади.

Чокларнинг мустаҳкамлигини ҳисоблашда зўриқиш кучи учун балка мустаҳкамлигини ҳисоблагандагидек зўриқиш кучини эътиборга олинади, яъни балкага қўйилган ҳақиқий юкка нисбатан ҳисоб юргизмай, балки балканинг пропорционал чегарасидаги юк кўтариш имконияти бўйича ҳисоблаймиз. У ҳолда эритиб уланган улама балка яхлит балкадан фарқ қилмайди. Чокда ҳосил бўладиган энг катта тангенциал кучланиш кўндаланг кесимнинг нейтрал қатламидаги максимал тангенциал кучланишга тенг бўлиши керак. Балкага пропорционаллик чегарасида қўйилиши мумкин бўлган максимал кесиб ўтувчи кучни топамиз:

$$\tau_{\text{мах}} = \frac{Q_{\text{мах}} \cdot S_{\text{мах}}}{I_y \delta} \leq [\tau];$$

бундан:

$$Q_{\text{мах}} = \frac{I_y \delta [\tau]}{S_{\text{мах}}} \quad (118.5)$$

бўлади, бу ерда $S_{\text{мах}}$ — ярим кесим юзасининг нейтрал ўққа нисбатан статик моменти.

Энди чокдаги максимал кесувчи кучланишни аниқлаймиз:

$$\tau_{\text{мах}} = \frac{Q_{\text{мах}} \cdot S_T}{1,4 l_y \cdot h_{\text{чок}}} = \frac{\delta}{1,4 h_{\text{чок}}} \cdot \frac{S_T}{S_{\text{мах}}} [\tau] \leq [\tau_3];$$

бундан:

$$h_{\text{чок}} = \frac{[\tau]}{1,4 [\tau_3]} \cdot \frac{S_T}{S_{\text{мах}}} \delta. \quad (118.6)$$

Аммо $\frac{[\tau]}{1,4 [\tau_3]} \approx 1$ бўлганлиги сабабли:

$$h_{\text{чок}} = \frac{S_T}{S_{\text{мах}}} \delta. \quad (118.7)$$

161- масала. Олдин чиқарилган 159- масалада берилган улама балкани парчин миҳ билан туташирилмай, пайвандлаб улансин (425- шакл).

Е чи ш. Балкани иккита горизонтал ва битта вертикал листлардан тузамиз. Токчанинг кенглигини олдинги масалада келтирилган мулоҳазага мувофиқ $b_T = 25$ см деб оламиз.

Балканинг кесимини таълаймиз:

$$W = \frac{M}{[\sigma]} = \frac{11\,560\,000}{1\,400} = 8\,257 \text{ см}^3.$$

Талаб қилинган инерция моменти:

$$I = \frac{W h_d}{2} = \frac{8\,257 \cdot 106}{2} = 437\,600 \text{ см}^4.$$

Вертикал деворнинг инерция моменти:

$$I_d = \frac{\delta_d h_d^3}{12} = 83\,000 \text{ см}^4.$$

Горизонтал листлар учун инерция моментини қуйидаги айирмадан аниқлаймиз:

$$\Delta I = I - I_d = 354\,600 \text{ см}^4.$$

Горизонтал лист кенглиги $b_{\text{гор}} = 25$ см га тенг бўлганлиги учун унинг қалинлиги қуйидагича бўлади:

$$\delta_{\text{гор}} = \frac{2\Delta I}{b_{\text{гор}} h_{\text{гор}}^2} = \frac{2 \cdot 354\,600}{25 \cdot 104^2} \approx 26 \text{ см}.$$

Кесимни текшираимиз:

Деворнинг инерция моменти $I_d = 83\,000 \text{ см}^4$

Горизонтал листларнинг инерция моменти $I_{\text{гор}} = 351\,000 \text{ см}^4$

Кесимнинг инерция моменти $434\,000 \text{ см}^4$

Ҳақиқий қаршилик моменти:

$$W_{\text{ҳақ}} = \frac{434\,000}{52.6} = 8\,190 \text{ см}^3.$$

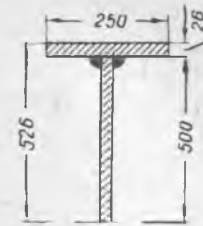
Кесимнинг энг четки нуқтасида ҳосил бўладиган нормал кучланиш:

$$\sigma = \frac{115\,100\,000}{8\,190} = 1\,404 \text{ кг/см}^2 \approx 1\,400 \text{ кг/см}^2.$$

Кесим учун чокдаги рухсат этилган кучланишни $[\tau_9] = 1\,000 \text{ кг/см}^2$ қилиб оламиз. Чокнинг қалинлиги $h_{\text{чок}}$ ни сидирга чок учун аниқлаймиз:

$$h_{\text{чок}} = \frac{Q_{\text{тах}} \cdot S_T}{1.4 \cdot y [\tau_9]} = \frac{46\,250 \cdot 252,6 \cdot 52}{1,4 \cdot 434\,000 \cdot 1\,000} \approx 0,25 \text{ см} = 2,5 \text{ мм}.$$

Биз 4 мм қабул қиламиз.



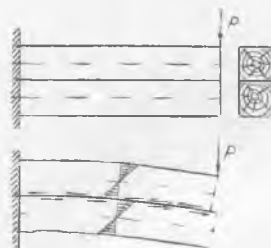
425- шакл.

119-§. Улама ёғоч балкалар ҳисоби ҳақида түшунча

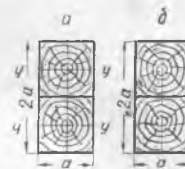
Катта юклар таъсирида бўладиган ёғоч балкаларнинг баландлиги мавжуд тўсинларнинг кўндаланг ўлчамларидан ошиб кетади. Бундай ҳолларда балканинг қаршилик моменти кесимнинг баландлигини сунъий равишда орттириш йўли билан кўпайтирилади. Масалан, устма-уст қўйилган иккита тўсиндан қаршилик моменти талабга мувофиқ даражада катта бўлган битта балка ҳосил қилиш мумкин. Аммо шу тарзда ҳосил қилинган улама балка таркибидаги ҳар қайси балка таъсирга мустақил равишда қаршилик кўрсатмай, балки уларнинг бир бутун бўлиб қаршилик кўрсатишини таъминлаш зарур. Агар улар 426-шаклда кўрсатилганидек ҳар қайсиси мустақил равишда қаршилик кўрсатса, улама балканинг қаршилик моменти, шундай ўлчамли кесимга эга бўлган яхлит балканинг қаршилик моменти-

дан анча кам бўлади. Ҳақиқатан ҳам, агар биз квадрат кесимли иккита балкани устма-уст қўйиб, уларнинг бир бутун бўлиб ишлашини таъминла- масак, кесимнинг қаршилик моменти ҳар қайси кесимнинг ўз y ўқиға нис- батан олинган қаршилик моментларининг йиғиндисига тенг бўлади (427- шакл, а), яъни

$$W = 2W_y = 2 \frac{a^3}{6} = \frac{a^3}{3}.$$



426- шакл.

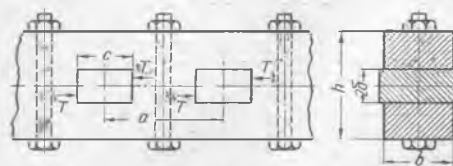


427- шакл.

Иккала балканинг бир бутун бўлиб ишлаши таъминланса (427-шакл, б) у ҳолда унинг қаршилик моменти:

$$W_y = \frac{a(2a)^3}{6} = \frac{2a^3}{3}$$

бўлади. Бу ифодадан кўриниб турибдики, улама балкалар- нинг бир бутун бўлиб ишла- ши таъмин этилган тақдирда унинг қаршилик моменти бир



428- шакл.

бутун бўлиб ишламаган ҳолга қараганда икки марта катта бўлар экан. Ула- ма балкани ҳосил қилувчи балкаларнинг бир-бирига нисбатан силжиши йўқотилса, шу ҳолдагина уларнинг бир бутун бўлиб ишлаши таъминланган бўлади. Бунинг учун улама балкаларни ҳосил қилувчи тўсинлар орасига балканинг узунаси бўйлаб шпонкалар қўйилади. Шпонкаларни зичлашти- риш мақсадида улар 428-шаклда кўрсатилгандек болтлар билан тортиб қўйилади. Болтларни тортиб, тўсинлар зичланганда улар орасида қўшимча ишқаланиш кучлари ҳосил бўлади. Бу кучлар улама балкани ҳосил қилув- чи тўсинларни бир-бирига нисбатан сирпанишига қўшимча қаршилик кўр- сатади. Аммо биз бу кучларни ҳисобга олмаймиз. Бу, албатта, шпонка мустаҳкамлигини зиёдроқ қилиш учун ёрдам беради.

Ёғоч балка ва унинг шпонкасини ҳисоблашга ўтамиз. Бунинг учун тўғри тўртбурчак кесимли иккита қарағай тўсиндан тузилган балкани ола- миз (428-шакл). Шпонкалар дубдан ишланади. Балка эгилганда шпонка силжитувчи кучни бир тўсиндан иккинчисига ўтказиши; бу силжитувчи куч қуйидаги формула билан ифодаланади:

$$T_a = \frac{QS_a}{l} a; \quad (119.1)$$

бу ерда S_0 —улама балка кесимиға тегишли ярим юзанинг, яъни битта тўсин кесимининг бутун кесимға тегишли нейтрал ўққа нисбатан олинган статик моменти; a — иккита қўшни шпонка марказлари орасидаги масофа. Шпонкаға таъсир этувчи T кучнинг йўналиш характери 428-шаклда кўрсатилган. Бу куч шпонкаға қўйилган ҳолда, юқориги тўсинни пастки тўсинға нисбатан силжитиш билан қуйидаги кучланишларни қўзғатади:

1. Балканинг $b\delta$ юзаси бўйлаб шпонканинг босиши натижасида ҳосил бўладиган эзувчи кучланиш.

2. Икки шпонка оралиғида балканинг $(a-c)b$ юзаси бўйлаб ажратадиган кучланиш.

3. Шпонканинг cb юзаси бўйлаб ҳосил бўладиган эзувчи кучланиш.

4. Шпонканинг bc юзаси бўйлаб ҳосил бўлувчи ажратувчи кучланиш.

Бу юзалар учун рухсат этилган кучланишларнинг қиймати қуйидагича қабул қилинади:

Қарағай учун: тола бўйлаб эзилишға рухсат этилган кучланиш:

$$[\sigma_{\parallel}] = 70 \text{ кг/см}^2.$$

Тола бўйлаб ажратишға рухсат этилган кучланиш:

$$[\tau_{\parallel}] = 12 \text{ кг/см}^2.$$

Дуб учун: толага тик йўналган эзилиш учун рухсат этилган кучланиш:

$$[\sigma_{\perp}] = 50 \text{ кг/см}^2.$$

Толага тик йўналган ажратиш учун рухсат этилган кучланиш:

$$[\tau_{\perp}] = 10 \text{ кг/см}^2.$$

Мазкур тўртта юза учун мустаҳкамлик шартни қуйидагича ёзилади:

$$\left| \frac{T_a}{b\delta} \right| \leq [\sigma_{\parallel}], \quad (119.2) \quad \frac{T_a}{b\delta} \geq [\sigma_{\perp}], \quad (119.4)$$

$$\left| \frac{T_a}{(a-c)b} \right| \leq [\tau_{\parallel}], \quad (119.3) \quad \frac{T_a}{bc} \geq [\tau_{\perp}]. \quad (119.5)$$

Балканинг эгилишдаги мустаҳкамлик шартини ёзамиз:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \geq [\sigma]. \quad (119.6)$$

Қарағайдан тайёрланган балканинг эгилишдаги қўзилиши ёки сиқилиши учун рухсат этилган кучланиш $[\sigma] = 80 \text{ кг/см}^2$ қабул қилинади. Кесим инерция моментининг қиймати кесимнинг шпонка учун қолдирилган бўшлиқ натижасида заифланиши кўзда тутилса, қуйидагича бўлади:

$$I = \frac{b}{12} [h^3 - (2\delta)^3]. \quad (119.7)$$

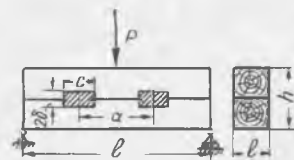
Ўтказилган тажриба ва қўзатишлар шу тарзда тайёрланган улама ёғоч балкалар мустаҳкамлигининг ҳисоблаш топилган мустаҳкамликдан анча кам бўлишини кўрсатади. Шпонка ёрдамида тайёрланган балканинг ҳақиқий мустаҳкамлиги ҳисоб тенгламасидан чиқарилган натижанинг 70% ини ташкил этади. Шу сабабли қаршилик моменти учун (119.6) формула билан ҳисоблаб топилган қийматнинг 0,7 қисмини олиш лозим. Шу мулоҳазаға кўра, ҳисоб тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{0,7W} \leq [\sigma]. \quad (119.8)$$

162-масала. Икки таянчда ётувчи улама ёғоч балканинг узунлиги $l = 6$ м бўлиб, унинг ўртасига $P = 4T$ юк қўйилган. Балка ҳар бир метрининг сғирлиги 100 кг. Балканинг мустаҳкамлиги текширилсин (429-шакл). Рухсат этилган кучланиш $[\sigma] \approx 100 \text{ кг/см}^2$. Е ч и ш. Даставвал максимал эгувчи момент билан кесиб ўтувчи кучни ҳисоблаймиз:

$$M_{\max} = \frac{Pl}{4} + \frac{ql^2}{8} = 6,45 \text{ тм},$$

$$Q_{\max} = \frac{P}{2} + \frac{ql}{2} = 23 \text{ т}.$$



429-шакл.

Талаб қилинган қаршилик моменти ҳисоб тенгламаси (119.8) дан топамиз:

$$W = \frac{M_{\max}}{0,7[\sigma]} = \frac{645000}{0,7 \cdot 100} = 9214 \text{ см}^3.$$

Улама балка шпонка билан бирлаштирилган квадрат кесимли иккита тўсундан ҳосил қилинган деб ҳисоблаймиз ва кесимнинг ўлчамларини $W = \frac{2}{3} a^3$

дан аниқлаймиз, $W = \frac{2}{3} a^3 = 9214$, бундан $a = 24 \text{ см}$ бўлади. Бинобарин, кесим ўлчамлари: $h = 2a = 48 \text{ см}$, $b = a = 24 \text{ см}$. Кесимнинг шпонка ўрнатиш учун қолдирилган бўшлиғи натижасида заифланишини кўзда тутиб (119.7) дан δ ни аниқлаймиз:

$$W = \frac{2I}{h} = \frac{b}{12h} [h^3 - (2\delta)^3],$$

бундан $\delta = 1,44 \text{ см}$.

Шпонка бўшлиғининг чуқурлиги δ ни 2,5 см деб қабул қиламиз; шпонканинг кенглиги c ни (119.4) ва (119.5) тенгламалар нисбатидан аниқлаймиз:

$$c = \frac{[\sigma_{\perp}]}{[\tau_{\perp}]} \delta = \frac{50}{10} \cdot 2,5 = 12,5 \text{ см}.$$

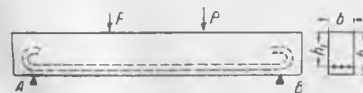
Шпонкалар маркази орасидаги масофа a ни (119.2) ва (119.3) нисбатидан аниқлаймиз:

$$a = \frac{[\sigma_{\parallel}]}{[\tau_{\parallel}]} \delta + c \approx 27,5;$$

a ни 30 см қилиб оламиз.

120-§. Темир-бетон балкаларни рухсат этилган кучланишлар асосида ҳисоблаш

Турли материаллардан тайёрланган балкалар амалда жуда кўп ишлатилади. Масалан, ёғоч балкаларнинг мустаҳкамлигини ошириш учун уларнинг пастки қатламига темир листлар қопланади. Шунингдек, темир-бетон балкаларнинг чўзиладиган зоналари бўйлаб пўлат стерженлар ўрнатилади. Улар *арматура* деб аталади. Бундай ҳолларда турли (бир жинсли бўлмаган) материаллардан ҳосил қилинган балкалар бир-бири билан шундай қовушадикки, улар бирга қўшилиб, бир бутун бўлиб ишлайди. Тузилиши жиҳатидан бундай мураккаб балкалар учун ҳам текис кесим гипотезасини татиқ этиш мумкин деб фараз қиламиз. Бу гипотезани қабул қилиш билан бирга, темир-бетон балкаларни ҳисоблашда бир жинсли балкаларнинг кўндаланг эгилиши учун чиқарилган нисбий деформация ифодасидан беvosита

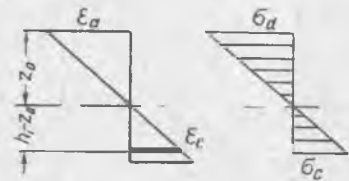


430-шакл.

фойдаланамиз. Аммо бетон чўзувчи кучланишини қабул қилмай фақат сиқилишга ишлайди. Темир арматура бетонга илмоқлик қилиб ўрнатилгани учун бетон билан қўшилган ҳолда, у билан биргаликда деформацияланиб, барча чўзувчи зўриқишларни қабул

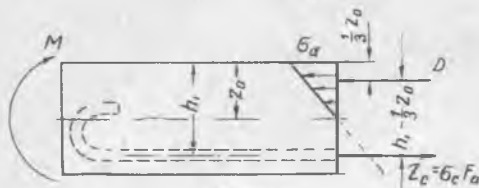
қилади. Темир-бетон балка схематик равишда 430-шаклда тасвирланган. Бу схемада балканинг чўзилишга ишлайдиган пастки қисмига учта пўлат стержендан тайёрланган арматура ўрнатилган.

Балканинг юқори толалари сиқилиб, пастки толалари чўзилгани учун унинг тепа қиррасидан қандайдир z_0 масофада нейтрал қатлам ўтади. Қўндаланг кесим юзасининг текис қолиши туфайли, нисбий чўзилиш ва сиқилиш кесим бўйича 431-шаклда тасвирланганидек чизиқли қонун билан ўзгаради. Кесимнинг ҳар бир нуктасидаги нисбий чўзилиш ёки сиқилишни ўша нуктага тўғри келган материалнинг эластиклик модулига кўпайтириб, кесимда ҳосил бўладиган нормал кучланишлар эпюрасини ҳосил қиламиз (432-шакл). Пўлатнинг эластиклик модули (E_s) бетонники (E_b) га қараганда 10—15 марта катта бўлади. Шунинг учун арматурадаги кучланиш бетондагига қараганда анчагина каттадир. Масалан, $E_s = 2 \cdot 10^6$ кг/см² бўлса, $E_b = (1,4 - 2) \cdot 10^5$ кг/см² бўлади.

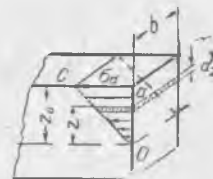


431-шакл.

432-шакл.



433-шакл.



434-шакл.

Бетондаги энг катта сиқувчи кучланишни σ_b билан, арматурадаги чўзувчи кучланишни эса σ_s билан белгилаймиз. Чўзувчи кучланишни кесимга ўрнатилган арматура юзаси бўйича бир хил дейишимиз мумкин. Сиқилган томон қиррасидан арматура марказигача бўлган масофани h_1 , арматура қўндаланг кесимининг юзасини F_a , қўндаланг кесим баландлигини h , кенглигини b билан белгилаймиз. Эластиклик модуллари нисбати $\frac{E_s}{E_b} = n = 10 \div 15$.

Темир-бетон балкада ҳосил бўладиган нормал кучланишларни ва сиқилган томон қиррасидан нейтрал қатламгача бўлган z_0 масофани, балкадан ажратилган бўлакнинг мувозанат шартидан аниқлаймиз. Бу бўлак унга таъсир қиладиган эгувчи момент ва кесим юзасига нормал йўналган зўриқишлар таъсирида мувозанатда бўлади (433-шакл).

Ажратилган бўлакнинг мувозанат шартига кўра, қуйидаги икки тенгламани ёзамиз:

1. Кесим юзаси бўйича ёйилган сиқувчи зўриқишлар йиғиндиси чўзувчи зўриқишлар йиғиндисига тенг бўлади.

2. Эгувчи момент зўриқишлардан ҳосил бўлган моментга тенг бўлади.

Кесимдаги сиқувчи ва чўзувчи зўриқишларнинг тенг таъсир этувчиларини тегишлича D ва Z_s лар билан белгилаймиз (433-шакл). D нинг қийматини оддий балкаларга оид формула ёрдамида аниқлаймиз. Нейтрал ўқдан z масофадаги элементар юзача bdz даги зўриқиш σbdz га тенг (434-шакл).

Сиқувчи зўриқишларнинг тенг таъсир этувчиси:

$$D = \int_0^{z_0} \sigma b dz$$

бўлади. σ нормал кучланиш кесим юзасида чизиқли қонун билан тақсимлангани сабабли, уни $\sigma = \sigma_d \frac{z}{z_0}$ кўринишида ёзиш мумкин. Шунинг учун:

$$D = \int_0^{z_0} \sigma_d \frac{z}{z_0} b dz = \frac{1}{2} \sigma_d z_0 b$$

бўлади. Арматурадаги зўриқишларнинг тенг таъсир этувчиси $Z_c = F_a \cdot \sigma_c$. Булар кўзда тутилса, биринчи мувозанат тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$-D + Z_c = 0 \text{ ёки } \frac{1}{2} \sigma_d z_0 b + F_a \cdot \sigma_c = 0; \quad (120.1)$$

σ_c кучланишни σ_d орқали ифодалаш мумкин. Деформациянинг чизиқли қонун билан ўзгариши сабабли, 431-шаклга мувофиқ $\epsilon_c = \epsilon_d \frac{h_1 - z_0}{z_0}$ муносабатни оламыз.

Аммо $\sigma_c = E_c \epsilon_c$, $\sigma_d = E_d \epsilon_d$ тенгламалардан ϵ_c ва ϵ_d ни тегишли кучланишлар орқали ифодалаш мумкин. Бу кучланишларни ҳозиргина чиқарилган муносабатга қўйсак, σ_c ни σ_d орқали ифодалаган бўламиз:

$$\sigma_c = \sigma_d \frac{E_c}{E_d} \frac{h_1 - z_0}{z_0} = \sigma_d n \frac{h_1 - z_0}{z_0}. \quad (120.2)$$

Буни (120.1) га қўйсак, тенглама қуйидагича ёзилади:

$$-\frac{1}{2} \sigma_d z_0 b + F_a \sigma_d n \frac{h_1 - z_0}{z_0} = 0$$

Бу тенглamani ўзгартириб, z_0 га нисбатан қуйидаги квадрат тенглamani ҳосил қиламиз:

$$z_0^2 + \frac{2F_a n}{b} z_0 - \frac{2F_a n}{b} h_1 = 0. \quad (120.3)$$

Бу тенгламадан нейтрал қатлам ҳолатини аниқловчи z_0 ни топамиз:

$$z_0 = \frac{nF_a}{b} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2h_1 b}{nF_a}} \right]; \quad (120.4)$$

z_0 аниқлангач, иккинчи мувозанат тенгламасини ёзишимиз мумкин. D зўриқиш сиқувчи кучланишнинг эпюрасини тасвирловчи учбурчак арказига қўйилганлиги назарга олинса, ички жуфт елкаси биз текшираётган ҳолда $h_1 - \frac{z_0}{3}$ га тенг бўлади. Шунинг учун иккинчи мувозанат тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$M - D \left(h_1 - \frac{z_0}{3} \right) = 0$$

ёки

$$M - \frac{1}{2} \sigma_c z_0 b \left(h_1 - \frac{z_0}{3} \right) = 0. \quad (120.5)$$

Бу тенгламадан бетондаги кучланиш σ_c ни аниқлаш учун қуйидаги формулани оламыз:

$$\sigma_c = \frac{2M}{b z_0 \left(h_1 - \frac{z_0}{3} \right)}. \quad (120.6)$$

σ_c ни билганимиз ҳолда, арматурада ҳосил бўладиган кучланиш σ_c ни аниқлай оламиз:

$$\sigma_c = \frac{Z_c}{F_a} = \frac{D}{F_a} = \frac{\sigma_c z_0 b}{2F_a} = \frac{M}{F_a \left(h_1 - \frac{z_0}{3} \right)} \quad (120.7)$$

Темир-бетон балканинг мустаҳкамлиги қуйидаги шартлар ёрдамида текширилади:

$$(\sigma_c)_{\max} \leq [\sigma_c]; \quad (\sigma_c)_{\max} \leq [\sigma_c],$$

бу ерда $[\sigma_c]$ — бетон учун рухсат этилган кучланиш.

121- §. Темир-бетон балкалардаги тангенциал кучланишлар

Курсимизнинг 81-параграфиди тавсиф этилган усулдан фойдаланиб, темир-бетон балкада ҳосил бўладиган тангенциал кучланишларни аниқлаймиз. Бир-биридан dx масофада турган m ва m_1 кесимлар воситаси билан балкадан бир бўлакча ажратамиз (435-шакл). Энг катта тангенциал кучланиш нейтрал қатламда ҳосил бўлиши керак. Ўша ажратилган бўлакчадан m ва m_1 элементини олиб, унинг мувозанатини текшираимиз. Нейтрал қатламга тўғри келадиган n юзада энг катта тангенциал кучланиш $\tau_{\max}$ ҳосил бўлади ва у юзадаги тангенциал зўриқиш $dT = \tau_{\max} b dx$ бетоннинг m ва m_1 юзалари бўйича сиқувчи зўриқишлар айирмаси dD билан мувозанатлашади:

$$\tau_{\max} b dx = dD,$$

бундан:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{b} \frac{dD}{dx} \quad (a)$$

Эгувчи момент M ички жуфтнинг momenti билан мувозанатлашгани учун:

$$M = D \left(h_1 - \frac{z_0}{3} \right)$$

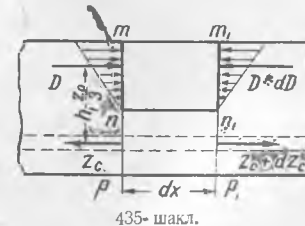
бўлади. Бундан D ни аниқлаб, унинг қийматини (а) га қўйсақ, $\tau_{\max}$ қуйидагича ифодаланади:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{b \left(h_1 - \frac{z_0}{3} \right)} \frac{dM}{dx} = \frac{Q}{b \left(h_1 - \frac{z_0}{3} \right)}$$

ёки

$$\tau_{\max} = \frac{3}{b} \frac{Q}{h_1 \left(3 - \frac{z_0}{h_1} \right)} \quad (121.1)$$

Амалий ҳисобларни бажаришда, нейтрал қатламдаги тангенциал кучланишларни аниқлаш билан бирга, арматура ва бетоннинг тегишиб турган сиртларидаги кучланишни, яъни бетон билан арматуранинг қовушиш кучланишини ҳам аниқлаш лозим. Ҳалиги элементни арматура олдида ажратиб, унинг мувозанатини текшираимиз. Арматурадаги чўзувчи зўриқишларнинг dx мобайнидаги айирмаси унинг сиртидаги тангенциал зўриқишлар



435- шакл.

билан мувозанатлашади. Олдин арматуранинг чўзувчи зўриқишлар айирмасининг қийматини топамиз:

$$\left(h_1 - \frac{z_0}{3}\right) dz_c = Q dx.$$

бундан

$$\frac{dz_c}{dx} = \frac{Q}{h_1 - \frac{z_0}{3}}.$$

Арматура стерженларининг узунлик бирлигидаги сиртини F десак, у сиртдаги тангенциал кучланиш $\tau_{арм}$ қуйидагича бўлади:

$$\tau_{арм} = \frac{1}{F} \frac{dz_c}{dx} = \frac{3Q}{F h_1 \left(3 - \frac{z_0}{h_1}\right)}. \quad (121.2)$$

Бу қовушиш кучланиши бетонда ҳосил бўладиган нейтрал қатламдаги $\tau_{мах}$ дан ($F < b$ бўлса) каттадир. Арматура материални кўпайтирмасдан F ни катталаштириш учун арматура стерженлари сонини ошириш, уларнинг диаметрларини кичик қилиб олиш керак.

МАСАЛАЛАР

163. Улама балка диаметри $d = 17$ мм ли парчин михлар билан туташтирилган тўртта 20^г номерли швеллердан тайёрланган (436-шакл). Балканинг узунлиги $l = 3$ м; унинг ўртасига қўйилиши мумкин бўлган $P_{мах}$ куч ва швеллернинг токчаларини туташтирувчи вертикал парчин михлар орасидаги масофа аниқлансин. Рухсат этилган кучланишлар:

$$[\sigma] = 1400 \text{ кг/см}^2; \quad [\tau] = 1100 \text{ кг/см}^2.$$

$$\text{Е ч и ш. } I_{брутто} = 4(1804 + 29,9 \cdot 10^2) = 19176 \text{ см}^4.$$

Парчин михлар тешиги туфайли кесимнинг заифланишини 12% деб олаемиз, у ҳолда:

$$I_{нетто} = 19176 \cdot 0,88 = 16875 \text{ см}^4;$$

$$W_{нетто} = \frac{16875}{20} = 843,8 \text{ см}^3$$

бўлади. Энг катта эгувчи моментни аниқлаймиз:

$$M_{мах} = \frac{Pl}{4} = W_{нетто}[\sigma] = 843,8 \cdot 1400 = 11,81 \text{ тм}.$$

ундан:

$$P_{мах} = \frac{11,81 \cdot 4}{3} = 15,7 \text{ т}$$

келиб чиқади.

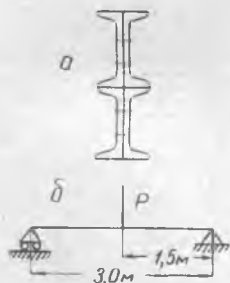
$$\text{Максимал кесиб ўтувчи куч: } Q_{мах} = \frac{P_{мах}}{2} = 7,85 \text{ т. Нейтрал қатламдаги } 1 \text{ см}$$

узунликка тўғри келадиган кесувчи зўриқишнинг қуйидаги формуладан аниқлаймиз:

$$\tau = \frac{Q_{мах} S_{брутто}}{I_{брутто}} = \frac{7850 \cdot 29,9 \cdot 10^2 \cdot 2}{19176} = 244 \text{ кг/см}^2.$$

Диаметри $d = 17$ мм бўлган бир хил кесимли 2 та парчин михнинг синиб кетмасдан кўрсатадиган қаршилиги:

$$T = 2 \frac{\pi d^2}{4} [\tau] = 2 \frac{3,14 \cdot 1,7^2}{4} 1100 = 5000 \text{ кг}.$$



436-шакл.

Парчин михлар орасидаги масофа:

$$a = \frac{T}{\tau} = \frac{5000}{244} \approx 20 \text{ см.}$$

164. Кесими қўштавр шаклида бўлган улама балканинг энг катта эгувчи моменти $M_{\max} = 1300 \text{ кгм}$, кесиб ўтувчи куч $Q = 2000 \text{ кг}$. Парчин михлар тешиги туфайли кесимнинг заифланиши ҳисобга олинмаган ҳолда балканинг қўндаланг кесими танлансин (437-шакл). $[\sigma] = 1400 \text{ кг/см}^2$. Қўндаланг кесим $200 \times 2 \text{ мм}^2$ бўлган девор, кенглиги $b = 20 \text{ мм}$ ли тўртта тенг ёнли бурчаклик ва иккита горизонтал листдан иборат. Энг катта тангенциал кучланиш ҳам аниқлансин.

Ечиш. Олдин зарур бўлган қаршилик моментини аниқлаймиз:

$$W = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{130000}{1400} = 93 \text{ см}^3.$$

Кесимнинг инерция моменти:

$$I_y = Wz_{\max} = 93 \cdot 10 = 930 \text{ см}^4$$

булиши керак. Вертикал деворнинг ($200 \times 2 \text{ мм}^2$) инерция моменти:

$$I_0 = \frac{\delta b^3}{12} = 133 \text{ см}^4.$$

$20 \times 20 \times 3 \text{ мм}$ ўлчамли бурчакликларни оламиз. Шунинг учун:

$$I_{\text{бур}} = 4 \cdot 1,13 \cdot (9,2)^2 = 400 \text{ см}^4.$$



437-шакл.

Ҳар бир бурчакликнинг юзи $F = 1,13 \text{ см}^2$ бўлиб, оғирлик марказининг ҳолатини сортмент жадвалидан аниқладик.

Горизонтал листларнинг инерция моменти:

$$\Delta I = I_y - (I_0 + I_{\text{бур}}) = 930 - 533 = 397 \text{ см}^4.$$

Горизонтал листлар кенглигини 50 мм қилиб оламиз, чунки улар иккита бурчаклик билан девор қалинлигини қоплаш керак. У ҳолда:

$$\Delta I = 2b_T \delta_T \left(\frac{b_T}{2} \right)^2 = 2 \cdot 5\delta_T \cdot 10^2 = 397 \text{ см}^4;$$

демак

$$\delta_T = \frac{397}{1000} \approx 0,4 \text{ см} = 4 \text{ мм}$$

бўлади, бу ерда δ_T — горизонтал листнинг қалинлиги; b — горизонтал листнинг кенглиги.

Кесимнинг ҳақиқий инерция моменти:

$$I_{\text{ҳақ}} = I_0 + I_{\text{бур}} + I_{\text{гор}} = 949 \text{ см}^4.$$

Ҳақиқий қаршилик моменти:

$$W_{\text{ҳақ}} = \frac{949}{10,4} = 91,3 \text{ см}^3.$$

Кесимда ҳосил бўладиган ҳақиқий кучланиш:

$$\sigma_{\max} = \frac{130000}{91,3} = 1425 \text{ кг/см}^2 > 1400 \text{ кг/см}^2,$$

яъни у рухсат этилган кучланишдан $1,8\%$ зиёдроқ бўлиб чиқди.

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \delta_{\max}}{I_{\text{ҳақ}} \cdot \delta_0} = \frac{2000}{949 \cdot 0,2} (5 \cdot 0,4 \cdot 10,2 + 2 \cdot 1,13 \cdot 9,4 + 10,02 \cdot 5) = 544 \text{ кг/см}^2.$$

165. Икки таянчда ётган улама балканинг ўртасига $P = 25 \text{ т}$ юк қўйилган. Балканинг қўндаланг кесими 438-шаклда тасвирланган. Парчин михлар орасидаги масофа $a = 120 \text{ мм}$. Горизонтал ва вертикал парчин михларни кесувчи T_1 ва T_2 кучлар ҳисоблансин.

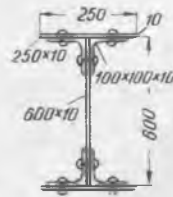
Қўрсатма. T_1 ва T_2 нинг қиймати (116.1) дан аниқланади.

Жавоб. $T_1 \approx 262 \text{ кг}$, $T_2 \approx 1092 \text{ кг}$.

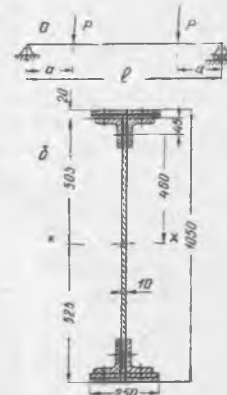
166. Икки таянчда ётган улама балкага таянчлардан $a = 2$ м масофада бир-бирига тенг ва ҳар бири $P = 50$ т бўлган иккита тўпланган куч қўйилган (439-шакл, а). Балканинг узунлиги $l = 8$ м. Унинг қундаланг кесими 1000×10 мм ўлчамли вертикал лист, $100 \times 100 \times 10$ мм ўлчамли тўртта бурчаклик ва 250×10 мм ўлчамли икки жуфт горизонтал листлардан тузилган қўштаврдир (439-шакл). Рухсат этилган кучланишлар: $[\sigma] = 1200$ кг/см², $[\tau] = 900$ кг/см²; балканинг узунлик бирлигидаги оғирлиги $q = 0,35$ т/м. Парчин михнинг диаметри $d = 20$ мм бўлиб, унинг рухсат этилган кучланишлари $[\tau] = 800$ кг/см², $[\sigma_{\text{сз}}] = 200$ кг/см². Бурчакликларни вертикал девор билан туташтирувчи парчин михлар орасидаги масофа $a = 10$ см.

Кесимнинг инерция моменти: $I_{\text{брутто}} = 525\,000$ см⁴. Кесимнинг парчин михлар туфайли заифланишини 15% деб олиб, балканинг мустақамлик шартини қавоатлантириши текшириб кўрилсин, яъни:

1) ҳавфли кесимдаги нормал кучланиш $\sigma_{\text{тах}}$ ва нейтрал қатламдаги энг катта тангенциал кучланиш $\tau_{\text{тах}}$ аниқлансин;



438- шакл.



439- шакл.

2) парчин михлардаги кесувчи τ ва эгувчи $\sigma_{\text{сз}}$ кучланишлар текшириб кўрилсин;
3) $M_{\text{тах}}$ ва $Q_{\text{тах}}$ бўлган кесимларда горизонтал парчин михлар олдидаги элементларнинг максимал бош кучланишлари текшириб кўрилсин.

Жавоб. $\sigma_{\text{тах}} = 1200$ кг/см².

$$\tau_{\text{тах}} = 549 \text{ кг/см}^2 < 900 \text{ кг/см}^2,$$

$$\tau = \frac{T}{\frac{\pi d^2}{4}} = 680 \text{ кг/см}^2 < 800 \text{ кг/см}^2,$$

$$\sigma_{\text{сз}} = \frac{T}{\delta d} = 2\,135 \text{ кг/см}^2 > 2\,000 \text{ кг/см}^2; \text{ фарқи } 6,5\%.$$

Горизонтал парчин мих олдидаги элементда ҳосил бўладиган нормал ва тангенциал кучланишлар:

$$\sigma = \frac{Mz}{I_{\text{нетто}}} = 1\,050 \text{ кг/см}^2; \quad \tau = \frac{QS_T}{I_{\text{брутто}} \delta} = 446 \text{ кг/см}^2.$$

Энг катта бош кучланиш:

$$(\sigma_1)_{\text{тах}} = \frac{1}{2} [\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}] = 1\,214 \text{ кг/см}^2.$$

$1214 \text{ кг/см}^2 > 1200 \text{ кг/см}^2$, яъни атиги 1,2% фарқ қилади.

167. Узунлиги $l = 6$ м улама балка икки таянчга қўйилган бўлиб, унга интенсивлиги $q = 6$ т/м бўлган текис ёйилган куч таъсир қилади. Вертикал деворни тоқча элементлари билан туташтирувчи горизонтал парчин михнинг диаметри $d = 20$ мм; парчин михлар орасидаги масофа a аниқлансин. Кесимнинг бошқа ўлчамлари 440-шаклда кўрсатилган. Рухсат этилган кучланишлар $[\tau] = 1\,100$ кг/см; $[\sigma_{\text{сз}}] = 2\,800$ кг/см².

Қўрсатма. Тоқчанинг парчин мих орқали деворга кўрсатадиган босими

$$T_a = \frac{Q_{\text{тах}} S_T}{l} a = 315 a$$

$$S_T = 20 \cdot 1 \cdot 25,5 + 2 \cdot 14 \cdot 1 \cdot 22,78 = 1153 \text{ см}^3$$

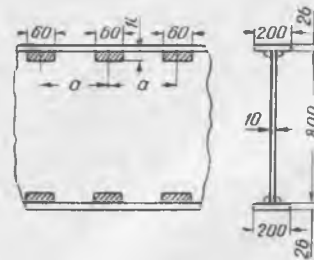
$$I_y = 65970 \text{ см}^4.$$

Парчин миҳнинг кесилмаслик шартидан:

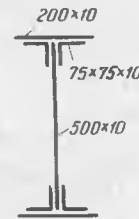
$$315a < 2 \frac{\pi d^3}{4} [\tau]; \quad a \approx 22 \text{ см.}$$

Деворнинг эзилмаслик шартидан:

$$315a < d[\sigma_{93}]; \quad a = 18 \text{ см.}$$



440- шакл.



441- шакл.

Парчин миҳ деворни икки текислик бўйича ситиб юбормаслиги учун:

$$315a < \delta_x (a - d) [\tau]; \quad a \approx 3 \text{ см}$$

бўлиши лозим.

168. Қўндаланг кесим ўлчамлари 441-шаклда кўрсатилган, узунлиги $l = 8 \text{ м}$ бўлган улама балка икки таянчга қўйилган. Улама балка қўйилиши мумкин бўлган энг катта тенг ёйилган q юк таъсирида турали; сидирғамас чокнинг қадами a аниқлансин. Балка учта элементдан иборат бўлиб, чокнинг қалинлиги 1 см , узунлиги 6 см дир. Балканинг эгилишдаги рухсат этилган кучланиши $[\sigma] = 1400 \text{ кг/см}^2$, чокнинг кесилишга рухсат этилган кучланиши $[\tau] = 720 \text{ кг/см}^2$. Чок сидирға қилинса, унинг қалинлиги қанча бўлиши керак?

Е ч и ш. Олдин қўйилиши мумкин бўлган кесиб ўтувчи кучни ҳисоблаймиз:

$$I = 2 \cdot 20 \cdot 2,6 \cdot 41,3^2 + \frac{1 \cdot 80^3}{12} = 219500 \text{ см}^4$$

$$W = \frac{I}{z_{\max}} = \frac{219500}{42,6} = 5150 \text{ см}^3 \quad M_{\max} = \frac{ql^2}{8} = 1400 \cdot 5150 \text{ кгсм}$$

қўйилиши мумкин бўлган ёйилма юкнинг интенсивлиги:

$$q = \frac{1400 \cdot 5150 \cdot 8}{l^2} \quad Q_{\max} = \frac{ql}{2} = \frac{1400 \cdot 5150}{800} \cdot 4 = 36050 \text{ кг.}$$

Иккала томондаги чокка тўғри келган энг катта кесувчи зўриқиш $T_a = \frac{Q_{\max} S_T}{l} a$ ни чокка қўйилиши мумкин бўлган зўриқиш $2 \cdot 0,7 h_{\text{чок}} l_{\text{чок}} [\tau]$ га тенглаштирамиз:

$$T = \frac{Q_{\max} S_T}{l} a = 353a = 2 \cdot 0,7 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 720.$$

Бундан чокнинг қадами: $a = 17 \text{ см}$.

Сидирға чокнинг қалинлигини (118.4) дан аниқлаймиз:

$$h_{\text{чок}} = \frac{Q_{\text{max}} S_T}{1,4[\tau_s]} = \frac{36\,050 \cdot 20 \cdot 2,6 \cdot 41,3}{1,4 \cdot 219\,500 \cdot 720} = 0,35 \text{ см} \approx 4 \text{ мм.}$$

169. Номери 40^а бўлган қўш тавр балкага $300 \times 24 \text{ см}$ ўлчамли иккита горизонтал лист эритиб уланган. Балка деворининг қалинлиги 10 мм бўлиб, кесиб ўтувчи куч кўндаланг кесимда ўртача қиймати $\frac{Q}{F} = 850 \text{ кг/см}^2$ га тенг бўлган тангенциал кучланиш

ҳосил қилади. Чокнинг баландлиги 10 мм; балканинг ҳар бир метрини улаш учун зарур бўлган чокнинг узунлиги аниқлансин.

Қўрсатма. Кесиб ўтувчи куч Q ни асосан кесимнинг девори қабул қилгани сабабли, унинг қиймати $Q = 850F$ формула ёрдамида топилади; F нинг қиймати сортамент жадвалидан аниқланади. Бир метр узунликдаги кесувчи кучни

$$T = \frac{QS_T}{l} 100$$

формуладан аниқлаб, ҳосил бўлган қийматни (117.1) формулага қўямиз. Кейин $[\tau_s]$ нинг қийматини белгилаб олиб, чокнинг узунлиги $l_{\text{чок}}$ ни аниқлаш мумкин. Агар $[\tau_s] = 720 \text{ кг/см}^2$ деб олинса, $l_{\text{чок}} = 18 \text{ см}$ бўлади.

170. Қарағайдан тайёрланган балканинг кўндаланг кесими $5 \times 2 \text{ см}$ ли тўғри тўртбурчак бўлиб, у $2 \times 0,25 \text{ см}$ ли пўлат лист билан бақувватланган (442 шакл, а). Бу элементлар бир бутун бўлиб ишлайдиган қилиб туташтирилган. Пўлатнинг эластиклик модули $E_c = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$, қарағайники эса $E_d = 1 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$. Балканинг узунлиги $l = 30 \text{ см}$ бўлиб, унинг бир учи қистириб тиралган, иккин-

чи учига эса $P = 50 \text{ кг}$ юк қўйилган. Пўлат лист ва ёғоч балкада ҳосил бўладиган кучланишлар ҳисоблансин.

Е чи ш. Текис кесим гипотезасидан фойдаланиб, $\sigma_c = \frac{E_c}{E_d} \sigma_d$ ни оламиз, чунки

$$\sigma_c = \frac{E_c z}{\rho}; \quad \sigma_d = \frac{E_d z^*}{\rho}.$$

Нейтрал ўқнинг ҳолатини аниқлаш учун ёғоч ва пўлатдаги ички зўриқишлар йиғиндисини нолга тенглаштирамиз:

$$\int_{F_c} \sigma_c dF_c + \int_{F_d} \sigma_d dF_d = 0$$

ёки

$$\int_F \sigma_d \left(\frac{E_c}{E_d} dF_c + dF_d \right) = \int_F \sigma_d d \left(\frac{E_c}{E_d} F_c + F_d \right) = 0.$$

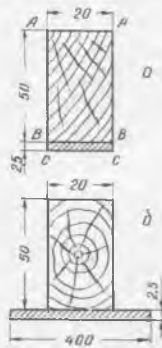
Кейинги интегралнинг кавс ичига олинган ҳадини келтирилган юза деб атаб, уни $F_{\text{келт}}$ ҳарфи билан белгилаймиз, яъни:

$$\frac{E_c}{E_d} F_c + F_d = F_{\text{келт}}.$$

Икки хил материалдан тузилган юзага мустаҳкамлик жиҳати билан эквивалент бўлган юза келтирилган юза деб аталади. Бу ҳолда пўлат полоса юзани мустаҳкамлик жиҳатидан унга эквивалент бўлган ёғоч юза билан қуйидагича алмаштириш лозим.

$$F_c \frac{E_c}{E_d} = 2 \cdot 0,25 \cdot 20 = 10 \text{ см}^2.$$

*Бу ифодалардаги «с» индекси пўлатни, «д» индекси эса ёғочни билдиради.



442-шакл.

яъни кенглиги 2 см бўлган пўлат полоса кенглиги 40 см ли ёғоч полоса билан алмаштирилди (442-шакл. б).

Демак, юқоридаги формулани қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$\frac{E_{\partial}}{\rho} \int z dF_{\text{келт}} = 0.$$

Бу формуладан кўриниб турибдики, нейтрал ўқ келтирилган юзанинг оғирлик марказидан утар экан. Нейтрал ўқнинг ҳолати одатдагича аниқланади, фақат пўлат полоса юзани унга мустаҳкамлик жиҳатидан эквивалент бўлган ёғоч юза билан алмаштириш лозим. Нейтрал ўқ эквивалент ёғоч юзанинг пастки қиррасидан $z = 1,437$ см масофа ўтади. Кучланишларни аниқлаш учун нейтрал ўққа нисбатан моментлар тенгласини тузамиз:

$$M = \int_{F_c} z \sigma_c dF + \int_{F_{\partial}} z \sigma_{\partial} dF = \frac{E_{\partial}}{\rho} \int_{F_{\partial}} z^2 d \left[\frac{E_c}{E_{\partial}} F_c + F_{\partial} \right] = \frac{E_{\partial}}{\rho} \int_{F_{\text{келт}}} z^2 dF_{\text{келт}}.$$

Келтирилган кесимнинг инерция моменти $I_{y \text{ келт}}$ ни аниқлаймиз:

$$I_{y \text{ келт}} = \int_{F_{\text{келт}}} z^2 dF_{\text{келт}} = \frac{2 \cdot 5^3}{12} + 10 \cdot 1,313^2 + 40 \cdot 0,25 \cdot 1,312^2 = 55,28 \text{ см}^4.$$

Демак,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E_{\partial} I_{\text{келт}}}$$

$$\sigma_{\partial} = \frac{E_{\partial} z_{\text{мах}}}{\rho} = \frac{M}{I_{\text{келт}}} z_{\text{мах}} = \frac{50 \cdot 30 \cdot 3,813}{55,28} = 104 \text{ кг/см}^2.$$

Пўлатдаги кучланишни аниқлаш учун бу нуқталарда ёғочга таъсир қилувчи кучлавишни ҳисоблаймиз:

$$\sigma_{\partial}^* = - \frac{M}{I_{\text{келт}}} z_1 = - \frac{50 \cdot 30 \cdot 1,187}{55,28} = - 32,2 \text{ кг/см}^2;$$

$$\sigma_{\partial}^* = - \frac{50 \cdot 30 \cdot 1,437}{55,28} = - 39 \text{ кг/см}^2$$

Энди пўлатдаги кучланишни $\sigma_c = \sigma_{\partial} \frac{E_c}{E_{\partial}}$ формуладан топиш қийин эмас.

$$\sigma_c^* = - 644 \text{ кг/см}^2. \quad \sigma_c^* = - 780 \text{ кг/см}^2.$$

171. Коробка шаклида ясалган пўлат балка ичига ёғоч брус зич киритилиб кучайтирилган (443-шакл).

Ёғоч брус билан кучайтирилгангача ва ундан кейин пўлат балкада қандай кучланиш ҳосил бўлиши аниқлансин. Ёғоч брусдаги кучланиш ҳам ҳисоблансин. Эгувчи момент $M = 200 \text{ кгсм}$. Эластиклик модуллари: $E_c = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}$, $E_{\partial} = 1 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$.

Е чи ш. Пўлат балка ёғоч брус билан кучайтирилишидан олдин:

$$I_y = \frac{4 \cdot 8^3 - 3 \cdot 4 \cdot (7,4)^2}{12} = 54 \text{ см}^4, \quad W = \frac{54}{4} = 13,5 \text{ см}^3.$$

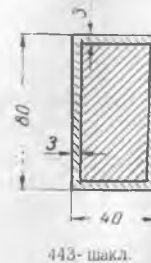
$$\sigma_c = \frac{20000}{13,5} = 1480 \text{ кг/см}^2.$$

Кучайтирилгандан кейин:

$$\frac{E_c}{E_{\partial}} = 20.$$

$$I_{\text{келт}} = I_c + \frac{E_{\partial}}{E_c} I_{\partial} = 54 + \frac{1}{20} \cdot \frac{3 \cdot 4 \cdot 7,4^3}{12} = 59,8 \text{ см}^4,$$

$$\sigma_c = \frac{M}{W_{\text{келт}}} = \frac{20000}{15} \cong 1330 \text{ кг/см}^2.$$



Ёғочнинг тепа қиррасида жойлашган пулатнинг кучланиши:

$$\sigma_c = \frac{2000}{60} \cdot 3,6 = 1200 \text{ кг/см}^2.$$

Ёғочнинг тепа қиррасидаги кучланиш:

$$\sigma_d = \frac{E_d}{E_c} \cdot \sigma_c = \frac{1200}{20} = 60 \text{ кг/см}^2.$$

172. Тўғри тўртбурчак кесимли темир-бетон балка берилган. $\frac{E_c}{E_d} = 15$ ва арматуранинг юзаси $F_a = 0,008 bh_1$, балканинг юқори қиррасидан нейтрал қатламгача бўлган масофа z_0 аниқлансин.

Е ч и ш. Бу масала (119.4) формула билан ечилади, яъни

$$z_0 = \frac{hF_a}{b} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2h_1b}{nF_a}} \right] \cong 0,385h_1.$$

173. Тўғри тўртбурчак кесимли темир-бетон балка берилган. Балкадаги пулат арматура учун энг катта сиқувчи кучланиш $\sigma_c = 840 \text{ кг/см}^2$, бетон учун энг катта сиқувчи кучланиш $\sigma_d = 45 \text{ кг/см}^2$. Агар $\frac{E_c}{E_d} n = 15$ берилган бўлса, балкадаги арматуралар кесимлари юзачаларининг йиғиндис, балка умумий кесим юзасининг қанча қисмини ташкил қиладиган?

Е ч и ш. (120.2) формулага биноан, $\frac{840}{45} = 15 \frac{h_1 - r_0}{z_0}$ (431-шакл),

бундан:

$$z_0 = \frac{45h_1}{101}.$$

Энди (120.1) формулани ёзамиз: $-D + z_c = 0$,

бундан

$$D = \int_0^{z_0} \sigma_d \frac{z}{z_0} b dz = \frac{1}{2} \sigma_d z_0 b \quad \text{ва} \quad z_c = F_a \cdot \sigma_c.$$

Юқорида ёзилганларга биноан:

$$-\frac{1}{2} \sigma_d z_0 b + F_a \cdot \sigma_c = 0,$$

бундан:

$$\frac{F_a}{h_1 b} \approx 0,012.$$

174. Бетон учун рухсат этилган кучланиш $[\sigma_d] = 45 \text{ кг/см}^2$ ва $\frac{E_c}{E_d} = 15$ бўлса, икки таянчда ётган темир-бетон балканинг ўртасига қанча куч қўйиш мумкин?

$$l = 3 \text{ м}, \quad b = 25 \text{ см}, \quad h = 30 \text{ см}, \quad F_a = 7,5 \text{ см}^2.$$

Жавоби. $P = 2430 \text{ кг}$.

175. Нейтрал қатламнинг ҳолатини аниқловчи z_0 нинг қандай қийматида энг катта кучланишлар бетон ва арматура учун бир вақтда ўзининг рухсат этилган қийматига эришади?

Е ч и ш: $[\sigma]$ ва $[\sigma_d]$ арматура ҳамда бетон учун рухсат этилган кучланишлар бўлсин. Буларнинг нисбатини аниқлаймиз:

$$\frac{[\sigma_d]}{[\sigma_c]} = \frac{E_d}{E_c} \frac{z_0}{h_1 - z_0};$$

бундан:

$$z_0 = \frac{|\sigma_\delta|}{|\sigma_\delta| + |\sigma_c|} \frac{E_c}{E_\delta}.$$

Бу шартни қаноатлантирувчи балка арматуралари мувозанатланган балка деб аталади.

122-§. Эластик таянчда ётувчи балкалар

Балка эластик таянчда ётибди, деб фараз қилайлик (444-шакл). Бундай балкага фундаментга қўйилган балкалар ёки чўкувчи таянчларда ётувчи балкалар мисол бўла олади. Балка қўйилган юк $q(x)$ таъсирида эгилганда унинг эластик таянчида реакция кучи ҳосил бўлади. Бу реакция кучини $P(x)$ билан белгилаймиз. Балканинг ҳар бир нуктаси учун тегишли бу реактив куч шу нуктанинг кўчиш катталигига пропорционал деб фараз қиламиз. Эластик таянчдаги ҳар бир нуктада ҳосил бўладиган реактив куч айни шу нуктанинг кўчишига пропорционал бўлиши ҳақидаги гипотезани энг аввал проф. Винклер таърифлаганлигидан у *Винклер гипотезаси* дейилади. Балка қўйилган эластик таянччи бир жинсли деб қараймиз. Эластик таянчнинг балка узунлик бирлигига кўрсатган реакция кучлари қиймати қўйидаги кўринишда ифодаланади:

$$P(x) = -k\omega(x). \quad (122.1)$$

Пропорционаллик коэффициент k нинг ўлчами куч/(узунлик)³ деб қабул қилинади. Бу коэффициент эластик таянчнинг *мойиллик коэффициенти* деб аталади. Реактив куч, балканинг шаклида тасвирлангандек, остки томондан таъсир кўрсатувчи ёйилган кучдан иборатдир. Шунинг учун уни балкага бевосита қўйилган куч $q(x)$ билан қўшиш мумкин. Шунга кўра, балканинг ҳар бир узунлик бирлигига таъсир этувчи кучнинг қиймати:

$$q_1(x) = q(x) - k\omega(x) \quad (122.2)$$

бўлади. Бош текислик OZX ни шаклдагидек танлаб, эгилган ўқ дифференциал тенгламасини ёзамиз:

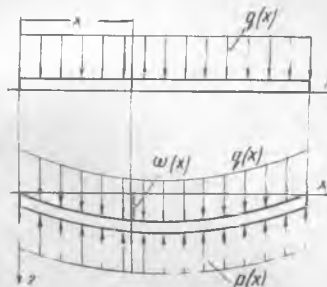
$$EI \frac{d^4 \omega}{dx^4} = q(x) - k\omega(x)$$

ёки

$$EI \frac{d^4 \omega}{dx^4} + k\omega(x) = q(x).$$

Бу тенгламани содда кўринишга келтирамиз:

$$\frac{d^4 \omega}{dx^4} + 4\alpha^4 \omega(x) = \frac{p(x)}{EI} \quad (122.3)$$



444-шакл.

бу ерда

$$4\alpha^4 = \frac{k}{EI} \quad \text{ёки} \quad \alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}} \quad (122.4)$$

(122.4) тенгламанинг интегралли унинг бир жинсли қисми умумий интегралли билан тенгламанинг хусусий интеграллари йиғиндисидан иборат. Шунинг учун олдин (122.4) нинг бир жинсли қисмининг умумий интеграллини топамиз:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\alpha^4 w = 0. \quad (122.5)$$

Бу тенгламанинг умумий интеграллини топишда бизга маълум бўлган усуллардан фойдаланиб, унинг характеристик тенгламасини тузамиз:

$$\lambda^4 + 4\alpha^4 = 0. \quad (122.6)$$

(122.6) нинг илдизларини топиш учун Эйлер формуласидан фойдаланамиз:

$$\lambda = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (a)$$

Моор формуласига мувофиқ:

$$\lambda^4 = \rho^4 (\cos^4 \varphi + i \sin 4\varphi).$$

Бунини (122.4) га қўйиб, тенгламанинг чап томони ва ҳақиқий ҳамда мавҳум қисмини ажратиб, қуйидаги тенгламани оламиз:

$$\rho^4 \cos^4 \varphi + i \rho^4 \sin 4\varphi = -4\alpha^4 + i \cdot 0.$$

Ҳақиқий қисми билан мавҳум қисми солиштириб, қуйидаги тенгламаларни ҳосил қиламиз:

$$\rho^4 \cos 4\varphi = -4\alpha^4, \quad \rho^4 \sin 4\varphi = 0.$$

Булардан:

$$\rho^4 = 4\alpha^4, \quad \cos 4\varphi = -1, \quad \sin 4\varphi = 0,$$

демак:

$$4\varphi = \pi, \quad 3\pi, \quad 5\pi, \quad 7\pi$$

ёки

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{4}, \quad \varphi_2 = \frac{3\pi}{4}, \quad \varphi_3 = \frac{5\pi}{4}, \quad \varphi_4 = \frac{7\pi}{4}.$$

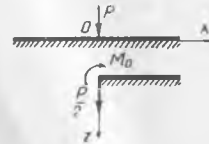
ρ билан φ нинг бу қийматларини (a) га қўйиб, характеристик тенгламанинг тўртта илдизини топамиз:

$$\lambda_1 = \alpha \sqrt[4]{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \alpha(1 + i),$$

$$\lambda_2 = \alpha(-1 + i); \quad \lambda_3 = -\alpha(1 + i); \quad \lambda_4 = \alpha(1 - i).$$

Энди (122.4) тенгламанинг умумий интеграллини ёзиш қийин эмас:

$$w(x) = e^{\alpha x} (A \cos \alpha x + B \sin \alpha x) + e^{-\alpha x} (C \cos \alpha x + D \sin \alpha x), \quad (122.7)$$



445- шакл.

Бу интегралдан фойдаланиб, турлича юкланган ва чегара шартлари ҳар хил бўлган эластик таянчда ётувчи балкаларни ҳисоблаш анча қулайдир. Олдин бирор нуқтасига тўпланган юк қўйилган чексиз узун балкани текшираемиз (445- шакл), юк қўйилган O нуқтани координаталар боши деб қабул қиламиз. Балка

симметрик равишда деформациялангани сабабли, унинг юк қўйилган кесимининг бир томонидаги қисмини текшириш kifоя. Балкани фикран кесиб, унинг ўнг томонини қолдирамиз ва унга ташланган қисмининг таъсирини тегишлича $P/2$ куч ҳамда эгувчи момент M_0 билан алмаштирамиз. Текширилаётган ҳолга (122.7) формулани татбиқ этиш учун ўзгармас ихтиёрий A, B, C, D миқдорларни аниқлаш лозим. P куч қўйилган нуқтадан чексиз узоқликда жойлашган нукталарда эгилиш ва эластик ўқнинг эгрилиги нолга тенгдир. Бу шарт бажарилиши учун ўзгармас ихтиёрий миқдорлар A билан B нолга тенг бўлиши керак. У ҳолда балка ўнг қисмининг эластик чизик тенгламаси (122.7) га мувофиқ қуйидагича ёзилади:

$$w = e^{-\alpha x}(C \cos \alpha x + D \sin \alpha x). \quad (122.8)$$

Ўзгармас миқдорлар C билан D ни куч қўйилган кесимнинг деформацияланиш шартидан топамиз. Бу кесимда симметрик эгилган ўқнинг уринмаси горизонтал йўналишда бўлиши керак, шунинг учун:

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)_{x=0} = 0.$$

w нинг қийматини (122.8) дан келтириб қўямиз:

$$[e^{-\alpha x}(C \cos \alpha x + D \sin \alpha x + C \sin \alpha x - D \cos \alpha x)]_{x=0} = 0,$$

бундан:

$$C = D$$

бўлади.

Эластик чизик тенгламаси (122.8)

$$w = Ce^{-\alpha x}(\cos \alpha x + \sin \alpha x) \quad (122.9)$$

куринишда ёзилади. Бу тенгламанинг кетма-кет учта ҳосиласини оламиз:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dw}{dx} &= 2\alpha Ce^{-\alpha x} \sin \alpha x, \\ \frac{d^2w}{dx^2} &= -2\alpha^2 Ce^{-\alpha x}(\sin \alpha x - \cos \alpha x), \\ \frac{d^3w}{dx^3} &= -4\alpha^3 Ce^{-\alpha x} \cos \alpha x. \end{aligned} \right\} \quad (122.10)$$

Балканинг куч қўйилган нуқтасидаги кесиб ўтувчи куч $-\frac{P}{2}$ га тенг. Бу шарт ўзгармас C миқдорни аниқлаш учун ишлатилади. Бундаги минус ишора кесувчи куч ишоралари ҳақидаги қоидага мувофиқ олинди. Демак:

$$[Q]_{x=0} = -EI \left(\frac{d^3w}{dx^3}\right)_{x=0} = -\frac{P}{2}$$

бўлади. Бу тенгликка (122.10) тенгламаларнинг учинчисини келтириб қўйсак, C ни аниқлаймиз:

$$C = \frac{P}{8\alpha^3 EI_y}.$$

C нинг олинган қийматини (122.9) ва (122.10) га қўйиб эгилган ўқ тенгламаси билан эгувчи момент ифодаларини оламиз:

$$w = \frac{P}{8\alpha^3 EI} e^{-\alpha x}(\cos \alpha x + \sin \alpha x), \quad (122.11)$$

$$M = -EI \frac{d^2w}{dx^2} = +\frac{P}{4\alpha} e^{-\alpha x}(\cos \alpha x - \sin \alpha x). \quad (122.12)$$

Бу ҳар иккала тенгламанинг графиги сўнувчи амплитудали тўлқинлардан иборатдир. Бу тўлқинларнинг узунлиги

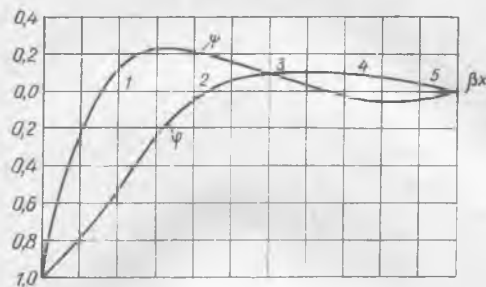
$$z = \frac{2\pi}{\alpha} = 2\pi \sqrt[4]{\frac{4EI}{k}}. \quad (122.13)$$

Эгилиш тенгламаси, эгувчи момент ва кесиб ўтувчи кучларни аниқлашни осонлаштириш учун қуйидаги функцияларнинг жадвалларини келтирамиз:

$$\varphi = e^{-\alpha x} (\cos \alpha x + \sin \alpha x),$$

$$\psi = \alpha^{-\alpha x} (\cos \alpha x + \sin \alpha x),$$

$$\theta = e^{-\alpha x} \cos \alpha x.$$



446- шакл.

446- шаклда φ ва ψ функцияларининг графиги тасвирланган. Энг катта эгилиш ва эгувчи момент координаталар бошига тўғри келган кесимда ҳосил бўлади, уларнинг қиймати тегишлича:

$$\psi_{\max} = w(0) = \frac{P}{8a^3 EI} = \frac{Pa}{2k} \quad (122.14)$$

$$M_{\max} = M(0) \frac{P}{4a}. \quad (122.15)$$

Эластик таянчда ўтувчи балкалар учун салқилик, эгувчи момент ва қўндаланг кучларни ҳисоблашда зарур бўлган φ , ψ ва θ функциялари

α	φ	ψ	θ	α	φ	ψ	θ
0,0	1,0000	-1,0000	1,0000	3,6	-0,0366	0,0124	-0,0245
0,1	0,9907	-0,8100	0,9003	3,7	-0,0341	0,0079	-0,0210
0,2	0,9651	-0,6398	0,8024	3,8	-0,0314	0,0040	-0,0177
0,3	0,9267	-0,4888	0,7077	3,9	-0,0286	0,0008	-0,0147
0,4	0,8784	-0,3564	0,6174	4,0	-0,0258	-0,0019	-0,0120
0,5	0,8231	-0,2415	0,5323	4,1	-0,0231	-0,0040	-0,0095

Жадвалнинг давоми

α	φ	ψ	θ	α	φ	ψ	θ
0,6	0,7628	-0,1431	0,4530	4,2	-0,0204	-0,0057	-0,0074
0,7	0,6997	-0,0599	0,3798	4,3	-0,0179	-0,0070	-0,0054
0,8	0,6354	-0,0093	0,3131	4,4	-0,0155	-0,0079	-0,0038
0,9	0,5712	0,0657	0,2527	4,5	-0,0132	-0,0085	-0,0023
1,0	0,5083	0,1108	0,1988	4,6	-0,0111	-0,0089	-0,0011
1,1	0,4476	0,1457	0,1510	4,7	0,0092	-0,0090	-0,0001
1,2	0,3899	0,1716	0,1091	4,8	-0,0075	-0,0089	-0,0007
1,3	0,3355	0,1897	0,0729	4,9	-0,0059	-0,0087	0,0014
1,4	0,2849	0,2011	0,0419	5,0	-0,0046	-0,0084	0,0019
1,5	0,2384	0,2068	0,0158	5,1	-0,0033	-0,0080	0,0023
1,6	0,1959	0,2077	-0,0059	5,2	-0,0023	-0,0075	0,0026
1,7	0,1576	0,2047	-0,0235	5,3	-0,0014	-0,0069	0,0028
1,8	0,1234	0,1985	-0,0376	5,4	-0,0006	-0,0064	0,0029
1,9	0,0932	0,1899	-0,0484	5,5	00	-0,0058	0,0029
2,0	0,0667	0,1794	-0,0563	5,6	-0,0005	-0,0052	0,0029
2,1	0,0439	0,1675	-0,0618	5,7	0,0010	-0,0046	0,0028
2,2	0,0244	0,1548	-0,0652	5,8	0,0013	-0,0041	0,0027
2,3	0,0080	0,1416	-0,0668	5,9	0,0015	-0,0036	0,0026
2,4	-0,0056	0,1282	-0,0669	6,0	0,0017	-0,0031	0,0024
2,5	-0,0166	0,1149	-0,0658	6,1	0,0018	-0,0026	0,0022
2,6	-0,0254	0,1019	-0,0636	6,2	0,0019	-0,0022	0,0020
2,7	-0,0320	0,0895	-0,0608	6,3	0,0019	-0,0018	0,0018
2,8	-0,0369	0,0777	-0,0573	6,4	0,0018	-0,0015	0,0017
2,9	-0,0403	0,0666	-0,0534	6,5	0,0018	-0,0012	0,0015
3,0	-0,0423	0,0563	-0,0493	6,6	0,0017	-0,0009	0,0013
3,1	-0,0431	0,0469	-0,0450	6,7	0,0016	-0,0006	0,0011
3,2	-0,0431	0,0383	-0,0407	6,8	0,0015	-0,0004	0,0010
3,3	-0,0422	0,0306	-0,0364	6,9	0,0014	-0,0002	0,0008
3,4	-0,0408	0,0237	-0,0323	7,0	0,0013	-0,0001	0,0007
3,5	-0,0389	0,0177	-0,0283				

Бу назариядан ва кучларнинг таъсирини қўшиш принциpidан фойдаланиб, чексиз узун балкаларнинг бошқа тарзда қўйилган юклар таъсиридан эгилишини ҳам аниқлаш мумкин. Тўпланган юк таъсирини бевосита юқоридаги жадвалдан ёки 446-шаклда кўрсатилган график ёрдамида аниқлаш мумкин.

XVIII боб

МАТЕРИАЛЛАР ҚАРШИЛИГИНИНГ УМУМИЙ ТЕОРЕМАЛАРИ

123- §. Деформациянинг потенциал энергияси

Эластик системалар инженерлик иншоотларининг бир қисми бўлиб, улар ҳам қўйилган юклар таъсирида деформацияланади. Эластик система деформацияланганда унга қўйилган юклар иш бажаради. Ташқи кучнинг иш бажариши процессида эластик системада унинг деформацияланишидан ҳосил бўлган потенциал энергия тўплана боради. Ташқи куч бажарган иш миқдор жиҳатидан ана шу энергияга тенг бўлади. Тўпланган потенциал энергия миқдори эластик системанинг охириги вазиятидаги шаклига тўла боғлиқдир, аммо эластик системанинг ана шу охириги вазиятига келгунча бўлган ўзгариш қонунига боғлиқ эмас.

Эластик системада тўпланган энергия миқдори қуйидагича ҳисобланади. Эластик системада деформация натижасида ҳосил бўлган юкларнинг миқдори нолдан ўзининг энг катта миқдorigа аста-секин ўса боради, деб фараз қилайлик. Юкларнинг миқдори секин ўсиши туфайли эластик системанинг қисмларида ҳосил бўладиган деформацияларнинг тезлиги жуда кичик бўлади. Шунинг учун ҳаракатланаётган массаларда ҳосил бўладиган инерция кучларини ҳисобга олмаслик ҳам мумкин. Бу шартга кўра деформация давомида ташқи юклар билан ички эластик зўриқишлар орасида ҳамма вақт мувозанат сақланади. Шундай қилиб, деформация потенциал энергияси миқдорини ҳисоблаш ташқи кучлар бажарган ишни ҳисоблашга келтирилади. Эластик системада тўпланган потенциал энергияни ҳисоблаш учун назарий механика курсида механик системаларнинг мувозанатини текшириш учун чиқарилган мумкин бўлган кўчишлар принципини татбиқ қиламиз.

Эластик системадан битта нуқтани ажратамиз. Ажратилган нуқтага ташқаридан қўйилган юклардан ташқари, система бошқа нуқталарининг таъсирини ифодаловчи ички эластик кучлар ҳам таъсир қилади. Ажратилган нуқта мувозанатда бўлиши учун нуқтага таъсир қилувчи ташқи ва ички кучларнинг мумкин бўлган ихтиёрий кўчишда бажарган элементар ишларининг йиғиндиси нолга тенг бўлиши керак. Ташқи кучлар бажарган элементар ишни $\delta A^{(e)}$ билан, ички кучларнинг бажарган элементар ишини $\delta A^{(i)}$ билан белгиласак, нуқтанинг мувозанат шarti қуйидагича ёзилади:

$$\delta A^{(e)} + \delta A^{(i)} = 0. \quad (123.1)$$

Худди шундай ифодани эластик системанинг ҳар бир нуқтаси учун ёзишимиз мумкин. Улар системанинг барча нуқталари учун умумлаштирилса, мувозанат тенгламаси қуйидагича ёзилади:

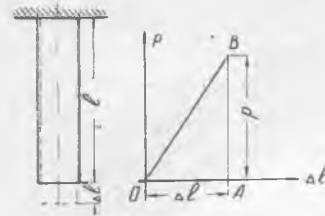
$$\sum \delta A^{(e)} + \sum \delta A^{(i)} = 0. \quad (123.2)$$

Бу тенгламанинг биринчи йиғиндиси системага қўйилган барча ташқи кучларнинг эластик система нуқталарининг мумкин бўлган кўчишидаги бажарган элементар иши, иккинчиси эса ички кучларнинг ўша ихтиёрий мумкин бўлган кўчишда бажарган ишидир. Ички кучларнинг элементар иши миқдор жиҳатидан деформация потенциал энергиясининг орттирмаси-

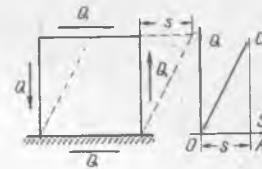
га тенг бўлади, аммо ишораси тескари бўлгани учун уни $-\delta U$ билан белгилаб, юқорида чиқарилган (123.2) тенгламани қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\sum \delta A^{(e)} - \sum \delta U = 0. \quad (123.3)$$

Бу (123.2) ёки (123.3) тенгламалар эластик система учун мумкин бўлган кўчишлар принципини ифодалайди.



447-шакл.



448-шакл.

Энди бу чиқарилган хулосага мувофиқ энг оддий ҳоллар учун деформациянинг потенциал энергиясини ҳисоблаймиз.

1. Чўзилган ёки сиқилган стерженларда деформациянинг тўпланган потенциал энергияси чўзилиш диаграммасидаги OAB учбурчакнинг юзаси орқали (447-шакл) тасвирланиши бизга маълум. OA — стержень абсолют чўзилишининг энг катта қиймати, BA — стерженга тегишли чўзувчи куч. Бу ҳолда стерженнинг потенциал энергияси қуйидагича ёзилади:

$$U = A^{(e)} = \frac{P \Delta l}{2};$$

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF}$$

бўлгани учун:

$$U = A^{(e)} = \frac{Pl^2}{2EF} = \frac{EF}{2l} (\Delta l)^2 \quad (123.4)$$

бўлади.

2. Соф силжишдаги элемент деформациясининг потенциал энергиясини ҳисоблаймиз (448-шакл). Силжиган элементни пастки томондан маҳкамлаб, юқори томонига силжитувчи Q куч қўйилса, бу куч таъсирдан юқори томони s масофага силжийди. Бунинг натижасида Q куч қуйидаги ишни бажаради:

$$U = A^{(e)} = \frac{Q \cdot s}{2}.$$

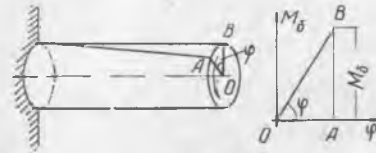
Абсолют силжиш s ни қуйидагича аниқлаймиз:

$$s = a\gamma = a \frac{\tau}{G} = \frac{Qa}{GF}.$$

Бу ифодага кўра, U қуйидагича ёзилади:

$$U = \frac{Qs}{2} = \frac{Q^2 a}{2GF} = \frac{GFs^2}{2a}. \quad (123.5)$$

3. Кесими доира шаклида бўлган цилинрик стерженнинг буралиш деформациясининг потенциал энергиясини ҳисоблаймиз. Стерженнинг бир учини маҳкамлаб, бошка учига буровчи момент M_0 қўямиз (449-шакл). Стержень буровчи момент M_0 таъсиридан φ бурчакка буралади. Буровчи момент M_0 билан φ орасидаги муносабат тўғри чизиқли қонун билан тасвирлангани учун, буровчи моментнинг иши ОВА учбурчакнинг юзаси орқали ифодаланади:



449-шакл.

$$U = A^{(e)} = \frac{M_0 \varphi}{2},$$

бунда $\varphi = \frac{M_0 l}{GI_p}$ бўлгани учун, деформациянинг потенциал энергияси қуйидагича ёзилади:

$$U = \frac{M_0^2 l}{2GI_p} = \frac{GI_p}{2l} \varphi^2. \quad (123.6)$$

Худди шундай мулоҳаза юритиб, соф эгилган балка деформациясининг потенциал энергиясини ҳисоблаймиз. Икки таянчга тиралган балканинг икки учига моментлари M га тенг бўлган икки жуфт куч қўйилган (450-шакл). Балканинг ўчки томонидаги кесимлари қўйилган эгувчи моментлар таъсиридан $\theta = \frac{\varphi}{2}$ бурчакка айланади (бу ерда φ — балканинг айлана ёйи бўйича эгилган ўқининг марказий бурчаги). Эгувчи момент бажарган иш:

$$U = A^{(e)} = \frac{M \cdot \varphi}{2}$$

Айлана ёйи учун марказий бурчак:

$$\varphi = \frac{l}{\rho}.$$

Ўқнинг эгирилиги $\frac{1}{\rho}$ нинг $\frac{M}{EI}$ орқали ифодаси бизга аввалдан маълум. Шунинг учун:

$$U = \frac{M^2 l}{2EI} = \frac{EI}{2l} \left(\frac{l}{\rho} \right)^2 = \frac{EI}{2l} \varphi^2. \quad (123.7)$$

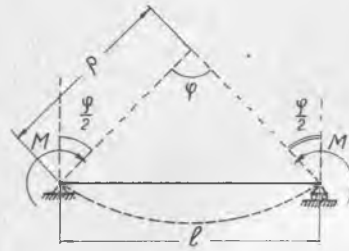
Умуман, эгувчи момент $M(x)$ қўндаланг эгилишда ўзгарувчи миқдордир. У текширилаётган кесимнинг ҳолатини аниқловчи x нинг функцияси бўлиб, ҳар бир қирқимда кесиб ўтувчи куч $Q(x)$ билан бирга ҳосил бўлади. Шунинг учун бундай ҳолларда эгилишдаги деформациянинг потенциал энергиясини ҳисоблашда бутун балкани текширмасдан, ундан ажратилган dx узунликдаги чексиз кичик элементни текшириш лозим (451-шакл, а). Ажратилган элемент кесимлари эгувчи моментлар таъсирида бир-бирига нисбатан айланиб, ўзаро $d\varphi$ бурчак ҳосил қилади (451-шакл, б). Кесиб ўтувчи кучлар эса элементни қийшайтиради (451-шакл, с). $M(x)$ ва $Q(x)$ таъсирида ҳосил бўладиган кўчишлар бир-бирига нисбатан тик йўналишда бўлгани учун улар бажарадиган ишни бир-биридан мустасно ҳолда ҳисоблаш мумкин. Даставвал эгувчи момент таъсирида ҳосил бўладиган деформациянинг потенциал энергияси ҳисобланади. Эгувчи момент бажарган элементар иш:

$$dU = dA^{(e)} = \frac{M(x) d\varphi}{2} = \frac{M^2(x) dx}{2EI},$$

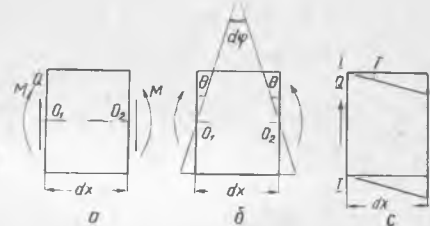
чунки:

$$d\varphi = \frac{dx}{\rho} = \frac{M(x) dx}{EI}.$$

Эгувчи момент таъсирида ҳосил бўлган деформациянинг тула потенциал энергияси балка узунлиги бўйича олинган интегралга тенг бўлади:



450- шакл.



451- шакл.

$$U = \int_0^l \frac{M^2(x) dx}{2EI} = \int_0^l \frac{EI}{2I} \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 dx. \quad (123.8)$$

Бу ерда интеграллаш чегараси балканинг узунлигига тенг қилиб олинди. Аммо балканинг узунлиги бўйича $M(x)$ учун бир нечта участка бўлса, интеграллаш чегарасини ҳар қайси участка учун алоҳида олиб, юқоридаги (123.8) интегрални барча участкалардаги интеграллар йиғиндиси тарзида ифодалаш лозим, у ҳолда U қуйидагича ифодаланади:

$$U = \sum_{i=1}^n \int_0^l \frac{M^2(x) dx}{2EI} = \sum_{i=1}^n \int_0^l \frac{EI}{2I} \left(\frac{d^2w_i}{dx^2} \right)^2 dx. \quad (123.9)$$

Чиқарилган бу формулалардан балканинг кўндаланг кесими ўзгарувчан бўлган ҳолларда ҳам фойдаланиш мумкин. Фақат бу ҳолда балка бикрлиги EI координата x нинг маълум функцияси бўлади. Энди, кўндаланг куч $Q(x)$ таъсирида ҳосил бўладиган потенциал энергияни ҳисоблаймиз. Силжишдаги солиштирма потенциал энергия формуласи курсимизнинг биринчи қисмида $a_{\text{силж.}} = \frac{\tau^2}{2G}$ кўринишида чиқарилган эди. Бу формуладан фойдаланиб, dx узунликдаги балка элементининг потенциал энергиясини ҳисоблаймиз. Бунинг учун dx узунликдаги элементнинг кўндаланг кесимидан dF юзача ажратиб, шу юзачага тўғри келган dx узунликдаги элемент ҳажмида ҳосил бўлган энергияни ҳисоблаймиз, у $\frac{\tau^2 dx dF}{2G}$ га тенг бўлади. Ажратилган dx узунликдаги бутун элементда тўпланган энергияни ҳисоблаш учун ҳалиги ҳажмда тўпланган энергия ифодасини кўндаланг кесим юзаси бўйича интеграллаймиз:

$$dU = \int_F \frac{\tau^2 dx}{2G} dF.$$

т нинг Q орқали ифодаланган қийматини бу ифодага келтириб қўямиз. У ҳолда силжиш деформациясидан балкада тўпланган потенциал энергия қуйидагича ифодаланади:

$$U_{\text{силж}} = \int_0^l \int_F \left[\frac{Q(x) S(x)}{Ib} \right]^2 \frac{dF}{2G} \cdot dx. \quad (123.10)$$

Тўғри тўртбурчак кесимнинг нейтрал ўқидан z масофада жойлашган нуқталар учун $S(z)$ нинг қиймати: $S(z) = \frac{b}{8} (h^2 - 4z^2)$ эди (бу ерда h — кўндаланг кесимнинг баландлиги, b — кўндаланг кесимнинг кенглиги). $dF = b dz$ ни ва $S(z)$ нинг қийматини (123.10) га қўйиб, ички интегрални ҳисоблаганимиздан кейин, $U_{\text{силж}}$ учун қуйидаги формулани ҳосил қиламиз:

$$U_{\text{силж}} = \frac{3}{5} \int_0^l \frac{Q^2}{bhG} dx. \quad (123.11)$$

Силжиш энергиясини бошқа шаклдаги кўндаланг кесимлар учун ҳам худди шу тарзда ҳисоблаш мумкин. Умумий ҳолда, турли шаклдаги кесимлар учун (123.11) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$U_{\text{силж}} = k \int_0^l \frac{Q^2 dx}{2GF}, \quad (123.12)$$

бу ерда k — ўзгармас коэффициент бўлиб, кўндаланг кесимнинг шаклига боғлиқ. Тўғри тўртбурчак учун $k = 1,2$. Ёйма профиллар учун $k = 2—2,4$ орасида ўзгаради. Кўндаланг эгилишдаги балка деформациясининг тўла потенциал энергияси қуйидагича бўлади:

$$U = \int_0^l \left\{ \frac{M^2(x)}{2EI} + k \frac{Q^2(x)}{2GE} \right\} dx. \quad (123.13)$$

Юқорида чиқарилган потенциал энергия қиймати ифодалари барча оддий ҳоллар учун қуйидаги жадвалда келтирилган

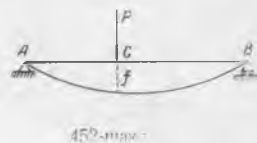
Деформациянинг тури	Деформациянинг потенциал энергияси
Чўзилиш ёки сиқилиш	$A^{(e)} = U = \frac{P\Delta l}{2} = \frac{P^2 l}{2EF} = \frac{EF}{2l} (\Delta l)^2$
Силжиш	$A^{(e)} = U = \frac{QS}{2} = \frac{Q^2 a}{2GF} = \frac{GF}{2a} S^2$
Буралиш	$A^{(e)} = U = \frac{M_{\phi}}{2} = \frac{M_{\phi}^2 l}{2GI_{\phi}} = \frac{GI_{\phi}}{2l} \varphi^2$
Соф эгилиш	$A^{(e)} = U = \frac{M\varphi}{2} = \frac{M^2 l}{2EI} = \frac{EI}{2l} \varphi^2$
Кўндаланг эгилиш	$U = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx = \int_0^l \frac{EI}{2l} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx$
Эгилишдаги силжиш	$U = k \int_0^l \frac{Q^2(x)}{2GF} dx$

124- §. Умумлаштирилган координаталар ва умумлаштирилган кучлар

Эластик системанинг деформацияланган ҳолатини аниқловчи параметрлар ҳақида тўхталиб ўтамиз. Эластик системанинг деформацияланган ҳолатини тўла аниқлайдиган ва ўзаро боғлиқ бўлмаган параметрлар умумлаштирилган координаталар деб аталади. Бу координаталар эластик системанинг ҳар бир деформацияланган ҳолати учун маълум бўлса, у ҳолда потенциал энергия уларнинг функцияси тарзида ифодаланади. Турли хусусий ҳолларда умумлаштирилган координаталар учун турли миқдорлар қабул қилиниши мумкин. Масалан, призма шаклидаги стерженларнинг чўзилиши Δl билан тўла аниқланганлигидан, Δl бу ҳилдаги деформация учун умумлаштирилган координата бўлади. Бу ҳолга тегишли потенциал энергия шу координата орқали (123.4) формула билан, буралувчи стерженнинг бурилиш бурчаги эса φ билан аниқланади, шу сабабли φ бу ҳол учун умумлаштирилган координата бўлади. Соф эгилишда балка кесимларининг айланиш бурчаклари унинг деформацияланган ҳолатини тўла аниқлагани учун бу бурчаклар ҳам умумлаштирилган координата бўлади. Мисол қилиб келтирилган бу энг оддий ҳолларда деформацияланган ҳолат биргина миқдор — битта координата билан аниқланаётир. Кўпчилик ҳолларда эса эластик системанинг деформацияланган ҳолатини бир нечта координата билан аниқлашга тўғри келади.

Умумлаштирилган координаталар тушунчаси киритилганлиги учун уларга тегишли умумлаштирилган кучлар тушунчасини ҳам киритиш зарурати туғилади.

Бундан олдин ўтилган материалларда гарчи бу ҳақда гапирилмаган бўлса-да, умумлаштирилган кучлар тушунчасидан фойдаланиб келинди. Масалан, призма шаклидаги стерженнинг деформацияси ўқ бўйлаб қарама-қарши йўналган икки куч таъсиридан ҳосил бўлади; бу икки куч аynи ҳол учун битта умумлаштирилган куч ҳосил қилади. Шунингдек, бурилишда ва соф эгилишда ҳам қарама-қарши йўналишдаги икки момент битта умумлаштирилган куч ҳосил қилади. Умумлаштирилган координаталарга тегишли умумлаштирилган кучларни танлашда улар орасидаги маълум муносабатни кўзда тутиш лозим. Умумлаштирилган координаталар турли ўлчов бирликларида ифодаланган бўлиши, баъзан эса ўлчовсиз сон билан ифодаланган бўлиши ҳам мумкин. Ҳар бир типдаги умумлаштирилган координатага маълум типдаги умумлаштирилган куч мос келиши керак. Оддий чўзилишдаги стержень учун умумлаштирилган координата тариқасида абсолют чўзилиш Δl олинган эди. Бу ҳол учун умумлаштирилган куч стержень ўқи бўйлаб, қарама-қарши йўналган P кучлардан иборат бўлади. Агар Δl кандайдир $\delta(\Delta l)$ миқдор орттирилса, ташқи куч P қўшимча иш бажаради. Бу иш $P\delta(\Delta l)$ га тенг бўлади. Шунингдек, буровчи момент M_ϕ таъсирида ҳосил бўлган бурилиш бурчаги φ ни $\delta\varphi$ қадар орттирсак, буровчи момент қўшимча иш бажаради, бу иш $M_\phi\delta\varphi$ га тенг бўлади. Демак, умумлаштирилган координата ўзгарганда, унга тегишли умумлаштирилган куч қўшимча иш бажарар экан. Бу иш умумлаштирилган куч билан унга тегишли координата орттирмасининг кўпайтмасига тенг бўлади.



453-шакл.

Текирирлаётган эластик система учун маълум типдаги умумлаштирилган координата танланса, унга тегишли умумлаштирилган кучни шундай танлаш мумкинки, у координатанинг ҳар қандай мумкин бўлган орттормаси учун қўшимча иш бажарсин. Бу айтилганларни ойдинлаштириш учун яна бир нечта мисол келтирамиз.

Икки учи билан таянчларга тиралган балка C нуктага қўйилган P куч таъсирида эгилган бўлсин (452-шакл). P куч билан таянч реакциялари A ва B балканинг деформацияланган ҳолатини тўла аниқлайди. Бу кучларни умумлаштирилган кучлар деб қабул қиламиз; улар бажарадиган қўшимча иш куч қўйилган нуктанинг салкилиги f нинг орттормаси билан тўла аниқланади. Шунинг учун f бу кучларга тегишли умумлаштирилган координата бўлади.

Икки таянчда ётувчи балкани мисол қилиб олайлик (453-шакл). Бу балка P куч ва таянч нуқталарига қўйилган M_A ва M_B моментлар таъсирида эгилсин. Бу ҳолда бир-бирига соғлиқ бўлмаган учта куч группасини бир-биридан фарқ қилиш лозим. Биринчи группа P куч билан унга тегишли реакциялардан иборат. Иккинчи ва учинчи группа M_A ва M_B моментлар билан уларга тегишли таянч реакцияларидан иборат. Бу уч группа кучларни умумлаштирилган кучлар деб қабул қиламиз. Буларга тегишли умумлаштирилган координаталарни топиш учун балканинг мувозанат ҳолатини бир оз ўзгартириб, бу ўзгариш натижасида ташқи кучлар бажарган ишни текширамиз. Балканинг таянч нуқталаридаги M_A ва M_B моментлар таянч кесимларининг айланиш бурчаги θ_A ва θ_B ўзгаргандагина иш бажаради: P куч эса ўзи қўйилган нуқта салкилиги f ўзгарганда иш бажаради. Балканинг мувозанати ўзгарганда ҳосил бўладиган θ_1 , θ_2 ва f орттормаларини тегишлича $\delta\theta_A$, $\delta\theta_B$, δf билан белгиласак, ташқи кучларнинг қўшимча бажарган иши қуйидагича ифодаланади:

$$\delta A^{(e)} = M_A \delta\theta_1 + M_B \delta\theta_2 + P \delta f.$$

Демак, θ_1 , θ_2 , f биз текширган ҳол учун умумлаштирилган координаталардир.

125-§. Эластик система потенциал энергиясининг умумий ифодаси

Механиканинг мумкин бўлган кўчишлар принциpidан фойдаланиб, эластик система учун деформация потенциал энергиясининг умумлаштирилган куч ёки умумлаштирилган координаталар орқали ифодасини топамиз. Эластик системага қўйилган умумлаштирилган кучлар $R_1, R_2, R_3, \dots, L_1, L_2, \dots$ бўлсин. Бу умумлаштирилган кучларга тегишли умумлаштирилган координаталар эса $r_1, r_2, r_3, \dots, \theta_1, \theta_2, \dots$ бўлсин. У ҳолда эластик системанинг мувозанат ҳолатдан ҳар қандай мумкин бўлган ўзгаришида бажарилган элементар иш:

$$\delta A^{(e)} = R_1 \delta r_1 + R_2 \delta r_2 + R_3 \delta r_3 + \dots + L_1 \delta\theta_1 + L_2 \delta\theta_2 + \dots$$

бўлади (бу ерда $\delta r_1, \delta r_2, \delta r_3, \dots, \delta\theta_1, \delta\theta_2, \dots$ умумлаштирилган координаталарнинг эластик системани мувозанат ҳолатдан олиб чиқуви мумкин бўлган кўчишдаги ўзгаришлари). Ташқи кучлар бажарган элементар иш $\delta A^{(e)}$ нинг қийматини (123.3) га қўямиз, у ҳолда:

$$R_1 \delta r_1 + R_2 \delta r_2 + R_3 \delta r_3 + \dots + L_1 \delta\theta_1 + \dots = \delta U \quad (125.1)$$

бўлади. Потенциал энергия U умумлаштирилган координаталар $r_1, r_2, r_3, \dots, \theta_1, \theta_2, \dots$ нинг функцияси бўлгани учун унинг орттирмаси δU ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial r_1} \delta r_1 + \frac{\partial U}{\partial r_2} \delta r_2 + \frac{\partial U}{\partial r_3} \delta r_3 + \dots + \frac{\partial U}{\partial \theta_1} \delta \theta_1 + \dots$$

Буни (125.1) га қўйиб, барча ҳадларни тенгликнинг бир томонига ўтказсак, тенглама қуйидагича ёзилади:

$$\left(R_1 - \frac{\partial U}{\partial r_1}\right) \delta r_1 + \left(R_2 - \frac{\partial U}{\partial r_2}\right) \delta r_2 + \left(R_3 - \frac{\partial U}{\partial r_3}\right) \delta r_3 + \dots + \left(L_1 - \frac{\partial U}{\partial \theta_1}\right) \delta \theta_1 + \dots = 0,$$

Умумлаштирилган координаталар $r_1, r_2, r_3, \dots, \theta_1, \theta_2, \dots$ бир-бирига боғлиқ бўлмагани учун уларнинг орттирмалари $\delta r_1, \delta r_2, \delta r_3, \dots, \delta \theta_1$ ҳам бир-бирига боғлиқ бўлмайди. Бу шартни қаноатлантириш учун ҳозиргина чиқарилган тенгликда $\delta r_1, \delta r_2, \delta r_3, \dots, \delta \theta_1, \dots$ олдидаги коэффициентларни нолга тенглаштиришимиз керак, яъни:

$$R_1 - \frac{\partial U}{\partial r_1} = 0; \quad R_2 - \frac{\partial U}{\partial r_2} = 0; \quad R_3 - \frac{\partial U}{\partial r_3} = 0; \dots$$

ёки

$$\frac{\partial U}{\partial r_1} = R_1; \quad \frac{\partial U}{\partial r_2} = R_2; \quad \frac{\partial U}{\partial r_3} = R_3; \dots \quad (125.2)$$

бўлиши керак. Чиқарилган натижалардан кўриниб турибдики, *умумлаштирилган кучлар система деформациясининг потенциал энергиясидан тегишли умумлаштирилган координаталар бўйича олинган хусусий ҳосилларга тенг бўлар экан*. Бу теорема назарий механика курсида потенциалли кучлар учун Лагранж теоремаси номи билан баён қилинган. Бу теоремани Гук қонунига бўйсунувчи эластик система учун татбиқ этиб, турли ҳоллар учун потенциал энергиянинг қийматини ҳисоблаймиз. Бунинг учун ҳар бир хусусий ҳолда умумлаштирилган кучлар $R_1, R_2, R_3, \dots, L_1, \dots$ ни умумлаштирилган координаталар орқали ифодалаб (125.2) дифференциал тенгламага қўйиш лозим. У хусусий ҳосиллари, биринчи тартибли дифференциал тенгламадир. Унинг умумий интегрални текшириладиган ҳол учун потенциал энергиянинг ифодасини беради. Икки таянчга тиралган балканинг таянч нуқталарига M_1 ва M_2 моментлар қўйилган бўлсин. Балкада тўпланган потенциал энергиянинг қийматини аниқлаймиз. Балка учки таянч кесимларининг айланиш бурчаги учун курсимизнинг биринчи қисмида қуйидаги ифодани чиқарган эдик:

$$\theta_1 = \frac{M_1 l}{3EI} + \frac{M_2 l}{6EI}, \quad \theta_2 = \frac{M_1 l}{6EI} + \frac{M_2 l}{3EI}.$$

Бу тенгламаларни умумлаштирилган M_1 ва M_2 кучларга нисбатан ечимиз:

$$M_1 = \frac{2EI}{l} (2\theta_1 - \theta_2); \quad M_2 = \frac{2EI}{l} (2\theta_2 - \theta_1).$$

Бу хусусий ҳол учун (125.2) қуйидагича ёзилади:

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_1} = M_1 = \frac{2EI}{l} (2\theta_1 - \theta_2); \quad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_2} = M_2 = \frac{2EI}{l} (2\theta_2 - \theta_1). \quad (2)$$

(1) тенгламанинг интегралини топамиз:

$$U = \frac{2EI}{l} (\theta_1^2 - \theta_2^2) + C_1(\theta_2). \quad (3)$$

бу ерда $C_1(\theta_2)$ биринчи координата θ_1 га нисбатан ихтиёрий узгармас миқдор бўлиб, θ_2 нинг функцияси. (3) ни (2) га қўйиб, $C_1(\theta_2)$ нинг қийматини аниқлаймиз:

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_2} = \frac{2EI}{l} (2\theta_2 - \theta_1) = -\frac{2EI}{l} \theta_1 + \frac{\partial C_1}{\partial \theta_2}$$

бундан:

$$\frac{\partial C_1}{\partial \theta_2} = \frac{2EI}{l} 2\theta_2; \quad \text{ёки} \quad C_1 = \frac{2EI}{l} \theta_2^2 + C_0.$$

Балкага юк қўйилмаса, унда бошланғич энергия бўлмайди, бинобарин, $C_0 = 0$ бўлиши керак.

Демак, биз текшираётган ҳолда потенциал энергия қуйидагича бўлар экан:

$$U = \frac{2EI}{l} (\theta_1^2 - \theta_1\theta_2 + \theta_2^2).$$

Умумлаштирилган координаталар θ_1 , θ_2 ўрнига, уларнинг умумлаштирилган кучлар M_1 ва M_2 орқали ифодаланган қийматини қўйсак, потенциал энергия қуйидагича бўлади:

$$U = \frac{l}{6EI} (M_1^2 + M_1M_2 + M_2^2).$$

Бу ифодадан кўриниб турибдики, *деформациянинг потенциал энергияси эластик система учун умумлаштирилган координаталарнинг ёки тегишли умумлаштирилган кучларнинг квадратик функцияси бўлар экан.*

126-§. Кастильяно теоремаси

Эластик система учун юқорида исбот этилган Лагранж теоремасига асосланиб, Кастильяно теоремаси деб аталган бошқа бир теоремани таърифлаш мумкин.

Деформациянинг потенциал энергиясидан бирор умумлаштирилган кучга нисбатан олинган хусусий ҳосила шу умумлаштирилган кучга тегишли умумлаштирилган координатага тенг.

Теоремани исбот қилишдан олдин унинг таърифига эътибор берамиз. Агар балкага қўйилган умумлаштирилган куч жуфт куч бўлса, унга тегишли координата куч қўйилган айни кесимнинг айланиш бурчаги бўлади; шунингдек, умумлаштирилган куч балкага қўйилган кўндаланг куч бўлса, унга тегишли умумлаштирилган координата куч қўйилган айни нуқтанинг салқилигидан иборат бўлади. Шунинг учун юқорида таърифланган Кастильяно теоремасини бошқача таърифлаш ҳам мумкин. *Деформациянинг потенциал энергиясидан бирор тўрсаги умумлаштирилган кучга нисбатан олинган хусусий ҳосила куч қўйилган айни нуқта ёки элементнинг куч йўналишидаги қўчишига тенг.*

Потенциал энергиянинг хусусий ҳосиласини топиш учун эластик системага таъсир қилувчи умумлаштирилган кучлардан бирортасига, масалан, R_1 га орттирма бериб, потенциал энергия U нинг тегишли орттирмасини ҳисоблаш лозим. Кучларнинг бир-бирига боғлиқсиз мустақил таъсир этиш принципи ва Гук қонунига мувофиқ, умумлаштирилган координаталар $r_1, r_2, r_3, \dots$

$\theta_1, \dots$ умумлаштирилган куч $R_1, R_2, R_3, \dots, L_1, \dots$ нинг чизикли функцияларидан иборат бўлади, яъни:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= a_1 R_1 + b_1 R_2 + c_1 R_3 + d_1 L_1 + \dots \\ r_2 &= a_2 R_1 + b_2 R_2 + c_2 R_3 + d_2 L_1 + \dots \\ r_3 &= a_3 R_1 + b_3 R_2 + c_3 R_3 + d_3 L_1 + \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (126.1)$$

Бу ерда $a_i; b_i; c_i; \dots$ лар эластик системанинг тузилишига ва физик хоссаларига боғлиқ бўлган коэффициентлардир. Масалан, бундан олдинги параграфнинг охирида текширган мисолимизда умумлаштирилган R_1 куч момент M_1 га ва R_2 куч момент M_2 га, r_1 ва r_2 координаталар эса θ_1 ва θ_2 га мос келади. У мисолда:

$$a_1 = \frac{l^3}{3EI}; \quad b_1 = \frac{l}{6EI}; \quad a_2 = \frac{l}{EI}; \quad b_2 = \frac{l}{3EI}$$

бўлган эди.

Шунингдек, консолли балка узунлиги бўйича тенг ёйилган юк q , учига қўйилган тўпланган юк P ва моменти m га тенг бўлган жуфт куч таъсирида бўлса, балка учининг салқилиги ва айланиш бурчаги қуйидагича ифодаланади:

$$\begin{aligned} f &= \frac{ql^4}{8EI} + \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{ml^2}{2EI}, \\ \theta &= \frac{ql^3}{6EI} + \frac{Pl^2}{2EI} + \frac{ml}{EI}. \end{aligned}$$

Бу ҳолда агар r_1 координата f га ва r_2 координата θ га мос келса, бу тенгламалар қуйидагича ёзилади:

$$\begin{aligned} r_1 &= a_1 q + b_1 P + c_1 m; \\ r_2 &= a_2 q + b_2 P + c_2 m. \end{aligned}$$

Бу ерда

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{l^4}{8EI}, \quad b_1 = \frac{l^3}{3EI}, \quad c_1 = \frac{l^2}{2EI} \\ a_2 &= \frac{l^3}{6EI}, \quad b_2 = \frac{l^2}{2EI}, \quad c_2 = \frac{l}{EI}. \end{aligned}$$

Шу тарзда ҳар хил ҳоллар учун $a_i, b_i, c_i, \dots$ ларнинг қийматини аниқлаш унча қийин эмас.

Энди, юқорида келтирилган чизикли муносабат (126.1) дан фойдаланиб, умумлаштирилган кучлардан R_1 нинг δR_1 орттирмасига тегишли умумлаштирилган координаталарнинг $\delta r_1, \delta r_2, \delta r_3$ орттирмаларини ҳисоблаймиз:

$$\delta r_1 = \frac{\partial r_1}{\partial R_1} \delta R_1; \quad \delta r_2 = \frac{\partial r_2}{\partial R_1} \delta R_1; \quad \delta r_3 = \frac{\partial r_3}{\partial R_1} \delta R_1; \quad \dots \quad (a)$$

Умумлаштирилган координаталарнинг бу орттирмалари туфайли, ташқи кучлар қўшимча иш бажаради, натижада потенциал энергия δU миқдор ортади. δU ни ҳисоблаймиз:

$$\delta U = \delta A^{(e)} = (R_1 + \delta R_1) \delta r_1 + R_2 \delta r_2 + R_3 \delta r_3 + \dots + L_1 \delta \theta_1 + \dots$$

ёки бу ифодага $\delta r_1, \delta r_2, \delta r_3, \dots$ ларнинг қиймагини (a) дан келтириб қўйсак, δU учун қуйидаги ифодани оламиз:

$$\delta U = R_1 \frac{\partial r_1}{\partial R_1} \delta R_1 + R_2 \frac{\partial r_2}{\partial R_1} \delta R_1 + R_3 \frac{\partial r_3}{\partial R_1} \delta R_1 + \delta R_1 \frac{\partial r_1}{\partial R_1} \delta R_1 + \dots$$

Бўнинг иккала томонини δR_1 га бўламиз ва δR_1 ни нолга интиштириб лемит оламиз:

$$\lim_{\delta R_1 \rightarrow 0} \frac{\delta U}{\delta R_1} = \lim_{\delta R_1 \rightarrow 0} \left\{ R_1 \frac{\partial r_1}{\partial R_1} + R_2 \frac{\partial r_2}{\partial R_1} + R_3 \frac{\partial r_3}{\partial R_1} + \frac{\partial r_4}{\partial R_1} \delta R_1 + \dots \right\}$$

ёки

$$\frac{\partial U}{\partial R_1} = R_1 \frac{\partial r_1}{\partial R_1} + R_2 \frac{\partial r_2}{\partial R_1} + R_3 \frac{\partial r_3}{\partial R_1} + \dots \quad (в)$$

Потенциал энергия иккинчи даражали бир жинсли функция бўлгани учун, Эйлернинг бир жинсли функциялар ҳақидаги теоремасига мувофиқ, уларнинг тўла дифференциалидаги ўзгарувчи миқдорлар дифференциаллари ўзгарувчи миқдорларнинг ўзи билан алмаштирилганда чиққан ифода потенциал энергиянинг икки ҳисса кийматига тенг бўлади. Бу теоремадан фойдаланиш учун потенциал энергиянинг тўла дифференциалини оламиз:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial r_1} dr_1 + \frac{\partial U}{\partial r_2} dr_2 + \frac{\partial U}{\partial r_3} dr_3 + \dots + \frac{\partial U}{\partial \theta_1} \delta \theta_1 + \dots$$

Бу ифодадаги $dr_1, dr_2, dr_3, \dots$ ларни тегишлича r_1, r_2, r_3 билан алмаштира-сак, Эйлер теоремасига мувофиқ, $2U$ ни оламиз:

$$2U = \frac{\partial U}{\partial r_1} r_1 + \frac{\partial U}{\partial r_2} r_2 + \frac{\partial U}{\partial r_3} r_3 + \dots \quad (с)$$

Лагранж теоремасига мувофиқ $\frac{\partial U}{\partial r_1}, \frac{\partial U}{\partial r_2}, \frac{\partial U}{\partial r_3} \dots$ тегишлича $R_1, R_2, R_3, \dots$ умумлаштирилган кучларга тенг бўлгани учун, (с) қуйидагича ёзилади:

$$U = \frac{1}{2} (R_1 r_1 + R_2 r_2 + R_3 r_3 + \dots + L_1 \theta_1 + \dots) \quad (126.2)$$

Демак, деформациянинг потенциал энергияси умумлаштирилган кучлар билан тегишли умумлаштирилган координаталар кўпайтмалари йиғиндиларининг ярмига тенг бўлар экан. Бу ҳулоса Клапейрон теоремаси деб аталади.

(126.2) дан R_1 га нисбатан ҳосила оламиз:

$$2 \frac{\partial U}{\partial R_1} = r_1 + R_1 \frac{\partial r_1}{\partial R_1} + R_2 \frac{\partial r_2}{\partial R_1} + R_3 \frac{\partial r_3}{\partial R_1} + \dots$$

Ҳосила олинганда $R_1, R_2, R_3, \dots$ ларнинг бир-бирига боғлиқ эмаслиги кўзда тутилади. Бу тенгликни (в) билан солиштириб, Кастильяно теоремасини исботлаймиз:

$$\frac{\partial U}{\partial R_1} = r_1. \quad (126.3)$$

Умумлаштирилган кучлардан бошқасига, яъни R_2 ёки R_3 га орттирма берилса, буларга нисбатан ҳам худди (126.3) га ўхшаган муносабатларни оламиз:

$$\frac{\partial U}{\partial R_2} = r_2, \quad \frac{\partial U}{\partial R_3} = r_3, \dots \quad (126.4)$$

Кастильяно теоремаси, эластик система нуқталари ва чизиқли элементларининг кўчишларини аниқлаш учун жуда қулай усулдир. Шунинг эсдан чиқармаслик керакки, деформациянинг потенциал энергияси умумлаштирил-

ган кучларнинг иккинчи даражали бир жинсли функцияси бўлиши керак. Иккинчи томондан, эластик система учун кучларнинг таъсирини қўшиш коидасидан фойдаланиш мумкин бўлмаса, Кастильяно теоремасидан фойдаланиб бўлмайди.

127- §. Кастильяно теоремасининг бошқача исботи

Биз бундан олдинги параграфда Кастильяно теоремасини чиқариш учун Лагранж ва Клапейрон теоремаларидан фойдаландик. Аммо бу теоремани Лагранж ва Клапейрон теоремаларидан фойдаланмасдан туриб чиқарса ҳам бўлади. Эластик системага қўйилган кучлардан бири, чунончи K нуқтага қўйилган $\vec{P}$ куч $\delta\vec{P}$ орттирма олади деб фараз қилайлик. Эластик системага қўйилган барча кучлар таъсиридан ҳа-лиги K нуқта K_1 га кўчсин (454-шакл). KK_1 кўчиш векторини $\vec{x}$ билан белгилай-миз. Орттирмага тегишли қўшимча иш ёки қўшимча потенциал энергия $\delta\vec{P}$ вектор би-лан кўчиш вектори $\vec{x}$ нинг скаляр кўпайт-масига тенг бўлади:

$$\delta A^{(e)} = \delta U = (\delta\vec{P}, \vec{x}) \quad (a)$$

K нуқтани координаталар боши қилиб олиб, x, y, z ўқларни ўтказамиз, $\delta\vec{P}$ нинг x, y, z ўқлар билан ҳосил қилган бурчак-ларининг косинуслари l, m, n бўлсин. $\delta\vec{P}$ нинг x, y, z ўқлардаги проекци-ялари $\delta x, \delta y, \delta z$ қуйидагича ёзилади:

$$\delta x = \delta Pl; \delta y = \delta Pm; \delta z = \delta Pn. \quad (b)$$

Кўчиш вектори $\vec{x}$ нинг координата ўқларидаги проекциялари u, v, w бўлсин. U ҳолда потенциал энергия орттирмаси δU ни қуйидагича ифода-лашимиз мумкин:

$$\delta U = \delta xu + \delta yv + \delta zw$$

ёки (b) ҳисобга олинса,

$$\delta U = (ul + vm + wn)\delta P$$

бўлади.

Бу ифоданинг икки томонини δP га бўлиб, ундан лимит олсак, қуйи-даги ифода ҳосил бўлади:

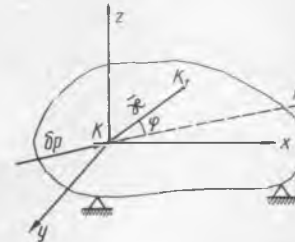
$$\frac{\partial U}{\partial P} = ul + vm + wn. \quad (c)$$

Кўчиш вектори $\vec{x}$ билан $\delta\vec{P}$ нинг йўналиши орасидаги бурчакни φ десак, (c) нинг ўнг томонини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\vec{x} \cos \varphi = ul + vm + wn,$$

яъни ташкил этувчиларнинг бирор ўқдаги проекцияларининг йиғиндиси, ёпувчининг шу ўқдаги проекциясига тенг. Кўчиш вектори $\vec{x}$ нинг $\vec{P}$ йўна-лишидаги проекциясини ρ десак, (c) тенглик қуйидагича ёзилади:

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \rho. \quad (127.1)$$



454- шакл

Демак, яна Кастильяно теоремасини чиқардик. Бундан кўриниб турибдики, потенциал энергиянинг бирор кучга нисбатан олинган хусусий ҳосиласи куч қўйилган нукта қўчишининг шу куч йўналишидаги проекциясига тенг бўлар экан. Ҳосила моментга нисбатан олинса, у эластик система чизикли элементининг момент йўналишидаги айланиш бурчагига тенг бўлади:

$$\frac{\partial U}{\partial M} = \theta. \quad (127.2)$$

128-§. Кастильяно теоремасининг татбиқи

Кастильяно теоремасидан фойдаланиб, турли конструкция элементларининг деформацияларини аниқлаш мумкин. Эгилиш учун деформациянинг потенциал энергияси, кесиб ўтувчи куч таъсири ҳисобга олинмаганда, қуйидагича ёзилган эди:

$$U = \int_0^l \frac{M^2(x) dx}{2EI}$$



455-шакл

Эгувчи момент $M(x)$ балкага қўйилган барча $q, P_1, P_2, \dots, m_1, m_2$ ва ҳоказо куч ҳамда жуфтларнинг чизикли функциясидир.

$$M(x) = a_1 q + b_1 P_1 + b_2 P_2 + \dots + c_1 m_1 + c_2 m_2 + \dots \quad (128.1)$$

Ҳақиқатан ҳам, агар консолли балкага тенг ёйилган юк q , тўпланган куч P ва жуфт куч m 455-шаклда кўрсатилгандек қўйилган бўлса, эгувчи момент тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$M(x) = -q \frac{x^2}{2} - Px - m = ax + bx + c$$

бу ерда

$$a = -\frac{x^2}{2}; \quad b = -x; \quad c = -1.$$

U нинг P куч ва m моментга нисбатан ҳосиласини олампиз:

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \int_0^l \frac{M^2(x) dx}{2EI}.$$

Биз бу ерда аниқ интегрални параметр бўйича дифференциалламоқчимиз. $M(x)$ функция P билан x га боғлиқ бўлиб, интеграллаш x бўйича ўзгармас чегараларда бажарилаётгани сабабли интеграл остида параметр P га нисбатан дифференциаллашимиз мумкин. Шундай қилиб, P куч қўйилган нуктанинг салқилиги:

$$\omega = \frac{\partial U}{\partial P} = \int_0^l \frac{M(x)}{EI} \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial P} dx. \quad (128.2)$$

Шунингдек, m жуфт қўйилган кўндаланг кесимнинг айланиши:

$$\theta = \frac{\partial U}{\partial m} = \int_0^l \frac{M(x)}{EI} \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial m} dx \quad (128.3)$$

бўлади. Бу формулалардан фойдаланиб, балканинг куч ва жуфт қўйилган кесимларидаги салқиликни ва бурилиш бурчакларини аниқлаш мумкин. Ми-

сол учун 455-шаклдаги балка учининг салқилигини ва бурилиш бурчагини аниқлаймиз. Бу ҳол учун эгувчи момент:

$$M(x) = -\frac{qx^2}{2} - Px - m;$$

(125.2) ва (125.3) дан фойдаланиш учун $\frac{\partial M(x)}{\partial P}$ ва $\frac{\partial M(x)}{\partial m}$ ни ҳисоблаш лозим:

$$\frac{\partial M(x)}{\partial P} = -x; \quad \frac{\partial M(x)}{\partial m} = -1.$$

Эгувчи момент ҳамда унинг P ва m га нисбатан олинган ҳосилалари қийматини (128.2) ва (128.3) формулаларга қўйиб, B кесимнинг салқилигини ва бурилиш бурчагини топамиз:

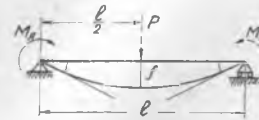
$$\omega_B = \frac{1}{EI} \int_0^l \left[-\frac{qx^2}{2} - Px - m \right] (-x) dx = \frac{ql^4}{8EI} + \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{ml^2}{2EI},$$

$$\theta_B = \frac{1}{EI} \int_0^l \left[-\frac{qx^2}{2} - Px - m \right] (-1) dx = \frac{ql^3}{6EI} + \frac{Pl^2}{2EI} + \frac{ml}{EI}.$$

Консолга интенсивлиги q бўлган тенг ёйилган юккини қўйилган бўлса, $P = 0$ ва $m = 0$ бўлади. Бу ҳолда тегишли салқилик ва бурилиш бурчаги бундай ёзилади:

$$\omega_B = \frac{ql^4}{8EI}; \quad \theta_B = \frac{ql^3}{6EI}.$$

Демак, аниқланиши зарур бўлган умумлаштирилган координаталарга тегишли умумлаштирилган кучлар маълум бўлмаган тақдирда ҳам, уларни Кастильяно теоремасидан фойдаланиб аниқласа бўлар экан. Бундай ҳолларда тегишли умумлаштирилган кучларни, тенгламага уларга нисбатан потенциал энергия ҳосиласини олгунча киритиб, кейин уларни нолга тенглаштириш лозим. Бу мулоҳазанинг мазмунига диққатни кўпроқ жалб этиш керак. Масалан, икки таянчда ётувчи балканинг чап таянчига жуфт куч M_A қўйилган бўлсин. Бу жуфт таъсиридан балканинг ўртасидаги кесимнинг салқилиги ва ўнг учининг бурилиш бурчагини Кастильяно теоремасидан фойдаланиб аниқлаш талаб қилинсин (456-шакл). Чап таянчга қўйилган жуфт куч масаладаги иккала талаб учун ҳам умумлаштирилган куч бўла олмайди. Шу туфайли, салқилиги аниқланиши зарур бўлган ўрта кесимга умумлаштирилган P куч қўйиб, унга тегишли M нинг ифодасини тузамиз. P куч балкани икки участкага бўлгани учун:



456-шакл.

$$M_1 = M_A \left(1 - \frac{x_1}{l} \right) + \frac{P}{2} x_1; \quad M_2 = \left(\frac{M_A}{l} + \frac{P}{2} \right) x_2$$

бўлади. (125) дан фойдаланиш учун $\frac{\partial M_1}{\partial P}$ ва $\frac{\partial M_2}{\partial P}$ ни ҳисоблашимиз зарур:

$$\frac{\partial M_1}{\partial P} = \frac{x_1}{2}; \quad \frac{\partial M_2}{\partial P} = \frac{x_2}{2}.$$

M_1 , M_2 , $\frac{\partial M_1}{\partial P}$ ва $\frac{\partial M_2}{\partial P}$ ларнинг қийматини (128.2) га қўйишда $P = 0$ қилиб олиш керак, чунки бу куч аслида балкага қўйилган эмас;

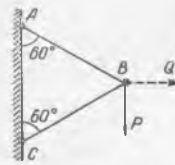
$$f = \int_0^{l/2} \frac{M_A \left(1 - \frac{x_1}{2}\right)}{EI} \cdot \frac{x_1}{2} dx + \int_0^{l/2} \frac{M_A \frac{x_2}{l}}{EI} \cdot \frac{x_2}{2} dx = \frac{M_A l^2}{16EI}.$$

Ўнг кесимнинг бурилиш бурчагини аниқлаш учун олдин унга M_B ни қўйиб, тегишли эгувчи момент ифодасини тузамиз:

$$M = M_A + \frac{M_B - M_A}{l} x; \quad \frac{\partial M}{\partial M_B} = \frac{x}{l}.$$

$M_B = 0$ деб олиб, олинган қийматни (125.3) га қўямиз:

$$\theta_B = \int_0^l \frac{M_A \left(1 - \frac{x}{l}\right)}{EI} dx = \frac{M_A l}{6EI}.$$



457-шакл.

Кастильяно теоремасидан фойдаланиб, 457-шаклда тасвирланган шарнирли система B нуқтасининг вертикал ва горизонтал кўчишини аниқлаймиз. Шарнирлар борлиги туфайли, стерженлар фақат чўзилиши ёки сикилиши мумкин. Шаклда кўрсатилган бурчаклар учун AB стержендаги чўзувчи ва BC стержендаги сикувчи зўриқишлар P га тенгдир. Демак:

$$U = 2 \frac{P^2 l}{2EF}.$$

Бу ифодадан фойдаланиб, B нуқтанинг фақат вертикал кўчишинигина аниқлай оламиз. Уни δ_y билан белгиласак,

$$\delta_y = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{2Pl}{EF}$$

бўлади.

Горизонтал кўчиш δ_x ни аниқлаш учун B нуқтага горизонтал йўналган Q кучни қўямиз. Фикран қўйилган Q куч билан ҳақиқатан қўйилган P куч таъсирида AB ва BC даги зўриқишлар тегишлича:

$$P + \frac{Q}{\sqrt{3}} \quad \text{ва} \quad P - \frac{Q}{\sqrt{3}}$$

бўлади.

Бу зўриқишларга тегишли потенциал энергия:

$$U = \frac{\left(P + \frac{Q}{\sqrt{3}}\right)^2 l}{2EF} + \frac{\left(P - \frac{Q}{\sqrt{3}}\right)^2 l}{2EF}.$$

Демак, B нуқтанинг горизонтал кўчиши:

$$\delta_x = \frac{\partial U}{\partial Q} = \frac{\left(P + \frac{Q}{\sqrt{3}}\right) l}{EF} - \frac{\left(P - \frac{Q}{\sqrt{3}}\right) l}{EF} = \frac{2Ql}{3EF}.$$

Q куч ҳақиқатда қўйилмаган, шунинг учун $Q = 0$, демак:

$$\delta_x = 0.$$

129- §. Минимал иш ҳақидаги теорема

Бу теорема статик аниқмас системалардаги ортиқча номаълумларни аниқлашда жуда ҳам қулай усулдир. У бевосита Кастильяно теоремасидан келиб чиқади. Бу теоремадан фойдаланиш учун эластик системанинг потенциал энергиясини унга қўйилган кучлар билан ортиқча номаълум реакциялар функцияси тарзида ифодалаш лозим. Потенциал энергия ифодасига фақат ортиқча номаълум реакциялар киради, чунки қолган реакцияларни, статика тенгламаларидан фойдаланиб, ортиқча номаълумлар ва қўйилган юклар орқали ифодалаш мумкин. Ортиқча номаълум реакциялар $X, Y, Z, \dots$ бўлсин. Агар таянч бикр бўлса, бу реакциялар қўйилган нуқталарнинг қўчиши нолга тенг бўлади. Шунинг учун Кастильяно теоремаси бу ҳолда қуйидагича ёзилади:

$$\frac{\partial U}{\partial X} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial Y} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial Z} = 0. \quad (129.1)$$

Бу тенгламалар X, Y, Z ларнинг изланган қийматида потенциал энергия U нинг максимал ёки минимал қийматга эришиш шартини ифодалайди. Аммо, бу шартлар U нинг минимал бўлиш шarti эканлигини исботлаш қийин эмас. Маълумки, U ташқи кучларнинг иккинчи даражали бир жинсли функциясидир. Шунинг учун уни энг умумий ҳолда қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$U = A_1 R_1^2 + A_2 R_2^2 + A_3 R_3^2 + \dots + B_1 L_1^2 + \dots + C_1 R_1 R_2 + \dots$$

U ҳамма вақт мусбат бўлиши керак, шунинг учун $A_1, A_2, \dots, B_1, \dots$ коэффициентлар ҳам мусбат сондир. Демак, U нинг иккинчи ҳосиласи ҳам мусбат сон бўлиши керак, яъни:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} > 0; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} > 0; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} > 0.$$

Бу шартлар потенциал энергия U нинг минималлик шартидир. Демак, ортиқча номаълум X, Y, Z реакцияларни аниқлаш учун уларнинг миқдорини шундай танлаш керак эканки, бу танланган реакцияларнинг қийматлари учун эластик системанинг потенциал энергияси минимал қийматга эга бўлсин. Минимал иш ҳақидаги теореманинг моҳияти ана шундан иборат.

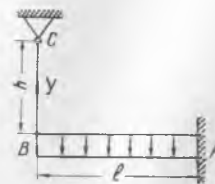
Таянчлардан бирортаси ёки бир нечтаси кўчишга мойил бўлса, у ҳолда (129.1) тенгламаларнинг шу таянч тегишли қисмининг ўнг томонидаги миқдор ноль бўлмай, балки у таянч нуқтасининг кўчишига тенг бўлади. Масалан, тенг ёйилган юк қўйилган, ўнг учи билан қистириб тиралган балканинг чап учи узунлиги h бўлган сим билан шипга осиб қўйилган бўлсин (458-шакл). Бу ҳол учун (129.1) тенгламаларнинг иккинчиси қуйидагича ёзилади:

$$\frac{\partial U}{\partial Y} = \Delta h; \quad \text{бунда } \Delta h = \frac{Yh}{EF} \quad (129.2)$$

(Y — симни чўзувчи куч ёки балка учун B нуқтанинг реакцияси).

Энди, минимал иш теоремасини бир нечта хусусий ҳолларга татбиқ қиламиз ва шу муносабат билан қуйидаги мисолни ечамиз.

Ўнг учи билан қистириб тиралган балканинг чап учи таянчга эркин тиралган бўлиб, унга тенг ёйилган 9 кг/м юк таъсир қилади. Балканинг эркин тиралган учидаги реакция кучини аниқлаймиз. Бу масалани ечишда ортиқча но-



458- шакл.

маълум учун чап таянч реакцияси Y ни кабул қиламиз. Кесиб ўтувчи кучнинг таъсири ҳисобга олинмаса, балкада тўпланган потенциал энергия U қуйидагича ифодаланади:

$$U = \int_0^l \frac{M^2(x) dx}{2EI}; \quad M(x) = Y \cdot x - \frac{qx^2}{2}; \quad \frac{\partial M}{\partial Y} = x$$

Минимал иш ҳақидаги теоремага мувофиқ:

$$\frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{1}{EI} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial Y} dx = \frac{1}{EI} \left(\frac{Yl^3}{3} - \frac{ql^4}{8} \right) = 0$$

бундан:

$$Y = \frac{3}{8} ql.$$

Биз бу натижани курсимизнинг 98- параграфида мутлақо бошқача усул билан чиқарган эдик.

Бу масалани (129.1) тенгламалар ёрдамида ечганда ортикча номаълум учун чап таянч реакцияси Y ни олмасдан, балки ўнг таянчдаги реактив момент M_0 ни олишимиз ҳам мумкин. У ҳолда қистириб тиралган кесимнинг бурилиш бурчаги нолга тенг бўлади. Балканинг ўнг учи қистирма боғланишдан озод қилинса, унга қистириш таъсирини жуфт M_0 билан алмаштириб, берилган балка ўрнига тенг ёйилган юк таъсири остида бўлган ва ўнг учига момент қўйилган икки таянчда ётувчи балка оламиз. Унинг бирор кесимидаги эгувчи момент:

$$M(x) = \frac{ql}{2} x - \frac{qx^2}{2} + M_0 \frac{x}{l}; \quad \text{ва} \quad \frac{\partial M}{\partial M_0} = \frac{x}{l},$$

$$\frac{\partial U}{\partial M_0} = \frac{1}{EI} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial M_0} dx = \frac{1}{EI} \int_0^l \left(\frac{ql}{2} x - \frac{qx^2}{2} + M_0 \frac{x}{l} \right) \frac{x}{l} dx = 0.$$

Интегрални ҳисоблаб, илгари чиқарилган натижани оламиз:

$$M_0 = -\frac{ql^3}{8}.$$

Энди 458-шаклда тасвирланган балка учун сим BC нинг чўзилишини аниқлаймиз. (129.2) га мувофиқ:

$$\frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{1}{EI} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial Y} dx = \frac{1}{EI} \left(\frac{Yl^3}{3} - \frac{ql^4}{8} \right) = \frac{Yh}{EF}.$$

Бундан:

$$Y = \frac{1}{1 - \frac{3}{8} \frac{Ih}{El^3}} \cdot \frac{3}{8} ql.$$

130- §. Кўчишларнинг ўзаро муносабатда бўлиши ҳақидаги теорема (Максвелл-Бетти теоремаси)

Эластик системанинг деформацияланишида системага қўйилган умумлаштирилган кучларнинг бажарган иши ёки деформация оқибатида системада тўпланган потенциал энергия, умумлаштирилган координаталар ёки умумлаштирилган кучларнинг бир жинсли квадратик функцияси эканлиги

бундан олдинги параграфларда айтиб ўтилди. Бунни қуйидаги мулоҳазалар учун асос қилиб оламиз. Эластик системага бир нечта $R_1, R_2, \dots, R_n$ умумлаштирилган кучлар қўйилган бўлсин. Бирор нуқтанинг кўчиши аини нуқтанинг ҳалиги кучлар алоҳида-алоҳида таъсир қилганда оладиган кўчишларнинг геометрик йиғиндисига тенг. Бу кўчиш ифодасини аниқлаш учун қуйидаги тушунчани киритамиз.

Эластик система сифатида икки таянчга тиралган, бикрлиги етарли даражада катта бўлган эластик жисмни оламиз (459-шакл). Унинг бирор нуқтаси C_1 га l_1 йўналишда миқдори 1 кг бўлган куч қўйилган бўлсин. Бу нуқтанинг аини куч таъсирида l_1 йўналишда ҳосил бўлган кўчишини r_{11} билан белгилаймиз. Системанинг бошқа бирор C_2 нуқтасига l_2 йўналишда бирлик куч қўйилган бўлсин. Мазкур куч таъсирида C_2 нуқтанинг l_2 йўналишдаги кўчиши r_{22} бўлсин. C_1 нуқтанинг l_1 йўналиш бўйича C_2 нуқтага қўйилган бирлик куч таъсирида ҳосил бўлган кўчишини r_{12} билан белгилаймиз. Бу белгидаги биринчи индекс кўчаётган нуқтанинг ўрнини, иккинчи индекс эса аини нуқтани кўчираётган бирлик куч қўйилган нуқтанинг ўрнини кўрсатади. Шунингдек, r_{21} билан C_2 нуқтанинг C_1 га қўйилган бирлик куч таъсирида l_2 йўналишдаги кўчиши белгиланади. r_{12} ёки r_{21} кўчишларнинг миқдори C_1 ва C_2 га қўйилган бирлик кучларнинг йўналиши l_1 ва l_2 боғлиқ эканлиги табиийдир. Бу мулоҳазалар асосида қуйидаги теоремани исботлаймиз. C_1 нуқтага l_1 йўналишда қўйилган бирлик куч таъсирида C_2 нуқтанинг l_2 йўналишдаги кўчиши C_2 нуқтанинг l_2 йўналишда қўйилган бирлик куч таъсиридан C_1 нуқтанинг l_1 йўналишдаги кўчишига тенг бўлади, яъни:

$$r_{12} = r_{21}. \quad (130.1)$$

Бу теоремани исботлаш учун қуйидаги мулоҳазадан фойдаланамиз. Эластик системанинг деформацияси натижасида тўпланган потенциал энергиянинг натижавий қиймати унга таъсир этувчи кучларнинг қандай тартибда қўйилишига боғлиқ бўлмайди. Бу мулоҳазани назарда тутиб, текширилаётган эластик системанинг олдин C_1 нуқтасига R_1 , кейин C_2 нуқтасига R_2 умумлаштирилган кучларни қўямиз. R_1 куч ўзи қўйилган C_1 нуқтада r_{11} R_1 кўчишини R_2 куч C_2 нуқтада r_{21} R_1 кўчишини ҳосил қилади. R_1 куч r_{11} R_1 кўчиш давомида қуйидаги ишни бажаради:

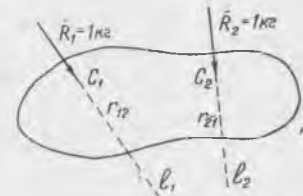
$$U_{11} = \frac{1}{2} r_{11} R_1 \cdot R_1 = \frac{r_{11} R_1^2}{2}.$$

R_1 куч қўйилиб бўлгандан кейин C_2 нуқтага қўйилган R_2 куч, бу нуқтада $r_{22} R_2$ кўчишни ва C_1 нуқтада $r_{12} R_2$ кўчишни ҳосил қилади. Бу кўчишда R_2

бажарган иш $U_{22} = \frac{1}{2} r_{22} R_2 \cdot R_2 = \frac{r_{22} R_2^2}{2}$, R_1 бажарган иш эса $U_{12} = r_{12} R_2 \cdot R_1$

бўлади. Бу ифодада $\frac{1}{2}$ кирмади, чунки C_1 нуқта R_2 таъсирида $r_{12} R_2$ га кўчмасдан илгари R_1 куч қўйилган эди. Шундай қилиб, эластик системага R_1 ва R_2 кучлар юқорида айтилган тартибда қўйилиши натижасида, уларнинг бажарган иши ёки потенциал энергияси:

$$U = U_{11} + U_{12} + U_{22} \quad (130.2)$$



459-шакл.

бўлади. Аксинча, аввал R_2 ни қўйиб R_1 қўйилса, юқоридаги каби мулоҳазаларни юргизиб, иш ёки потенциал энергия ифодасини қуйидагича ёзамиз:

$$U = U_{22} + U_{21} + U_{11}. \quad (130.3)$$

Бу ифодадаги айрим ҳадларнинг қиймати юқоридаги мулоҳаза асосида топилади, чунончи:

$$U_{22} = \frac{1}{2} r_{22} R_2^2, \quad U_{11} = \frac{1}{2} r_{11} R_1^2, \quad U_{21} = r_{21} R_1 R_2.$$

Энди бажарилган ишларни солиштириб, қуйидаги хулосани чиқарамиз:

$$U_{12} = U_{21}. \quad (130.4)$$

Демак, C_1 нуқтага қўйилган R_1 кучнинг C_2 нуқтадаги R_2 куч таъсирида ҳосил бўлган кучида бажарган иши C_2 нуқтага қўйилган R_2 кучнинг C_1 нуқтадаги R_1 куч таъсирида ҳосил бўлган кучидаги бажарган ишига тенг бўлар экан. Юқорида топилган U_{12} ва U_{21} ифодаларни (130.4) га қўйиб (130.1) нинг тўғрилигини исботлаймиз, яъни:

$$r_{12} R_2 R_1 = r_{21} R_1 R_2;$$

бундан:

$$r_{12} = r_{21}.$$

Бу хулоса кўчишларнинг ўзаро муносабатда бўлиши ҳақидаги Максвелл теоремасининг ифодасидир. Бу икки куч учун чиқарилган хулосани исталган сондаги кучлар учун ҳам татбиқ қилиш мумкин. Масалан, эластик системага бир нечта $R_1, R_2, \dots, R_n$ кучлар қўйилган бўлиб, уларнинг ҳар бир қўйилган нуқтасининг шу нуқтага қўйилган куч йўналишидаги кўчиши тегишлича $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ бўлса, буларнинг қийматини бирлик куч таъсирида ҳосил бўладиган r_{kl} кўчишлар куч таъсирдан фойдаланиб, қуйидагича ёзамиз:

$$\begin{vmatrix} \Delta_1 = r_{11} R_1 + r_{12} R_2 + r_{13} R_3 + \dots + r_{1n} R_n \\ \Delta_2 = r_{21} R_1 + r_{22} R_2 + r_{23} R_3 + \dots + r_{2n} R_n \\ \vdots \\ \Delta_n = r_{n1} R_1 + r_{n2} R_2 + r_{n3} R_3 + \dots + r_{nn} R_n \end{vmatrix} \quad (130.5)$$

Максвелл теоремасига мувофиқ, бирлик куч таъсирида ҳосил бўладиган кўчишлар ҳар бир жуфт индекс k ва l учун қуйидаги шартни қаноатлантиради:

$$r_{kl} = r_{lk}.$$

Бу хулосадан ва (130.5) дан фойдаланиб, деформациянинг потенциал энергиясини ёки ташқи кучларнинг деформация натижасида бажарган ишини қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$A^{(e)} = U = \frac{1}{2} (R_1 \Delta_1 + R_2 \Delta_2 + \dots + R_n \Delta_n) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n R_k \Delta_k$$

Δ_k ларнинг қиймати (25.5) дан келтириб қўйилса:

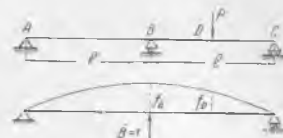
$$\begin{aligned} A^{(e)} = U &= \frac{1}{2} (r_{11} R_1^2 + 2r_{12} R_1 R_2 + r_{22} R_2^2 + 2r_{13} R_1 R_3 + \dots) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n r_{kl} R_k R_l \end{aligned} \quad (130.6)$$

бўлади. Бу ифодадан R_k га нисбатан олинган хусусий ҳосиланинг Δ_k га тенг бўлишини исботлаш қийин эмас. Бу эса Кастильяно теоремасини ифо-

далайди. Демак, Кастильяно теоремасини, Максвелл теоремасидан келтириб чиқариш мумкин экан.

Максвелл теоремасининг ифодаси (130.4) дан фойдаланиб, статик аниқмас масалаларни ечиш мумкин. Бунинг учун текширилаётган эластик системани икки ҳолатда олиб қараш зарур. Биринчи — асосий ҳолатда системага қўйилган ташқи кучлар билан бирга ортиқча номаълум реакция ҳам олинади, иккинчи — «ёрдамчи» ҳолатда эса система ортиқча номаълум реакция ҳосил бўладиган кесимларга қўйилган бирлик куч таъсиридагина қаралади.

Асосий ҳолатда таъсир этувчи кучларнинг «ёрдамчи» ҳолатга тегишли бирлик куч таъсирида ҳосил бўлган қўчишдаги бажарган иши бирлик кучнинг асосий ҳолатдаги кучларга тегишли қўчишда бажарган ишига тенг. Масалада бир нечта ортиқча номаълум бўлса, «ёрдамчи» ҳолатлар сони ортиқча номаълумлар сонига тенг қилиб олиниши керак. Масалан, уч таянчда ётувчи балкани олиб қарайлик. Унинг ўртасидаги таянч реакцияси B ни ортиқча номаълум учун қабул қилсак (460-шакл), асосий ҳолатда эластик системага P ва B кучлар таъсир қилади. «Ёрдамчи» ҳолатни ҳосил қилиш учун балканинг B кесимида бирлик куч қўямиз. Унинг таъсирида ҳосил бўладиган B ва D нуқталардаги қўчишларни f_B ва f_D орқали белгилаймиз. У ҳолда (130.4) қуйидагича ёзилади:



460-шакл.

$$Bf_B - Pf_D = 0,$$

бундан:

$$B = P \frac{f_D}{f_B} \quad (a)$$

f_D ва f_B нинг қийматларини тегишли жадваллардан оламиз:

$$f_D = \frac{11 \cdot 1 (2l)^3}{16 \cdot 48 EI}; \quad f_B = \frac{1 \cdot (2l)^3}{48 EI}$$

Буларнинг қийматини (a)га қўйиб, B ни аниқлаймиз: $B = \frac{11P}{16}$; қолган иккита A ва C реакция статика тенгламаларидан фойдаланиб аниқланади.

131-§. Мор усули

Эластик система деформациланганда ундаги бирор нуқтанинг қўчиши система деформациясининг потенциал энергиясидан қўчишга тегишли умумлаштирилган кучга нисбатан олинган хусусий ҳосилага тенглиги Кастильяно теоремасидан маълум. Эластик система сифатида балка олсак, унинг бирор кесимининг салқилиги ва бурилиши (128.2) ва (128.3) га мувофиқ, қуйидагича ёзилиши ҳам маълум:

$$\omega = \frac{\partial U}{\partial P} = \int_0^l \frac{M(x)}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial P} dx, \quad \theta = \frac{\partial U}{\partial m} = \int_0^l \frac{M(x)}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial m} dx.$$

Бу формулалардаги $\frac{\partial M}{\partial P}$ ва $\frac{\partial M}{\partial m}$ ларни тушунтираемиз. Балкага бир нечта $P_1, P_2, \dots, q_1, q_2, \dots$ ва $m_1, m_2, \dots$ тупланган ва ёйилган юклар ҳамда жуфт кучлар

қўйилган бўлса, ундай балканинг ҳар қандай қўндаланг кесимидаги эгувчи момент мазкур кучларнинг чизиқли функцияси тарзида ифоделанади:

$$M = a_1 m_1 + a_2 m_2 + \dots + b_1 P_1 + b_2 P_2 + \dots + c_1 q_1 + c_2 q_2 + \dots \quad (131.1)$$

бу ерда a_i , b_i , c_i коэффициентлар текширилатган кесимга қўйилган юкларнинг ўрнига ҳамда балканинг узунлигига боғлиқдир. Масалан, 455-шаклда тасвирланган балкага қўйилган юклар учун балканинг бирор кесимидаги эгувчи момент:

$$M = -m - Px - \frac{qx^2}{2}$$

кўринишда ёзилади. Бунини (131.1) билан солиштирсак:

$$a_1 = -1; \quad b_1 = -x; \quad c_1 = -\frac{x^2}{2}$$

бўлади.

P_i куч қўйилган нуқтадаги салқиликни аниқлаш талаб қилинсин. У ҳолда $\frac{\partial M}{\partial P_i} = b_i$ бўлади. Аммо b_i ни балканинг P_i таъсир қилаётган қўндаланг кесимидаги бирлик кучдан ҳосил бўлган эгувчи момент деб қараш мумкин.

Дарҳақиқат, M нинг ифодаси (131.1) га P_i нинг хусусий қиймати $P_i = 1$ ни қўйиб, қолган барча кучларни нолга тенглаштирсак: $M_{(x)} = b_i$ ни оламиз.

455-шаклда тасвирланган балканинг эгувчи моментидан P га нисбатан ҳосила олсак, $\frac{\partial M}{\partial P} = -x$ чиқади. Бу эса балканинг учига фақат бирлик куч

қўйилган ҳол учун эгувчи момент ифодасидир. Худди шундай $\frac{\partial M}{\partial m} = a_i$ бирор кесимдаги бирлик жуфт кучдан ҳосил бўладиган эгувчи моментни ифодалайди. Шундай қилиб, эгувчи моментнинг бирор умумлаштирилган кучга нисбатан олинган ҳосиласини ҳисоблашни бирлик кучнинг эгувчи моментини ҳисоблаш билан алмаштириш мумкин экан. Бирлик куч моментини M^0 билан белгилаймиз. Кастильяно теоремасини татбиқ қилиш вақтида, агар тегишли умумлаштирилган кучлар мавжуд бўлмаса, бундай кучларни ҳисобга фикран киритиб, потенциал энергиянинг ҳосиласи ҳисоблангандан кейин, уларни гашлаб юборган эдик. Энди бундай ҳолларда қўшимча кучлар киритиб, уларга нисбатан тегишли хусусий ҳосилаларни ҳисоблаш ўрнига, кўчишни аниқланаётган нуқталарга бирлик кучлар қўйиб, уларнинг эгувчи моментларини ҳисоблаш кифоя. Шундай қилиб, балканинг ҳар қандай кесимининг кўчиши δ ни (салқилик ёки бурилиш бурчагини) аниқлаш учун, бу кесимга тегишли куч қўйилиши ёки қўйилмаслигидан қатъи назар, дастлаб эгувчи момент $M(x)$ ифодасини ҳисоблаймиз, кейин кўчишни аниқланаётган кесимга тегишлича қўйилган бирлик кучдан ҳосил бўлган M_0 эгувчи моментни топамиз. Шундан сўнг қўйидаги ифодадан кўчиш δ ни аниқлаймиз:

$$\delta = \int_0^l \frac{M M^0}{EI} dx. \quad (131.2)$$

Бу формулани ҳисоблаш практикасига биринчи марта 1874 йилда О. Мор киритган эди. Агар (26.2) формуладаги δ салқилик деб тушунилса, M^0 салқилиги аниқланаётган нуқтага қўйилган тўпланган бирлик юк учун ҳисобланади; мабодо кесимнинг бурилиш бурчагини ҳисоблаш тўғри келса, у ҳолда тегишли кесимга қўйилган бирлик жуфт куч учун ҳисобланади.

(131.2) формуладан статик аниқмас масалаларни ечишда ҳам фойдаланса бўлади. Бунинг учун худди Максвелл усулидан фойдалангандагидек, статик аниқмас эластик системанинг бир нечта ҳолатини текшириш зарур. Асосий ҳолатда қўйилган юклар билан таянч реакцияларини олиб, «ёрдамчи» ҳолатларда эса барча юкларни ташлаб, фақат ортиқча номаълум қўйилган кесимга мувофиқлаб бирлик юк қўйиш ва унинг моменти M^0 ни ҳисоблаш лозим. Ортиқча номаълум, одатда, таянч реакцияси ёки таянч моменти бўлгани учун уларга тегишли кўчишлар нолга тенг бўлади, шунинг учун (131.2) қуйидагича ёзилади:

$$\int_0^l \frac{MM^0}{EI} dx = 0. \quad (131.3)$$

Масалан, бутун узунлиги бўйлаб ёйилган q юк таъсирида бўлган балканинг чап учи таянчга эркин тиралган. ўнг учи эса қистириб тиралган (461-шакл). Ортиқча номаълум учун таянч реакцияси A ни олиб, асосий ва «ёрдамчи» ҳолатларни тасвирлаймиз (461-шакл, а ва б). Иккала ҳолат учун M ва M^0 ни ҳисоблаб (131.3) га қўямиз:

$$M = Ax - \frac{qx^2}{2}; \quad M^0 = 1 \cdot x;$$

$$\frac{1}{EI} \int_0^l \left(Ax - \frac{qx^2}{2} \right) (1 \cdot x) dx = 0;$$

бундан:

$$A = \frac{3}{8} ql$$

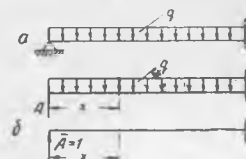
бўлади; қолган иккита B ва M_A реакцияларни статика тенгламаларидан аниқлаш мумкин.

Агар балка бир қанча участкадан иборат бўлса, (131.2) ва (131.3) ифодадар ҳар қайси участка учун ахсус кийматга эга бўлади ва ҳар бир интегралнинг чегараси ўз участкасига мувофиқ равишда белгиланади ҳамда уларни интеграллар йиғиндиси тарзида ифодалаш лозим бўлади. Мор усули амалий жихатдан Кастильяно теоремасига қараганда бир қанча афзалликларни боришидан, у сўнгги вақтда Кастильяно теоремаси ўрнида ишлатилмоқда.

132-§. Верешчагин усули

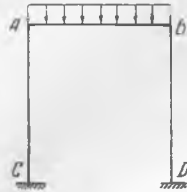
Рус инженери Верешчагин 1924 йилда (131.2) ифодадаги интегрални ҳисоблашни осонлаштирди. Балканинг ёрдамчи ҳолатида қўйиладиган бирлик куч тўпланган ёки жуфт кучдан иборат бўлгани учун M^0 моментнинг эпюраси тўғри чизиқ билан чегараланади. Шу сабабли $\int MM^0 dx$ интегрални балкага қўйилган ҳақиқий юкдан ҳосил бўлган эгувчи момент эпюрасининг ҳар қандай кўриниши учун қуйидагича ҳисоблаш мумкин: M эпюраси 462-шаклдагидек эгри чизиқли бўлиб, M^0 тўғри чизиқли бўлсин (462-шакл, б). Интеграл остидаги Mdx ни M эпюрасининг шаклда штрих-лаб кўрсатилган элементар юзаси $d\Omega$ деб қараш мумкин. Бирлик юкдан ҳосил бўлган эгувчи момент эпюрасига тегишли ординатани қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$M^0 = x \operatorname{tg} \alpha,$$

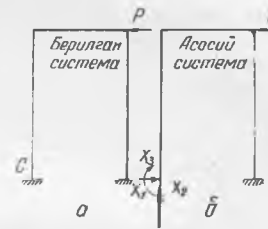


461-шакл.

рама деб аталади (463-шакл). Рама элементларидан AC ва BD стерженлар устун деб, AB стержень эса ригель деб аталади. Элементлар тугун A , B да бикр қилиб туташтирилган, яъни улар шундай туташтирилганки, рама деформацияланганда тугунга туташган элементлар бир-бирига нисбатан бурила олмайди. Тугунда устун билан ригель тўғри бурчак ҳосил қилган бўлса, бу тўғри бурчак деформациядан кейин ҳам ўзгармайди.



463-шакл.



464-шакл.

Конкрет ҳол учун каноник тенгламалар тузамиз. Бунинг учун 464-шаклда тасвирланган рамани оламиз. Дастлаб, раманинг мувозанатини бузмасдан, қистириб тиралган C учини боғланишдан қутқазиб, уни статик аниқ системага айлантираемиз (464-шакл, б). C кесими қистириб тиралгани учун боғланиш таъсирини алмаштирувчи реакциялар сони учта бўлади. Улар: 1) горизонтал йўналган кўчишга қаршилик кўрсатувчи X_1 реакция; 2) вертикал кўчишга қаршилик кўрсатувчи X_2 реакция; 3) қистирилган кесимнинг айланишига қаршилик кўрсатувчи реактив момент X_3 дан иборат. Демак, биз текшираётган рамада учта ортиқча номаълум бўлади.

Эластик системанинг мувозанатини бузмасдан, системани ортиқча боғланишдан қутқазиб, унинг таъсирини тегишли реакциялар билан алмаштиришдан ҳосил бўлган система асосий система еб аталади. Ортиқча номаълумлар X_1 , X_2 , X_3 ни шундай танлаймизки, берилган система билан асосий системанинг деформацияси бир хил бўлсин. Берилган системанинг C учи таянчга қистирилганлиги учун асосий системада ҳам C қўзғалмас бўлиши шарт. C қўзғалмаслиги учун горизонтал ва вертикал йўналишдаги кўчишлар ҳамда буралиш бўлмаслиги керак. Ортиқча номаълумлар қўйилган C нуқтанинг кўчишини Δ_c деб, унинг горизонтал, вертикал ва буралишга оид ташкил этувчиларини тегишлича Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 десак, горизонтал, вертикал йўналишдаги кўчишларнинг бўлмаслиги ва буралмаслик шarti қуйидагича ёзилади:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{1P} = 0, \\ \Delta_2 &= \Delta_{21} + \Delta_{22} + \Delta_{23} + \Delta_{2P} = 0, \\ \Delta_3 &= \Delta_{31} + \Delta_{32} + \Delta_{33} + \Delta_{3P} = 0. \end{aligned} \quad (133.1)$$

Бунда, олдин белгиланган қоидага мувофиқ, биринчи индекс кўчишнинг йўналишини, иккинчи индекс эса кўчишни ҳосил қилаётган куч қўйилган ўринни кўрсатади. Бирлик юклар таъсирида ҳосил бўладиган кўчиш-

ларни тегишли индекслар билан δ орқали белгиласак, (129.5) формулага мувофиқ қуйидагиларни оламиз:

$$\begin{aligned}\Delta_{11} &= X_1 \delta_{11}, \\ \Delta_{12} &= X_2 \delta_{12}, \\ &\vdots \\ \Delta_{33} &= X_3 \delta_{33}.\end{aligned}\quad (133.2)$$

$\delta_{ki} = \delta_{ik}$ эканлигини назарга олиб, (133.2) ни (133.1) га қўйсак X_1, X_2, X_3 ларни аниқлаш учун қуйидаги тенгламалар ҳосил бўлади:

$$\begin{cases} X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_3 \delta_{13} + \Delta_{1p} = 0, \\ X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} + \Delta_{2p} = 0, \\ X_1 \delta_{31} + X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} + \Delta_{3p} = 0. \end{cases}\quad (133.3)$$

Бу ерда $\Delta_{1p}, \Delta_{2p}, \Delta_{3p}$ — рама асосий системасининг чап учи C нинг қўйилган юк таъсирида горизонтал, вертикал ва буралма кўчишлари. Бу тенглама системаси берилган рама чап учи C нинг горизонтал, вертикал, бурилишга оид кўчишларининг нолга тенгличини, яъни C нуқтанинг қўзғалмаслигини ифодалайди. Бу тенгламалар *каноник тенгламалар* деб аталади. Каноник тенгламаларнинг коэффициентлари δ_{ik} нинг маъносини яна бир карра такрорлаб ўтамыз; δ_{ik} — нуқтанинг k йўналишдаги бирлик куч таъсирида i йўналишдаги кўчишидир. Унинг қийматини аниқлаш учун Мор формуласидан фойдаланамиз. Бу ҳолда Мор формуласи қуйидагича ёзилади:

$$\delta_{ik} = \delta_{ki} = \int_0^l \frac{M_i M_k}{EI} dx. \quad (133.4)$$

Бу ерда M_i ва M_k ларнинг иккаласи ҳам бирлик юк моменти бўлгани учун, (133.4) нинг қиймати бевосита жадвалдан аниқланади, Δ_{ip} эса қўйилган юк эгувчи моментнинг эпюраси мўраққаб бўлган ҳолда Мор интегралини ҳисоблаб аниқланади, яъни:

$$\Delta_{ip} = \int_0^l \frac{M(x) M_i}{EI} dx.$$

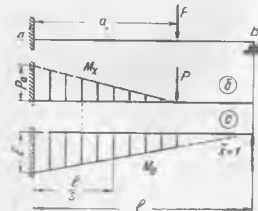
Каноник тенгламаларнинг коэффициентлари δ_{ik} ва эркин ҳади Δ_{ip} аниқлангандан кейин, (133.3) системани ечиш қийин эмас. Ундан X_1, X_2, X_3 аниқланади.

Энди каноник тенгламаларни конкрет масалага татбиқ қиламиз. Бунинг учун олдин оддийроқ бир масалани ечамиз. 465-шаклда тасвирланган балка учун, каноник тенгламалардан фойдаланиб, B реакциясини аниқлаймиз.

Таянч B йўқотилиб, асосий система олинади ва ташланган таянч нуқтасига $X_1 = 1$ куч қўйилади (465-шакл, с). Бу ҳолда каноник тенглама қуйидагича ёзилади:

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1p} = 0.$$

Δ_{1p} билан δ_{11} ни ҳисоблаш учун қўйилган юк ва B га қўйилган бирлик юкларнинг эгувчи моментлари $M(x)$ ва M_0 ларнинг эпюраларини кўрамиз (465-шакл, б ва с). Шаклдан (132.1) га мувофиқ Δ_{1p} ва δ_{11} учун қуйидагиларни оламиз:



465-шакл.

$$\Delta_{1p} = -\frac{Pa^3}{2EI} \left(1 - \frac{a}{3}\right) = -\frac{Pa^3(3l-a)}{6EI}$$

бу ерда: $\eta = l - \frac{a}{3}$.

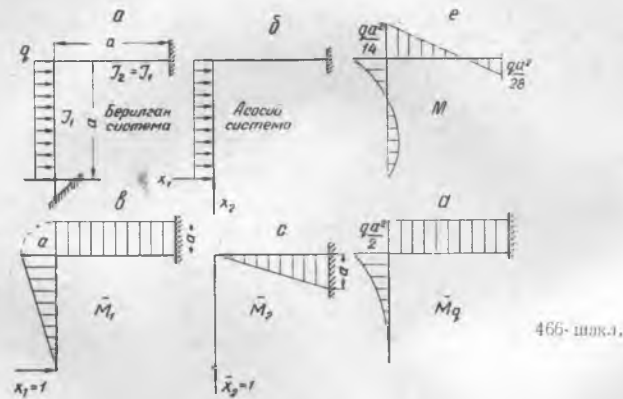
$$\delta_{11} = \frac{1 \cdot l^3}{2EI} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot l^3}{3EI}; \quad \eta_1 = \frac{2}{3}l.$$

Δ_{1p} ва δ_{11} нинг қийматини каноник тенгламага қўйиб, B нинг реакцияси X ни аниқлаймиз:

$$X = B = \frac{Pa^3(3l-a)}{2l^3};$$

$a = \frac{l}{2}$ бўлганда $X = B = \frac{5}{16}P$ бўлар эди.

Эгувчи момент эпюрасини қуриш учун бирлик куч эпюрасини X маз-та қўлайтириб, уни M нинг эпюраси билан қўшиш керак.



Иккинчи мисол учун 466-шакл, a да тасвирланган рамани оламиз. Эластик системада иккита ортиқча номаълум бор. Асосий система учун 466-шакл, b да тасвирланган схемани оламиз. Каноник тенгламалар тузимиз:

$$\begin{aligned} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + \Delta_{1q} &= 0, \\ X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + \Delta_{2q} &= 0. \end{aligned}$$

X_1 ва X_2 нинг йўналишидаги бирлик кучлар учун тегишли эгувчи момент эпюраларини қурамиз; улар 466-шакл, c ва d да тасвирланган: рамага қўйилган куч таъсиридан асосий системада ҳосил бўлган эгувчи момент эпюраси 466-шакл, e да тасвирланган. Бу эпюралардан фойдаланиб, каноник тенгламаларнинг коэффициентларини ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \left(\frac{a^3}{2} \cdot \frac{2}{3}a + a^3 \cdot a\right) \frac{1}{EI} = \frac{4}{3} \frac{a^4}{EI}; \quad \delta_{22} = \frac{a^3}{2} \cdot \frac{2}{3}a \frac{1}{EI} = \frac{a^4}{3EI}; \\ \delta_{12} &= -\delta_{21} = -\frac{a^3}{2} \cdot a \frac{1}{EI} = -\frac{a^4}{2EI}; \end{aligned}$$

$$\Delta_1 q = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{3} q_1 \frac{a^3}{2} \frac{3}{4} a + \frac{qa^2}{2} a \cdot a \right) = \frac{5}{8} \frac{qa^4}{EI};$$

$$\Delta_2 q = -\frac{qa^2}{2} a \cdot \frac{a}{2} \frac{1}{EI} = -\frac{qa^4}{4EI}.$$

Буларнинг қийматини каноник тенгламаларга қўйиб, қуйдаги тенгламаларни оламыз:

$$\frac{4}{3} X_1 - \frac{1}{2} X_2 + \frac{5}{8} qa = 0; \quad -\frac{1}{2} X_1 + \frac{1}{3} X_2 - \frac{1}{4} qa = 0.$$

Бу тенгламалар системасини ечиб, X_1 ва X_2 ни аниқлаймиз:

$$X_1 = -\frac{3}{7} qa; \quad X_2 = \frac{3}{28} qa.$$

Энди бирлик кучларга тегишли M_1 ва M_2 эпюраларнинг ординаталарини тегишлича X_1 ва X_2 марта кўпайтириб, уни юк моменти эпюраси билан қўйиш лозим. Умумий эпюра 466-шакл, e да тасвирланган.

МАСАЛАЛАР

176. Узунлиги ва қўндаланг кесим юзаси бир хил бўлган икки стерженнинг потенциал энергияси U_1 ва U_2 қуйдаги икки ҳол учун ҳисоблансин.

1. Стерженнинг хусусий оғирлиги P бўлиб, у ҳам эътиборга олинсин.

2. Стержень учига стержень оғирлигига тенг юк қўйилган бўлсин.

Е ч и ш. Биринчи ҳолда олдин солиштирма ишни ҳисоблаймиз:

$$a = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{\gamma^2 x^2}{2E};$$

чунки

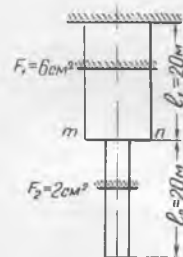
$$\sigma = \gamma x$$

Бутун стерженнинг потенциал энергияси:

$$U_1 = \int_0^l a F dx = \int_0^l \frac{\gamma^2 x^2}{2E} F dx = \frac{\gamma^2 F^2 l^3}{6EF} = \frac{P^2 l}{6EF}.$$

Иккинчи ҳолда бевосита 486-бетда берилган жадвалдаги формуладан фойдаланамиз

$$U_2 = \frac{P^2 l}{2EF}.$$



467-шакл.

177. Шаклда тасвирланган стерженнинг (467-шакл) потенциал энергияси ҳисобланиб, mn кесимининг кўчиши Кастильяно теоремаси ёрдамида аниқлансин. Барча ўлчамлар шаклда берилган. Стерженнинг юқори қисми учун узунлик бирлигидаги оғирлик $q_1 = 6 \text{ кг/м}$, пастки қисми учун $q_2 = 1,5 \text{ кг/м}$. $E = 2 \cdot 10^8 \text{ кг/см}^2$.

Е ч и ш. Стержень юқори қисмининг оғирлигини $Q = q_1 l_1$, пастки қисмининг оғирлигини $Q_2 = q_2 l_2$ десак, пастки қисмининг потенциал энергияси:

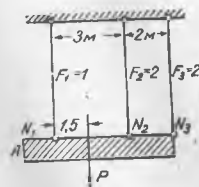
$$U_2 = \frac{Q_2^2 l_2}{6EF_2} = \frac{q_2^2 l_2^3}{6EF_2} = \frac{1,5 \cdot 20^3 \cdot 10^3}{6 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 2} = 0,075 \text{ кг/см}.$$

Юқори қисмининг потенциал энергияси:

$$U = \frac{Q_1^2 l}{6EF} + \frac{Q_2^2 l_1}{2EF_1} + \frac{Q_1 Q_2 l_1}{2EF_1} = 0,775 \text{ кг/см}.$$

Стерженнинг тула потенциал энергияси:

$$U = U_1 + U_2 = 0,85 \text{ кг/см}$$



468-шакл.

бўлади. ml кесимнинг пасайишини Кастильяно теоремасига мувофиқ аниқлаш учун у кесим-
га P кучни қўйиб, стержень юқори қисмининг бирор кесимидаги кучланишни аниқлаймиз:

$$\sigma = \frac{Q_2 + P + \gamma x F_1}{F_1}.$$

Буни назарга олиб, стержень юқори қисмининг потенциал энергиясини ҳисоблаймиз:

$$U = \int_0^l \frac{(Q_2 + P + \gamma x F_1)^2}{2EF_1^2} F_1 dx,$$

$$\Delta l = \frac{\partial U}{\partial P} = \int_0^l \frac{(Q_2 + \gamma F_1 x) dx}{EF_1},$$

$$\Delta l_1 = \frac{Q_2 l_1}{EF_1} + \frac{Q_1 l_1^2}{2EF_1} = 0,015 \text{ см.}$$

178. Оғирлиги $P = 2m$ бўлган абсолют бикр AB балка учта стерженга осилган (468-
шакл). Шу стерженларда ҳосил бўладиган N_1 , N_2 , N_3 зўриқиш аниқласин.

Е ч и ш. Эластик система учун потенциал энергия ифодасини ёзамиз:

$$U = \frac{N_1^2 l}{2EF_1} + \frac{N_2^2 l}{2EF_2} + \frac{N_3^2 l}{2EF_3}.$$

N_1 , N_2 ва N_3 зўриқишлар орасидаги муносабатларни статика тенгламаларидан аниқлаймиз:

$$N_1 + N_2 + N_3 = P; \quad 3N_2 + 5N_3 = 1,5P.$$

N_1 билан N_3 ни N_2 орқали ифодалаймиз:

$$N_1 = 1,4 - 0,4N_2; \quad N_3 = 0,6(1 - N_2). \quad (a)$$

Энг минимал иш теоремасига мувофиқ:

$$\frac{\partial U}{\partial N_2} = \frac{N_1 l}{EF_1} \frac{\partial N_1}{\partial N_2} + \frac{N_2 l}{EF_2} + \frac{N_3 l}{EF_3} \frac{\partial N_3}{\partial N_2} = 0. \quad (b)$$

$$(a) \text{ дан: } \frac{\partial N_1}{\partial N_2} = -0,4; \quad \frac{\partial N_3}{\partial N_2} = -0,6.$$

Буларни (b) га қўйиб, (a) ни назарга олсак:

$$N_2 = 0,381 m; \quad N_1 = 1,048 m; \quad N_3 = 0,071 m$$

бўлади.

179. Призматик стержень 469-шаклда кўрсатилгандек юкланган. X нинг қандай қий-
матида стерженнинг потенциал энергияси минимал бўлади. X нинг бу қийматида стержень-
нинг абсолют ҳўзилиши аниқласин.

Е ч и ш. Стерженнинг потенциал энергияси:

$$U = \frac{X^2 l}{2EF} + \frac{(P-X)^2 2l}{2EF} = \frac{3X^2 l + 2P^2 l - 4PXl}{4EF},$$

бундан:

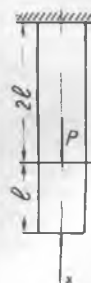
$$f\left(\frac{X}{P}\right) = \frac{UEF}{P^2 l} = \frac{3}{2}\left(\frac{X}{P}\right)^2 - 2\left(\frac{X}{P}\right); \quad \frac{X}{P} = \psi$$

десак:

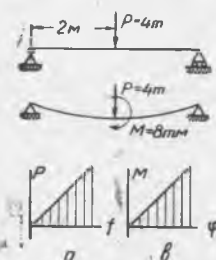
$$\frac{\partial f}{\partial \psi} = 3\psi - 2 = 0; \quad \psi = \frac{X}{P} = \frac{2}{3}; \quad X = \frac{2}{3}P.$$

Стержень учига қўйилган X кучнинг ҳосил бўлган қийматига тегишли абсолют ҳў-
зилишни топишни ўқувчиларнинг ўзларига ҳавола қиламиз.

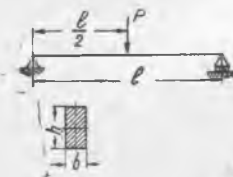
180. Ҳўзунлиги $l = 4 m$ бўлган AB балканинг ўртасига бирин-кетин олдин $P = 4 m$
юк, кейин $M = 4 m$ жуфт куч қўйилган. Бу ҳол учун балканинг потенциал энергияси
ҳисоблансин ва энергияларнинг тўпланиш процессини тасвирловчи графиклар тузилсин (470-
шакл).



469-шакл.



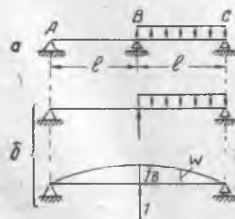
470- шакл.



471- шакл.



472- шакл.



473- шакл.

Е чи ш. Балқага аввал кучни қўямиз:

$$U_1 = 2 \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI} = \int_0^{l/2} \frac{P^2 X^2}{4EI} dx = \frac{P^2 l^3}{4 \cdot 24EI} = \frac{32}{3EI}$$

P нинг устига қўйилган M таъсирдан ҳосил бўлган энергия:

$$U_2 = 2 \int_0^{l/2} \frac{M^2 X^2}{l^2 EI} dx = \frac{M^2 l^3}{l^2 \cdot 24 \cdot EI} = \frac{32}{3EI}$$

$U_{12} = 0$, чунки P симметрик равишда таъсир қилганлигидан балканинг ўрта кесими бурилмайд, шунингдек, M таъсирдан бу кесим пасаймайди ҳам, шу туфайли P таъсирида ҳосил бўлган деформацияда жуфт куч M бажарган иш, худди шунингдек, M таъсирида ҳосил бўлган деформацияда ҳам P бажарган иш нолга тенг бўлади. Балқада тўпланган тўла энергия:

$$U = U_1 + U_2 = \frac{64}{3EI}$$

бўлади.

U_1 ва U_2 нинг графиги 470-а ва б шаклларда тасвирланган.

181. AB балканинг узунлиги $l = 2$ м бўлиб, унинг қўндаланг кесим баландлиги $h = 12$ см, кенглиги $b = 10$ см бўлган тўғри тўртбурчакдан иборат. Балканинг ўртасига $P = 500$ кг юк қўйилган (471-шакл). Силжиш деформациясини ҳисобга олиб, балканинг ўртасидаги салқилиқ ва силжишдан ҳосил бўладиган салқилиқ умумий салқиликнинг неча процентини ташкил қилиши аниқлансин. $E = 10^8$ кг/см²;

$G = 5 \cdot 10^3$ кг/см²; тўғри тўртбурчак учун $k = \frac{6}{5}$ га тенг.

Е чи ш. Бу масалани ечиш учун потенциал энергия инфодасини ёзамиз:

$$U = 2 \int_0^{l/2} \left(\frac{M^2}{2EI} + k \frac{Q^2}{2GF} \right) dx; \quad M = \frac{P}{2} X; \quad Q = \frac{P}{2};$$

$$\begin{aligned} f_{ум} = \frac{\partial U}{\partial P} &= 2 \int_0^{l/2} \left(\frac{M}{EF} \cdot \frac{\partial M}{\partial P} + k \frac{Q}{GF} \cdot \frac{\partial Q}{\partial P} \right) dx = \\ &= 2 \int_0^{l/2} \left(\frac{P}{2EI} \cdot \frac{X}{2} + k \frac{P}{2GF} \right) dx, \end{aligned}$$

Интеграл ҳисобланиб, берилганлар ҳисобга олинса:

$$f_{ум} = 0,629 \text{ см. } f_{силж} = 0,05 \text{ см} = 0,8\%$$

бўлади.

182. 472-шаклда тасвирланган эластик системанинг горизонтал реакцияси X аниқлансин.

Е чи ш. Номатълум реакция X система AB қисмининг эгилиш шартидан аниқланади. Бу қисмининг X оралиқдаги қўндаланг кесимидаги эгувчи момент $M = Pa - Xx$. Бу ҳол учун минимал иш теоремасини татбиқ қиламиз:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial X} &= \frac{\partial}{\partial X} \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial X} dx = \\ &= \frac{1}{EI} \int_0^l (Pa - Xx) (-x) dx = 0; \end{aligned}$$

бу интегрални ҳисоблаб $\frac{Xl^3}{3} = \frac{Pa l^2}{2} = 0$ тенгламани оламиз; бундан

$$X = \frac{3}{2} \cdot \frac{Pa}{l}.$$

183. Бутун (кесилмаган) балка уч таянчга тиралган бўлиб (473-шакл), унги томонидаги балкага қўйилган ва интенсивлиги q га тенг ёйилган юк таъсирида эгилади. Берилган балканинг таянч реакциялари аниқлансин.

Ечиш. Масалани Максвелл теоремаси ёрдамида ечамиз. Асосий ва ёрдамчи системалар 473-шакл, a ва b да тасвирланган. Бу масала учун Максвелл тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$Bf_B - \int_0^l wq dx = 0.$$

w нинг ифодасини тегишли жадвалдан оламиз. $w = \frac{3(2l)^2 x - 4x^3}{48EI} = \frac{3l^2 x - x^3}{12EI}$;

$$\int_0^l wq dx = \frac{q}{12EI} \int_0^l (3l^2 x - x^3) dx = \frac{5ql^4}{48EI};$$

$$f_B = \frac{1 \cdot (2l)^3}{48EI} = \frac{8l^3}{48EI}$$

Буларни юқорида ёзилган тенгламага қўйиб, уни статика тенгламалари билан бирга ечасак, таянч реакциялари аниқланади:

$$A = -\frac{ql}{16}; \quad B = \frac{5}{8}ql; \quad C = \frac{7}{16}ql.$$

□

XIX боб

ЭГРИ СТЕРЖЕНЛАР ҲИСОБИ

134-§. Эгри стержень кесимида ҳосил бўладиган кучланишлар

Машина ва иншоот элементларида туғри ўқли стерженлар билан бир қаторда, эгри ўқли стерженлар ҳам бўлади. Эгри ўқли стерженларнинг мустаҳкамлигини текширишда қуйидаги шартлар назарда тутилиши зарур:

1. Эгри стержень кўндаланг кесимининг энг камида битта симметрия ўқи бўлади.

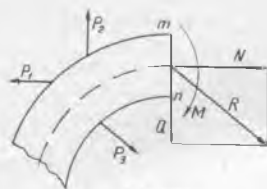
2. Эгри стержень ўқи текис эгри чизиқдан иборат бўлади ва симметрия текислигида ётади. Симметрия текислиги стерженнинг эгрилик текислиги бўлади.

3. Эгри стерженга қўйилган кучлар унинг симметрия текислигида ётади.

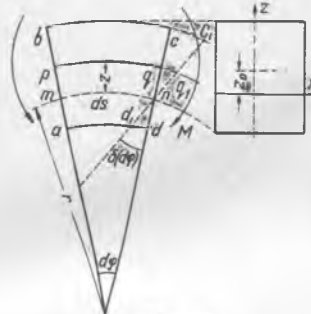
Бу шартларга мувофиқ, эгри ўқнинг деформацияси ҳам симметрия текислигида бўлиб, ўқ деформациядан кейин ҳам текис эгри чизиқлигича қолади. Бу шартлар асосида тузпладиган ҳисоб тенгламалари тажрибада учрайдиган барча ҳолларни асосан ўз ичига олади. Эгри стерженлардаги

кучланишларни текшириш учун тўғри стерженларнинг кучланишларини текширишда фойдаланилган усул ишлатилади.

$P_1, P_2, \dots, P_n$ кучлар таъсирида мувозанатда турган эгри стерженни бирор кўндаланг кесими $m-n$ орқали кесиб, икки қисмга ажратамиз (474-шакл). Стерженнинг ўнг қисмини ташлаб, чап қисмининг мувозанатини текширэмиз. Ташланган ўнг қисмининг mn кўндаланг кесим бўйича кўрсатилган таъсири энг умумий ҳолда кесимнинг марказига қўйилган бир бош вектор R билан, симметрия текислигида ётувчи бир бош момент M га келтирилади.



474-шакл.



475-шакл.

толалар эса сиқилади. Нейтрал қатлам mn устида ётган толаларнинг узунлиги ds деформация натижасида ўзгармайди. Бу нейтрал қатламдаги ёнининг эгрилик радиусини r билан, $mn = ds$ га тегишли марказий бурчакни $d\phi$ билан белгилаймиз. У ҳолда:

$$ds = r d\phi$$

бўлади. Нейтрал қатламдан z масофага жойлашган бирор pq толанинг деформациягача бўлган узунлиги $pq = (r + z) d\phi$ бўлади. Эгилиш натижасида бу тола qq_1 узунликка чўзилади (абсолют чўзилиш):

$$qq_1 = z \delta(d\phi).$$

У толанинг нисбий чўзилиши:

$$\epsilon = \frac{qq_1}{pq} = \frac{z \delta(d\phi)}{(r+z) d\phi} \quad (a)$$

бўлади. Бўйлама толалар бир-бирига ҳеч қандай босим кўрсатмайди деб ҳисоблаймиз ва Гук қонунидан фойдаланиб, нисбий чўзилишдан нормал кучланишни аниқлаймиз:

$$\sigma = E \frac{(\delta d\phi)}{d\phi} \cdot \frac{z}{r+z} \quad (134.1)$$

Олдин кўндаланг кесим mn бўйича M таъсирида ҳосил бўладиган кучланишни текшираемиз. Бунинг учун ташланган ўнг қисмга қўйилган кучларнинг mn кесим бўйича таъсири фақат M га келтирилади ва $R = 0$ бўлади деб фараз қиламиз. Кўндаланг кесим бўйича ҳосил бўладиган кучланишнинг қандай қонун билан тарқалишини аниқлаш учун призма шаклидаги стерженларнинг эгилишини текширганда, қабул қилинган гипотезадан фойдаланамиз. Эгувчи момент M таъсирида кўндаланг кесим бўйича фақат нормал кучланиш ҳосил бўлиб, текис кўндаланг кесим эгилишдан кейин ҳам текислигича қолади. Бу гипотезага асосланиб чиқарилган натижанинг нақадар тўғрилиги ўтказилган назарий текширишлар ва тажрибалар билан тасдиқланган.

Эгри стержендан бир-бирига чексиз яқин иккита кўндаланг кесим билан чексиз кичик $abcd$ элементни ажратамиз (475-шакл). Эгувчи момент M таъсирида cd кесим ab га нисбатан $\delta(d\phi)$ бурчаги қадар айланиб c_1d_1 ҳолатини олади. Бунинг натижасида юқоридаги толалар чўзилади, пастдаги

Ҳар бир кўндаланг кесим учун $E \frac{\delta(d\varphi)}{d\varphi}$ ўзгармас сон бўлади, уни A билан белгиласак, нормал кучланиш қуйидагича ёзилади:

$$\sigma = A \frac{z}{r+z}$$

Кўндаланг кесим бўйича бу кучланишнинг тақсимланишини кўрсатувчи графиклар 476- шаклда берилган. Кўндаланг кесим ab нинг ҳар бир нуқтасига унга тик йўналган нормал кучланиш σ ни маълум масштабда қўйиб, уларнинг учларини туташтириш натижасида кучланиш графиги олинади. Юқорида чиқарилган (134.1) формуладан кўриниб турибдики, эгри стерженнинг кўндаланг кесимидаги нормал кучланишлар ҳосила баландлиги бўйича гипербола қонуни билан тақсимланар экан. Бу гиперболанинг асимптотаси ab кесимга тик бўлиб, эгрилик маркази O дан ўтади.

Нормал кучланишни ифодаловчи (134.1) формулада иккита номаълум: r ва $\frac{\delta(d\varphi)}{d\varphi}$ бор. Буларни аниқлаш учун мувозанат тенгламаларидан фойдаланамиз. Кўндаланг кесим бўйича барча ички кучларнинг йиғиндисини нолга, уларнинг нейтрал ўққа нисбатан олинган моментларининг йиғиндиси эса эгувчи момент M га тенгдир, яъни:

$$\int_F \sigma dF = E \frac{\delta(d\varphi)}{d\varphi} \int_F \frac{z}{r+z} dF = 0, \quad (b)$$

$$\int_F z \sigma dF = E \frac{\delta(d\varphi)}{d\varphi} \int_F \frac{z^2}{r+z} dF = M. \quad (c)$$

Биринчи тенгламадан:

$$\int_F \frac{z}{r+z} dF = 0. \quad (134.2)$$

Иккинчи тенгламанинг интегралини қуйидагича ёзамиз:

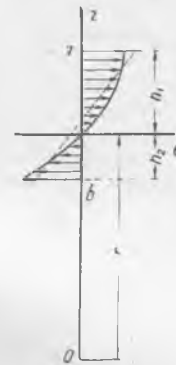
$$\int_F \frac{z^2}{r+z} dF = \int_F \frac{rz + z^2 - rz}{r+z} dF = \int_F \left(z - \frac{rz}{r+z} \right) dF = \int_F z dF - r \int_F \frac{z}{r+z} dF.$$

(134.2) га мувофиқ бу интеграл нолга, биринчи интеграл эса кўндаланг кесим юзасининг нейтрал ўққа нисбатан статик моментига тенг. Шунинг учун:

$$\int_F \frac{z^2}{r+z} dF = \int_F z dF = S = Fz_0. \quad (134.3)$$

z_0 — кўндаланг кесимнинг нейтрал ўқи билан оғирлик маркази орасидаги масофа (134.3) ни (c) тенгламага қўйиб қуйидаги муносабатни ҳосил қиламиз:

$$E \frac{\delta(d\varphi)}{d\varphi} = \frac{M}{S}. \quad (134.4)$$



476- шакл

Бу назарга олинса, нормал кучланиш формуласи (134.1) қуйидагича ёзилади:

$$\sigma = \frac{M}{S} \frac{z}{r+z}. \quad (134.5)$$

Энг катта чўзувчи ва сиқувчи кучланиш учун қуйидаги формулаларни оламиз:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{S} \frac{h_1}{r+h_1} \quad \text{ва} \quad \sigma_{\min} = -\frac{M}{S} \frac{h_2}{r-h_2}. \quad (134.6)$$

Демак, эгри стерженнинг эгилишидаги нормал кучланишларни ҳисоблаш учун кўндаланг кесим нейтрал ўқининг ҳолатини, яъни r ни аниқлаш зарур бўлар экан. Нейтрал ўқининг ҳолатини аниқламасдан, S ни ҳисоблаб бўлмайди, чунки $S = Fz_0 = F(\rho - r)$ бўлиб, бу ерда ρ — кўндаланг кесимларнинг огирлик марказларини туташтирувчи ўқининг эгрилик радиуси, r — нейтрал ўқининг эгрилик радиуси. Бу миқдорларни ҳар бир хусусий ҳол учун аниқлаш қийин эмас.

Кўндаланг кесимнинг ўлчамлари нейтрал ўқининг радиусига нисбатан жуда кичик бўлса, (134.2) формуланинг махражидаги z ни $r - 2R$ нисбатан ҳисобга оymaslik мумкин: у ҳолда (134.2) формула $s = sz \cdot dF = 0$ кўринишда ёзилади. Демак, ингичка стерженлар учун нейтрал ўқ марказий ўқ бўлар экан. Бу ҳолда (134.4) тенглама қуйидагича ёзилади:

$$E \frac{\delta(d\varphi)}{d\varphi} = \frac{rM}{I} \quad \text{ёки} \quad \delta(d\varphi) = \frac{M dS}{EI}. \quad (134.7)$$

Шунингдек, (134.5) формула ҳам тўғри балкалар кўндаланг кесимида ҳосил бўладиган нормал кучланишлар формуласига ўхшаш формулага айланади. Кейинча, қандай шарт бажарилганда гиперболо қонуни билан ўзгарувчи кучланишни чизиқли қонун билан ўзгаради деб ҳисоблаш мумкинлигини кўрсатиб ўтамыз.

Энди R нинг таъсирини ҳисобга оламиз. Уни иккита ташкил этувчига ажратамыз. Улардан бири кўндаланг кесим юзасига тик йўналган N ва иккинчиси кесим юзасида ётувчи Q бўлсин. Нормал зуриқиш кўндаланг кесим бўйича тенг ёйилган ҳолда толаларда $\frac{N}{EF}$ нисбий чўзилишни ҳосил қилади; ab ва cd кесимлар орасидаги элемент чўзилиб, cd кесим c_1d_1 ҳолатни олади (477-шакл). Абсолют чўзилиш тола узунлигига пропорционал бўлгани учун эгрилик маркази O гача бўлган масофага ҳам пропорционал бўлади. Шунинг учун c_1d_1 йўналиши эгрилик маркази O дан ўтади. Бу тарздаги деформация натижасида стерженнинг эгрилик радиуси ўзгармайди, лекин иккита кўшни кўндаланг кесим орасидаги $d\varphi$ бурчак ўзгаради. Бу ўзгариш $\delta(d\varphi) = \frac{\delta(\varphi s)}{\rho}$ бўлади. Бу ерда ρ стержень ўқининг радиуси нисбий чўзилишни шу бурчак орқали ифодалаймиз:

$$\frac{\delta dS}{dS} = \frac{\delta(d\varphi)}{d\varphi} = \frac{N}{EF},$$

бундан:

$$\delta(d\varphi) = \frac{N}{EF} d\varphi. \quad (134.8)$$

Нормал зуриқиш таъсирида ҳосил бўладиган нор-



477-шакл.

мал кучланиш $\frac{N}{F}$ ни эгилишда ҳосил бўладиган максимал нормал кучланиш (134.6) га қўшиш зарур. У ҳолда ҳисоб тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{N}{F} + \frac{M}{S} \frac{h_1}{r+h_1} \leq [\sigma], \\ \sigma_{\max} &= \frac{N}{F} - \frac{M}{S} \frac{h_2}{r-h_2} \leq [\sigma], \end{aligned} \right\} \quad (134.9)$$

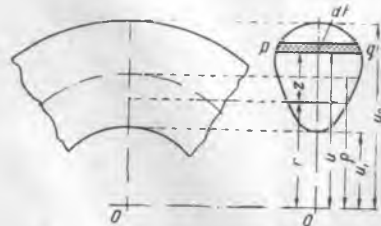
Кўндаланг куч Q тангенциал кучланишлар ҳосил қилади. Бу кучланишларнинг эгри стерженлар эгилишига кўрсатадиган таъсири кам бўлгани учун уларни эътиборга олмаслигимиз ҳам мумкин. Бу кучланишларнинг қийматини эътиборга олиш зарур бўлиб қолган ҳолларда, уларнинг қиймати тўғри ўқли балка учун қандай бўлса, эгри стержень учун ҳам худди шундай қилиб олинади.

135- §. Эгри стержень кўндаланг кесими нейтрал ўқининг ҳолатини аниқлаш

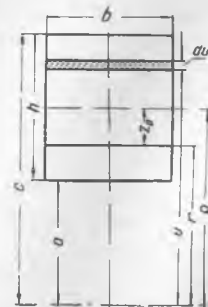
Текис кесим гипотезасига мувофиқ чиқарилган (134.5) формула билан нормал кучланишни ҳисоблаш учун кўндаланг кесим нейтрал ўқининг ҳолатини аниқлаш зарур. Бунинг учун (134.2) формуладан фойдаланамиз. Бу формуладаги r ни аниқлаш учун z нинг ўрнига бошқа ўзгарувчи киритиб, уни нейтрал ўққа эмас, балки эгрилик марказидан ўтувчи горизонтал ўққа нисбатан аниқлаймиз (478-шакл). Кўндаланг кесимдаги бирор pq юзачанинг эгрилик марказидан ўтувчи ўққача бўлган масофасини u десак, $z = u - r$ бўлади. Бунинг (134.7) тенгламага қўйиб, r ни аниқлаш учун қуйидаги формулани оламиз:

$$r = \frac{F}{\int_{u_1}^{u_2} \frac{dF}{u}} \quad (135.1)$$

Бу формуладан ҳар хил шкали кесимлар учун нейтрал ўқ ҳолатини аниқловчи радиусни топишимиз мумкин. Масалан, тўғри тўртбурчак шаклидаги кўндаланг кесим учун r ни ҳисоблаймиз (479-шакл). Стержень кўндаланг кесимининг юзаси $F = bh$ стержень кўндаланг кесимидан ажратилган элементнинг юзаси $dF = b du$ ва эгри стерженнинг ички радиуси a ,



478-шакл.



479-шакл.

ташқи радиусни C бўлсин; у ҳолда нейтрал ўқ ҳолатини қуйидагича аниқлаймиз:

$$r = \frac{bh}{b \cdot \ln \frac{c}{a}} \quad (135.2)$$

Шаклда кўрсатилган C билан a нинг қийматини эгри стержень марказий ўқининг радиуси ρ ва қўндаланг кесим баландлиги h орқали ифодаalayмиз:

$$\ln \frac{c}{a} = \ln \frac{\rho + \frac{h}{2}}{\rho - \frac{h}{2}} = \ln \frac{1 + \frac{h}{2\rho}}{1 - \frac{h}{2\rho}} = \ln \frac{1+x}{1-x},$$

бу ерда

$$x = \frac{h}{2\rho} < 1.$$

Бу ифодани қатор шаклида ёзамиз:

$$\lg \frac{1 + \frac{h}{2\rho}}{1 - \frac{h}{2\rho}} = \frac{h}{\rho} \left\{ 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2\rho} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{h}{2\rho} \right)^4 + \dots \right\},$$

шунинг учун:

$$r = \frac{\rho}{1 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2\rho} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{h}{2\rho} \right)^4 + \dots}$$

Нейтрал ўқ билан марказий ўқ оралиғини қуйидаги ифода орқали аниқлаймиз:

$$z_0 = \rho - r = \rho - \frac{\rho}{1 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2\rho} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{h}{2\rho} \right)^4 + \dots}$$

Бу ифоданинг биринчи тақрибий қийматини олиш учун махраждаги ифоданинг биринчи икки ҳади билан чекланамиз:

$$z_0 = \rho \left\{ 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2\rho} \right)^2} \right\} \approx \frac{h^2}{12\rho} \quad (135.3)$$

Юқоридаги қаторнинг биринчи уч ҳади олинса, z_0 нинг иккинчи тақрибий қиймати келиб чиқади:

$$z_0 = \frac{h^2}{12\rho} \left[1 + \frac{4}{15} \left(\frac{h}{2\rho} \right)^2 \right]. \quad (135.4)$$

Бундан кўрамизки, $\frac{h}{\rho}$ нинг қиймати камайган сари z_0 ҳам камайиб, нейтрал ўқ марказий ўққа яқинлаша боради. Қуйида келтирилган жадвалда $\frac{\rho}{h}$ нинг турли қийматлари учун (134.5) формуладан ҳисобланган ва гиперболо қонуни билан ўзгарувчи кучланишларнинг максимал ва минимал қийматлари чизиқли қонун асосида ҳисобланган максимал ва минимал нормал кучланишлар қиймати билан таққосланган.

Нормал кучланишларнинг гипербола ва чизиқли қонун билан ҳисобланган қийматларини таққослаш

ρ h	Гипербола қонуни билан ҳисобланган кучланишлар		Чизиқли қонун билан ҳисобланган кучланишлар		Чизиқли қонун билан олинган натижанинг хатолиги, % ҳисобида
	$\frac{h_1}{r+h_1}$ $\sigma_{\max} = \frac{M}{S}$	$\frac{h_2}{r-h_2}$ $\sigma_{\min} = \frac{M}{S}$	$\frac{M}{W_2}$ $\sigma_{\max} =$	$\frac{M}{W_2}$ $\sigma_{\min} =$	
1	9,2	— 4,4	6	— 6	35
2	14,4	— 10,3	12	— 12	17
3	20,2	— 16,1	18	— 18	10,9
4	26,2	— 22,2	24	— 24	9,2
10	62,0	— 58,0	60	— 60	3,2

Жадвалдан кўриниб турибдики, $\frac{\rho}{h} > 10$ бўлганда, эгри стержень учун кучланишларни тўғри стерженьларга татбиқ қилинган формула билан ҳисобласа бўлар экан, чунки улар орасида жуда кам фарқ бўлади. $\frac{\rho}{h} > 5$ бўлганда стерженьлар «кичик эгриликли» стерженьлар деб аталади. Бу стерженьларга кўприк аркаларини, гүмбазларни ва шу кабиларни мисол қилиб кўрсатиш мумкин. $\frac{\rho}{h} < 5$ бўлганда стерженьлар «катта эгриликли» стерженьлар дейилади. Бу тарздаги эгри стерженьлар машина қисмлари шаклида кўпроқ учратилади. Масалан, ҳалқалар, занжир звенолари, юк кўтарадиган илмоқлар ва ҳоказо. Бундай эгри стерженьлардаги кучланишлар фақат (134.5) формуладан фойдаланиб ҳисобланади.

136-§. Баъзи хусусий ҳоллар учун нейтрал қатламнинг эгрилик радиусини аниқлаш

Қўндаланг кесими шакли трапеция бўлган ҳол учун нейтрал қатламнинг эгрилик радиусини аниқлаймиз (480-шакл). Стерженьнинг эгрилик марказидан ўтувчи OO ўқдан u масофадаги штрихланган юзачанинг кенглиги:

$$b = b_2 + (b_1 - b_2) \frac{c-u}{c-a}$$

бўлади. Шунинг учун:

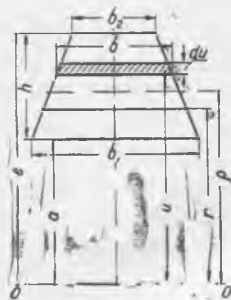
$$dF = b du = \left\{ b_2 + (b_1 - b_2) \frac{c-u}{c-a} \right\} du; \quad F = \frac{b_1 + b_2}{2} h.$$

Буларни (135. 1) га қўйсак:

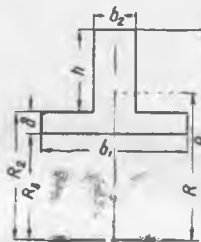
$$r = \frac{F}{\int \frac{dF}{u}} = \frac{F}{\frac{b_1 c - b_2 a}{h} \ln \frac{c}{a} - (b_1 - b_2)} \quad (136.1)$$

келиб чиқади. $b_1 = b_2 = b$ бўлса, бу формуладан яна тўғри тўртбурчак учун чиқарилган (135. 2) ни оламиз. $b_2 = 0$ деб олсак, учбурчак кесим учун нейтрал қатламининг эгрилик радиусини аниқлаган бўламиз:

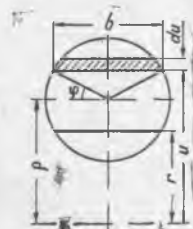
$$r = \frac{h^2}{2c \ln \frac{c}{a} - 2h} \quad (136. 2)$$



480-шакл.



481-шакл.



482-шакл.

Таврли кесим учун нейтрал қатламнинг эгрилик радиуси (481-шакл) қуйидагича ҳисобланади:

$$r = \frac{b_1 \delta + b_2 h_1}{b_1 \int_{R_2}^{R_1} \frac{du}{u} + b_2 \int_{R_2}^{R_1} \frac{du}{u}} = \frac{b_1 \delta + b_2 h_1}{b_1 \ln \frac{R_1}{R_2} + b_2 \ln \frac{R_1}{R_2}} \quad (136.3)$$

Худди шу тарзда қўштаврли кесим учун ҳам нейтрал қатламнинг эгрилик радиусини аниқлаш мумкин.

Доира шаклидаги кесим учун нейтрал қатламнинг эгрилик радиусини аниқлаймиз (482-шакл). Доиранинг диаметрини d билан белгилаймиз ва доирадан горизонтал диаметрға параллел dF юзачани ажратамиз. Бу элементнинг юзаси dF ни ва u ни марказий бурчак φ нинг функциялари тарзида ифодалаймиз:

$$u = \rho - \frac{d}{2} \sin \varphi; \quad dF = b du; \quad b = d \cos \varphi; \quad du = \frac{d}{2} \cos \varphi d\varphi.$$

Шунинг учун: $dF = \frac{d^2}{2} \cos^2 \varphi d\varphi$ бўлади; олдин (135. 1) нинг маҳражини аниқлаймиз:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dF}{u} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d^2 \cos^2 \varphi d\varphi}{2\rho - d^2 \sin \varphi}$$

Бу интегрални ҳисоблаб, r ни қуйидагича ёзамиз:

$$r = \frac{d^2}{u [2\rho - \sqrt{4\rho^2 - d^2}]} \quad (136. 4)$$

134 ва 135-параграфларда баён қилинган материаллар асосан, рус академиги А. Р. Гадолин томонидан берилган. Тўғри тўртбурчак кесимли эгри стерженларнинг аниқ назариясини рус олимларидан Х. Головин текширган.

137-§. Эгри стерженларнинг деформацияси

Эгри стержень нуқталарининг ташқи кучлар таъсирида кўчишини Кастильяно теоремасидан ёки Мор усулидан фойдаланиб аниқлаш энг қулайдир. Кастильяно теоремасидан фойдаланиш учун эгри стержень деформацияси потенциал энергиясининг ифодасини аниқлаш зарур. Бунинг учун бир-бирига чексиз яқин ab ва cd кесимлар билан эгри стержендан бир элемент ажратиб оламиз (483-шакл). Энг умумий ҳолда бу элементга эгувчи момент M , нормал куч N ва кесиб ўтувчи куч Q таъсир қилади. Бу кучлар бажарадиган ишларнинг ифодасини тузамиз. Ажратилган элемент ab ва cd кесимларининг бир-бири билан тузган бурчаги $d\varphi$ момент M таъсирида $\delta(d\varphi)$ га ўзгаради; бунинг натижасида M моментнинг бажарган иши $\frac{M\delta(d\varphi)}{2}$ га тенг бўлади. Элементар бурчакнинг орттирмаси $\delta(d\varphi)$ нинг қийматини (29.4) дан келтириб қўямиз, у ҳолда:



483-шакл.

Нормал зўриқиш элементни стерженнинг ўқи бўйича чўзади, унинг бажарган иши:

$$\frac{M\delta(d\varphi)}{2} = \frac{M^2 d\varphi}{2SE} = \frac{M^2 dS}{2SE\rho} \quad (a)$$

бўлади.

$$\frac{N^2 dS}{2EF} \quad (b)$$

га тенг. Бундан ташқари, нормал куч элементар бурчак $d\varphi$ ни $\delta(d\varphi)$ миқдорга ўзгартиради ва бу ўзгаришда M қўшимча иш бажаради, $\delta(d\varphi)$ нинг қиймати (134.8) формуладан топилади. Демак эгувчи моментнинг шу кўчишда бажарган иши қуйидаги формула билан аниқланади:

$$M\delta(d\varphi) = \frac{MN}{EF} d\varphi = \frac{MN dS}{EF\rho}. \quad (c)$$

Кесиб ўтувчи куч Q нинг иши, тўғри стержень учун қандай бўлса, бу ҳолда ҳам худди шундай бўлади, шунинг учун у (122.2) формуладан аниқланади. Сон жиҳатдан бу ишга тенг бўлган энергияни ва (a), (b), (c) формулалар билан ифодаланувчи энергияларни ўзаро қўшиб, ажратилган элементда тўпланган энергияни ҳисоблаймиз:

$$dU = \frac{M^2 dS}{2ES\rho} + \frac{N^2 dS}{2EF} + \frac{MN dS}{EF\rho} + k \frac{Q^2 dS}{2GF}.$$

Эгри стерженда тўпланган тўла энергияни ҳисоблаш учун буни интеграллаймиз:

$$U = \int_0^s \left(\frac{M^2}{2ES\rho} + \frac{N^2}{2EF} + \frac{MN}{EF\rho} + k \frac{Q^2}{2GF} \right) dS. \quad (137.1)$$

Амалда деформацияни аниқлаш масаласи кўпинча «кичик эгриликли» стерженлар учун талаб қилинади, шунинг учун (136.1) формуладаги кейинги икки ҳадни эътиборга олмаслик ва $S\rho$ ни стержень кўндаланг кесимининг инерция моменти I билан алмаштириш мумкин. У ҳолда:

$$U = \int_0^s \left(\frac{M^2}{2EI} + \frac{N^2}{2EF} \right) dS \quad (137.2)$$

бўлади.

Бу тақрибий формуланинг канчалик аниқлигини хусусий ҳолларни текширишда кўриб ўтамиз.

Энди Кастильяно теоремасидан фойдаланиб, бирор кесим марказининг шу кесимга қўйилган P куч йўналишидаги кўчишини ва айна кесимнинг унга қўйилган M_0 момент таъсирида айланишини аниқлаймиз:

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \frac{\partial U}{\partial P} = \int_0^s \left(\frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} + \frac{N}{EF} \frac{\partial N}{\partial P} \right) dS; \\ \theta &= \frac{\partial U}{\partial M_0} = \int_0^s \left(\frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_0} + \frac{N}{EF} \frac{\partial N}{\partial M_0} \right) ds \end{aligned} \right\} \quad (137.3)$$

$\frac{\partial M}{\partial P}$, $\frac{\partial M}{\partial M_0}$ ни бирлик куч ва бирлик жуфтнинг моменти деб, $\frac{\partial N}{\partial P}$ ва $\frac{\partial N}{\partial M_0}$ ни бирлик куч ва бирлик жуфтдан ҳосил бўлган нормал зўриқиш деб қарасак, уларни тегишлича M^0 ва N^0 орқали белгилаб, (137.3) ни Мор формуласи билан алмаштиришимиз мумкин:

$$\delta = \int_0^s \left(\frac{MM^0}{EI} + \frac{NN^0}{EF} \right) dS. \quad (137.4)$$

Бу формулаларни хусусий ҳоллар учун татбиқ қиламиз. Мисол учун, марказий ўқининг радиуси R бўлган ва бир учи A қистириб тиралган чорак айлана шаклидаги стерженни оламиз (484-шакл). Унинг эркин учига вертикал йўналган P куч қўйилган бўлсин. B нуқтанинг вертикал кўчишини аниқлаймиз. Куч йўналиши кўчиш йўналишига мос келгани учун (137.3) формуланинг биринчи қисмидан бевосита B нуқтанинг вертикал кўчишини аниқлаймиз. Бунинг учун олдин M ва N ни ҳамда уларнинг ҳосилаларини ҳисоблаймиз.



484-шакл

$$M = PR \sin \varphi; \quad \frac{\partial M}{\partial P} = R \sin \varphi; \quad N = -P \sin \varphi;$$

$$\frac{\partial N}{\partial P} = -\sin \varphi; \quad dS = R d\varphi.$$

Эгри стерженнинг ҳамма кесимларида M ва N битта тенглама билан ифодалангани учун интеграллаш битта участкада — 0 билан $\frac{\pi}{2}$ чегараларда олинади. Аниқланган миқдорларни (137.3) га қўямиз:

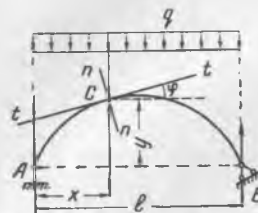
$$\begin{aligned} \delta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{PR^3 \sin^2 \varphi d\varphi}{EI} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{PR \sin \varphi d\varphi}{EF} = \left(\frac{PR^3}{EI} + \frac{PR}{EF} \right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi = \\ &= \left(\frac{PR^3}{EI} + \frac{PR}{EF} \right) \frac{\pi}{4} = \frac{\pi PR^3}{4EI} \left(1 + \frac{r_0^2}{R^2} \right); \end{aligned}$$

бу ерда r_0 — кундаланг кесим юзасининг инерция радиуси. Қавс ичидаги якки ҳаддан биринчиси B нуқтанинг пасайишига эгувчи моментнинг ҳиссасини ифодаласа, иккинчи ҳад $\frac{r_0^2}{R^2}$ нормал зўриқишнинг ҳиссасини ифода-

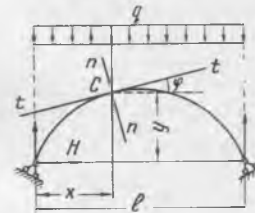
лайди. $\frac{r_0^2}{R^3}$ нисбат, кўпинча, жуда кичик сон бўлгани учун, уни ҳисобга олмаса ҳам бўлади.

138- §. Икки шарнирли аркалар ҳисоби

Геометрик ўқи эгри чизиқдан иборат бўлган ва таянчлари a вертикал йўналган юклар таъсирида вертикал йўналган реакциялардан ташқари горизонтал йўналган реакциялар ҳам ҳосил бўладиган конструкциялар арка деб аталади. Бу горизонтал реакция кериб турувчи реакция кучи деб аталади. Аркалар балкага қараганда иқтисодий жиҳатдан афзал ҳисобланади. Бунинг исбот қилиш учун чап таянчи қўзғалувчи, тенг ёйилган юк таъсирида бўлган тўғри тўртбурчак кесимли эгри ўқли балкани оламиз (485-шакл). Унинг C кесимидаги эғувчи момент:



485- шакл



486- шакл

$$M = Ax - \frac{qx^2}{2}.$$

$A = \frac{ql}{2}$ бўлгани учун $M = \frac{qx}{2}(l-x)$ кесимдаги нормал куч N ни аниқлаш учун шу кесимнинг чап томонидаги барча кучларни C нуқтага ўтказилган уринма $t-t$ тўғри чизиққа проекциялаб, проекцияларнинг йиғиндисини N га тенглаштирамиз:

$$N = A \sin \varphi + qx \sin \varphi = (A - qx) \sin \varphi = Q \sin \varphi;$$

бу ерда Q текширилаётган C кесимдаги кўндаланг куч. C кесимда M ва N таъсирида ҳосил бўладиган максимал нормал кучланиш:

$$\sigma = \frac{Q \sin \varphi}{bh} + \frac{3qx(l-x)}{bh^2}$$

бўлади. Энди, чап таянчни қўзғалмас қилиб олиб ва унда горизонтал йўналган H реакция кучи ҳосил қилиб, C кесимдаги кучланишнинг қандай ўзгаришини текширамиз (486-шакл).

Бу ҳолда эғувчи моментнинг миқдори камаяди ва унинг қиймати қуйидагича бўлади:

$$M = \frac{qx}{2}(l-x) - Hy, \quad (a)$$

бу ерда H — горизонтал реакция ёки кериб турувчи реакция кучи, y — C нуқтанинг ординатаси.

C кесимдаги нормал куч N ҳам ўзгаради:

$$N = Q \sin \varphi + H \cos \varphi. \quad (b)$$

Кесимдаги нормал кучланиш, бир томондан, эгувчи момент озаъиши туфайли камаъади, иккинчи томондан N нинг ортиши билан тегишли кучланиш ҳам қуйидаги миқдорча ортади:

$$\frac{H \cos \varphi}{bh}.$$

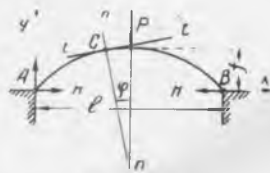
Эгувчи моментнинг озаъишидан ҳосил бўлган кучланишнинг қиймати

$$\frac{Hy}{W} = \frac{6Hy}{bh^2}$$

бўлади. Кучланишлар ўзгаришидаги нисбатни текшираимиз:

$$\frac{6Hy}{bh^2} : \frac{H \cos \varphi}{bh} = \frac{6y}{h \cos \varphi} > 1;$$

масалан, $y = 3$ м, $h = 1$ м ва $\cos \varphi = 0.9$ бўлса, $\frac{6y}{h \cos \varphi} = 20$ бўлади. Бундан кўриниб турибдики, кериб турувчи реакция кучининг мавжуд бўлиши момент таъсирида ҳосил бўладиган кучланишни қўшимча нормал кучдан ҳосил бўладиган кучланишга қараганда 20 марта камайтирар экан. Шунинг учун эгри ўқли балкаларда горизонтал реакциянинг мавжуд бўлиши балканинг ишлашини анчагина оширади.



487-шакл.

Энди, таянчлари битта горизонтал текисликда ётувчи вертикал юк таъсирида бўлган икки шарнирли аркани текшираимиз (487-шакл). Арканинг вертикал реакциялари A ва B ни бевосита статика тенгласидан аниқласа бўлади, аммо таянч шарнирларидаги горизонтал реакциялар бир-бирига тенг ва қарама-қарши йўналганлиги сабабли уни статика тенгламалари билан аниқлаб бўлмайди. Горизонтал реакцияларни энг кичик иш теоремасини татбиқ этиб топамиз. Бу унинг учун эгрилиги кичик стерженлар учун чиқарилган потенциал энергия ифодасидан фойдаланамиз. У ҳолда горизонтал реакция H ни ҳисоблаш учун қуйидаги тенгламани оламиз:

$$\frac{\partial U}{\partial H} = \frac{\partial}{\partial H} \left(\frac{M^2}{2EI} + \frac{N^2}{2EF} \right) ds = 0. \quad (c)$$

С кесимдаги эгувчи моментни топамиз:

$$M = M_0 - Hy; \quad (d)$$

бу ерда M_0 шу аркага қўйилган юкни икки таянчда ётувчи балкага мослаб қўйиб, арка кесимига мос келган балка кесимидаги эгувчи момент.

Эгрилиги кичик арка учун $\sin \varphi = 0$, $\cos \varphi = 0$ деб олиб, (b) тенгликдан $N = H$ ни ҳосил қиламиз. Буни кўзда тутиб, (c) дан қуйидаги тенгламани чиқарамиз:

$$\begin{aligned} \text{бундан:} \quad & - \int_0^s \frac{(M_0 - Hy)y}{EI} ds + \int_0^s \frac{H ds}{EF} = 0; \\ & H = \frac{\int_0^s \frac{M_0 y ds}{EI}}{\int_0^s \frac{y^2 ds}{EI} + \int_0^s \frac{ds}{EF}}. \end{aligned} \quad (138. 1)$$

Бу формуланинг махражидаги иккинчи ҳад арка стерженининг нормал куч таъсиридан қисқариши бўлиб, у қўп ҳолларда жуда кичик бўлганлигидан уни эътиборга олмаслик ҳам мумкин. Бу ҳолда ўзгармас қўндаланг кесим учун (138. 1) тенглама қуйидагича ёзилади:

$$H = \frac{\int_0^s M_0 y ds}{\int_0^s y^2 ds} \quad (138. 2)$$

Мисол тариқасида тенг ёйилган вертикал юк таъсири бўлган параболик аркани оламиз. Арка ўқининг тенгламасини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$y = \frac{4fx(l-x)}{l^2}. \quad (e)$$

Эгувчи момент:

$$M_0 = \frac{qx}{2} (l-x). \quad (k)$$

(e) ва (k) дан чиққан қийматларни (138. 2) га қўйиб, H ни топамиз:

$$H = \frac{ql^2}{8f}. \quad (3)$$

МАСАЛАЛАР

184. 488- шаклда парчинлаш машинасининг станинаси схематик равишда тасвирланган. Станина пулатдан қуйилган бўлиб, унинг учун рухсат этилган кучланиш $[\sigma] = 900 \text{ кг/см}^2$. AB кесими учун мустаҳкамлик шarti текширилсин.

Еч иш. AB кесимнинг оғирлик марказига нисбатан эгувчи момент:

$$M = 10\,000 (150 + 5) = 2\,300\,000 \text{ кг/см};$$

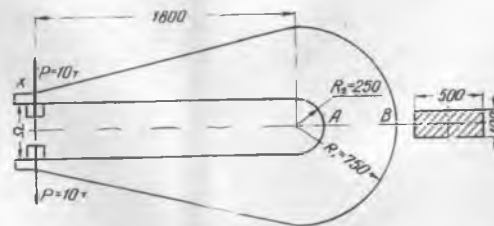
кесимга таъсир қилувчи нормал куч:

$N = 10\,000 \text{ кг}$. Нейтрал ўқининг радиуси:

$$r = \frac{5}{\ln \frac{75}{25}} = \frac{5}{\ln 3} = \frac{5}{1,099} = 455 \text{ мм} = 45,5 \text{ см}.$$

Кесимнинг нейтрал ўқи билан оғирлик марказининг ораллиги:

$$z_0 = 50 - 45,5 = 4,5 \text{ см}.$$



488- шакл.

Нейтрал ўқдан энг четдаги толаларгача бўлган масофалар:

$$h_1 = 75 - 45,5 = 29,5 \text{ см},$$

$$h_2 = 45,5 - 25 = 20,5 \text{ см}.$$

Энг катта кучланиш кесимнинг A нуқтасида ҳосил бўлади:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{F} + \frac{M}{Fz_0} \frac{h_2}{R_2} = \frac{10\,000}{50 \cdot 10} + \frac{2\,300\,000 \cdot 20,5}{50 \cdot 10 \cdot 4,5 \cdot 25} = 20 + 838 = 835 \text{ кг/см}^2 < 900.$$

185. Эгри стерженнинг қўндаланг кесими тўғри тўртбурчак бўлиб, у $M = 6\,000 \text{ кг. см}$ момент таъсирида соф эгилади; унинг қўндаланг кесими учун нормал кучланишлар эпюраси қурилсин. Ташқи толаларнинг эгрилик радиуси $R_1 = 7 \text{ см}$, ички толаларники эса $R_2 = 3 \text{ см}$, кесим юзасининг кенглиги $b = 2 \text{ см}$. Қурилган эпюра тўғри ўқли стержень учун чиқарилган формулага мувофиқ ҳисоблаб қурилган кучланишлар эпюраси билан таққослансин.

Е ч и ш. Олдин нейтрал ўқ радиусини аниқлаймиз:

$$r = \frac{h}{\ln \frac{R_1}{R_2}} = \frac{4}{0,8473} = 4,72 \text{ см},$$

$$z_0 = \frac{R_1 - R_2}{2} - r = 5 - 4,72 = 0,28 \text{ см}.$$

Нейтрал ўқдан z масофада таъсир қилувчи кучланиш (134. 2) га мувофиқ қуйидаги гиперболик қонун билан ўзгаради:

$$\sigma = \frac{M}{Fz_0} \frac{z}{r+z} = \frac{6\,000}{4 \cdot 2 \cdot 0,28} \frac{z}{4,72+z}.$$

Кесим энг четки нуқталарининг координаталари:

$$h_1 = 7 - 4,72 = 2,28 \text{ см},$$

$$h_2 = 4,72 - 3 = 1,72 \text{ см}.$$

Бу толалар учун:

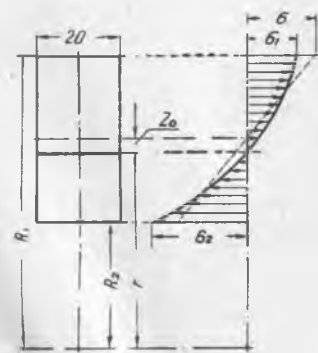
$$\sigma_1 = \frac{6\,000 \cdot 2,28}{4 \cdot 2 \cdot 0,28 \cdot 7} = 780 \text{ кг/см}^2,$$

$$\sigma_2 = \frac{6\,000 \cdot 1,72}{4 \cdot 2 \cdot 0,28 \cdot 3} = -1\,530 \text{ кг/см}^2.$$

Бу кучланишларга тегишли эпюра 489-шаклда тасвирланган. Тўғри ўқли стерженнинг энг четки толаларидаги кучланишлар:

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{6\,000 \cdot 6}{2 \cdot 4^3} = 1\,120 \text{ кг/см}^2.$$

Бу кучланишга тегишли эпюра шаклда штрих чизиқ билан тасвирланган.



489-шакл.

186. Кесими доира шаклида бўлган эгри стерженнинг энг четки нуқталарида ҳосил бўладиган нормал кучланишлар худди шундай кесимли тўғри ўқли стерженда ҳосил бўладиган нормал кучланиш билан таққослансин. Эгри стержень ички томонининг эгрилик радиуси унинг қўндаланг кесим диаметрининг $\frac{2}{3}$ қисмига тенг.

Е ч и ш. Нейтрал қатламнинг эгрилик радиусини (136. 4) формуладан ҳисоблаймиз. Кесим марказий ўқининг радиуси:

$$\rho = \frac{2}{3} \cdot d + \frac{d}{2} = \frac{7}{6} d,$$

$$r = \frac{d^2}{4(2\rho - \sqrt{4\rho^2 - d^2})} \cong 1,11 d;$$

$$z_0 = \rho - r \cong 0,056 d.$$

Нейтрал ўқдан энг четки толаларгача бўлган масофалар h_1 ва h_2 ни аниқлаймиз:

$$h_1 = R_1 - r = 1,666d - 1,11d = 0,556d,$$

$$h_2 = r - R_2 = 1,11d - 0,666d = 0,444d.$$

Энг четки нуқталардаги кучланишлар:

$$\sigma_1 = \frac{M}{\frac{\pi d^2}{4} \cdot 0,056d} \cdot \frac{0,556d}{\frac{5}{3}d} = 7,4 \frac{M}{d^3},$$

$$\sigma_2 = \frac{M}{\frac{\pi d^2}{4} \cdot 0,056d} \cdot \frac{0,444d}{\frac{2}{3}d} = 14,8 \frac{M}{d^3}.$$

Туғри ўқли стерженга онд формулага мувофиқ:

$$\sigma = \frac{M}{0,1d^3} = 10 \frac{M}{d^3}.$$

Шундай қилиб,

$$\frac{\sigma_1}{\sigma} = 0,74; \quad \frac{\sigma_2}{\sigma} = 1,48.$$

187. Юк кўтариладиган илмоқнинг AB кесми учун нормал кучланишлар эпюраси қурилсин (490-шакл) ва унинг мустаҳкамлиги текширилсин; $P = 2,3 \text{ т}$, $R_1 = 12 \text{ см}$, $R_2 = 3 \text{ см}$; кўндаланг кесим трапеция бўлиб, $b_1 = 2 \text{ см}$, $b_2 = 4 \text{ см}$, $h = 9 \text{ см}$, рухсат этилган кучланиш $[\sigma] = 900 \text{ кг/см}^2$.

Е чи ш: (135.1) дан нейтрал қатламнинг эгрилик радиусини аниқлаймиз:

$$r = \frac{\frac{b_2 R_1 - b_1 R_2}{h} \ln \frac{R_1}{R_2} - (b_2 - b_1)}{\frac{(2 + 4)9 \cdot 0,5}{4 \cdot 12 - 2 \cdot 3} \ln 4 - 2} = 6,04 \text{ см}.$$

Марказий ўқ радиуси:

$$\rho = R_2 + \frac{b_2 + 2b_1}{b_1 + b_2} \frac{h}{3} = 3 + \frac{3 + 2 \cdot 2}{2 + 4} \cdot \frac{9}{3} = 7 \text{ см}.$$

Кучланишлар эпюрасини қуриш учун кўндаланг кесим AB нинг нейтрал ўқидан z масофада бўлган нуқтага таъсир қилувчи кучланишнинг ифодасини ёзамиз:

$$\sigma = \frac{M}{F z_0} \frac{z}{r + z} + \frac{P}{F} = \frac{2300 \cdot 7}{27 \cdot 0,96} \cdot \frac{z}{6,04 + z} + \frac{2300}{27}.$$

$$\sigma = 85,2 + 621,46 \frac{z}{6,04 + z}.$$

Бу тенгламага тегишли графикни тузиш учун нейтрал ўқдан энг четки толаргача бўлган масофаларни аниқлаймиз:

$$h_1 = R_1 - r = 12 - 6,04 = 5,96 \text{ см},$$

$$h_2 = r - R_2 = 6,04 - 3 = 3,04 \text{ см},$$

$$\sigma_{\min} = 85,2 - \frac{621,46 \cdot 3,04}{6,04 \cdot 5,96} = -223,4 \text{ кг/см}^2,$$

$$\sigma_{\max} = 85,2 + \frac{621,46 \cdot 3,04}{6,04 \cdot 3,04} = 115 \text{ кг/см}^2 < 900,$$

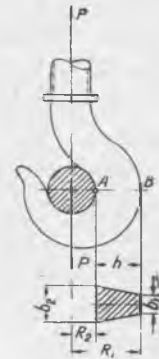
$$\sigma_0 = 85,2 + \frac{621,46 \cdot 0}{6,04 + 0} = 85,2 \text{ кг/см}^2.$$

Булардан фойдаланиб, кучланишлар графигини тузиш қийин эмас.

188. Кўндаланг кесими тавр шаклида бўлган кесик пўлат ҳалқанинг мустаҳкамлиги текширилсин (491-шакл).

$$P = 600 \text{ кг}, \quad [\sigma] = 900 \text{ кг/см}^2.$$

P куч таъсирида кесилган жойда ҳосил бўладиган зазор δ аниқлансин.



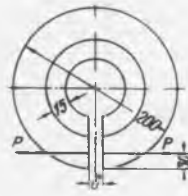
490-шакл.

Е чи ш. Нейтрал қатламнинг эгрилик радиусини (135.3) дан аниқлаймиз:

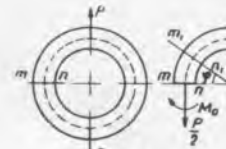
$$r = \frac{b_2 \delta + b_3 h_2}{b_1 \ln \frac{R_2}{R_3} + b_2 \ln \frac{R_1}{R_2}} = \frac{4 \cdot 1,5 + 1 \cdot 4,5}{4 \ln \frac{5,5}{4} + 1 \ln \frac{10}{5,5}} = 5,61 \text{ см.}$$

Кесимнинг оғирлик маркази ички асосидан:

$$\frac{4 \cdot 1,5 \cdot 0,75 + 4,5 \cdot 1 (2,25 + 1,5)}{4 \cdot 1,5 + 4,5 \cdot 1} = 2,03 \text{ см}$$



491- шакл.



492- шакл.

масофада бўлади. Шунинг учун марказий ўқнинг радиуси:

$$\rho = 4 + 2,03 = 6,03 \text{ см.}$$

Энди нейтрал ўқ билан кесим оғирлик маркази орасидаги масофани аниқлаймиз:

$$z_0 = \rho - r = 6,03 - 5,61 = 0,42 \text{ см.}$$

Кесик ҳалқа юқори кесимининг ички сирти толаларидаги кучланишни аниқлаймиз:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M}{Fz_0} \frac{z}{r+z} = \frac{600}{10,5} - \frac{600 \cdot 12,61}{10,5 \cdot 0,42} \frac{1,61}{5,61 \cdot 1,61} = 767 \text{ кг/см}^2 < 900 \text{ кг/см}^2.$$

Юқоридаги кесимнинг ташқи толаларида эса:

$$\sigma = 57 - \frac{600 \cdot 12,61}{10,5 \cdot 0,42} \frac{4,39}{5,61 + 4,39} = 57 - 780 = -723 \text{ кг/см}^2.$$

Масаланинг яқини қисмини ечиш учун (137.2) формулага мувофиқ, ҳалқанинг потенциал энергиясини ҳисоблаймиз:

$$U = \int \left(\frac{M^2}{2ES\rho} + \frac{N^2}{2EF} \right) ds$$

φ бурчакни вертикал қизикдан ҳисоблаб, M билан N ни топамиз:

$$M = Pr(1 - \cos \varphi); \quad N = -P \cos \varphi.$$

Энди эгрилик ва чўзилишдаги бикрликларни топамиз:

$$2ES\rho = 2E(10,5 \cdot 0,42) 6,03 = 53E; \quad 2EF = 21E$$

Бу қийматларни кўзда тутиб, потенциал энергияни ҳисоблаймиз:

$$U = \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{|Pr(1 - \cos \varphi)|^2}{53E} + \frac{(-P \cos \varphi)^2}{21E} \right\} R d\varphi = (38,9 + 0,9) \frac{P^2}{E} = 40 \frac{P^2}{E}$$

Бу ифодадан кесилган жойда ҳосил бўлган зазорни аниқлаймиз:

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P} = 80 \frac{P}{E} = \frac{80 \cdot 600}{2 \cdot 10^6} = 0,024 \text{ см.}$$

189. Радиуси r бўлган ингичка ҳалқа вертикал диаметри бўйлаб қарама-қарши томонга йўналган чўзувчи P кучлар таъсиридадир. Ҳалқанинг ихтиёрий кесимларидаги эгувчи момент билан вертикал диаметрининг қанчага ортиши аниқлансин (492- шакл).

Е чи ш. Ҳалқага қўйилган куч симметрик равишда таъсир қилгани учун ҳалқанинг чорагини текшириш кифоя (492- шакл). Горизонтал диаметр орқали ўтувчи mn кесимда

кесиб ўтувчи куч нолга, нормал куч эса $\frac{P}{2}$ га тенг. Мазкур *тл* кесимдаги эгувчи моментни M_0 орқали белгилаб, унинг қийматини минимал иш ҳақидаги теоремадан фойдаланиб аниқлаймиз. Симметрия шартига мувофиқ, ҳалқа эгилганда унинг *тл* кесими айланмайди, шунинг учун:

$$\frac{\partial U}{\partial M_0} = 0; \quad (a)$$

бу ерда U — биз текшираётган чорак ҳалқанинг потенциал энергияси. φ бурчак билан аниқланадиган ихтиёрий кўндаланг кесимдаги эгувчи момент:

$$M = M_0 - \frac{Pr}{2} (1 - \cos \varphi) \quad (b)$$

бўлади, бундан:

$$\frac{\partial M}{\partial M_0} = 1$$

келиб чиқади. Буларнинг қийматини (a) га қўямиз:

$$\frac{\partial U}{\partial M_0} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M}{EI} \frac{\partial N}{\partial M_0} r d\varphi = \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[M_0 - P \frac{r}{2} (1 - \cos \varphi) \right] r d\varphi = 0;$$

бундан:

$$M_0 = \frac{Pr}{2} \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) = 0,182Pr.$$

M_0 нинг қийматини (b) га қўйиб, эгувчи момент ифодасини ҳосил қиламиз:

$$M = \frac{Pr}{2} \left(\cos \varphi - \frac{2}{\pi} \right). \quad (c)$$

Бу формуладан ҳалқанинг ихтиёрий кўндаланг кесимидаги эгувчи моментни ҳисоблаш мумкин. Вертикал диаметрининг ортишини Кастильяно теоремасидан фойдаланиб аниқлаймиз. Ҳалқанинг тула потенциал энергияси

$$U = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M^2 r c' \varphi}{2EI}$$

бўлади; бундаги M нинг қиймати (c) дан аниқланади.

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{4}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} M \frac{\partial M}{\partial P} r d\varphi = \frac{Pr^3}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos \varphi - \frac{2}{\pi} \right)^2 d\varphi = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right) \frac{Pr^3}{EI} = 0,149 \frac{Pr^3}{EI}.$$

□

XX боб

ЮПҚА ДЕВОРЛИ ИДИШЛАР ВА ҚАЛИН ДЕВОРЛИ ТРУБАЛАР ҲИСОБИ

139- §. Ички босим таъсиридаги юпқа деворли идишлар

Айланма сирт шаклидаги юпқа деворли идиш айланиш ўқиға нисбатан симметрик равишда қўйилган ички босим P таъсирида бўлсин (493- шакл). Бу тарздаги идишлар *юпқа деворли қобиқ* дейилади. Юпқа деворли қобиқлар эгилувчан ил каби, фақат чўзилишга қаршилик кўрсатади. Бу чўзувчи зўриқишлар меридиан уринмаси бўйлаб ва унга тик йўналган бўлади. Бу

зўриқишларни идишдан ажратилган элементнинг мувозанат шартларидан аниқлашимиз мумкин. Қобикдан иккита меридиан орқали ўтувчи mn ва sq текисликлар ҳамда меридианларга тик йўналишдаги иккита mq ва ns текисликлар ёрдамида mqs элементини ажратамиз. Бу элементнинг томонларига фақат нормал зўриқишлар таъсир қилади. Ажратилган элементга қўйилган σ_1 меридиан бўйлаб йўналган, σ_2 эса меридианларга тик бўлган параллел айланалар бўйлаб йўналган нормал кучланиш ва δ қобикнинг калинлиги бўлсин. Ажратилган элементнинг меридиан бўйича узунлиги ds_1 , параллел бўйича узунлиги ds_2 , меридиан чизигининг эгрилик радиуси ρ_1 , меридианга тик йўналишдаги айлананинг радиуси ρ_2 бўлсин. Ажратилган элементнинг томонларига таъсир қилган чўзувчи зўриқишлар $\sigma_1 \delta ds_2$ ва $\sigma_2 \delta ds_1$ га тенгдир. mq ва ns ёқларига таъсир қилган чўзувчи зўриқишларнинг ажратилган элемент нормалидаги проекциялари йиғиндиси 493-шакл, б га мувофиқ қуйидагича бўлади:

$$2\sigma_1 \delta ds_2 \sin \frac{d\theta_1}{2} = \frac{\sigma_1 \delta ds_2 ds_1}{\rho_1}. \quad (a)$$

Худди шундай mn ва sq ёқларига таъсир қилган чўзувчи зўриқишларнинг нормалдаги проекциялари йиғиндисини қуйидагича ҳисоблаймиз:

$$2\sigma_2 \delta ds_1 \sin \frac{d\theta_2}{2} = \frac{\sigma_2 \delta ds_1 ds_2}{\rho_2}. \quad (b)$$

Бу нормал зўриқишлар ажратилган элементга таъсир қилувчи босим $p ds_1 ds_2$ билан мувозанатлашади. Шунинг учун:

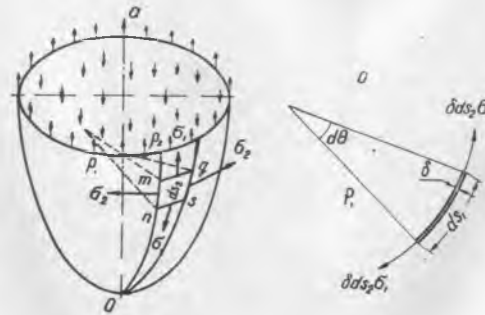
$$\frac{\sigma_1 \delta ds_1 ds_2}{\rho_1} + \frac{\sigma_2 \delta ds_1 ds_2}{\rho_2} = p ds_1 ds_2$$

бўлади; шунга кўра:

$$\frac{\sigma_1}{\rho_1} + \frac{\sigma_2}{\rho_2} = \frac{p}{\delta} \quad (139.1)$$

бўлади.

Айланма сирт шаклидаги юпқа қобик учун σ_1 ва σ_2 кучланишларни боғловчи бу муносабат Лаплас томонидан берилгани учун, у Лаплас формуласи деб аталади. Бу тенгламадаги σ_1 ва σ_2 ларнинг иккаласи ҳам номаълумдир. Аммо, биз текшираётган ҳолда айланма сирт шаклидаги қобикни айланиш ўқиға тик бирор текислик билан кесиб, унинг пастки қисми $ВOC$ нинг мувозанат шартини тузамиз; натижада ўз ичига σ_1 ни



493-шакл.

олувчи яна битта тенгламани чиқарамиз (494-шакл, а). Ташланган юкори қисмининг таъсирини алмаштирувчи зўриқишнинг z ўқига бўлган проекцияси: $\sigma_1 \delta \cdot 2\pi r_B \cos \varphi$ га тенг. Юпқа қобиқнинг BOC қисмига таъсир этувчи тўла босимнинг z даги проекциясини Q билан белгилаб, қуйидаги мувозанат тенгламасини ёзамиз:

$$2\pi r_B \delta \sigma_1 \cos \varphi = Q,$$

бундан σ_1 ни аниқлаймиз:

$$\sigma_1 = \frac{Q}{2\pi r_B \delta \cos \varphi}. \quad (139.2)$$

(139.1) ва (139.2) тенгламалардан σ_1 ва σ_2 кучланишларни аниқлаймиз.

Q ни ҳисоблаш учун юпка қобиқдан кенглиги ds га тенг ингичка ҳалқа BB_1DD_1 ни кесиб оламиз (494-шакл, б). Бу ҳалқага тўғри келадиган босимнинг z даги проекцияси:

$$dQ = P ds 2\pi r \cos \alpha$$

бўлади. Аммо:

$$\cos \alpha = \frac{dr}{ds}$$

бўлгани учун:

$$dQ = 2P\pi r dr.$$

бўлади. Q ни аниқлаш учун бу ифоданинг интегралини оламиз:

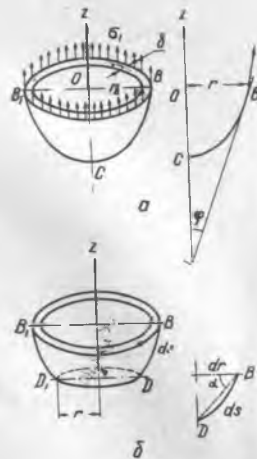
$$Q = \int_0^{r_B} 2P\pi r dr. \quad (139.3)$$

Юпка қобиқнинг деворига таъсир қилаётган босим ўзгармас бўлса, яъни $P = \text{const}$ бўлса, (139.3) қуйидагича ёзилади:

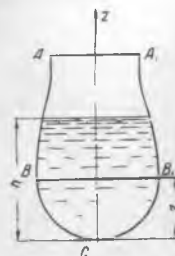
$$Q = 2\pi P \int_0^{r_B} r dr = P\pi r^2. \quad (139.4)$$

Демак, бу ҳолда юпка қобиқнинг текширилаётган параллел айланасидан пастки қисмига таъсир қилаётган босимнинг z ўқдаги проекцияси мазкур айлана юзаси билан босимнинг купайтмасига тенг бўлар экан.

Юпка қобик 495-шаклда тасвирлангандек, солиштирма оғирлиги γ бўлган



494-шакл.



495-шакл.

суюқлик босими остида бўлса ички босим $P = \gamma(h - z)$ бўлади ва (139.3) формула қуйидагича ёзилади:

$$Q = \int_0^r 2\pi\gamma(h - z)r = 2\pi\gamma rh - 2\pi\gamma \int_0^r z r dr. \quad (139.5)$$

Кейинги интегрални ҳисоблаш учун, юпқа қобиқнинг сиртини ҳосил қилувчи эгри чизиқ ABC нинг тенгламасини билиш керак, бу тенглама қуйидагича ёзилади:

$$z = f(r), \quad (139.6)$$

у ҳолда:

$$\int_0^r z r dr = \int_0^r f(r) r dr. \quad (139.7)$$

интегрални ҳисоблаш қийин эмас.

140-§. Юпқа қобиқларнинг энг оддий кўринишлари

Юпқа сферик қобиқ босими P га тенг газ билан тўлдирилган бўлсин. Қобиқ сферик бўлгани сабабли икки эгрилик радиуси ва ундан ажратилган элементнинг икки кучланиши бир-бирига тенг бўлади, яъни:

$$\rho_1 = \rho_2 = R, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma.$$

Шунинг учун (139.1) тенглама қуйидагича ёзилади:

$$\sigma = \frac{PR}{2\delta}. \quad (140.1)$$

Диаметри d бўлган цилиндрик қозон туби R радиусли сфера бўлсин (496-шакл). Қозоннинг туби сфера бўлгани сабабли, ундаги кучланиш (140.1) дан аниқланади, яъни:

$$\sigma = \frac{PR}{2\delta}.$$

Цилиндр қисми учун



496-шакл.

$$\rho_1 = \infty; \quad \rho_2 = \frac{d}{2};$$

(139.1) дан:

$$\frac{\sigma_1}{d/2} = \frac{P}{\delta}; \quad \sigma_2 = \frac{Pd}{2\delta}. \quad (140.2)$$

бўлади. Қозонни z ўқига тик текислик билан кесиб, (34.2) дан фойдаланиб, σ_1 ни аниқлаймиз:

$$\sigma_1 = \frac{Q}{\pi d \delta}$$

(139.4) га мувофиқ,

$$Q = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot P;$$

шунинг учун:

$$\sigma_1 = \frac{\pi d^2 P}{4\pi \cdot d \cdot \delta} = \frac{P\rho}{4\delta} \quad (140.3)$$

бўлади.

Бу ҳулосаларни текис кучланиш ҳолатини текширишда чиқарган эдик. Конус шаклидаги идиш суюқлик билан тўлдирилган бўлсин (497-шакл); бу ҳолда ҳам меридиан бўйича $\rho_1 = \infty$, конуснинг ясовчиларига тик йўналган кучланиш σ_2 ни бевосита (139.1) дан аниқлаймиз:

$$\sigma_2 = \frac{P\rho_2}{\delta};$$

бу ҳолда:

$$\rho = \gamma(h-z); \quad x = r = z \operatorname{tg} \alpha.$$

$$\rho_2 = \frac{x}{\cos \alpha} = \frac{z \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha}$$

бўлади. Шунинг учун:

$$\sigma_2 = \frac{\gamma(h-z)z \operatorname{tg} \alpha}{\delta \cos \alpha} \quad (140.4)$$

бўлади. σ_1 ни (139.2) дан аниқлаймиз. Бунинг учун олдин (139.5) дан Q ни аниқлаб оламиз:

$$Q = \gamma \pi x^2 h - \frac{2\pi \gamma}{\operatorname{tg} \alpha} \int_0^x x^2 dx = \gamma \pi x^2 h - \frac{2\pi \gamma x^3}{3 \operatorname{tg} \alpha};$$

$$\sigma_1 = \frac{\pi \gamma x^2}{2\pi x \delta \cos \alpha} \left(h - \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{\operatorname{tg} \alpha} \right) = \frac{\gamma z \operatorname{tg} \alpha}{2\delta \cos \alpha} \left(h - \frac{2}{3} z \right). \quad (140.5)$$

Ҳосил бўлган (140.4) ва (140.5) ифодалардан σ_1 ва σ_2 нинг максимал қийматини аниқлаймиз; кўпайтма $(h-z)z$ максимал қийматга эришганда σ_2 максимум бўлади. Бунинг учун $(h-z)z$ нинг ҳосиласини нолга тенглаштириб, мазкур кўпайтманинг максимал қийматга тўғри келадиган z ни топамиз, у $z = \frac{h}{2}$ бўлади. Бу қийматга тегишли максимал кучланиш қуйидагича бўлади:

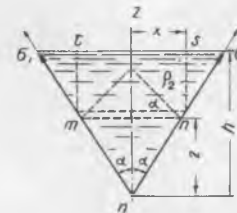
$$(\sigma_2)_{\max} = \frac{h^2 \gamma}{4\delta} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha}. \quad (140.6)$$

Кучланиш σ_1 нинг максимум бўлиши учун $z = \frac{3}{4}h$ бўлиши керак, шунга биноан:

$$(\sigma_1)_{\max} = \frac{3h^2 \gamma}{16\delta} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha}. \quad (140.7)$$

Конус шаклидаги қобиқ учун эгилиш ҳисобга олинмаса, (140.4) ва (140.5) формулалар масаланинг тўлиқ жавобини ифодалайди.

Юқорида келтирилган ҳолларда меридиан чизиқни, яъни айланма қобиқ сиртининг ясовчисини кескин равишда ўзгармайди деб олдик. Агар у кескин ўзгарса, масалан, цилиндрдан сферага ўтса, у ҳолда ўтиш жойидаги мувозанатни таъминлаш учун, ҳосил бўладиган реакция кучини қабул қилувчи бикрлик чамбараги ўрнатилади (бу чамбарак 498-шаклда mn билан белгиланган). Мазкур бикрлик чамбарагининг тақрибий ҳисобини келтираемиз. Суюқлик тўлдириладиган идишнинг туби сферик қобиқ, тепаси эса цилиндр бўлсин (498-шакл, а). Улар бикрлик чамбараги билан туташтирилган. Сферик қобиқнинг қирғоғидаги чўзувчи кучланиш σ ни ҳисоблаб, қирғоқнинг



497-шакл.

узунлик бирлигига туғри келадиган зўриқиш σ ни аниқлаймиз (498-шакл, б). Бу зўриқишнинг вертикал тузувчиси $\sigma \delta \sin \alpha$ ни идишнинг таянчи деб қабул қиламиз, горизонтал тузувчиси $P = \sigma \delta \cos \alpha$ эса бикрлик ҳалқасининг айланаси бўйича радиал йўналишда тенг ёйилган юк тарзида таъсир қилади (498-шакл, в). Бу зўриқиш ҳалқада сиқувчи зўриқиш S ни ҳосил қилади; бу зўриқишни аниқлаш учун бикрлик ҳалқасидан ds элементни ажратиб, унинг мувозанатини текшираемиз (498-шакл, з):

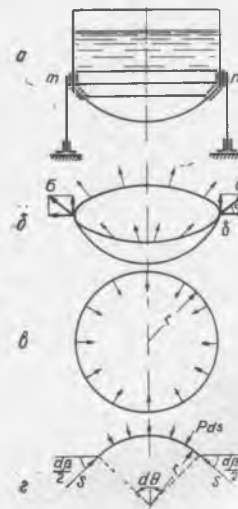
$$2s \sin \frac{d\theta}{2} = Pds = \sigma \delta \cos \alpha \cdot r d\theta;$$

бундан:

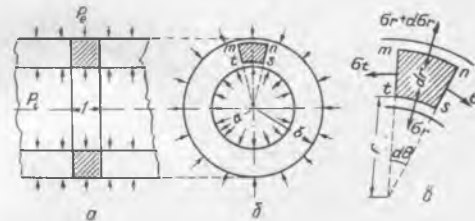
$$s = \sigma \delta r \cos \alpha$$

бўлади.

Бу зўриқиш бўйича бикрлик ҳалқаси кўндаланг кесимининг ўлчами аниқланади.



498-шакл.



499-шакл.

141-§. Ички ва ташқи симметрик босим таъсиридаги қалин деворли трубалар ҳисоби

Қалин деворли доиравий кесимли узун трубанинг ташқи радиуси b , ички a бўлиб, симметрик равишда таъсир қилувчи ташқи босим P_e ва ички босим P_i таъсирида бўлсин (499-шакл, а). Қалин труба ва унга қўйилган юк симметрик бўлганидан, трубанинг деформацияси ўқига нисбатан симметрик бўлиб, барча кўндаланг кесимлари учун бир хилдир. Бундай шароитда ишлаётган трубанинг деформациясини текшириш учун, ундан иккита кўндаланг кесим билан чегараланган, узунлиги бирга тенг бўлган ҳалқа ажратиб, мазкур ҳалқанинг деформациясини текшириш kifоя. Ҳалиги ҳалқадан иккита радиал ва иккита цилиндрик кесимлар воситаси билан mns элементни ажратамиз (499-шакл, б). Бу ажратилган элементнинг ён ёқларига кесиб ташланган қисмларнинг таъсирини алмаштирувчи кучларни қўямиз. Ҳалқа симметрик равишда деформациялангани сабабли ажратилган элементнинг ёқларига таъсир қилган зўриқишлар нормал йўналган бўлади. Ажратилган элементнинг ёқларига таъсир қилган зўриқишларнинг ўрнига уларга тегишли кучланишларни қўямиз (499-шакл, в). Деформация симметрик бўлганидан mt ва ns ёқлардаги кучланишлар бир хилда бўлиши табиийдир, биз уни σ_r билан белгилаймиз. Цилиндрик сирт ts даги нормал кучланишини эса σ_t билан белгилаймиз. Бу кучланиш цилин-

дрик қатламларнинг ўзаро босими туфайли ҳосил бўлганидан, у текшири-
лаётган қатламнинг радиуси r га боғлиқдир; бинобарин, ҳалиги элемент-
нинг mn сиртидаги кучланиш $\sigma_r + d\sigma_r = \sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr$ бўлади. Элементнинг ёқ-
лари тегишлича қуйидаги шу қийматларга тенг бўлади:

$$mt = ns = dr, \quad st = rd\theta, \quad mn = (r + dr) d\theta.$$

Агар ҳалқа узунлиги бирга тенг қилиб олингани кўзда тутилса, ажратил-
ган элементнинг ёқларидаги зўриқишлар қуйидагича бўлади:

$$mt \text{ ва } ns \text{ ёқда: } \sigma_r dr \cdot 1$$

$$st \text{ ёқда: } \sigma_r rd\theta \cdot 1$$

$$mn \text{ ёқда: } \left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta = \sigma_r r d\theta + \sigma_r dr d\theta + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} r dr d\theta + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr^2 d\theta.$$

Бу кучлар бир нуқтада кесишадиган бўлгани учун ажратилган элемент-
нинг мувозанат шarti иккита тенглама билан ифодаланади:

$$\sum R = 0; \quad \sum T = 0;$$

Аммо симметрик шarti иккинчи тенгламани айниятга келтиради. Би-
ринчи тенглама қуйидагича ёзилади:

$$-\sigma_r rd\theta - 2 \left(\sigma_r dr \sin \frac{d\theta}{2} \right) + \sigma_r rd\theta + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} r dr d\theta + \sigma_r dr d\theta + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr^2 d\theta = 0.$$

Илгаригидек, $\sin \frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2}$ деб олсак ва учинчи тартибли чексиз сон $dr^2 d\theta$ ни
эътиборсиз қолдириб, тенгликдаги қисқаришларни қисқартсак, қуйидаги
тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\sigma_t - \sigma_r - r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = 0. \quad (141.1)$$

Бу битта тенгламада иккита номаълум σ_t ва σ_r бўлгани учун масала
статик аниқмас бўлади.

Қўшимча тенгламани цилиндрнинг деформациясини текширишдан то-
памиз. Деформация цилиндрининг ўқиға нисбатан симметрик бўлиб, унинг
барча нуқталари радиал йўналишда кўчади. Бу кўчиш ҳар бир концентрик
цилиндр сиртидаги барча нуқталар учун бир хилда бўлади. Аммо турли
радиусли сиртлардаги нуқталар учун у кўчишлар ҳар хил бўлиб, ўзгарув-
чи радиус r нинг функцияси бўлади. Ради-
уси r бўлган цилиндр сиртдаги нуқта-
нинг радиал кўчишини u билан белгилай-
миз.

Текширилаётган сиртга чексиз яқин
 $r + dr$ радиусли цилиндрдаги нуқтанинг ра-
диал кўчиши $u + du = u + \frac{\partial u}{\partial r} dr$ бўлади
(500-шакл). Ажратилган dr узунликда эле-
ментнинг радиал йўналишдаги абсолют чў-
зилиши $\Delta(dr) = \frac{\partial u}{\partial r} dr$ бўлади, нисбий ради-
ал чўзилиш эса:

$$\epsilon_r = \frac{\Delta(dr)}{dr} = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (141.2)$$

бўлади.



500-шакл.

σ_r кучланиш йўналишига мос келадиган нисбий чўзилишни аниқлаймиз. Деформациягача радиуси r бўлган доирадаги нуқта деформация натижасида $r+u$ радиусли доирага кўчади. Доира узунлигининг ортиши радиуснинг ортиши билан пропорционал бўлади; шунинг учун r радиусли доиранинг абсолют чўзилиши қуйидагича бўлади:

$$\Delta s = 2\pi(r+u) - 2\pi r = 2\pi u. \quad (141.3)$$

Тегишли нисбий чўзилиш эса:

$$\epsilon_r = \frac{\Delta s}{s} = \frac{2\pi u}{2\pi r} = \frac{u}{r} \quad (141.4)$$

бўлади.

Ажратилган элемент mst нинг ёқлари ўзаро тик бўлиб, улар бош юзалар ҳисобланади, бинобарин, у σ_r ва σ_t бош кучланишлар таъсирида текис кучланиш ҳолатида бўлади. Текис кучланиш ҳолатида бўлган бу элементнинг деформациясини топишда (39.3) формуладан фойдаланамиз:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_r + \mu \epsilon_t) = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \mu \frac{u}{r} \right); \\ \sigma_t &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_t + \mu \epsilon_r) = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{u}{r} + \mu \frac{\partial u}{\partial r} \right). \end{aligned} \right\} \quad (141.5)$$

Буларни (141.1) га қўйиб, радиал кўчиш u ни аниқлаш учун қуйидаги тенгламани ёзамиз:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} = 0. \quad (141.6)$$

Бу ўзгарувчи коэффициентли бир жинсли ва чизикли дифференциал тенгламадир. Унинг хусусий интегралини қуйидагича оламиз:

$$u = r^t, \quad (141.7)$$

t ҳозирча номаълум параметрдир. (141.7) ни (141.6) га қўйиб, t ни аниқлаш учун қуйидаги характеристик тенгламани чиқарамиз:

$$t(t-1) + t - 1 = 0 \quad \text{ёки} \quad t^2 - 1 = 0.$$

Бу тенгламанинг илдизлари: $t_1 = 1$; $t_2 = -1$ бўлади.

Буларни (141.7) га қўйиб, (141.6) нинг иккита хусусий интегралини топамиз:

$$u_1 = r; \quad u_2 = \frac{1}{r}.$$

Шунинг учун (141.6) нинг умумий интегрални қуйидагича бўлади:

$$u = C_1 r + \frac{C_2}{r}. \quad (141.8)$$

Буни (141.5) га қўйиб, радиуси r бўлган сирт нуқталаридаги кучланишларни аниқлаймиз:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} \left[C_1 (1+\mu) - C_2 \frac{1-\mu}{r^2} \right]; \quad (141.9)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2} \left[C_1 (1+\mu) + C_2 \frac{1-\mu}{r^2} \right]; \quad (141.10)$$

Ихтиёрий ўзгармаслар C_1 ва C_2 нинг қийматини цилиндрнинг ички ва ташқи сиртларидаги босимлар ёрдамида аниқлаймиз. Масалан, $r = b$ бўл-

ганда $\sigma_r = -P_e$ бўлиб, $r = a$ бўлганда $\sigma_r = -P_i$ бўлади. Бу шартлар C_1 ва C_2 ни аниқлаш учун қуйидаги иккита тенгламани беради:

$$\begin{aligned} -P_e &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[C_1(1+\mu) - C_2 \frac{1-\mu}{b^2} \right]; \\ -P_i &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[C_1(1+\mu) - C_2 \frac{1-\mu}{a^2} \right]. \end{aligned}$$

Бу тенгламалардан C_1 ва C_2 нинг қийматини аниқлаймиз:

$$\begin{cases} C_1 = \frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{a^2 P_i - b^2 P_e}{b^2 - a^2}; \\ C_2 = \frac{1+\mu}{E} \cdot \frac{a^2 b^2 (P_i - P_e)}{b^2 - a^2}. \end{cases} \quad (141.11)$$

Буларнинг қийматини (141.8), (141.9) ва (141.10) га қўйиб, радиал қўчиш u ҳамда нормал кучланишлар σ_r ва σ_t нинг қийматларини аниқлаймиз:

$$u = \frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{a^2 P_i - b^2 P_e}{b^2 - a^2} r + \frac{1+\mu}{E} \cdot \frac{a^2 b^2 (P_i - P_e)}{(b^2 - a^2) r}; \quad (141.12)$$

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{a^2 P_i - b^2 P_e}{b^2 - a^2} - \frac{a^2 b^2 (P_i - P_e)}{(b^2 - a^2) r^2}; \\ \sigma_t = \frac{a^2 P_i - b^2 P_e}{b^2 - a^2} + \frac{a^2 b^2 (P_i - P_e)}{(b^2 - a^2) r^2}. \end{cases} \quad (141.13)$$

Амалий жиҳатдан энг муҳим бўлган ҳолда қалин деворли труба фақат ички босим P_i таъсирида бўлади. Бунга биноан, (141.13) ифода қуйидагича ёзилади:

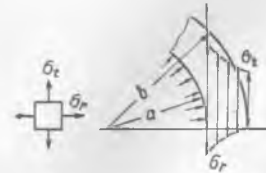
$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{a^2 P_i}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right); \\ \sigma_t = \frac{a^2 P_i}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right). \end{cases} \quad (141.14)$$

Бу ифодалардан кўрамизки, σ_r сиқувчи бўлиб, σ_t чўзувчи экан. Чўзувчи кучланиш σ_t трубанинг ички сиртида максимал қийматга эришиб, у қуйидаги қийматга тенг бўлади:

$$(\sigma_t)_{\max} = \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} P_i; \quad (141.15)$$

σ_r трубанинг ташқи сиртида минимал қийматга эришади, у қуйидаги қийматга тенг бўлади:

$$(\sigma_r)_{\min} = \frac{2a^2}{b^2 - a^2} P_i. \quad (141.16)$$



501-шакл.

Труба деворининг қалинлиги бўйича σ_r ва σ_t нинг ўзгариш графиги 501-шаклда тасвирланган. Агар труба жуда қалин бўлмаса σ_r нинг максимал қиймати минимал қийматидан оз фарқ қилади. Масалан, $b = 1,1 a$ бўлса, максимал кучланиш минимал кучланишдан фақат 5—10% фарқ қилади, холос. Шунинг учун девори жуда қалин бўлмаган трубаларни ҳисоблашда чўзувчи кучланиш σ_t ни труба деворининг қалинлиги бўйича тенг тарқал-

ган деб қабул қилсак, катта хато қилмаган бўламиз. Бу ҳолда (141.16) нинг тақрибий кинмати қуйидагича ёзилади:

$$\sigma_t = \frac{2a^2 P_i}{(b+a)(b-a)} = \frac{2a^2}{2a(b-a)} P_i = \frac{a}{b-a} P_i = \frac{DP_i}{2\delta};$$

бу ерда $D = 2a$ ва $\delta = b - a$ — трубанинг диаметри ва қалинлиги. Бу формула олдинги параграфда чиқарилган (140.2) формуланинг ўзидир.

Энди девори қалин труба учун, учинчи назарияга мувофиқ, мустақамлик шартини тузамиз. Труба фақат ички босим таъсирида бўлган ҳолда, энг катта бош кучланишлар трубанинг ички сиртидаги нуқталарда ҳосил бўлади. Шунинг учун, учинчи назарияга кўра бош кучланишларнинг энг катта айирмасини олишимиз керак:

$$(\sigma_t - \sigma_r)_{\max} = \frac{2b^2 P_i}{b^2 - a^2}. \quad (141.17)$$

Қурамизки, энг катта тангенциал кучланиш ички босим P_i га қараганда анчагиз катта бўлар экан. Бу кучланиш оқим чегарасига етганда цилиндрнинг ички сиртида қолдиқ деформация ҳосил бўла бошлайди. Пластик деформация билан курашиш мақсадида трубанинг ташқи диаметрини оширишнинг фойдаси йўқ, чунки унинг ошуви билан (141.17) нинг махражи ва сурати қарийб бирдек ўсади. Аммо трубанинг ички сиртида ҳосил бўладиган пластик деформация юк кўтариш хусусиятининг камайишига жуда ҳам оз таъсир қилади. Трубанинг парчаланиши учун пластик деформация унинг ташқи сиртигача ёйилиши керак.

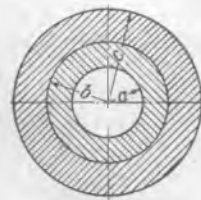
142-§. Қўшма трубалар ҳисоби

Ички босим таъсиридаги қалин деворли трубаларда ҳосил бўладиган кучланишларни камайтириш учун унга ички диаметри қалин трубанинг ташқи диаметрдан кичикроқ бўлган бошқа бир труба қиздириб кийгизилди. Кийгизилган ташқи труба совиганда ички трубани сиқиб, унда сиқувчи кучланиш ҳосил қилади. Бу ҳолда ички труба ичидан таъсир қилувчи P_i босим кучидан ҳосил бўладиган кучланишнинг бир қисми ички трубада дастлаб пайдо бўлган сиқувчи кучланишни йуқотиш учун сарфланади, қолгани эса кейинчалик унда чўзувчи кучланиш ҳосил қилади. Натижада ички труба «ташки» ва ички босимлар таъсирида бўлади. Ташқи трубанинг совиши натижасида ички трубага таъсир қиладиган босимини (141.12) формуладан фойдаланиб аниқлаш мумкин.

Масалан, ташқи трубанинг киздирилмагандаги ички радиуси ички трубанинг ташқи радиусига қараганда δ миқдорича кичик бўлсин. Ички труба қўндаланг кесимининг радиуслари a ва b , ташқи трубаники эса $b - \delta$ ва c бўлсин (502-шакл).

Ташқи трубани қиздириб, ички трубага кийгизилгандан кейин, ташқи труба совиши натижасида унинг ички радиуси бир оз ортиб, ички трубанинг ташқи радиуси кичраяди; ички трубанинг ташқи сиртидаги нуқталарнинг ташқи трубанинг P босим таъсирида кўчиши (141.12) га мувофиқ қуйидагича ифодаланади:

$$u_{r=b} = \frac{P_i}{E} \left(\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - \mu \right) \quad (142.1)$$



502-шакл.

Шунингдек, ички трубанинг ташқи труба босимиға қаршилиқ кўрсатиши натижасида, ташқи трубанинг ички сиртидаги нуқталарнинг кўчиши қуйидагича ифодаланади:

$$u_{r=b} = \frac{Pb}{E} \left(\frac{c^2 + b^2}{c^2 - b^2} + \mu \right); \quad (142.2)$$

(142.1) ва (142.2) нинг йиғиндиси δ га тенг бўлиши керак:

$$\frac{Pb}{E} \left(\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - \mu \right) + \frac{Pb}{E} \left(\frac{c^2 + b^2}{c^2 - b^2} + \mu \right) = \delta;$$

бундан:

$$P = \frac{E\delta}{b} \frac{(b^2 - a^2)(c^2 - b^2)}{2b^2(c^2 - a^2)}. \quad (142.3)$$

Ички босим P_i ва ташқи босим P таъсиридан ички трубада ҳосил бўладиган кучланишлар (141.13) дан аниқланади. Ташқи трубада P таъсиридан ҳосил бўладиган кучланишлар эса (141.14) га мувофиқ қуйидагича аниқланади:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{b^2 P}{c^2 - b^2} \left(1 - \frac{c^2}{r^2} \right); \\ \sigma_t &= \frac{b^2 P}{c^2 - b^2} \left(1 + \frac{c^2}{r^2} \right). \end{aligned} \quad (142.4)$$

Қўшма трубалар деворининг қалинлиги бўйича кучланишлар ўзгаришининг графигини конкрет ҳол учун келтираимиз.

МАСАЛАЛАР

190. Ички трубанинг ички босими $P_i = 2100 \text{ кг/см}^2$, $a = 10 \text{ см}$, $b = 15 \text{ см}$ ва $c = 20 \text{ см}$ бўлган қўшма пўлат труба учун $\delta = 0,127 \text{ мм}$ бўлсин. Труба кесимида ҳосил бўладиган кучланишлар аниқлансин.

Е чи ш. Олдин трубани бутун деб, учала сирт учун δ_i ни (141.14) дан ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} (\sigma_r)_{r=10} &= \frac{10^2 \cdot 2100}{20^2 - 10^2} \left(1 + \frac{20^2}{10^2} \right) = 3500 \text{ кг/см}^2; \\ (\sigma_r)_{r=15} &= \frac{10^2 \cdot 2100}{20^2 - 10^2} \left(1 + \frac{20^2}{15^2} \right) = 1944 \text{ кг/см}^2; \\ (\sigma_r)_{r=20} &= \frac{10^2 \cdot 2100}{20^2 - 10^2} \left(1 + \frac{20^2}{20^2} \right) = 1400 \text{ кг/см}^2. \end{aligned}$$

Буларга тегишли кучланиш графиги 503- шакл, а да тасвирланган.

Энди трубаларни қўшма деб ҳисоблаб, ташқи трубанинг ички трубага кўрсатаётган босими P ни (142.3) дан топамиз.

$$P = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 0,0127 (15^2 - 10^2) (20^2 - 15^2)}{15 \cdot 2 \cdot 15^2 (20^2 - 10^2)} \cong 288 \text{ кг/см}^2.$$

Бу босим таъсиридан ички трубада ҳосил бўладиган кучланишларни (141.16) ва (141.15) формулалардан ($P_i = 0$ деб) ҳисоблаймиз:

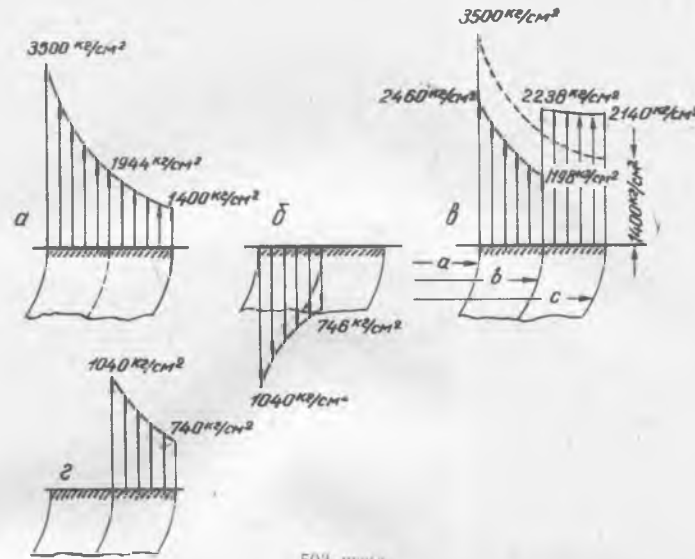
$$\begin{aligned} (\sigma_r)_{r=10} &= -\frac{2Pb^2}{b^2 - a^2} = -\frac{2 \cdot 288 \cdot 15^2}{15^2 - 10^2} \cong -1040 \text{ кг/см}^2; \\ (\sigma_t)_{r=15} &= -\frac{P(b^2 + a^2)}{b^2 - a^2} = -\frac{288(15^2 + 10^2)}{15^2 - 10^2} \cong -746 \text{ кг/см}^2. \end{aligned}$$

Буларга тегишли график (503- шакл, б) да тасвирланган. Ташқи трубада ҳосил бўладиган кучларни ҳам формулалардан топамиз:

$$(\sigma_r)_{r=15} = \frac{P(c^2 + b^2)}{c^2 - b^2} = \frac{288(20^2 + 15^2)}{20^2 - 15^2} = 1040 \text{ кг/см}^2.$$

$$(\sigma_t)_{r=20} = \frac{2Pb^2}{c^2 - b^2} = \frac{2 \cdot 288 \cdot 15^2}{20^2 - 15^2} = 740 \text{ кг/см}^2.$$

Буларга тегишли график 503- шакл. z да тасвирланган. 503- шаклнинг e қисмида a , b , c кучланишлар йиғиндисининг графиги тасвирланган. Бу графикдан курамызки, қиздириб кийгизилган труба^{нинг} сиқиши натижасида ҳосил бўладиган кучланиш тўғрисида ички труба^{нинг} ички сиртида ҳосил бўладиган кучланиш 3500 кг/см² дан 2460 кг/см² га камайди.



503- шакл.

191. Пулат труба^{нинг} ички радиуси $a = 10$ мм бўлиб, унга $P_i = 2500$ кг/см² босим таъсир қилади. II ва IV назариялар бўйича, труба^{нинг} қалинлиги δ аниқлансин. Труба материали учун рухсат этилган кучланиш $[\sigma] = 5000$ кг/см².

Е ч и ш. Энг катта бош кучланишлар труба^{нинг} ички сиртидаги нуқталарда ҳосил бўлиши бизга маълум. У ерда кучланишлар қуйидагича ифодаланади:

$$\sigma_t = P_i \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}, \quad \sigma_r = -P.$$

II назарияни ёзамиз: $\sigma_t - \mu \sigma_r = [\sigma]$ ёки $P_i \left[\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} + \mu \right] = [\sigma]$ бўлиши керак.

$\mu = \frac{1}{3}$ деб олсак:

$$b = a \sqrt{\frac{3[\sigma] + 2P_i}{3[\sigma] - 4P_i}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 5000 + 2 \cdot 2500}{3 \cdot 5000 - 4 \cdot 2500}} = 2 \text{ см}$$

бўлади.

Труба^{нинг} қалинлиги $\delta = b - a = 2 - 1 = 1$ см.

IV назарияга мувофиқ: $(\sigma_t - \sigma_r)^2 + \sigma_r^2 + \sigma_t^2 = 2[\sigma]^2$ ёки $\sigma_t^2 + \sigma_r^2 - \sigma_t \sigma_r = [\sigma]^2$ бўлиши керак.

Бу формулага δ_t ва δ_r ларнинг қийматини қўямиз:

$$P_i^2 \left(\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} \right)^2 + P_i^2 + P_i^2 \left(\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} \right)^2 = [\sigma]^4.$$

Бундан b ни аниқлаш учун қуйидаги биквадрат тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\left(\frac{|\sigma|^2}{P_t^2} - 3\right)b^4 - \left(2\frac{|\sigma|^2}{P_t^2} \cdot a^2\right)b^3 + \left(\frac{|\sigma|^2}{P_t^2} \cdot a^2 - 1\right)a^2 = 0.$$

Бу тенгламадан b^2 нинг қуйидаги қийматини оламиз:

$$b^2 = 4 \pm \sqrt{13}; \quad b^2 = 7,6; \quad b = 2,76 \text{ см}; \quad \delta = b - a = 1,7 \text{ см}.$$

192. Ички радиуси $a = 10$ мм, ташқи радиуси $b = 15$ мм бўлган трубага ташқи радиуси $c = 20$ мм бўлган бошқа труба таранг қилиб кийгизилган. Ички труба нинг ички босими $P_t = 2500$ кг/см². Қўшма труба нинг ички сиртидаги кучланиш шундай улчамли бутун труба нинг ички сиртида ҳосил бўладиган кучланишдан 30% кам бўлса, ташқи труба нинг ички радиуси ички труба нинг ташқи радиусидан қанча кичик бўлиши керак?

Е ч и ш. Ташқи труба нинг ички труба ни сиқиб кучи қуйидаги формуладан аниқланади:

$$P = \frac{E\delta}{b} \cdot \frac{(c^2 - b^2)(b^2 - a^2)}{2b^2(c^2 - a^2)}. \quad (a)$$

Бутун труба нинг ички сиртида ҳосил бўладиган кучланиш қуйидагича ифодаланади:

$$\sigma_t' = P_t \frac{c^2 + a^2}{c^2 - a^2}.$$

Ички труба нинг ички сиртида ташқи босим P таъсиридан ҳосил бўладиган кучланиш эса қуйидагича ифодаланади:

$$\sigma_t'' = -P \frac{2b^2}{b^2 - a^2}$$

Масала шартига мувофиқ:

$$\sigma_t'' = \frac{k}{100} \sigma_t'$$

бўлиши керак, бундан:

$$P = \frac{k}{100} P_t \frac{c^2 + a^2}{c^2 - a^2} \cdot \frac{b^2 - a^2}{b^2} \quad (б)$$

бўлади.

(а) формуладан P нинг қийматини (б) га келтириб қўйсак:

$$\delta = \frac{k}{100E} \cdot P_t \frac{c^2 + a^2}{c^2 - a^2} b = \frac{30}{100 \cdot 2 \cdot 10^6} \cdot 2500 \frac{2^2 + 1}{2^2 - 1} \cdot 1,5 = 0,0009 \text{ см}$$

бўлади.

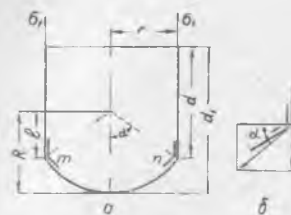
Энди P ни ҳисоблаймиз:

$$P = \frac{30}{100} \cdot 2500 \frac{4 + 1}{4 - 1} \cdot \frac{1,5^2 - 1}{1,5^2} \cong 700 \text{ кг/см}^2.$$

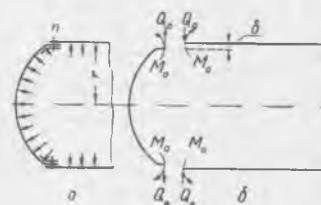
143-§. Резервуар деворида ҳосил бўладиган эгилиш

Суюқлик ёки газ сақланадиган катта идиш *резервуар* дейилади. Резервуарнинг туби билан уст қисмини туташтирадиган жойнинг бикрлигини ошириш мақсадида қўрилган тадбир, яъни бикрлик ҳалқаси туфайли резервуар деформациясининг характери тубдан ўзгаради (501-шакл). Масалан, цилиндрик резервуарнинг туби ярим сфера бўлгани ҳолда, у пайвандлаш ўрнига парчинлаш ёрдамида туташтирилади деб фараз қилайлик (505-шакл). Бу цилиндр билан сферанинг туташтирилган жойидаги кучланиш бир томондан цилиндрик сиртга тегишли бўлса, иккинчи томондан сферик сиртга тегишли бўлгани сабабли туташтирилган нуктадаги кучланиш иккита қийматга эга бўлиши керакдек кўринади, аслида эса ундай эмас. Цилиндрик қисми билан сферик қисм туташиб бир бутун идишни ҳосил қилади, бинобарин, уларнинг туташтирилган жойида ҳосил бўладиган эгувчи момент M_0 билан қўндаланг Q_0 иккала қисм учун тенг бўлиб, юқорда

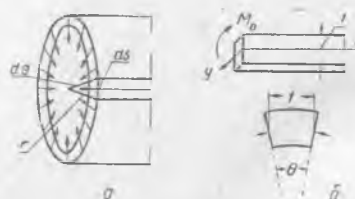
вужудга келган англашилмовчилик ўз-ўзидан ойдинлашади. Бу M_0 билан Q_0 резервуарнинг қўшни қисмларда эгилиш деформациясини ҳосил қилади. Резервуарнинг цилиндрик қисми унинг ўқиға нисбатан симметрик равишда деформациялангани сабабли, унинг эгилишини текшириш учун, ундан меридиан текисликлар билан кенглиги $ds = r d\theta$ бўлган бир балка-полоса ажратамиз (506-шакл, а). Ажратилган бу балка-полоса бўйлама йўналишида



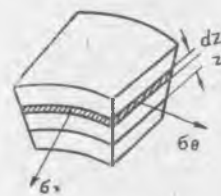
504-шакл.



505-шакл.



506-шакл.



507-шакл.

эгилиб, кўндаланг томони кесиб ташланган қисмларнинг таъсирини алмаштирувчи чўзувчи ёки сиқувчи кучланишлар таъсирида бўлади. Кўндаланг ва бўйлама кучланишлар 507-шаклда σ_x ва σ_θ орқали кўрсатилган. Ажратилган элемент учун улар бош кучланишлар бўлганидан, бу ҳол учун Гук қонуни қуйидагича ёзилади:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_x + \mu \epsilon_\theta); \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_\theta + \mu \epsilon_x)\end{aligned}\quad (a)$$

Ажратилган элементнинг бўйлама ва кўндаланг юзлари бўйича таъсир қилувчи кучланишларнинг йиғиндисини олиб, тегишли зўриқишларни топамиз:

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz = \frac{Eh}{1-\mu^2} (\epsilon_x + \mu \epsilon_\theta) = 0 \quad (b)$$

($N_x = 0$ эканлигининг сабаби шуки, резервуарга чўзувчи куч қўйилган эмас).

$$N_\theta = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_\theta dz = \frac{Eh}{1-\mu^2} (\epsilon_\theta + \mu \epsilon_x); \quad (c)$$

(b) дан $e_x = -\mu e_y$ буни (с) га қўйсак:

$$N_y = E h e_y \quad (d)$$

бўлади.

e_y нинг қийматини 142-параграфда топган эдик. у

$$e_y = \frac{w}{r}$$

эди, шунинг учун:

$$N_y = \frac{E h}{r} w \quad (143.1)$$

бўлади. Ажратилган элементнинг икки ёғига худди шундай кучлар (505-шакл, б да кўрсатилгандек) қўйилган. Уларнинг тенг таъсир этувчиси цилиндр радиуси бўйича йўналган бўлиб, қиймати қуйидагичадир:

$$R = 2 \frac{E h}{r} w \cdot \frac{d\varphi}{2} = \frac{E h}{r} \frac{d\varphi}{ds} \cdot w ds; \quad (e)$$

бунда $\frac{d\varphi}{ds} = \frac{2}{r}$ бўлади. Масалани осонлаштириш учун балка-полосанинг кенглигини $ds = 1$ қилиб оламиз. у ҳолда

$$R = \frac{E h}{r^2} w \quad (143.2)$$

бўлади. Бу куч эластик асосда ётувчи балканинг эластик реакциясига ўхшаб кетади, чунки у балка-полосанинг эгилиш салқилиги w га пропорционал ҳолда ўзгармоқда. Унинг пропорционаллик коэффициенти:

$$k = \frac{E h}{r^2}. \quad (143.3)$$

Энди балка-полосанинг дифференциал тенгламасини тузиш осон; бу тенглама эластик асосда ётувчи балка тенгламаси кабидир:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{E h}{r^2} w = q; \quad (143.4)$$

бу ерда q — резервуардаги суюқлик ёки газнинг балка-полосага таъсир қилган босими. Бу тенгламада бикрликни ифодаловчи D ҳарфидан цилиндр бикрлик деб аталувчи маънони тушунмоқ лозим. Унинг қийматини ҳозирча исботсиз келтирамиз (бу қиймат XXII бобда исботланган):

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)}.$$

Дифференциал тенглама (143.4) ни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\alpha^4 w = \frac{q}{D}; \quad (143.4^*)$$

бунда:

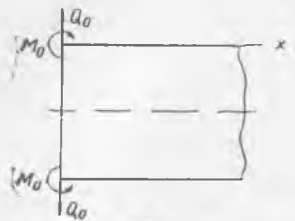
$$4\alpha^2 = \frac{12(1-\mu^2)}{r^2 h^2}; \quad \alpha = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{r^2 h^2}} \quad (143.5)$$

бўлади. (143.4) тенгламанинг умумий интегралини юқорида қуйидагича ёзган эдик:

$$w = e^{\alpha x} (C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x) + e^{-\alpha x} (C_3 \cos \alpha x + C_4 \sin \alpha x) + f(x); \quad (143.6)$$

бу ерда $f(x)$ — бир жинсиз (143.4) тенгламанинг хусусий интеграл; C_1, C_2, C_3, C_4 — интеграллаш ўзгартувчилари бўлиб, улар ҳар қайси хусусий

қолда цилиндрик резервуар учларининг маҳкамланиш шартларидан аниқланади. Мисол учун чап қирғоғига тенг ёйилган эгувчи момент M_0 ва қўндаланг куч Q_0 қўйилган узун трубани оламыз (508-шакл). Трубага бевосита қўйилган юк бўлмаганидан (143.4) нинг ўнг томони $q = 0$, (143.6) даги жусусий интеграл эса $f(x) = 0$ бўлади. Трубанинг $x = 0$ кесимида қўйилган



508-шакл.

кучлар фақат маҳаллий аҳамиятга эга бўлиб, x нинг қиймати ортган сари M_0 ва Q_0 нинг таъсири камайиб борганидан (143.6) тенгламадаги $C_1 = C_2 = 0$ бўлиши керак; шунда (143.6) тенглама қуйидагича ёзилади:

$$w = e^{-\alpha x} (C_3 \cos \alpha x + C_4 \sin \alpha x); \quad (143.7)$$

C_3 ва C_4 ни $x = 0$ кесимининг қуйидаги юкланиш шартидан аниқлаймиз:

$$\left. \begin{aligned} (M)_{x=0} &= -D \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x=0} = M_0; \\ (Q)_{x=0} &= -D \left(\frac{d^3 w}{dx^3} \right)_{x=0} = Q_0. \end{aligned} \right\} \quad (143.8)$$

w нинг қийматини (143.7) дан (143.8) га қўйсак, C_3 билан C_4 нинг қиймати чиқади:

$$C_3 = -\frac{1}{2\alpha^3 D} (Q_0 + \alpha M_0); \quad C_4 = \frac{M_0}{2\alpha^2 D}. \quad (143.9)$$

Булар кўзда тутилганида w нинг қиймати қуйидагича ёзилади:

$$w = \frac{e^{-\alpha x}}{2\alpha^2 D} [\alpha M_0 (\sin \alpha x - \cos \alpha x) - Q_0 \cos \alpha x]. \quad (143.10)$$

Энг катта эгилиш трубанинг юкланган учига тўғри келади ва у қуйидагича ифодаланади:

$$(w)_{x=0} = -\frac{1}{2\alpha^2 D} (\alpha M_0 + Q_0). \quad (143.11)$$

Юкланган кесимнинг эгилишини топамиз:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dw}{dx} \right)_{x=0} &= \frac{e^{-\alpha x}}{2\alpha^2 D} [2\alpha M_0 \cos \alpha x + Q_0 (\cos \alpha x + \sin \alpha x)]_{x=0} = \\ &= \frac{1}{2\alpha^2 D} (2\alpha M_0 + Q_0). \end{aligned} \quad (143.12)$$

122-параграфда қилганимиздек, қуйидаги функцияларни киритамиз:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= e^{-\alpha x} (\cos \alpha x + \sin \alpha x), & \theta &= e^{-\alpha x} \cos \alpha x; \\ \psi &= e^{-\alpha x} (\cos \alpha x - \sin \alpha x), & \xi &= e^{-\alpha x} \sin \alpha x. \end{aligned} \right\} \quad (143.13)$$

Бу функциялар орқали эгилиш w ва унинг кетма-кет ҳосилалари қуйидагича ёзилади:

$$\left. \begin{aligned} w &= -\frac{1}{2\alpha^3 D} [\alpha M_0 \psi(\alpha_1 x) + Q_0 \theta(\alpha_1 x)]; \\ \frac{dw}{dx} &= \frac{1}{2\alpha^2 D} [2\alpha M_0 \theta(\alpha_1 x) + Q_0 \psi(\alpha_1 x)]; \\ \frac{d^2 w}{dx^2} &= -\frac{1}{2\alpha D} [2\alpha M_0 \varphi(\alpha_1 x) + 2Q_0 \xi(\alpha_1 x)]; \\ \frac{d^3 w}{dx^3} &= \frac{1}{D} [2\alpha M_0 \xi(\alpha_1 x) - Q_0 \psi(\alpha_1 x)]. \end{aligned} \right\} \quad (143.14)$$

φ , ψ , θ , ξ функцияларнинг қийматлари 479-бетдаги жадвалда ёки 446-шаклдаги графикда берилган. У жадвалдан ва графикдан аргумент αx нинг қўпайиши билан $\varphi(\alpha, x)$ ва $\psi(\alpha, x)$ нинг нолга интилаётганини кўра-миз. Ҳақиқатан ҳам юпка қўбиқларда ҳосил бўладиган эгилишнинг маҳал-лий аҳамиятигина бор, холос.

144-§. Цилиндрик резервуар ҳисоби

Пастки учи билан бикр асосга бириктирилган, солиштирма оғирлиги γ бўлган суюқлик билан тўлдирилган цилиндрик резервуарда ҳосил бўла-диган кучланишни ҳисоблаймиз (509-шакл). Резервуар тўлдирилган суюқ-лик босими унинг эркин учидан ҳисоблан-ган оралиққа пропорционал ўзгаради (509-шакл). x резервуар тагидан ҳисобланса, бо-сим куйидагича бўлади:

$$P = -\gamma(h - x).$$

Дифференциал тенглама (143.4') нинг ҳу-сусий интеграл $\hat{f}_{(x)}$ куйидагича ёзилади:

$$\hat{f}_{(x)} = \frac{\gamma(h - x)}{4a^4 D}. \quad (144.1)$$

У ҳолда тенгламанинг умумий интеграл w (143.6) га биноан, куйидагича ёзилади:

$$w = e^{\alpha x} (C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x) + e^{-\alpha x} (C_3 \cos \alpha x + C_4 \sin \alpha x) - \frac{\gamma(h - x)}{4a^4 D}. \quad (144.2)$$

Амалда резервуар деворининг қалинлиги δ унинг радиусига ва баландлигига қараганда жуда кичик бўлганидан, резервуарни чексиз узун деб қарашимиз мумкин. У ҳолда C_1 ва C_2 нолга тенг бўлади. Шунинг учун (143.2) куйида-гича ёзилади:

$$w = e^{-\alpha x} (C_3 \cos \alpha x + C_1 \sin \alpha x) - \frac{\gamma(h - x)a^2}{E\delta}. \quad (144.2')$$

Резервуар асосининг деформацияланиш шартидан C_3 ва C_4 ни топамиз.

Резервуарнинг асоси абсолют бикр равишда қистириб тиралган бўлга-ни сабабли:

$$(w)_{x=0} = C_3 - \frac{\gamma a^2 h}{E\delta} = 0,$$

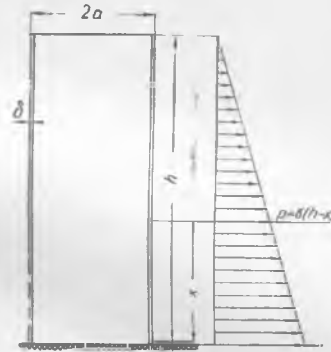
$$\left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x=0} = \left[-\alpha C_3 e^{-\alpha x} (\cos \alpha x + \sin \alpha x) + \alpha C_4 e^{-\alpha x} (\cos \alpha x - \sin \alpha x) + \frac{\gamma a^2}{E\delta} \right]_{x=0} = \alpha (C_4 - C_3) + \frac{\gamma a^2}{E\delta} = 0$$

бўлади. Бу тенгламалардан:

$$C_3 = \frac{\gamma a^2 h}{E\delta}, \quad C_4 = \frac{\gamma a^2}{E\delta} \left(h - \frac{1}{\alpha} \right)$$

келиб чиқади. Булар кўзда тутилганда (144.2') куйидагича ёзилади:

$$w = -\frac{\gamma a^2}{E\delta} \left\{ h - x - e^{-\alpha x} \left[h \cos \alpha x + \left(h - \frac{1}{\alpha} \right) \sin \alpha x \right] \right\},$$



509-шакл.

(143.13) да ифодаланган функциялар орқали бу тенгламани қуйидагича ёзамиз:

$$w = -\frac{\gamma a^2 h}{E\delta} \left[1 - \frac{x}{h} - \theta(\alpha x) - \left(1 - \frac{1}{ah} \right) \xi(\alpha x) \right]. \quad (144.3)$$

Бу ифода жадвал ва (143.1) дан фойдаланиб, цилинрик резервуарни ясов-
чиси бўйича ёрувчи айлана куч N_3 ни ҳисоблашга имкон беради:

$$N_3 = -\frac{E\delta}{a} w = \gamma a h \left[1 - \frac{x}{h} - \theta(\alpha x) - \left(1 - \frac{1}{ah} \right) \xi(\alpha_1 x) \right] \quad (144.4)$$

(144.3) нинг иккинчи ҳосиласи эгувчи моментни беради:

$$\begin{aligned} M_x &= -D \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{2a^2 \gamma a^2 D h}{E\delta} \left[-\xi(\alpha_1 x) + \left(1 - \frac{1}{ah} \right) \theta(\alpha_1 x) \right] = \\ &= \frac{\gamma a h \delta}{\sqrt{12(1-\mu^2)}} \left[-\xi(\alpha_1 x) + \left(1 - \frac{1}{ah} \right) \theta(\alpha_1 x) \right]. \end{aligned} \quad (144.5)$$

Худди шу тарзда кесиб ўтувчи куч Q ни ҳам ҳисоблашимиз мумкин. N_3 ва M_x ифодасидан фойдаланиб, ҳар бир хусусий ҳол учун резервуарнинг ҳар қайси нуқтасидаги кучланишни ҳисоблаймиз. Эгувчи момент резервуар-
нинг асосида максимал қийматга эришади:

$$M_{\max} = (M_x)_{x=0} = \left(1 - \frac{1}{ah} \right) \frac{\gamma a h \delta}{\sqrt{12(1-\mu^2)}}. \quad (144.6)$$

Масалан, амалда ишлатилалиган цилинрик резервуар ўлчамларини оламиз, улар: $a = 9,15$ м, $h = 7,93$ м, $\delta = 3,57$ мм, $\mu = 0,25$ бўлсин. (142.5) дан $\alpha = 0,00718 \frac{1}{\text{см}}$; $\alpha h = 5,691$. (144.6) дан $M_{\max}$ ни топамиз, у:

$$M_{\max} = 6,338 \text{ кгм}$$

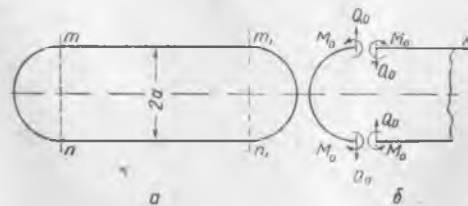
бўлади.

145-§. Босим таъсиридаги газ баллонларининг ҳисоби

Газ баллонлари цилинрик резервуарларнинг уч томонларидаги асоси ярим сфералардан иборат бўлади (510-шакл). Цилиндр билан ярим сферанинг туташтирилган чоклари m ва n , дан узок жойлашган кесимлардаги кучланишларни юпка деворли идишлар ҳисоби учун чиқарилган (140.2) ва (140.3) формулалардан фойдаланиб қуйидагича ҳисоблашимиз мумкин:

$$N_x = \sigma_1 \delta = \frac{Pa}{2}, \quad N_\varphi = \sigma_2 \delta = Pa; \quad (145.1)$$

бу ерда P — газнинг баллонга кўрсатган ички босими.



510-шакл.

Сферик асосли баллон учун Лаплас тенгламаси, унга тенг ёйилган чўзувчи куч таъсир қилган чоқда қуйидагича ёзилади:

$$N = \frac{Pa}{2}. \quad (145.2)$$

Баллоннинг цилиндрик қисми радиусининг абсолют чўзилиши (145.1) дан қуйидагича аниқланади:

$$\Delta a = \varepsilon_a \cdot a - \mu \varepsilon_a \cdot a, \text{ бунда } \varepsilon_a = \frac{w}{a} \text{ бўлади, ёки:} \quad (145.3)$$

$$\Delta a = \frac{Pa^2}{E\delta} \left(1 - \frac{\mu}{2}\right).$$

Сферик асос радиусининг абсолют чўзилиши қуйидагича бўлади:

$$\Delta a_1 = \frac{Pa^2}{2E\delta} (1 - \mu). \quad (145.4)$$

Бу ифода­лардан дарҳақиқат чок кесими бўйича узлуксизлик шартининг бажарилганлигини кўра­миз. Узлуксизлик шартининг тикланиши учун цилиндрик қисм билан сферик қисм уланган жойдаги кесимда Q_0 ва M_0 нинг мавжуд бўлиши шарт. Қатъий усулни татбиқ этиб, Q_0 билан M_0 ни аниқлашда сферик қобик учун алоҳида, цилиндрик қисми учун алоҳида тенгламалар тузиш ва узлуксизлик шартидан фойдаланиб, тегишли тенгламаларни чиқариш зарур эди. Аммо масалани мураккаб­лаш­тирмаслик учун, тақрибий равишда, туташтирилган чокни цилиндрик сирт деб қараймиз. У ҳолда иккала қисмнинг қалин­ли­ги бир хилда бўлса, айланиш бурчаги ҳам Q_0 таъсиридан бир хилда бўлади. Модомики, узлуксизлик шартини Q_0 нинг ўзи бажара олар экан, $M_0 = 0$ бўлади.

Иккала қисми эгилишининг йиғиндисини радиал чўзилишлар айирмаси $\Delta a - \Delta a_1$ га тенг бўлиши керак. Бу шартдан Q_0 ни англашимиз мумкин. Баллон чоқида Q_0 дан ҳосил бўлган эгилишни (143.11) дан аниқлаб, қуйидаги тенгламани оламиз:

$$\frac{Q_0}{a^3 D} = \Delta a - \Delta a_1 = \frac{Pa^2}{2E\delta}.$$

Бу тенгламадан (143.5) ни кўзда тутиб Q_0 ни аниқлаймиз:

$$Q_0 = \frac{Pa^2 a^3 D}{2E\delta} = \frac{P}{\delta x}. \quad (145.5)$$

Энди (143.14) формуладан фойдаланиб, w ва M_x ни топамиз:

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{Q_0}{2a^2 D} \theta(\alpha_1 x); \\ M_x &= -D \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{Q_0}{\alpha} \xi(\alpha_1 x). \end{aligned} \right\} \quad (145.6)$$

(145.5) даги Q_0 нинг қийматини (145.6) га қўйиб, эгувчи момент M_x нинг қийматини аниқлаймиз:

$$M_x = -\frac{a\delta P}{b \sqrt{3(1-\mu^2)}} \xi(\alpha_1 x). \quad (145.7)$$

Бу момент абсолют қиймат жиҳатидан $x = \frac{\pi}{4\alpha}$ бўлганида ўзининг максимал қийматига эга бўлади, чунки $\xi(\alpha x)$ функциянинг биринчи ҳосиласи шу нуқтада нолга айланади. Лаплас тенг­ла­маси билан аниқланган кучланиш ва $(M_x)_{\max}$ дан ҳосил бўлган кучланишларни жамғариб, максимал чўзувчи кучланишни топиш учун қуйидаги формулани оламиз:

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{Pa}{2\delta} \left[1 + \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \xi\left(\frac{\pi}{4}\right) \right] = 1,293 \frac{aP}{2\delta}. \quad (145.8)$$

XXI боб

БАЛКАЛАРНИНГ УСТИВОРЛИГИГА ОИД БАЪЗИ
МУРАККАБ МАСАЛАЛАР

146- §. Масаланинг қўйилиши

Балкаларнинг устивор мувозанатда бўлишига оид энг оддий масалаларни олдин тавсиф этган эдик. Замонамизда техниканинг тараққий этиши машиналар ва қурилиш конструкциялари элементларининг устивор мувозанатда бўлишига оид масалаларни кўплаб хал қилишни талаб қилади ва бу соҳани мукаммалроқ баҳс қилиш учун амалий эластиклик назариясида, шунингдек, қурилиш механикасида махсус бўлим ажратилади. Бу бобда эластик системаларнинг устивор мувозанатда бўлиш шартига оид усулларни қисқача тавсифлаб, уларни амалда учрайдиган масалалар билан ойдинлаштирамиз. Эгилишга оид масалаларни текширганимизда, эластик деформацияланувчи стерженларнинг устиворлик мувозанати йўқолишига оид ҳодисанинг моҳиятини тушунтирган эдик; сиқувчи куч таъсиридан стержендаги сиқилиш деформацияси аста-секин ўсиб, куч маълум миқдорга егганда деформация ўз характерини ўзгартиб, сиқилишдан эгилишга айланади ва деформация жуда ҳам тез ортади. Айтилган масалани ечишда биз асосий сиқилиш деформациясини ҳисобга олмаган эдик; устиворлик масаласи текширилганда, стержень худди деформацияланмаган деб фараз қилинган эди; амалда учратиладиган муҳим масалаларни ечишда, кўпинча, худди шу тарзда фикр юритилади. 102- параграфда энг оддий ҳоллар учун устивор мувозанат шартини эгилган ўқ дифференциал тенгламаси интегралнинг маълум чегара шартларидан фойдаланиб текширган эдик. Эгилган ўқ дифференциал тенгламасини ечиш мураккаб оқибатларга келтирадиган чокларда масалани энергетик усуллардан (материаллар қарши-лигининг умумий теоремаларидан) фойдаланиб ечиш қулай.

147- §. Бўйлама ва кўндаланг эгилиш

Материаллар қаршилигига оид масалалар қаторига, бўйлама ва кўндаланг кучлар биргаликда таъсир этадиган призматик стерженлар ҳам киради. Бу ҳолда кучланиш билан ташқи кучлар орасидаги тўғри чизиqli муносабат бузилади, шу билан бирга, кучлар таъсирининг бир-бирига боғлиқсизлик принципи ҳам ўз кучини йўқотади. Ҳақиқатан ҳам икки таянчда ётувчи балка ихтиёрий кўндаланг юк билан бирга, яна сиқувчи бўйлама куч N таъсирида бўлса, унинг бирор $m = n$ кесимидаги эгувчи момент иккала йўналишда қўйилган кучларга боғлиқ бўлади (511- шакл). Бунда эгувчи моментининг бўйлама кучидан ҳосил бўладиган ҳиссаси балканинг тегишли кесимдаги салқилиги ω га боғлиқ бўлади, яъни:

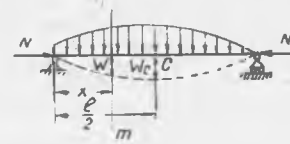
$$M = M_0 + N\omega; \quad (147.1)$$

бу ерда M_0 — кўндаланг кучлардан ҳосил бўлган эгувчи момент.

Текширилаётган қирқимдаги энг катта кучланиш қуйидаги формула билан ифодаланади:

$$\sigma = \frac{N}{P} + \frac{M_0 + Nw}{W}. \quad (147.2)$$

Текширилаётган ҳол учун кучлар таъсирининг бир-бирига боғлиқсизлик принциpidан фойдаланиб бўлмаслиги юқоридаги ифодадан яққол кўриниб турибди, чунки бўйлама ва қундаланг кучларнинг таъсири алоҳида текширилганда эди, унда бўйлама кучнинг моменти нолга тенг бўлар эди. Ваҳоланки, балкага қўйилган юкларни n марта қўнай-тирсак, кучланиш n мартадан кўпроқ ошади. Чунки бўйлама куч N ва қундаланг кучлардан ҳосил бўладиган эгувчи момент n марта ошгани сабабли Nw янада кўпроқ ошади. Шу туфайли кучланиш билан ташки юклар орасидаги тўғри муносабат бузилади.



511- шакл.

Бўйлама ва қундаланг эгилишдаги кучланишни ҳисоблаш учун, аввало салқилик w ни аниқлаш лозим эканлиги (147.2) формуладан кўринади. Илгари текширилган масалаларда бундай ҳол учрамаган эди. Салқилик (w) балканинг эгилган ўқининг дифференциал тенгламасини интеграллаш йўли билан аниқланади:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = - \frac{M_0 + Nw}{EI} \quad (147.3)$$

Аммо бу тенгламанинг интегралини ахтариш ўрнига эгилган ўқининг бирор тақрибий формасига оид тенгламани олиш билан чегараланса ҳам бўлади. Қабул қилинган тақрибий формага оид тенглама таянч шартларини қаноатлантириш билан бирга максимал салқилик ҳосил бўладиган жойнинг ўрни юк схемасига мос келиши керак. Икки таянчда ётувчи балкага қундаланг ёйилган ёки тўпланган юклар таъсир кўрсатса, энг катта салқиликни тахминан балканинг ўртасида деб ҳисоблаш мумкин. Шунинг учун бундай ҳолларда эгилган ўқининг тақрибий формасига оид тенглама тариқасида қуйидаги ифодани олса бўлади:

$$w = w_c \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (147.4)$$

Балканинг таянч нуқталарида салқилик нолга тенг бўлади; бу шартни қуйидагича ёзиш мумкин: $x = 0$, $x = l$ бўлганда, $w = 0$ ва $x = \frac{l}{2}$ бўлганда, $w_{\max} = w_c$ бўлади. Бу шартдан w_c нинг киймати аниқланса, эгилган ўқининг тақрибий формаси топилган бўлади. Юқорида келтирилган w ифодасининг x га нисбатан икки қайта ҳосиласини оламиз:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = - w_c \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l}$$

Буни эгилган ўқининг дифференциал тенгламасига қўямиз:

$$w_c \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l} = \frac{M_0 + Nw}{EI}.$$

Бу координатаси x бўлган ихтиёрий кесим марказининг салқилигидир. У ўрта кесими, яъни $x = \frac{l}{2}$ учун қуйидагича ифодаланади:

$$w_c \frac{\pi^2}{l^2} = \frac{M_{c0} + Nw_0}{EI}$$

бу ерда M_{c0} — балканинг ўрта кесимидаги фақат кўндаланг кучлардан тузилган эгувчи момент. Бу момент қуйидагича аниқланади:

$$M_{c0} = \left(\frac{\pi^2 EI}{l^2} - N \right) w_c. \quad (147.5)$$

Қавс ичидаги биринчи хад Эйлер формуласи билан аниқланган критик кучдир, уни N_k билан белгиласак, балка ўртасидаги салқилик w_c қуйидагича ифодаланади:

$$w_c = \frac{M_{c0}}{N_k - N} = \frac{M_{c0}}{1 - \frac{N}{N_k}} \quad (147.6)$$

Агар $N = 0$ бўлса, бу формуладан фойдаланиб, фақат балканинг қоқ ўртасида кўндаланг юк таъсирида ҳосил бўлган салқиликнинг тақрибий қиймати аниқланади:

$$w_{c0} = \frac{M_{c0}}{N_k}. \quad (147.7)$$

Бунинг назарда тутиб, (147.6) формулани қуйидагича ёзиш мумкин:

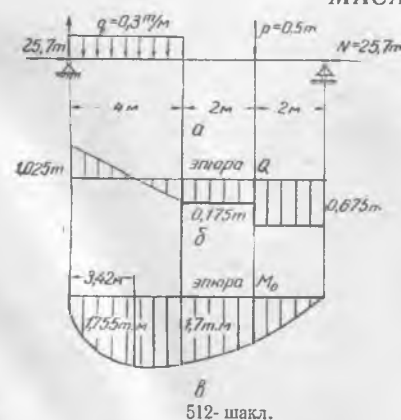
$$w_c = \frac{w_{c0}}{1 - \frac{N}{N_k}} \quad (147.8)$$

Шундай қилиб, эгилган ўқнинг тақрибий тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$w = \frac{w_{c0}}{1 - \frac{N}{N_k}} \cdot \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (147.9)$$

Бу тақрибий назарияни битта конкрет масалага татбиқ қиламиз.

МАСАЛА



193. 512- шаклда тасвирланган балка учун қуйидагилар маълум:

$I = 1732 \text{ см}^4$; $w = 216,6 \text{ см}^3$; $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$. $F = 43,9 \text{ см}^2$.

Балка материали учун оқини чегараси $\sigma_T = 3440 \text{ кг/см}^2$. Мустаҳкамлик коэффициенти n аниқлансин.

Ечиш. Олдин кўндаланг кучлар, яъни эгувчи момент ва кесиб ўтувчи кучларнинг эпюраларини чизамиз. Улар тегишлича 512-шаклнинг б ва в қисмларида тасвирланган. Балканинг ўрта кесимидаги момент $M_{c0} = 1,7 \text{ тм}$. Қуйидаги формуладан критик кучни аниқлаймиз:

$$P_k = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{10 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 1732}{(800)^2} = 56,2 \text{ т.}$$

Балканинг қоқ ўртасида фақат кўндаланг юклар таъсиридан ҳосил бўлган салқиликни қуйидаги формуладан топамиз:

$$w_{co} = \frac{M_{co}}{P_k} = \frac{170}{50,2} = 3,03 \text{ см.}$$

Балканинг ўрта кесимида бўйлама ва қўндаланг кучлар таъсиридан ҳосил бўлган салқиликни эса қуйидаги формуладан аниқлаймиз:

$$w_c = \frac{w_{co}}{1 - \frac{N}{N_{co}}} = \frac{3,03}{1 - \frac{25,7}{56,2}} = 5,58 \text{ см.}$$

Хавфли кесим ҳам бу масалада балканинг ўртасига тўғри келаётир, шунинг учун:

$$M_{max} = M_{co} + Nw_c = 170 + 25,7 \cdot 5,58 = 313,5 \text{ тсм.}$$

бўлиши керак.

Энг катта кучланиш ботиқ томоннинг четдаги нуқтасида ҳосил бўлиб, у қуйидагича ифодаланади:

$$\sigma_{max} = \frac{N}{F} + \frac{M_{max}}{w} = \frac{25700}{43,9} + \frac{313500}{216,6} = 2030 \text{ кг/см}^2.$$

Бу масалани аниқроқ ечиш оқибатида чиққан натижа σ_{max} учун 2085 кг/см² қийматини беради. Бу эса тақрибий қийматдан қуйидаги миқдорда фарқ қилади:

$$\frac{2085 - 2030}{2085} \cdot 100\% = 2,6\%.$$

Мустаҳкамлик коэффициентини ҳисоблаш учун оддий ҳолда оқим чегарасига тегишли кучланиш σ_T ни σ_{max} га бўлар эдик, яъни:

$$\frac{\sigma_T}{\sigma_{max}} = n; \quad n = \frac{3440}{2030} = 1,69.$$

Аммо бўйлама қўндаланг эгилишида кучланиш юкка қараганда тезроқ ўсгани сабабли, мустаҳкамлик коэффициенти n кичикроқ бўлиши керак, бу фикрнинг тўғрилигини қуйидагича исбот қилиш мумкин:

$$M_{max} = M_{co} + Nw_c = M_{co} + N \frac{\frac{M_{co}}{P_k}}{1 - \frac{N}{P_k}} \quad \text{бўлганидан:}$$

$$\sigma_{max} = \frac{N}{F} + \frac{M_{co}}{w} + \frac{N}{w} \cdot \frac{\frac{M_{co}}{P_k}}{1 - \frac{N}{P_k}}$$

бўлади.

Барча юклар n марта кўпайтирилганда, хавфли нуқтада ҳосил бўладиган максимал кучланиш σ_{max} балка материалнинг оқиш чегарасига тегишли қийматига эришсин, яъни $\sigma_{max} = \sigma_T$ бўлсин, у ҳолда:

$$\sigma_T = \frac{Nn}{F} + \frac{M_{co}n}{w} + \frac{Nn}{w} \cdot \frac{\frac{M_{co}n}{P_k}}{1 - \frac{Nn}{P_k}}$$

бўлади.

Берилган қийматларни ўз ўрнига қўйиб, тенгламани қуйидагича ёзамиз:

$$3440 = \frac{25700n}{43,9} + \frac{170000n}{216,6} + \frac{25700n}{216,6} \cdot \frac{\frac{170000n}{56,00}}{1 - \frac{25700n}{56200}}.$$

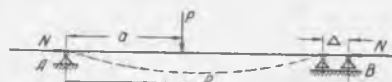
Бу тенгламадан n нинг қуйидаги иккита қийматини топамиз:

$$n = 5,55 \pm 4,21.$$

$n = 9,76$ илдиэнинг ҳеч қандай физик маъноси йўқ, чунки $n = 2,19$ бўлгандаёқ, охириги ҳалнинг махражи нолга айланиб, кучланиш чексиз қийматга интилади. Шунинг учун $n = 1,34$ бўлади.

148-§. Бўйлама ва кўндаланг куч таъсиридаги балканинг мустаҳкамлигини энергетик усулда ҳисоблаш

Олдинги параграфда балкаларнинг салкилигини топишда ишлатилган тенгламани (эгилган ўқнинг тенгламасини) тақрибий ифодалаш усулидан фойдаланиб, бўйлама ва кўндаланг юклар таъсиридаги икки учи билан тиралган балканинг салкилигини энергетик усулда ҳисоблаймиз (513-шакл).



513-шакл.

Балкага бўйлама куч N ва чап таянчдан a масофада жойлашган кўндаланг куч P таъсир қилмоқда деб фараз қилайлик.

Балка ўзига қўйилган кучлар таъсиридан эгилиб, A ва B нуқталар Δ миқдорга яқинлашади. Эгилган балка ўқининг тақрибий ифодаси учун чегара шартларини қаноатлантирувчи синусоидани қабул қиламиз:

$$w = w_0 \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Бу ифодага кўра, балканинг эгилишдаги потенциал энергияси қуйидагича ифодаланади:

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{\pi^4 EI}{4l^3} w_0^2. \quad (148.1)$$

Балка учларининг яқинлашиши Δ эгилган ўқнинг узунлиги билан унинг ватари айирмасыга тенг, яъни:

$$\Delta = \int_0^l (ds - dx); \quad ds = \sqrt{(dx)^2 + (dw)^2} = \left[1 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx.$$

w нинг кичиклигидан фойдаланиб $\left[1 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ нинг тақрибий қийматини оламиз:

$$\left[1 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \approx \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + \dots \right] dx.$$

Шунинг учун

$$\Delta = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx$$

бўлади. w нинг қийматини келтириб қўйсак:

$$\Delta = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx = \frac{\pi^2 w_0^2}{4l} \quad (148.2)$$

ҳосил бўлади. Балкага мумкин бўлган қўшимча эгилиш берамиз, у ҳолда унинг кўндаланг P юк қўйилган нуқтасининг мумкин бўлган кўчиши:

$$\delta w = \delta w_0 \sin \frac{\pi x}{l}$$

бўлади. Юк қўйилган нуқтанинг координатаси $x = a$ бўлгандан:

$$\delta w = \delta w_0 \sin \frac{\pi a}{l}$$

бўлади. Бўйлама куч N қўйилган нуқта $\delta \Delta$ га кўчади. $\delta \Delta$ нинг қиймати қуйидагича аниқланади:

$$\delta \Delta = \frac{\pi^2 w_0}{2l} \delta w_0$$

Бу кўчишлар натижасида балканинг потенциал энергияси ўзгаради:

$$\delta v = \frac{\pi^4 EI}{2l^3} w_0 \delta w. \quad (a)$$

Юкларнинг энергиялари қуйидаги миқдорда озяди:

$$\delta A = P \delta w + N \delta \Delta$$

ёки

$$\delta A = P \sin \frac{\pi a}{l} \delta w_0 + N \frac{\pi^2 w_0}{2l} \delta w_0. \quad (b)$$

$\delta v = \delta A$ бўлганидан (a) ва (b) тенгламалардан фойдаланиб, қуйидаги тенгламани ёзамиз:

$$\frac{\pi^4 EI}{2l^3} w_0 \delta w_0 = P \sin \frac{\pi a}{l} \delta w_0 + N \frac{\pi^2 w_0}{2l} \delta w_0.$$

δw кўчиш тамоман ихтиёрий бўлганидан, унинг олдидаги коэффициентлар йиғиндиси нолга тенг бўлиши керак, яъни:

$$\left(\frac{\pi^4 EI}{2l^3} w_0 - N \frac{\pi^2 w_0}{2l} - P \sin \frac{\pi a}{l} \right) \delta w_0 = 0, \quad \delta w \neq 0.$$

Шунинг учун

$$w_0 = \frac{2Pl \sin \frac{\pi a}{l}}{\pi^2 \left(\frac{\pi^2 EI}{l^2} - N \right)} \quad (148.3)$$

бўлади. $\frac{\pi^2 EI}{l^2} = N_k$ Эйлер критик кучи бўлганидан (148.3) ни қуйидагича ёзамиз:

$$w_0 = \frac{2Pl^3 \sin \frac{\pi a}{l}}{\pi^4 EI \left(1 - \frac{N}{N_k} \right)} \quad (148.4)$$

Бўйлама куч N мавжуд бўлмаса, қундаланг юк қўйилган кесимнинг пайиши қуйидагича аниқланади:

$$f_0 = \frac{2Pl^3 \sin \frac{\pi a}{l}}{\pi^4 EI}$$

P — куч балканинг қоқ ўртасига қўйилган бўлса:

$$f_0 = \frac{2Pl^3 \sin \frac{\pi a}{l}}{\pi^4 EI} = \frac{Pl^3}{48,7 EI}$$

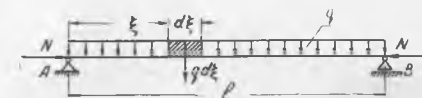
бўлади. Бу қиймат, шу ҳол учун чиқарилган аниқ қийматдан жуда ҳам кам фарқ қилади. Қўндаланг куч балка оралигининг қоқ ўртасига қўйилган ҳолда, бўйлама куч N ҳам мавжуд бўлса:

$$w_0 = \frac{f}{1 - \frac{N}{N_k}} \quad (148.5)$$

бўлади. Эгилган ўқнинг ҳар қандай нуқтаси учун формулани қуйидагича ёзамиз:

$$w = \frac{f \sin \frac{\pi x}{l}}{1 - \frac{N}{N_k}} \quad (148.6)$$

Бундан қўрамизки, бўйлама куч ўзининг критик қийматига эришса, эгилиш чексиз қийматга эга бўлади. Агар балкага унинг оралиги бўйича тенг ёйилган юк қўйилган тақдирда ҳам формула (148.3) ўз кучини сақлайди.



514-шакл.

Тенг ёйилган юк таъсиридаги балканинг бирор кесим координатасини ξ десак, бу кесим ёнидан ажратилган $d\xi$ оралигидаги элементга $q d\xi$ кучи қўйилган бўлади (514-шакл). Бу кучни (148.3) даги P нинг ўрнига қўйиб, у ифоданинг O дан l гача интеграл

лини ҳисобласак, бунда N ва тенг ёйилган қўндаланг куч q таъсиридаги w ни аниқлаган бўламиз:

$$w_0 = \int_0^l \frac{q l^3 \sin \frac{\pi \xi}{l} d\xi}{E l^2 \left(1 - \frac{N}{N_k}\right)} = \frac{q l^4}{E l^2 \left(1 - \frac{N}{N_k}\right)}.$$

Бўйлама куч мавжуд бўлмаган ҳолда, балканинг ўртасидаги эгилиш қуйидагича ифодаланади:

$$f_0 = \frac{b l^4}{\frac{\pi^5}{4} E I} \approx \frac{5}{384} \frac{q l^4}{E I} \quad (148.6')$$

Қўндаланг куч q билан бўйлама куч N нинг бирга қўшилиб, таъсир қилиши эгилган ўқнинг тенгламаси билан ифодаланади:

$$w = \frac{f_0 \sin \frac{\pi x}{l}}{1 - \frac{N}{N_k}} \quad (148.7)$$

Энди шу келтирилган ҳол учун эгувчи моментни ифодалаш тенгламасини тузамиз:

$$M_{\max} = M_0 + N f = \frac{q l^2}{8} + N f;$$

(148.7) дан

$$f = \frac{f_0}{1 - \frac{N}{N_k}} = \frac{q l^4}{384 E I} \cdot \frac{1}{1 - \frac{N}{N_k}}.$$

Шунинг учун

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} + N \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{384} \cdot \frac{1}{1 - \frac{N}{N_k}} = \frac{ql^2}{8} \left(1 + \frac{1,028 \frac{N}{N_k}}{1 - \frac{N}{N_k}} \right).$$

$1,028 \approx 1,00$ ва $\frac{N}{N_k} = \alpha$ десак, у ҳолда:

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} \left[1 + \frac{\alpha}{1 - \alpha} \right] = \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{1}{1 - \alpha} \quad (148.8)$$

бўлади (бу ифодадаги $\alpha = \frac{N}{N_k}$ дир).

Энг катта кучланиш балканинг уст томони толаларида ҳосил бўлганидан:

$$\delta_{\max} = -\frac{N}{F} - \frac{M_{\max}}{W}$$

бўлади. Максимал кучланишнинг абсолют қиймати учун қуйидаги формулани оламиз:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{F} + \frac{ql^2}{8W} \frac{1}{1 - \alpha}. \quad (148.8')$$

Бундан кучланиш бўйлама ва қўндаланг кучлар қўшилиб таъсир кўрсатганда, қўйилган кучга пропорционал ўсмаётганлиги кўриниб турибди. Қўйилган юкларга кўра кучланиш тезроқ ўсмоқда. Масалан, балкага қўйилган юкларни икки марта кўпайтирсак, $\frac{N}{F}$ билан $\frac{ql^2}{8W}$ икки марта ошади, аммо $\frac{1}{1 - \alpha}$ нинг ҳам кўпайиши (147.8) даги иккинчи ҳадни янада оширади, бунинг натижасида кучланиш икки мартадан кўпроқ ўсади. Шунинг учун бундай ҳолларда мустаҳкамлик шартини рухсат этилган кучланишга нисбатан текширмасдан, балки рухсат этилган юкка нисбатан текшириш лозим.

Ҳақиқатан ҳам, рухсат этилган кучланишга нисбатан мустаҳкамлик шарғи қуйидагича ифодаланади:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma];$$

бу ерда:

$$[\sigma] = \begin{cases} \frac{\sigma_T}{K}, \\ \frac{\sigma_b}{K} \end{cases}$$

σ_T — пластик материаллар учун оқим чегараси;

σ_b — мўрт материаллар учун мустаҳкамлик чегараси;

K — мустаҳкамлик коэффициенти.

Материалда σ_T ёки σ_b дан ҳосил бўладиган хавфли ҳолатни туғдириш учун, стержендаги кучланишларни K марта ошириш лозим. Бунинг учун биз текшираётган ҳолда қўйилган K га қараганда бирмунча камроқ миқдорга оширмоқ зарур. Демак, рухсат этилган кучланиш бўйича танланган мустаҳкамлик коэффициенти K хавфсизлиكنи таъмин этмайди. Хавфсиз-

ликни таъмин этиш учун ҳисоб рухсат этилган юк бўйича қилинмоғи зарур. Хулоса қилиб айтганда мустаҳкамлик шarti қуйидагича ифодаланади:

$$Q \leq [Q] = \frac{Q_T}{K},$$

бунда:

Q — конструкцияга қўйилган юк;

Q_T — конструкция учун хавфли юк.

Конструкцияда хавфли ҳолат кучланиши ундаги энг катта норма кучланиш оқиш чегарасига эришганда бошланади. Бу эса тажрибалар ва мавжуд конструкцияларнинг кучланиш ҳолатларини текширилгандаги кузатишлар орқали тасдиқланади. Бинобарин, хавфли ҳолат учун оқим чегарасини қуйидагича қабул қиламиз:

$$\frac{N_T}{F} + \frac{bl^2}{8W} \left[\frac{1}{1 - \alpha_T} \right] = \sigma_T. \quad (148.9)$$

Бунда $\alpha_T = \frac{N}{N_T}$ дир.

Қўйилиши мумкин бўлган $[N]$ ва $[q]$ сонлар, конструкциянинг хавфли ҳолатига тегишли бўлиб, улар N_T ва q_T қийматидан K марта кичикдир, яъни:

$$N_T = [N] \cdot K, \quad q_T = [q] \cdot K.$$

Буларнинг қийматини (148.9) га қўйсак:

$$\frac{K[N]}{F} + \frac{K[q]l^2}{8W} \cdot \frac{1}{1 - K \cdot \alpha} \leq K[\sigma]$$

бўлади. Ҳар иккала томонини K га қисқартсак қуйидаги келиб чиқади:

$$\frac{[N]}{F} + \frac{[q]l^2}{8W} \cdot \frac{1}{1 - K \cdot \alpha} \leq [\sigma].$$

Конструкцияга қўйилган юклар қуйидаги шартларни қондириши керак:

$$N \leq [N], \quad q \leq [q].$$

Шунинг учун мустаҳкамлик шarti қуйидаги кўринишда ифодаланади:

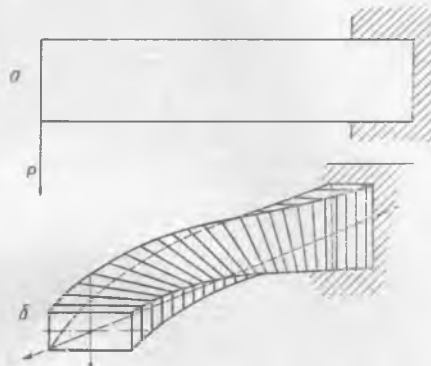
$$\frac{N}{F} + \frac{ql^2}{8W} \cdot \frac{1}{1 - K \cdot \alpha} \leq [\sigma]. \quad (148.10)$$

Бу формуладан фойдаланишда шуни кўзда тутиш керакки, биз расман $\frac{\tau^2 EI}{I^2}$ ни N_k билан белгиладик. Гарчи бу $N_k = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$ кўриниш жиҳатидан Эйлер формуласини эслатса-да, мазмунан у критик сиқувчи куч эмас, чунки кўндаланг кесим юзасини танлаганда, нейтрал ўққа нисбатан инерция моменти I нинг максимал қиймати олинди.

Эйлер формуласида эса унинг минимал қиймати олинар эди. Биз текшираётган ҳолда эгилиш текислиги Oxz энг катта бикрлик текислиги бўлгани сабабли бу текисликда балканинг устиворлиги йўқолмайди. Аммо бикрлиги энг катта бўлган текисликдаги мустаҳкамлик шартининг бажарилиши билан унга тик бўлган Oxy текислигига балканинг минимал бикрлик текислиги тўғри келгани боисидан балка шу текисликда эгилганда ўз устиворлигини йўқотиши мумкин. Шунинг учун кўндаланг эгилишдаги устиворликни таъмин этиш зарур. Бу масала тўғрисида кейинги параграфларда гапирилади.

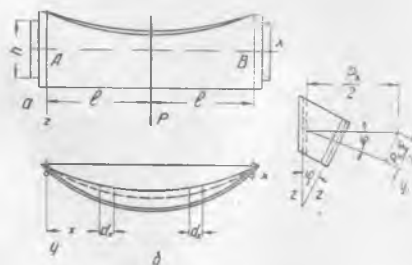
149- §. Балкаларнинг кўндаланг эгилишдаги устиворлиги

Эгилиш текислиги энг катта бикрлик текислигига тўғри келган ҳолларда эгувчи кучлар маълум чегарадан ўтса, кўндаланг кесим ўз текислигидан оғиб, устивор мувозанатини йўқота бошлайди. Бу ҳодиса характерини кўз олдимизга келтириш учун бир учи қистириб маҳкамланган линейкани мисол қилиб оламиз. Линейка текислигини вертикал ҳолатда сақлаб, унинг эркин учига қўйилган юкни аста-секин кўпайтириб борсак, юкнинг маълум қийматида линейка устивор мувозанатни йўқотади ва унинг вертикал текислиги горизонтал ҳолатга айланади. Схематик равишда бу ҳол 515-шакл, *a*, *b* да тасвирланган. Балкаларнинг кўндаланг устиворлиги уларнинг кўндаланг ва бўйлама ўлчамларига боғлиқдир. Кўндаланг критик кучни турли ҳоллар учун аниқлашга ўтамиз. Текис эгилган балка учун кўндаланг устиворлигини йўқотган пайтига тўғри келган критик юк қийматини тақрибий равишда ҳисоблаймиз.



515- шакл.

Икки таянчда ётувчи балканинг кўндаланг кесим юзаси тўғри тўртбурчак бўлиб, таянчлар оралиғининг коқ ўртасига P юк қўйилган бўлсин (516-шакл, *a*). P юк критик қийматга эришгач, балкани эгилиш текислигидан чиқариб, уни ёнбошига ағдарган деб фараз қилайлик. У ҳолат 516-шакл, *b* ва *c* ларда тасвирлангандир.



516- шакл.

Ўз текислигидан фақат A ва B кесимларгина оғмайди. Деформациянинг ёнбош томонига қараб ҳосил бўлиши, қўшимча эгилиш ва буралиш ҳисобига балкада потенциал энергияни оширади (қўшимча эгилиш горизонтал текисликда рўй беради). Балканинг ёнбошга эгилишдаги потенциал энергиясини U_1 ва буралишдан ҳосил бўлган потенциал энергиясини U_2 билан белгилаймиз. Балканинг ёнбош томон деформацияланиши натижасида юкнинг бажарган ишини A_p билан белгилаймиз. Қўйилган юк критик қийматга эришганда, балка бир мувозанат ҳолатдан бошқа мувозанат ҳолатга ўтади. Иккинчи юкнинг иши ўзгариб, у қўшимча потенциал энергияга айлангани сабабли:

бўлади.

$$U_1 + U_2 = A_p$$

$$(149.1)$$

Балка ёнбошга қараб эгилганда унинг қўндаланг кесими, z_1 ўқи атрофида айланганидан (518-шакл) бу деформациясига тегишли потенциал энергия қуйидагича бўлади.

$$U_1 = \int \frac{M^2(x) dx}{2EI_z}. \quad (a)$$

x оралиқдаги қўндаланг кесим P кучнинг йўналишга нисбатан (z ўқига нисбатан) θ бурчакка оғади ва P кучнинг бош инерция ўқларидаги проекциялари $P \cos \theta$ ва $P \sin \theta$ га тенг бўлади. Бурчак θ жуда ҳам кичик бўлгани сабабли $\cos \theta \approx 1$, $\sin \theta = 0$ деб қабул қилсак бўлади. У ҳолда бирор кесимдаги эгувчи момент қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$M(x) = \frac{P}{2} x \sin \theta = \frac{P}{2} x \theta.$$

Эгувчи моментнинг бу қийматини (a) га қўйиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$U_1 = \frac{P^2}{8EI_z} \int x^2 \theta^2(x) dx = \frac{P^2}{4EI_z} \int_0^{\frac{l}{2}} x^2 \cdot \theta^2(x) dx; \quad (149.2)$$

буралиш деформациясига оид потенциал энергия U_2 ни ҳисоблаймиз:

$$dU_2 = \frac{M_k d\theta}{2}; \quad d\theta = \frac{M_k dx}{GI_p}.$$

Аммо,

$$M_k = GI_p \frac{d\theta}{dx} \text{ ва } d\theta = \frac{d\theta}{dx} dx$$

бўлгандан

$$dU_2 = \frac{GI_p}{2} \frac{d\theta}{dx} \cdot \frac{d\theta}{dx} dx = \frac{GI_p}{2} \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx$$

бўлади. Балканинг ёнбошга оғиши туфайли буралишдан ҳосил бўлган тўла потенциал энергия қуйидагича ифодаланади:

$$U_2 = \frac{GI_p}{2} \int_0^l \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx = GI_p \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx. \quad (149.3)$$

Энди P юкнинг бажарилган ишини ҳисоблаш учун, у қўйилган нуқта O нинг вертикал қўчишини топамиз.

Қўндаланг кесим ёнбошга оғиши натижасида XOZ текислигидан чиқиб кетади; бу ҳол O нуқтанинг вертикал қўчишига сабаб бўлади. Баён қилинган қўчиш δ ни Кастильяно теоремаси ёрдамида аниқлашимиз мумкин.

Бунинг учун (149.2) нинг P га нисбатан ҳосиласини оламиз:

$$\delta = \frac{\partial U_1}{\partial P} = \frac{P}{2EI_z} \int_0^{\frac{l}{2}} x^2 \theta^2(x) dx. \quad (149.4)$$

P юкнинг бу қўчишдаги бажарган иши қуйидагича бўлади:

$$A_p = P\delta = \frac{P^2}{2EI_z} \int_0^{\frac{l}{2}} x^2 \theta^2(x) dx. \quad (149.5)$$

U_1 , U_2 ва A_p нинг қийматини (149.1) га қўйиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{P^2}{4EI_z} \int_0^{\frac{l}{2}} x^2 \theta^2(x) dx + GI_p \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx = \frac{P^2}{2EI_z} \int_0^{\frac{l}{2}} x^2 \theta^2(x) dx.$$

Бундан, ёнбошга ағдарувчи критик куч формуласи қуйидагича бўлади:

$$P_k = 4C_1 C_2 \frac{\int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx}{\int_0^{\frac{l}{2}} x^2 \theta^2(x) dx}. \quad (149.6)$$

Бунда C_1 ва C_2 ўзгармас сонлар бўлиб, улар қуйидагича ифодаланади: $C_1 = EI_z$, $C_2 = GI_p$. Интеграл остида ўзаро боғланган иккита ўзгарувчан сон бор, улар x ва $\theta = \theta(x)$ дир, θ нинг x орқали аналитик ифодаси маълум эмас. Масалани тақрибий ечиш ниятида бўлсак, у чоқда буралиш бурчаги θ билан абсцисса орасидаги муносабатни бирор қулайроқ ва тақрибий функция орқали ифодалаймиз. Қабул қилинган бу функция текширилаётган балканинг чегара шартларини, албатта, қаноатлантириши шарт. Масалан, бу функцияни қуйидаги кўринишда ифодалайлик:

$$\theta = K \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (149.7)$$

Бу ифодага асосан $x=0$ бўлганда $\theta=0$, $x=\frac{l}{2}$ бўлганда эса $\theta = \theta_{\max} = K$ ва $x=l$ бўлганда $\theta=0$ бўлади. Юқоридагилардан кўрамизки, бу функция балканинг барча деформацияланиш шартларини қаноатлантирар экан. Энди унинг қийматини (149.6) га қўйиб, интегралларни ҳисоблаш натижасида қуйидаги формулани оламиз:

$$P_k = \frac{17,2}{l^2} \sqrt{C_1 C_2}. \quad (149.8)$$

Агар биз критик куч P ни, эгилган ўқнинг дифференциал тенгламасини интеграллаш оқибатида топсак, унинг аниқроқ қиймати келиб чиқади:

$$P_k = \frac{16,93}{l^2} \sqrt{C_1 \cdot C_2}.$$

Бу формулалардан критик кучнинг тақрибий қиймати билан аниқ қиймати ўртасидаги тафовутнинг жуда ҳам кичик (1,5 % миқдориди) эканлиги кўриниб турибди. Критик кучнинг қиймати балканинг ёнбош эгилишидаги ва буралишдаги бикрликлари ($C_1 = EI_z$, $C_2 = GI_p$) га боғлиқ бўлаётир. Юк икки таянчда ётувчи балканинг оралиги бўйича тенг ёйилган бўлса, унинг кўндаланг устиворлигини бузувчи критик кучнинг қиймати:

$$(q l)_k = \frac{28,3}{l^2} \sqrt{C_1 \cdot C_2} \quad (148.9)$$

бўлади.

Тенг ёйилган юк таъсиридаги консол учун:

$$(q l)_k = \frac{12,85}{l^2} \sqrt{C_1 \cdot C_2} \quad (149.10)$$

Балка ёнбошга қараб эгилганда унинг қўндаланг кесими z_1 ўқи атрофида айланганидан (518-шакл) бу деформациясига тегишли потенциал энергия қуйидагича бўлади.

$$U_1 = \int \frac{M^2(x) dx}{2EI_z}. \quad (a)$$

x оралиқдаги қўндаланг кесим P кучининг йўналишга нисбатан (z ўқига нисбатан) θ бурчакка оғади ва P кучининг бош инерция ўқларидаги проекциялари $P \cos \theta$ ва $P \sin \theta$ га тенг бўлади. Бурчак θ жуда ҳам кичик бўлгани сабабли $\cos \theta \approx 1$, $\sin \theta = 0$ деб қабул қилсак бўлади. У ҳолда бирор кесимдаги эгувчи момент қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$M(x) = \frac{P}{2} x \sin \theta = \frac{P}{2} x \theta.$$

Эгувчи моментнинг бу қийматини (a) га қўйиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$U_1 = \frac{P^2}{8EI_z} \int_0^{\frac{l}{2}} x^2 \theta^2(x) dx = \frac{P^2}{4EI_z} \int_0^{\frac{l}{2}} x^2 \cdot \theta^2(x) dx; \quad (149.2)$$

буралиш деформациясига оид потенциал энергия U_2 ни ҳисоблаймиз:

$$dU_2 = \frac{M_k d\theta}{2}; \quad d\theta = \frac{M_k dx}{GI_p}.$$

Аммо,

$$M_k = GI_p \frac{d\theta}{dx} \text{ ва } d\theta = \frac{d\theta}{dx} dx$$

бўлгандан

$$dU_2 = \frac{GI_p}{2} \frac{d\theta}{dx} \cdot \frac{d\theta}{dx} dx = \frac{GI_p}{2} \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx$$

бўлади. Балканинг ёнбошга оғиши туфайли буралишдан ҳосил бўлган тўла потенциал энергия қуйидагича ифодаланади:

$$U_2 = \frac{GI_p}{2} \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx = GI_p \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx. \quad (149.3)$$

Энди P юкнинг бажарилган ишини ҳисоблаш учун, у қўйилган нуқта O нинг вертикал қўчишини топамиз.

Қўндаланг кесим ёнбошга оғиши натижасида XOZ текислигидан чиқиб кетади; бу ҳол O нуқтанинг вертикал қўчишига сабаб бўлади. Баён қилинган қўчиш δ ни Кастильяно теоремаси ёрдамида аниқлашимиз мумкин.

Бунинг учун (149.2) нинг P га нисбатан ҳосиласини оламиз:

$$\delta = \frac{\partial U_1}{\partial P} = \frac{P}{2EI_z} \int_0^{\frac{l}{2}} x^2 \theta^2(x) dx. \quad (149.4)$$

P юкнинг бу қўчишдаги бажарган иши қуйидагича бўлади:

$$A_p = P\delta = \frac{P^2}{2EI_z} \int_0^{\frac{l}{2}} x^2 \theta^2(x) dx. \quad (149.5)$$

U_1 , U_2 ва A_p нинг қийматини (149.1) га қўйиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{P^2}{4EI_z} \int_0^{\frac{l}{2}} x^2 \theta^2(x) dx + GI_p \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx = \frac{P^2}{2EI_z} \int_0^{\frac{l}{2}} x^2 \theta^2(x) dx.$$

Бундан, ёнбошга ағдарувчи критик куч формуласи қуйидагича бўлади:

$$P_k = 4C_1 C_2 \frac{\int_0^{l/2} \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx}{\int_0^{l/2} x^2 \theta^2(x) dx}. \quad (149.6)$$

Бунда C_1 ва C_2 ўзгармас сонлар бўлиб, улар қуйидагича ифодаланади: $C_1 = EI_z$, $C_2 = GI_p$. Интеграл остида ўзаро боғланган иккита ўзгарувчан сон бор, улар x ва $\theta = \theta(x)$ дир, θ нинг x орқали аналитик ифодаси маълум эмас. Масалани тақрибий ечиш ниятида бўлсак, у чоқда буралиш бурчаги θ билан абсцисса орасидаги муносабатни бирор қулайроқ ва тақрибий функция орқали ифодалаймиз. Қабул қилинган бу функция текширилаётган балканинг чегара шартларини, албатта, қаноатлантириши шарт. Масалан, бу функцияни қуйидаги кўринишда ифодалайлик:

$$\theta = K \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (149.7)$$

Бу ифодага асосан $x=0$ бўлганда $\theta=0$, $x=\frac{l}{2}$ бўлганда эса $\theta = \theta_{\max} = K$ ва $x=l$ бўлганда $\theta=0$ бўлади. Юқоридагилардан кўрамизки, бу функция балканинг барча деформацияланиш шартларини қаноатлантирар экан. Энди унинг қийматини (149.6) га қўйиб, интегралларни ҳисоблаш натижасида қуйидаги формулани оламиз:

$$P_k = \frac{17,2}{l^2} \sqrt{C_1 C_2}. \quad (149.8)$$

Агар биз критик куч P ни, эгилган ўқнинг дифференциал тенгламасини интеграллаш оқибатида топсак, унинг аниқроқ қиймати келиб чиқади:

$$P_k = \frac{16,93}{l^2} \sqrt{C_1 C_2}.$$

Бу формулалардан критик кучнинг тақрибий қиймати билан аниқ қиймати ўртасидаги тафовутнинг жуда ҳам кичик (1,5 % миқдорида) эканлиги кўриниб турибди. Критик кучнинг қиймати балканинг ёнбош эгилишидаги ва буралишдаги бикрликлари ($C_1 = EI_z$, $C_2 = GI_p$) га боғлиқ бўлатир. Юк икки таянчда ётувчи балканинг оралиги бўйича тенг ёйилган бўлса, унинг кўндаланг устиворлигини бузувчи критик кучнинг қиймати:

$$(ql)_k = \frac{28,3}{l^2} \sqrt{C_1 C_2} \quad (148.9)$$

бўлади.

Тенг ёйилган юк таъсиридаги консол учун:

$$(ql)_k = \frac{12,85}{l^2} \sqrt{C_1 C_2} \quad (149.10)$$

ва консолнинг бўш учига қўйилган юк учун,

$$P_k = \frac{4,01}{l^2} \sqrt{C_1 C_2} \quad (149.11)$$

бўлади.

Қўш тавр балка учун, критик кучнинг қиймати худди туғри тўрт бурчакли кесим учун чиқарилган формулага ўхшаш бўлиб, фақат $\sqrt{C_1 \cdot C_2}$ олдидagi коэффициент ўзгарувчи сон бўлади ва у қўш таврли кесимнинг тоқча (полка) ларининг ёнбош томонга оғишга кўрсатадиган қаршилигига боғлиқдир, у коэффициент қуйидаги муносабат орқали аниқланади:

$$\alpha = \frac{C_2}{C_1} \left(\frac{l}{h} \right)^2; \quad (149.12)$$

бунда:

h — қўш таврли кесимнинг баландлиги.

Учлари билан турлича тиралган ва ихтиёрий равишда юкланган қўш-тавр балка учун критик куч қуйидаги формула билан топилади:

$$P_k = \frac{\beta}{l^2} \sqrt{C_1 \cdot C_2}. \quad (149.13)$$

Бунда β коэффициент юкнинг турларига ва α га боғлиқдир. Бу коэффициентлар орасидаги боғланиш қуйидаги жадвалда берилгандир.

β коэффициентни аниқлаш жадвали

$\alpha = \frac{C_2}{C_1} \left(\frac{l}{h} \right)^2$	β_1	β_2	β_3	$\alpha = \frac{C_2}{C_1} \left(\frac{l}{h} \right)^2$	β_1	β_2	β_3
0,1	31,6	86,4	143,0	16,0	5,08	18,3	30,5
1,0	9,26	31,9	53,0	20,0	—	18,1	30,1
2,0	8,03	25,6	42,6	32,0	—	17,9	29,4
4,0	6,73	21,8	36,3	50,0	—	17,5	29,0
6,0	6,19	20,3	33,8	10,0	—	17,4	28,8
8,0	5,87	19,6	32,6	90,0	4,04	17,2	28,6
12,0	5,36	18,8	31,5	100,0	4,04	17,2	28,6

Э с л а т м а.

β_1 — учига юк қўйилган консол учун;

β_2 — икки таянчда ётувчи ва ораликлари ўртасидаги юк қўйилган балка учун;

β_3 — икки таянчда ётиб, ёйилган юк таъсиридаги балка учун. $\frac{l}{h}$ нисбатан ошиб борган сари коэффициент β туғри тўрт бурчакли кесим учун чиқарилган қийматга яқинлашаётир. Агар $\alpha = 100$ бўлса, β коэффициент туғри тўрт бурчакли кесим учун чиқарилган қийматга жуда ҳам яқинлашади.

Ёйилган балка кундаланг устиворлигининг таъмин этилиши учун ундаги энг кагта нормал кучланиш устиворлик учун рухсат этилган кучланишдан ошмаслиги шарт. Устиворлик учун рухсат этилган кучланиш қуйидагича бўлади:

$$[\sigma_y] = \frac{\sigma_k}{k_y}.$$

k_y — устиворлик учун эҳтиётлик коэффициенти.

Балканинг ҳар бир типдаги юкланган ҳоли учун критик оқимини аниқлаб тегишли критик кучланишни ҳисоблаймиз:

$$\sigma_k = \frac{(M_{\max})_k}{W_y}. \quad (149.14)$$

бунда:

$(M_{\max})_k$ — критик сонга тегишли максимал эгувчи момент,

W_y — кесим юзасининг қаршилик моменти.

Шуни ҳам эслатиб ўтиш керакки, чиқарилган хулосалар фақат, критик кучланишнинг қиймати материалнинг пропорционаллик чегарасига тегишли кучланишдан ошмаган тақдирдагина гуфри бўлади.

194-масала. Узунлиги $l = 6$ м, қўндаланг кесими 60^a номерли қўш тавр учлари билан икки таянчга тиралиб, интенсивлиги $q = 10$ т/м² бўлган балка тенг ёйилган юк таъсиридан эгилади. Мустақкамлик ва устиворлик коэффициентлари $k = k_y = 1,7$; эгилиш учун рухсат этилган кучланиш $[\sigma] = 1600$ кг/см²; балканинг мустақкамлик ва қўндаланг устиворлик шарти аниқлансин.

Ечиш. Қўндаланг кесим ўлчамларини Сортамент жадвалидан оламиз (518-шакл) $h = 60$ см, $b = 17,6$ см, $\delta_1 = 1,3$ см, $h_1 = 55,6$ см, $W_y = 2800$ см³, $I_z = 1700$ см⁴, $\delta_2 = 2,2$ см. Балканинг мустақкамлигини текшираемиз:

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{10 \cdot 6^2}{8} = 45 \text{ т} \cdot \text{м} = 45 \cdot 10^6 \text{ кг} \cdot \text{см}.$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y} = \frac{45 \cdot 10^6}{2800} = 1605 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} = [\sigma].$$

Бундан балканинг мустақкамлик шартининг таъминланганлиги куришиб турибди. Энди унинг қўндаланг устиворлигини текшираемиз (149.13) формуладан фойдаланамиз:

$$(ql)_k = \frac{\beta}{l^2} \sqrt{C_1 C_2}, \quad C_1 = EI_z, \quad C_2 = GI_p.$$

Қўш таврли кесим учун буралишдаги поляр инерция моментини топишда курсимизнинг бош қисмида чиқарилган формуладан фойдаланамиз:

$$I_p \approx \frac{1}{3} (h_1 \sigma_1^3 + 2b\delta_2^3) = \frac{1}{3} (55,6 \cdot 1,3^3 + 17,6 \cdot 2,2^3) = 160 \text{ см}^4.$$

Эластиклик модули $E = 2,1 \cdot 10^6 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$, $\frac{E}{G} = 2(1 + \mu) = 2,6$ бўлса,

$$(ql)_k = \frac{\beta_3}{l^2} \sqrt{\frac{E}{EI_z} \cdot \frac{E}{2,6} I_p} = \frac{E}{\beta_3 l^2} \sqrt{\frac{1700 \cdot 160}{2,6}} = 324 \beta \frac{E}{l^2}$$

бўлади. β коэффициентни 572-бетдаги жадвалдан аниқлаш учун олдин α ни ҳисоблаймиз:

$$\alpha = \frac{C_2}{C_1} \left(\frac{l}{h} \right)^2 = \frac{GI_p}{EI_z} \left(\frac{l}{h} \right)^2 = \frac{160}{2,6 \cdot 1700} \left(\frac{600}{60} \right)^2 = 3,62.$$

Жадвалдан $\alpha = 2$ ва $\alpha = 4$ миқдорларига тегишли β қийматларини интерполяциялаб, биз текшириладиган ҳол учун $\beta_3 = 37,5$ эканлигини чиқарамиз. Қўндаланг устиворлиқнинг йўқола бошланишига сабаб бўлган критик кучнинг энг кичик қиймати:

$$(ql)_k = 324 \beta_3 \frac{E}{l^2} = \frac{324 \cdot 37,5 \cdot 2,1 \cdot 10^6}{600} = 70800 \text{ кг}$$

бўлади.

Критик кучланиш эса:

$$\sigma_k = \frac{(M_{\max})_k}{W_y} = \frac{(ql)_k l}{8W_y} = \frac{70800 \cdot 600}{8 \cdot 2800} = 1900 \text{ кг/см}^2$$

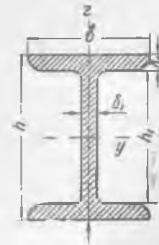
бўлади.

Устиворлик учун рухсат этилган кучланиш:

$$[\sigma_1] = \frac{\sigma_k}{K_y} = \frac{1900}{1,7} = 1120 \text{ кг/см}^2$$

бўлади.

Демак, устиворлиқни таъмин этиш учун мустақкамликдаги рухсат этилган кучланиш $1600 - 1120 = 480$ кг/см² миқдорида камайтириш керак бўлар экан. Бошқача айтганда, балкага қўйилган юкни бу мисол учун 30 % га камайтирмоқ зарур, яъни юк интенсивлигини $q = 10$ Т/м ўрнига $q = 7$ Т/м олиш керак бўлади.



518-шакл.

XXII боб

ДИНАМИК ЮКЛАРНИНГ ТАЪСИРИ

150- §. Умумий мулоҳазалар

Тез ҳаракатланадиган машиналарнинг тобора кўпайиши, қурилишларда турли кранларнинг кенг миқёсда ишлатилиши, шунингдек, турли транспорт иншоотларининг барпо бўлиши, улар қисмларида ҳосил бўладиган динамик факторларни яхшилаб ўрганиш заруратини туғдиради.

Ҳаракатдаги иншоот ва машина қисмларининг динамик кучлар таъсирига бардош берадиган қилиб тайёрлаш масаласини, уларда ҳосил бўладиган динамик факторларни аниқламасдан туриб, ҳал қилиб бўлмайди.

Иншоот ва машина қисмларининг ҳаракат қилиш вақтида уларнинг турли нуқталарида ҳосил бўладиган деформация ва кучланишлар динамик факторлар деб аталади. Бу миқдорларни аниқлаш учун эластик жисмларга қаттиқ жисм динамикасининг қонунларини татбиқ қилиш зарурдир.

Иншоот ва машина қисмларининг ҳаракатида, уларга тегишли нуқталарининг тезликлари ўзгариши натижасида тезланишлар ҳосил бўлади. Бу эса у нуқталарда инерция кучларини ҳосил қилади. Бу инерция кучлар қўшни нуқталарга ташқи кучлар тарзида таъсир кўрсатади. Демак ўзгарувчи ҳаракатдаги жисмларда, ташқи кучларнинг манбаи жисмнинг ўзида бўлар экан. Бунинг натижасида уларда ҳосил бўладиган инерция кучи, қўшимча динамик кучланишларни вужудга келтиради.

Иншоот ва машиналарнинг ҳаракат қилаётган қисмларида ҳосил бўладиган тезланишларни аниқлаб, уларга тегишли инерция кучларини ҳисоблаш лозим. Бу инерция кучларини ташқаридан бевосита қўйилган куч билан мувофиқ равишда қўшиб, мустақкамлиги текширилаётган жисмни статик куч таъсирида қандай ҳисобланса, бу ҳолда ҳам ҳисобни худди шу тарзда бажариш лозим. Инерция кучларини аниқлаганда шу кейинги уч ҳолни фарқлай билиш лозим.

1. Агар иншоот ва машинанинг текширилаётган қисмига қўйилган ташқи юк, унинг деформациясига боғлиқ бўлмаса ва деформация ҳаракат характерини ўзгартмаса, у ҳолда ҳаракатланаётган жисм нуқталарининг тезланишини, қаттиқ жисм кинематикасида кўрсатилган қоидага мувофиқ ҳисоблаш мумкин. Бу ҳолда динамик фактор, инерция кучи билан бевосита қўйилган ташқи кучларнинг йиғиндисидан иборат бўлади.

2. Агар, иншоот ёки машиналарнинг ҳаракатдаги қисмлари ўз нуқталарига тегишли тезланишларининг йўналишларини ўзгартиб турсалар, у қисмларда тебраниш ҳаракати ҳосил бўлиб резонанс ҳодисаси рўй бериши мумкин. Бу ҳодиса конструкция қисмларида ҳосил бўладиган деформация ва кучланишларни кескин равишда кўпайтириб юборади. Бу кучланишлар жуда катта қийматларга эришиб, уларни статик юк билан инерция кучи таъсиридан ҳосил бўладиган кучланишлар билан солиштириб бўлмайди.

3. Тезланиш миқдори ва бунинг натижасида ҳаракатланувчи жисмда ҳосил бўладиган инерция кучи текширилаётган қисмнинг деформациясига боғлиқ бўлиши мумкин. Бундай ҳол жисмга жуда ҳам қисқа муддат ичида таъсир кўрсатувчи, яъни зарбали куч таъсир этган пайтда рўй беради.

Айтилган учала ҳол учун мустақкамлик шартининг текширилишини қуйида конкрет масалаларда кўрсатамиз.

151-§. Инерция кучлари таъсиридаги иншоот ва машина қисмларининг ҳисоби

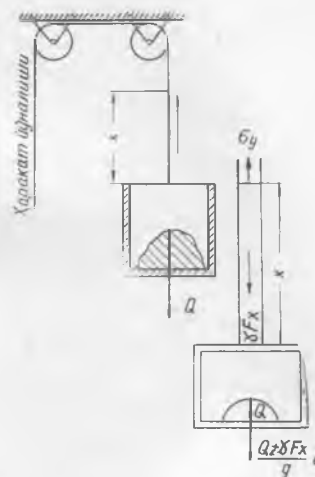
Дастлаб динамик кучлар таъсиридаги конструкция қисмларининг мустаҳкамлик шартига оид энг оддий масалаларни текшираемиз. Агар иншоот ва машиналарнинг ҳаракатланувчи қисмларига тааллуқли нуқталарнинг тезланиши ўзгармас қийматга эга бўлса, бу қисмлар тебранма ҳаракат тугдирмайди.

Масалан, лифтбонасига жойланган оғирлиги Q бўлган юкни ўзгармас тезланиш a см/сек² билан юқорига кўтараяётган пўлат троснинг кўндаланг кесимида ҳосил бўладиган динамик кучланишни ҳисоблайлик (519-шакл). Троснинг кўндаланг кесим юзи F , солиштирма оғирлиги γ бўлсин. Унинг пастки учидан x масофадаги кесими бўйича кесиб паст қисмининг мувозанатини текшираемиз. Юк юқорига қараб ҳаракатланаётганидан, унга пастга қараб таъсир кўрсатувчи оғирлик кучи $(Q + \gamma Fx)$ дан ташқари, яна инерция кучи $\left(\frac{Q + \gamma Fx}{g} a\right)$ ҳам таъсир кўрсатади. Текширилаяётган кесимдаги ички кучлар, Даламбер принципига мувофиқ, юқорида келтирилган кучлар билан мувозанатлашиши зарур, яъни:

$$\sigma_d F = Q + \gamma Fx + \frac{Q + \gamma Fx}{g} a$$

бўлиши керак. Шунга кўра динамик кучланиш қуйидагича ифодаланади:

$$\sigma_d = \frac{Q + \gamma Fx}{F} + \frac{Q + \gamma Fx}{gF} a = \frac{Q + \gamma Fx}{F} \left(1 + \frac{a}{g}\right).$$



519-шакл.

Бунда $\frac{Q + \gamma Fx}{F}$ — текширилаяётган кесимдаги статик кучланишдир; шунинг учун динамик кучланишни аниқлаш формуласини қуйидагича ёзса бўлади:

$$\sigma_d = \sigma_{ст} \left(1 + \frac{a}{g}\right). \quad (151.1)$$

$1 + \frac{a}{g} = \alpha_d$ деб белгиласак,

$$\sigma_d = \alpha_d \cdot \sigma_{ст} \quad (151.2)$$

бўлади. Бунда: α_d — динамик коэффициент.

Демак, динамик кучланиш σ_d ни, динамик коэффициент воситаси билан статик кучланиш $\sigma_{ст}$ орқали ифодаласа бўлар экан.

Мустаҳкамлик шартини қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$\sigma_d = \sigma_{max} \left(1 + \frac{a}{g}\right) = \alpha_d \sigma_{max} \leq [\sigma],$$

бундан:

$$\sigma_{\max} \leq \frac{[\sigma]}{1 + \frac{a}{g}} = \frac{[\sigma]}{u_0} \quad (151.3)$$

бўлиши керак.

Шундай қилиб, рухсат этилган кучланиш динамик коэффициент воситаси билан камайтирилса, динамик ҳисоб статик ҳисоб билан алмаштирилса бўлар экан. Масалан, динамик коэффициентни назарий мулоҳазалар билан аниқлаш қийин бўлган ҳолларда, уни эксперимент йўли билан аниқлаб, тегишли рухсат этилган кучланиш ҳисобланади.

Иккинчи оддий масала сифатида айланма ҳаракатдаги ҳалқада ҳосил бўладиган кучланишни ҳисоблаймиз. Кегайлар таъсири ҳисобга олинмаганида, маховой гилдиракнинг тўғини худди шундай шаронгта ишлайди (520-шакл). Ҳалқанинг кундаланг кесим юзи F , солиштира оғирлиги γ , диаметри D , қалинлиги δ , бурчак тезлиги ω бўлсин. Ҳалқадан узунлиги ds бўлган бир элементни ажратамиз. Ҳалқа айланганида, бу элемент узгармас бурчак тезлиги ω билан айланади. $\omega = \text{const}$ бўлганидан, $\varepsilon = 0$ бўлиб, $W_n = \frac{\varepsilon D}{2} = 0$ бўлади. Элементнинг марказга интилувчи тезланиши $W_n = \frac{D\omega^2}{2}$ бўлиб, у ҳалқа марказига қараб йўналган бўлади. σ_δ ни ҳисоблаш учун ҳалқанинг ҳар бир элементига тегишли инерция кучини қўйиш зарур. У куч радиус бўйлаб ҳалқанинг ташқи томонига қараб йўналган бўлади (марказдан қочувчи куч). Унинг қиймати қуйидагича ифодаланади:

$$q ds = \frac{F\gamma}{g} W_n ds = \frac{F\gamma}{g} \cdot \frac{D\omega^2}{2} ds;$$

бунда

q — тўғиннинг узунлик бирлигига тўғри келадиган инерция куч.

Демак, узгармас бурчак тезлиги билан айланаётган ҳалқа, интенсивлиги q бўлган радиал юк таъсиридаги ҳалқа каби ишлар экан. Биз бундай ҳолни илгари текширган эдик. Бу ҳолда ҳалқани чўзувчи куч N қуйидагича ифодаланган эди:

$$N = \frac{Dq}{2}.$$

Бундан фойдаланиб, динамик кучланиш σ_δ ни қуйидагича ҳисоблаймиз:

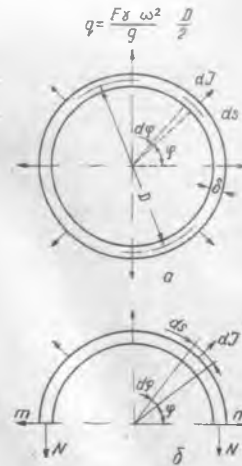
$$\sigma_\delta = \frac{N}{F} = \frac{Dq}{2F} = \frac{DF\gamma}{2gF} \cdot \frac{D\omega^2}{2} = \frac{\gamma D^2\omega^2}{4g} = \frac{\gamma v^2}{g}$$

бунда:

$v = \frac{D\omega}{2}$ — ҳалқа нуқтасининг айланма тезлиги.

Демак, ҳалқа тўғинининг кундаланг кесимидаги кучланиш материалнинг солиштира оғирлиги ва айланма тезлигига боғлиқ бўлар экан.

Динамик кучланиш σ_δ рухсат этилган тегишли кучланиш $[\sigma]$ дан ошмаслиги лозим.



520-шакл.

Бу шартдан фойдаланиб, доиравий критик тезлик қийматини қуйидагича аниқлаймиз:

$$\sigma_d = \frac{\gamma v^2}{g} \leq [\sigma] \quad (151.4)$$

дан:

$$V_k = \sqrt{\frac{g}{\gamma} [\sigma]} \quad (151.5)$$

ёки

$$n_k = \frac{60}{\pi D} \sqrt{\frac{g}{\gamma} [\sigma]} \quad (151.6)$$

бўлади. Бунда.

n_k — бирлик вақт ичида ҳалқа айланиш сонининг критик қиймати.

Учинчи мисол тариқасида спарник ва шатунда ҳосил бўладиган динамик кучланишларни аниқлаймиз.

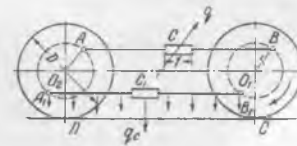
Спарник (521-шакл) AB паровозининг иккита ўқини туташтирувчи қисмдир. Етакловчи ўқ O_1 паровоз машинасида айлантирувчи моментни қабул қилади. Спарник A ва B нуқталарда шарнир воситаси билан ғилдиракларга туташтирилиб, $O_1B = O_2A = r$ бўлади, ғилдирак диаметри D , спарник узунлиги $AB = l$ бўлиб, паровоз v тезликда ҳаракатланади. Спарник паровозга нисбатан ҳаракатланган ҳолда, паровоз билан бирга тезлиги v бўлган кўчирма ҳаракат ҳам қатнашмоқда. Кўчирма ҳаракат ўзгармас тезликдаги илгариллама ҳаракат бўлганидан, спарник нуқталарида фақат нисбий ҳаракатдангина тезланишлар ҳосил бўлиши мумкин. Спарникнинг A ва B нуқталарининг тезлиги бир хилда бўлганидан, у илгариллама ҳаракат қилади. Шунинг учун спарник AB нинг барча нуқталари A ва B нуқталарининг тезлик ва тезланишига тенг бўлган тезлик ва тезланишларга эга бўлади. Паровоз ўзгармас тезлик v билан ҳаракатланганидан, унинг ғилдираклари ҳам ўзгармас бурчак тезлиги ω билан айланади. Бинобарин ғилдиракнинг бурчак тезланиши ҳамда A ва B нуқталарнинг тангенциал тезланишлари нолга тенг, $\omega_t = 0$ бўлади. Бунда фақат A дан O_2 ва B дан O_1 га қараб йўналган марказга интилувчи ω^2 тезланишлар мавжуддир. Спарникнинг ҳар қандай нуқтасининг, масалан, бирор C нуқтасининг тезланиши ҳам худди шундай бўлиб, O_2A га параллел йўналади. Спарникнинг мустаҳкамлигини текшириш учун, ташқи куч тариқасида унинг узунлик бирлигига тўғри келган оғирлиги $F\gamma$ билан унга тегишли инерция кучи қўшилган қийматини олиш лозим. Ҳар бир узунлик бирлигидаги инерция кучи қуйидагича аниқланади:

$$q = \frac{F\gamma}{g} \omega^2 r \quad (151.7)$$

бу куч, O_2A га параллел равишда тезланишга қарама-қарши йўналади.

Спарникнинг энг хавфли ҳолати унинг пастки A_1B_1 ҳолатидир. Бу ҳолатда инерция кучи билан унинг оғирлиги қўшилади, чунки улар бир йўналишга тўғри келиб қоладилар. Шундай қилиб спарникнинг узунлик бирлигига тўғри келган тула юк қуйидаги формуладан топилади:

$$q_d = F\gamma + \frac{F\gamma}{g} \omega^2 r = F\gamma \left(1 + \frac{\omega^2 r}{g}\right) \quad (151.8)$$



521-шакл.

Спарник A ва B нуқталарига шарнир воситаси билан бириктирилган ва тенг ёйилган юк таъсиридаги балка деб қаралса энг катта эгувчи момент унинг ўрта кесимида ҳосил бўлиб, у момент қуйидагича аниқланади:

$$M_{\max} = \frac{q_0 l^2}{8} = \frac{\gamma F l^2}{8} \left(1 + \frac{\omega^2 r}{g}\right). \quad (151.9)$$

Бу кесимдаги энг катта нормал кучланиш эса қуйидагича бўлади:

$$\sigma_d = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{F}{W} \cdot \frac{\gamma l^2}{8} \left(1 + \frac{\omega^2 r}{g}\right). \quad (151.10)$$

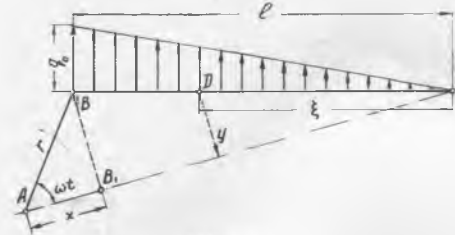
Спарник эгилишдан талқари, яна айланма куч P таъсирида сиқилади ҳам. Салқилик эътиборга олинмаса, (151.10) га сиқувчи куч таъсиридан ҳосил бўладиган кучланишларни ҳам қўшиш лозим, у ҳолда:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} + \frac{\gamma F l^2}{8W} \left(1 + \frac{\omega^2 r}{g}\right) \leq [\sigma] \quad (151.11)$$

бўлади.

Масалага жиддийроқ қаралса, спарник бўйлама ва қўндаланг эгилиш вазариясига мувофиқ ҳисобланиши лозим.

Шатунни ҳисоблашда (522-шакл), шатун ўқидаги алоҳида нуқталари-



522-шакл.

нинг горизонтал кўчиши кривошип бармоғи B горизонтал проекциясини B_1 нинг кўчишига тенг қилиб олинади. B_1 нинг ҳолатини A нуқтадан ҳисобланган масофасини x орқали белгилаб кривошипнинг ҳар қандай айланиш бурчаги учун тўғри келган x нинг қиймати қуйидаги тенглама билан ифодаланади:

$$x = r \cos \omega t.$$

Вертикал кўчиши эса шатуннинг турли нуқталари учун турлича бўлиб унинг ўнг учи C дан ξ оралигидаги D нуқтаси учун тенглама қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$y = \frac{\xi}{l} \cdot r \sin \omega t.$$

Бу D нуқтанинг тезланиш проекциялари қуйидагича ифодаланади:

$$W_x = \ddot{x} = -r \omega^2 \cos \omega t;$$

$$W_y = \ddot{y} = -\frac{\xi}{l} r \omega^2 \sin \omega t.$$

Шатуннинг AC ўққа оғиши ҳисобга олинмаса, W_y тезланишни шатун ўқига тик деб қараш мумкин. Бу тезланишга тегишли инерция кучининг интенсивлиги қуйидагича аниқланади:

$$q = \frac{F\gamma}{g} W_y = -\frac{\xi}{l} \cdot \frac{F\gamma}{g} r \omega^2 \sin \omega t.$$

Эвг юқулай ҳолат $\sin \omega t = 1$ бўлган ҳолга тўғри келади. Энг катта интенсивлилик B нуқтада бўлиб, қуйидагича аниқланади:

$$q_0 = \frac{F\gamma}{g} r \omega^2.$$

Шундай қилиб, шарнир воситаси билан икки таянчга боғланган ва уч-бурчак қонунига асосан бир текис ёйилма юк таъсиридаги балка ҳосил бўлади.

Максимал эғувчи момент C нуқтадан $\xi = \frac{l}{\sqrt{3}}$ ораликдаги кесимга тўғри келади. Унинг қиймати қуйидаги формула билан топилади:

$$M_{\max} = \frac{2}{9\sqrt{3}} \frac{F\gamma}{g} \frac{r\omega^2 l^2}{2} = 0,128 \frac{F\gamma}{g} \cdot \frac{r\omega^2 l^2}{2}. \quad (151.12)$$

Энди тегишли кучланишни ҳисоблаш қийин эмас. Кривошипнинг вертикал ҳолатида $\sin \omega t = 1$ бўлиб, $\cos \omega t = 0$ бўлади; бинобарин BC бўйлаб таъсир кўрсатувчи инерция кучи ҳам нолга тенг бўлади.

МАСАЛАЛАР

195. Қўндаланг кесими квадрат бўлган AB пўлат стержень шакл текислигига тик A ўқ атрофида ўзгармас бурчак тезлиги ω билан айлантирилса, унда ҳосил бўладиган нормал кучланиш σ_n дан ошмаслиги учун шу пўлат стержень минутига қанчадан айланиши керак? (523-шакл). Берилган:

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}, \quad l = 0,75 \text{ м},$$

$$F = 1800 \text{ см}^2, \quad \sigma_n = 2500 \text{ кг/см}^2, \quad \gamma = 7,85 \text{ г/см}^3.$$

$n_{\max}$ нинг бу қийматида стерженнинг абсолют чўзилиши ҳам аниқлансин.

Е ч и ш. Стерженнинг пастки учидан x ораликдаги қирким олдида чексиз кичик элемент dx ни ажратамиз. Бу элементнинг инерция кучи қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$dI = \frac{F\gamma}{g} dx \cdot \omega^2 x.$$

Текшириляётган кесимнинг юқори қисмига таъсир кўрсатувчи инерция куч қуйидаги формула билан аниқланади:

$$I = \int_x^l \frac{F\gamma}{g} \omega^2 x dx = \frac{F\gamma \omega^2}{2g} (l^2 - x^2).$$

Максимал инерция куч A нуқтада бўлиб, унинг миқдори юқорида келтирилган формулага $x = 0$ қўйиб топилади:

$$I_{\max} = \frac{F\gamma}{2g} \omega^2 l^2 = \sigma_n \cdot F;$$

бундан: $\omega = \frac{\pi n}{30}$. Бинобарин стерженнинг максимал айланиш сони қуйидагича топилади:

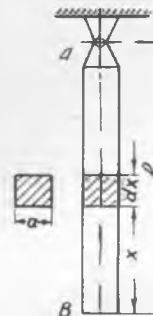
$$n_{\max} = \frac{l}{\pi l} \sqrt{\frac{1800g\sigma_n}{\gamma}} \approx 3180 \text{ айл/мин}$$

dx элементнинг чўзилиши қуйидагича аниқланади:

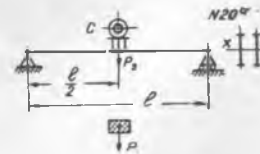
$$\delta(dx) = \frac{l dx}{EF}.$$

Стерженнинг чўзилиши эса қуйидаги формуладан топилади:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{l dx}{EF} = \frac{\gamma \omega^2}{2gE} \int_0^l (l^2 - x^2) dx = \frac{\gamma \omega^2 l^3}{3gE} = 0,062 \text{ см}.$$



523- шакл.



524- шакл.

196. 20^a номерли иккита қўштак балкага ўрнатилган лебёдка С ўзгармас тезланиш билан оғирлиги $P_1 = 5 \text{ T}$ юкни қўтаради (524-шакл). $t = 3 \text{ сек}$ ўтганда юк $h = 10 \text{ м}$ баландликка қўтарилади. Лебёдканинг оғирлиги $P_2 = 0,5 \text{ T}$, балка оралиги $l = 4 \text{ м}$ бўлса, балканинг мустаҳкамлиги текширилсин:

Е ч и ш. Ҳаракат тенг тезланишли бўлганидан:

$$h = \frac{at^2}{2} \text{ бўлади, бундан } a = \frac{2h}{t^2} = \frac{2 \cdot 10}{9} = 2,2 \text{ м/сек}^2$$

келиб чиқади. Балкага таъсир этувчи умумий юк:

$$Q = P_1 \left(1 + \frac{a}{g} \right) = 5 \left(1 + \frac{2,2}{9,81} \right) = 6,13 \text{ T}.$$

Лебёдканинг оғирлиги ҳисобга олинганда эса:

$$Q = Q + P_2 = 6,63 \text{ T}.$$

Максимал эгувчи момент балканинг қоқ ўртасига тўғри келади. У момент қуйидагича аниқланади:

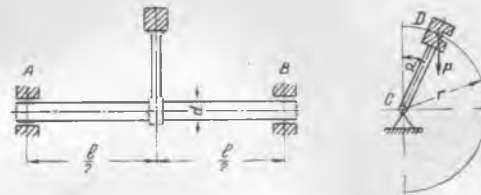
$$M_{\max} = \frac{6,63 \cdot l}{4} + \frac{2ql^2}{8} = 67,400 \text{ кгс/см}$$

$W = 2237 \text{ см}^3$ бўлганда:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} = \frac{67,400}{2237} = 1420 \text{ кгс/см}^2.$$

бўлади.

197. Материалларни зарба кучига синашда ишлатиладиган. Шарпи Капёрининг CD тебрангичи унинг горизонтал AB ўқи атрофида айланади (525-шакл). Синаш олдида тебрангични вертикал ҳолатгача қўтариб, унинг ўз оғирлиги таъсиридан пастга тушишга мажбур қилади. Инерция кучи таъсиридан AB ўқида ҳосил бўладиган энг катта нормал кучланиш аниқлансин. Қуйидаги миқдорлар берилган $P = 25 \text{ кг}$; $r = 0,75 \text{ м}$, $l = 0,25 \text{ м}$, $d = 2 \text{ см}$. CD ва AB стерженларининг ўз оғирликлари ҳисобга олинмасин.



525-шакл

Е ч и ш. Олдин маятникнинг синалаётган материалга қандай тезлик билан тегишини аниқлаймиз. Бунинг учун кинетик энергия ҳақидаги теоремадан фойдаланиб қуйидагича ёзамиз:

$$\frac{PV^2}{2g} = P \cdot 2r, \text{ бундан } V^2 = 4rg$$

Ўққа таъсир кўрсатувчи зўриқиш, тебрангич учидagi юк билан марказдан қочувчи инерция кучидан иборат бўлиб, у қуйидагича аниқланади:

$$Q = P + \frac{PV^2}{rg} = 25 + \frac{25}{9,81} \cdot \frac{3 \cdot 9,81}{0,75} = 125 \text{ кг}.$$

$$M_{\max} = \frac{Ql}{4} = \frac{125 \cdot 25}{4} = 780 \text{ кгс/см},$$

$$W = 0,1d^3 = 0,8 \text{ см}^3.$$

$$\sigma_{\max} = \frac{780}{0,8} \approx 1000 \text{ кгс/см}^2.$$

152- §. Динамик юклар таъсиридан иншоот ва машина қисмларида ҳосил бўладиган тебранма ҳаракатлар

Машина ва иншоот қисмларига даврий ёки умуман уйғотувчи кучлар таъсир кўрсатса, улар тебранма ҳаракат қилади. Бу *мажбурий тебраниш* деб аталади. Ўтказилган назарий текширишлар ва кузатилган тажрибалар даврий юклар таъсиридан ҳосил бўладиган деформацияларнинг, шу миқдордаги статик юклар таъсиридан ҳосил бўладиган деформацияларга қараганда анча катталигини кўрсатади. Шунинг учун ҳам, мажбурий тебранишдаги машина ва иншоот қисмларига алоҳида эътибор бериш зарур. Машина ва иншоот қисмлари мажбурий тебранишдан қатъи назар, эркин тебраниш ҳаракатини ҳам бажаради. *Агар эркин тебраниш ҳаракатининг даври уйғотувчи куч даврига мос келиб қолса, резонанс ҳодисаси рўй беради.* Бу ҳодисада тебраниш амплитудаси вақт ўтиши билан кескин ўсиб, унинг миқдори қўйилиши мумкин бўлган деформацияга қараганда бир неча марта кўп бўлади. Бунинг натижасида тегишли кучларни қўйиш ҳам хавфли бўлиб қолиши мумкин. Шунинг учун иншоот ва машиналарни лойиҳалашда, уларнинг тебранувчи қисмида резонанс ҳодисасининг юз бериши кўзда тутилса, шу қисмларга юк қўймаслик чоралари кўрилади. Уйғотувчи ёки силтовчи кучларнинг даври олдиндан маълум миқдор бўлганидан лойиҳа тузувчи инженернинг ихтиёрида фақат эркин тебраниш даврига колади. Уни мажбурий тебраниш даврига ҳеч қачон мос келмайдиган қилиб танлаш зарур.

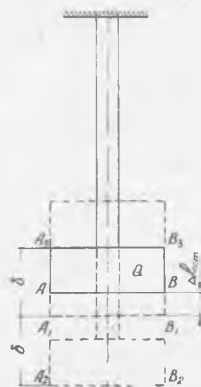
Иншоот ва машина қисмларида учрайдиган эркин ва мажбурий тебраниш типлари билан танишиб чиқайлик.

Иншоот ва машиналарнинг кўпроқ қисми призматик стержень бўлганидан, уларда ҳосил бўладиган тебраниш типлари билан танишиш зарур. Призматик стерженлар бўйлама буралиш ва кўндаланг тебраниш ҳаракатини бажариши мумкин. Масалан, 526-шаклда тасвирланган, узунлиги l бўлган призматик стержень учига оғирлиги Q бўлган AB диск осилган. Стержень, унинг учига осилган дискнинг оғирлиги Q таъсиридан $\Delta l_{ст}$ миқдорга чўзилади, бинобарин диск A_1B_1 ҳолатни эгаллайди. Агар стерженни ўз учига осилган юк билан бирга чўзиб туриб, кейин уни ўз ҳолига қўйиб юборсак, диск ўз мувозанат ҳолати A_1B_1 ёнида эркин тебраниб ҳаракат қилади. Эркин тебранган диск пастки ҳолат A_2B_2 га келгач, стержень Δl миқдорга чўзилади; дарҳол диск яна инерция кучининг таъсирида ўзининг дастлабки, A_1B_1 ҳолати орқали ўтиб, A_3B_3 вазиятини эгаллайди. Дискнинг бу кейинги ҳолатида стержень Δl миқдорда сиқилади. Қайтарувчи куч таъсиридан диск яна A_1B_1 орқали ўтиб, ўзининг дастлабки пастки ҳолатига қайтади. Шундай қилиб, эркин тебраниш узоқ вақт давом этади.

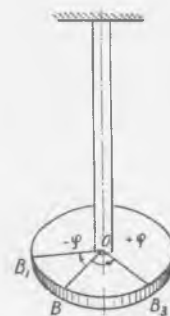
Худди шундай ҳол стержень буралган тақдирда ҳам рўй беради; агар стерженнинг учига ўрнатилган дискни унинг текислигида ётувчи уйғотувчи жуфт ёрдамида бир сз бураб туриб, кейин у ўз ҳолига ташлаб қўйилса, диск эркин буралиш тебранма ҳаракатини бажаради. Натижада дискнинг бирон OB радиуси OB_1 ва OB_2 ҳолатларини олиб $+\varphi$ дан $-\varphi$ миқдорига буралади (527-шакл).

Худди шундай ҳолни икки таянчда ётувчи балкага қўйилган юк Q га кўндаланг туртки бериб, балканинг кўндаланг тебранишини кузатишимиз мумкин (528-шакл). Балкага қўйилган юк статик мувозанат ҳолати D_0 ёнида кўндаланг тебраниб, D_1 дан D_2 ҳолатига ўтади ва бу ҳаракатни чексиз қайтаради. Тебранувчи қисмларни динамик куч таъсирига бардош берадиган қилиб ҳисоблаш учун уларнинг нуқталарини ўз мувозанат ҳолатидан

энг катта огишини билишимиз зарур. Бу энг катта огишга *амплитуда* дейилади. Амплитуда тебраниш ҳаракатининг энг муҳим параметрларидандир. Бундан ташқари, тебраниш ҳаракатни, бир тебраниш учун сарфланган *вақт-давр* ёки маълум вақт ичида бажариладиган *тебраниш сони* ҳам характерлайди.



526-шакл.



527-шакл.



528-шакл.

Келтирилган мисолларда стерженларга қўйилган бўйлама ва кўндаланг юклар миқдори тегишлича стерженларнинг ўз оғирлигидан анча катта бўлгани сабабли, бу хусусий оғирликларни эътиборсиз қолдириб, фақатгина эластиклиги кўзда тутилди. Шунинг учун масала оғирлиги ҳисобга олинмайдиган эластик стерженга қўйилган юкнинг ҳаракатини текширишга келтирилди. Юкнинг статик мувозанат ҳолатидан ҳар бир ондаги оғиши унинг ҳаракат қонунини белгилайди, яъни:

$$w = w(t). \quad (152.1)$$

Бу тенглама орқали ҳар бир он учун оғирлиги ҳисобга олинмайдиган эластик стержень устидаги юкнинг ҳаракати аниқланади.

Шунингдек, оғирлиги ҳисобга олинмайдиган эластик стержень учидagi дискнинг ҳар бир он учун буралиш ҳаракат тенгламаси қуйидагича ифодаланади:

$$\varphi = \varphi(t). \quad (152.2)$$

Қўраимизки, биз келтирган учала характерли ҳолда ҳам эластик стерженга қўйилган юк ва дискнинг ҳаракати битта параметр билан тўла аниқланаётир. Шунинг учун бундай эластик стерженлар *эркинлик даражаси битта бўлган системалар* деб аталади. Мана шу (152.1) ва (152.2) тенгламалар билан ифодаланган $w(t)$ ва $\varphi(t)$ ҳар бир ҳол учун аниқланса, тегишли инерция ва жуфт кўчларни ҳисоблаш қийин эмас. Қўпинча амалда учра-тиладиган эластик системанинг тебраниши эркинлик даражаси биттага кел-

тириладиган масалалар бўлганидан биз бу бобда фақат шунга ўхшаш масалалар билан шуғулланамиз.

Эластик системанинг тебранма ҳаракатини текширишда деформация билан қучланиш орасидаги муносабатни чиқиш қийин деб қабул қиламиз.

Эркинлик даражаси биттага келтирилган қоллар учун ҳаракат тенгламасини (152.1) ва (152.2) га мувофиқ олинса қайтарувчи куч Cw га тенг бўлади. Бунда C эркин тебранишдаги эластик системанинг геометрик ва физик параметрларига боғлиқ коэффициентдир. У, эластик системанинг юк қўйилган нуқтасида қиймати бирга тенг бўлган эластик қучишни ҳосил қилиши учун зарур бўлган кучдир; юк қўйилган нуқта $w(t)$ миқдорга қучганидан, у нуқтадаги эластик қайтарувчи куч $C \cdot w$ га тенг бўлади. Масалан, стержень учига қўйилган Q юк таъсиридан, юк қўйилган нуқта $\Delta l = -\frac{Ql}{EF}$ га пасайса, тегишли қўзувчи куч $Q = \frac{EF}{l} \Delta l$ бўлади. $\Delta l = 1$ бўлса, тегишли кучни C десак, у ҳолда тенгламани қуйидагича ёзамиз:

$$C = \frac{EF}{l}. \quad (a)$$

Энди шу стерженнинг учига $Q = 1$ бўлган юкни қўйсак, тегишли қўзилиш

$$\Delta l = \delta = \frac{1 \cdot l}{EP} \quad (b)$$

бўлади. Энди юқорида ҳосил бўлган (a) ва (b) боғланишларни солиштириб қуйидаги муносабатни оламиз:

$$C \cdot \delta = 1. \quad (152.3)$$

Бу тарздаги муносабатни ҳар бир турдаги деформация учун ҳам чиқариш мумкин. Ундан фойдаланиб, эластик системанинг ҳар бир нуқтасига қўйилган 1 га тенг юкдан шу нуқтадаги қўчиш Δ ни аниқлаб, (152.3) дан C ни ҳисоблаш қийин эмас. Масалан, ўз оғирлиги ҳисобга олинмайдиган балканинг ўртасига P юк қўйилган бўлса, унинг қиймати бирга тенг бўлганда балканинг шу нуқтага тегишли салқилиги: $\delta = \frac{1 \cdot l^3}{48 \cdot EI}$ ифода орқали

аниқланади. шунинг учун $C = \frac{1}{\delta} = \frac{48EI}{l^3}$ бўлади. Шунингдек, буралишдаги буровчи момент $M_0 = 1$ бўлгандаги буралиш бурчаги қуйидагича бўлади

$$\theta = \delta = \frac{1 \cdot l}{G \cdot I_p}$$

шунга кўра

$$C = \frac{1}{\delta} = \frac{GI_p}{l}$$

бўлади.

Энди оғирлиги йўқ эластик системалар учун Даламбер принципини қўллаб, динамик мувозанат тенгламасини тузишимиз мумкин.

Муҳит қаршилигини ва стержень материалнинг ички ишқаланишидан ҳосил бўладиган қаршилиқни эътиборга олмасдан, эркинлик даражаси битта бўлган эластик системанинг тебранма ҳаракатининг дифференциал тенгламасини тузишга мисол келтирамиз:

Консол балканинг чап учи кистириб қўйилган бўлиб, ўнг учига Q юк қўйилган (бунда балканинг ўз оғирлиги эътиборга олинмайди) (529-шакл).

Қўйилган юк Q таъсиридан балка эгилиб, B_1 ҳолатда статик мувозанатда туради. Балканинг бу ҳолати учун юкнинг мувозанат тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$Cf = mg = Q. \quad (c)$$

Энди балкани бирор туртки билан бу ҳолатдан қўзғатиб, у ўз ҳолига ташлаб қўйилса, балка ҳаракатда давом этади. Балкага қўйилган юк бирор t вақт ичида B нуқтада бўлиб, унга тегишли эгилиш w бўлсин деб фараз қилайлик. У ҳолда B нуқтага тикловчи эластик куч $C(f+w)$ ва юкнинг оғирлигидан ташқари инерция кучи $m \frac{d^2 w}{dt^2}$ ҳам таъсир қилади. Даламбер принципига мувофиқ B нуқтанинг ҳаракат тенгламаси қуйидагича ёзилади:



529- шакл.

$$m \frac{d^2 w}{dt^2} + C(f+w) = Q.$$

(с) тенглама кўзда тутилса, бу тенглама қуйидагича ёзилади:

$$m \frac{d^2 w}{dt^2} + Cw = 0, \text{ ёки } \frac{C}{m} = \omega^2 \text{ десак,}$$

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + \omega^2 w = 0. \quad (152.4)$$

Буралиш тебраниши учун деформация φ ни олиб, айнан юқоридагича мулоҳаза юритиб айланиш ҳаракатининг дифференциал тенгламасини қуйидагича ёзамиз:

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + C\varphi = 0 \text{ ёки } \frac{C}{I} = \omega^2 \text{ десак,}$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega^2 \varphi = 0. \quad (152.5)$$

Бу тенгламалар математика нуқтан назаридан бир-бирдан тафовут қилмайди.

(151.4) каби дифференциал тенглама назарий ме аника курсида берилган эди, шунинг учун, бизга зарур бўлган маълумотларни бевосита у ердан оламиз. Масалан, тебраниш такрорлиги ва даври учун (152.4) ни кўзда тутиб қуйидаги формулаларни ёзамиз:

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{m}} = \sqrt{\frac{g}{f}} \quad (152.6)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{C}} = 2\pi \sqrt{\frac{f}{g}}. \quad (152.7)$$

Қўраимизки, оғирлиги ҳисобга олинмайдиган эластик балкага қўйилган жисмнинг эркин тебраниши оддий гармоник тебраниш бўлиб, даври, такрорлиги ва узунлиги Q юк таъсиридан ҳосил бўладиган статик деформацияга тенг бўлган математик тебрангичнинг такрорлик ва даврига тенг бўлар экан. Масалан, Q юк призматик стерженнинг учига осилган бўлса, унда такрорлик ва тебраниш даври, тегишлича, қуйидаги формулалар билан аниқланади:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta l}} = \sqrt{\frac{gEF}{Ql}},$$

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{\Delta l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{Ql}{gEF}}$$

Икки таянчга шарнир воситаси билан туташтирилган балканинг ўртасига Q юк қўйилган бўлса, формула қуйидагича ёзилади:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l_{\max}}} = \sqrt{\frac{48EIg}{l^3}},$$

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l_{\max}}{g}} = \sqrt{\frac{Ql^3}{48EIg}}$$

Тебраниш такрорлиги за даври ҳақидаги таъриф назарий механика курсида батафсил берилган бўлса-да, бу тушунчалар жуда ҳам муҳим бўлгани сабабли, масалани бошқа нуктай назардан кўриб чиқамиз. (152.6) ёки (152.7) формулалардан, ω такрорлик ва τ давр тебранувчи эластик система материалининг хоссасига ва кесим шаклига боғлиқ бўлиб, тебранишни ҳосил қилувчи бошланғич шартларга боғлиқ эмаслигини кўрамиз, ундан ташқари, эластик системанинг такрорлиги ω унинг бикрлиги ошган сари кўпайиб, масса кўпайган сари камаёди. Салмоқлик ва бикрлиги кичик бўлган системаларнинг такрорлиги кам бўлиб, енгил ва бикрлиги катта бўлган системаларнинг такрорлиги кўп бўлади.

Маълумки, (152.6) дифференциал тенглама интегралли сўнмайдиган даврий ҳаракатни тасвирлайди. Бу ҳодиса тенгламани чиқарганда эластик бўлмаган қаршилик кучлари (муҳит қаршилиги, шунингдек, ички ишқаланиш кучи) ни ҳисобга олмаганимиз натижасида рўй беради. Аммо, муҳит қаршилик кучи эластик бўлмаган куч тебраниш такрорлигининг ўзгаришига деярли таъсир кўрсатмаслигини кейинги параграфларда кўрсатамиз.

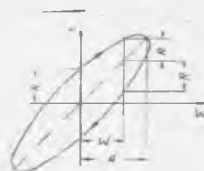
153-§. Эластик системанинг эркин тебранишига эластик бўлмаган қаршиликларнинг таъсири

Эластик бўлмаган муҳит қаршилиги тебранувчи система молекулаларининг ўзаро ишқаланиши натижасида ҳосил бўлади. Системанинг энергияси бу қаршиликни енгиш учун қайтадан тикланмайдиган даражада сарфланади ва, натижада, тебраниш амплитудаси сўна боради. Муҳит қаршилигини тезликнинг биринчи даражасига пропорционал ўзгарадиган ҳолни назарий механика курсида тавсифлаган эдик. Энг характерли ҳол шу тарздаги қаршилик бўлгани учун, уни яна бир карра такрорлашни ўқувчиларимизга тавсия этамиз.

Муҳитнинг қаршилик кучи ташқи ишқаланиш натижасида ҳам рўй беради, шунингдек, у тезликнинг турли даражаларига пропорционал ўзгаради. Аммо бу ҳоллар бевосита материаллар қаршилигида текшириладиган масалаларда учрамаганидан, биз улар устида тўхталмаймиз.

Эластик бўлмаган ички қаршилик гистерезис ҳодисаси туфайли рўй бергани учун бу масала устида тўхтаб ўтамиз. Тебранувчи куч билан юкланган ҳар бир система материали Гук қонунидан четга чиқиб, кучланиш билан деформация орасидаги муносабат гистерезис чизиғи билан ифодаланади (530-шакл). Эластик система бирор нуқтасининг кўчиши ω эластик қаршилик P га мос келса, улар орасидаги муносабат тўғри чизиқ билан тасвирланади. Аммо ички қаршиликнинг мавжуд бўлиши туфайли ҳаракатнинг йўналишига қараб, қаршилик кучининг ҳақиқий қиймати P дан катта ёки кичик бўлиши мумкин. Гистерезис туфайли ҳосил бўладиган қўшимча қаршилик кучини R десак, тўла қаршилик кучи система юкланганда $P+R$ га, юкдан бўшатилганда эса $P-R$ га тенг бўлади (530-шакл).

Гистерезис процессини тасвирловчи шаклда конструкция материалидан ясалган намунани юклаш ва юкдан бўшагиш процесси стрелка билан кўрсатилган. Қўрамизки, материал деформацияланганда унда ички эластик кучдан ташқари, эластик бўлмаган ички қаршилик кучи ҳам рўй беради. Конструкция элементларига ишлатиладиган материаллар устида Н. А. Довиденковнинг ўтказган бир қанча тажрибалари бир цикл тебранишда энергия йўқолишининг ўзгармаслигини, яъни гистерезис чизиги билан чекланган юзанинг ўзгармаслигини кўрсатади. Эластик бўлмаган қаршилик кучини гистерезис чизиги билан чегараланган юза орқали ифодалаш қулайдир. 530-шаклда тасвирланган гистерезис чизиги билан ўралган юзани қуйидагича ифодалаймиз:



530-шакл.

бу ерда R_0 — эластик бўлмаган энг катта қаршилик кучи (у материал хоссасига ва тебраниш амплитудаси (A) га боғлиқ), α — гистерезис чизиги формасига боғлиқ бўлган коэффициент (масалан, гистерезис чизиги эллипс бўлса, $\alpha = \pi$ булади).

Конструкция элементларида ишлатиладиган материаллар учун эластик бўлмаган қаршиликни тебраниш амплитудаси орқали қуйидагича ифодалаш мумкин:

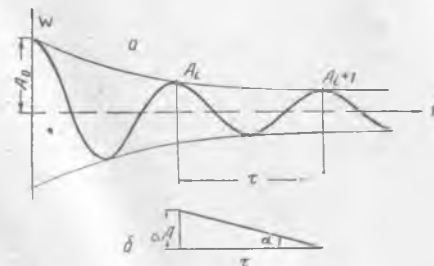
$$R_0 = f A^n; \quad (153.2)$$

бу ерда n — конструкция элементларининг материалга боғлиқ сон (пўлат учун $n = 2 - 2,5$ бўлиб, у тажрибадан аниқланган), β — конструкция элементларининг шакли ва материалга боғлиқ бўлган коэффициент.

Эластик бўлмаган қаршилик кучи R_0 нинг қийматини (153.1) га қўйиб, бир циклда қаршиликни енгиш учун сарфланган энергияни тебраниш амплитудаси орқали ифодалаймиз:

$$\Omega = \lambda A^{n+1}; \quad (153.3)$$

бу ерда $\lambda = \alpha \cdot \beta$. Бу формуладан фойдаланиб, ички эластик бўлмаган қаршиликни ҳисобга олиб, эркинлик даражаси битта бўлган эластик система тебранишининг кетма-кег амплитудаларини аниқлаймиз. Эластик бўлмаган қаршилик таъсиридан сўнувчи тебранишни текширайлик. Сўнувчи тебраниш графиги 531-шаклда тасвирланган. Тебранувчи массанинг мувозанат ҳолатидан энг катта оғишига тегишли иккита қўшни ҳолат учун потенциал энергия ифодасини тузамиз:



531-шакл.

$$U_i = \frac{1}{2} C A_i^2 \quad U_{i+1} = \frac{1}{2} C A_{i+1}^2;$$

бу ерда C — эластик системанинг бикрлиги.

Бир цикл давомида энергиянинг камайиши қуйидагича ифодаланади:

$$\Delta U = \frac{1}{2} C (A_i^2 - A_{i+1}^2).$$

Агар тўлқиннинг сўниши жуда ҳам кучли бўлмаса, $A_i + A_{i+1} = 2A_i$ ва $A_i - A_{i+1} = \Delta A_i$ бў.

лади. Бундан энергиянинг камайтишини аниқлаш учун қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз:

$$\Delta U_i = CA_i \cdot \Delta A_i; \quad (153.4)$$

бу ерда ΔU_i — қаршилиқ таъсиридан система бир цикл тебранган даврида озайган энергия, бу энергия гистерезис чизиги билан чекланган юзага тенг бўлиши керак, шунинг учун (153.4) ни (153.3) га тенглаштирамиз:

$$CA_i \cdot \Delta A = \lambda A^{n+1} \quad (a)$$

(юқоридаги ифодада i белгиси ёзилмай қолдирилган). Ёзилган формуладаги ΔA ни 531- шакл, b дан топамиз:

$$\Delta A = -\tau \frac{dA}{dt}. \quad (b)$$

$A = A(t)$ амплитуданинг ўзгаришини кўрсатувчи тенгламалар (бу эгри чизик амплитуда учларини туташтириб ҳосил қилинади). τ эса тебраниш даври бўлиб, уни тақрибан сўнмовчи эркин тебранишлар даврига тенг деб олиш мумкин. Амплитуда аниқланадиган дифференциал тенгламани чиқариш учун (b) ни (a) га қўямиз:

$$vA_n = -\tau \frac{dA}{dt}; \quad (153.5)$$

бу ерда $v \frac{\lambda}{C}$ — ўзгармас сон ҳосил бўлган дифференциал тенгламани ўзгаришларни ажратиб $n \neq 1$ ҳол учун интегралласак:

$$\frac{A^{1-n}}{1-n} = -\frac{vt}{\tau} + C$$

келиб чиқади. Интеграллашдан ҳосил бўлган ихтиёрий ўзгармас сон C ни ҳаракатнинг бошланғич шартидан топамиз, яъни $t=0$ бўлганда $A=A_0$ бўлади. Шунинг учун:

$$C = \frac{A_0^{1-n}}{1-n},$$

демак,

$$\frac{A^{1-n}}{1-n} - \frac{A_0^{1-n}}{1-n} = -v \frac{t}{\tau} \quad (153.5')$$

бўлар экан. Бундан амплитудани аниқлаймиз:

$$A = \frac{A_0}{\sqrt[n]{1 - A_0^{n-1} \cdot \frac{(n-1)v t}{\tau}}} \quad (153.6)$$

Бу формуладан гистерезис ҳудудасидаги тебранишнинг сўниш қонуни тўла аниқланади. Бир нечта хусусий ҳолларни текширамиз:

1. $n=0$ деб фараз қилайлик. Бу ҳолда эластик бўлмаган қаршилиқ амплитуда A нинг ҳар қандай қиймати учун ҳам $R=\beta=\text{const}$ бўлади. Гистерезис чизиги билан чекланган юза (153.3) га мувофиқ A га пропорционал равишда ўсаётир, демак, бу ҳолда ички қаршилиқни енгилш учун сарфланган энергия амплитудага пропорционал ўсар экан. Бу ҳолни тасвирловчи гистерезис чизиги параллелограмм шаклида кўрсатилган (532-шакл) Бу ҳол учун тебраниш амплитудаси (153.5') га мувофиқ қуйидаги қонун буйича камаяди:

$$A = A_0 - v \frac{t}{\tau}. \quad (153.7)$$

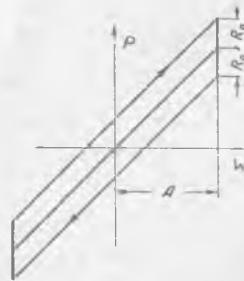
Қурамызки, $t = -\frac{A_0}{v} \tau$ бўлганда, тебраниш бутунлай сўниб, амплитуда $A = 0$ булар экан. Эластик системага ўрнатилган масса қуруқ сиртда сирганиб тебранса худди шу ҳол рўй беради. Амплитуданинг озайиши ва тебранишининг сўниш графиги 533-шаклда тасвирланган.

2. $n = 1$ деб фараз қилайлик. Бу ҳолда дифференциал тенглама (153.5) қуйидагича ёзилади:

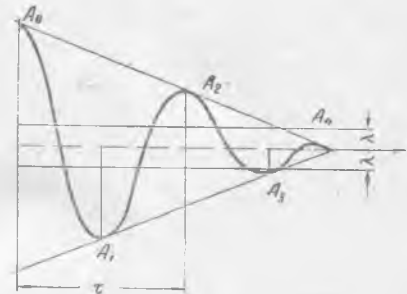
$$\frac{dA}{dt} = -\frac{v}{\tau} A.$$

Бунини интеграллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\ln A = -\frac{v}{\tau} t + C.$$



532-шакл.



533-шакл.

Агар $t = 0$ бўлса, $A = A_0$ бўлади, шунинг учун $C = \ln A_0$.
Бу кўзда тутилса:

$$A = A_0 e^{-v \frac{t}{\tau}} \quad (153.8)$$

бўлади. Муҳит қаршилигини тезликнинг биринчи даражасига пропорционал деб, бу ҳолга тегишли ҳаракат тенгламасини назарий механика курсида чиқарган эдик.

3. $n = 2$ деб фараз қилайлик. Бу ҳолга тегишли амплитудани бевосита (153.6) дан чиқариш мумкин.

$$A = \frac{A_0}{1 + A_0 v \frac{t}{\tau}} \quad (153.9)$$

Демак, бу ҳолда тебраниш гиперболик қонун бўйича сўнар экан.

154-§. Эркинлик даражаси битта бўлган эластик системанинг мажбурий тебраниши

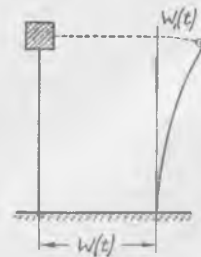
Олдинги параграфда эластик системанинг эркин тебранишига оид маълумотларни бердик. Агар машина ва иншоот қисмлари ташқаридан қўйилган ўйғотувчи куч $P(t)$ таъсиридан маълум қонунлар бўйича тебранса, бундай тебраниш *мажбурий тебраниш дейилади*. Масалан, балка устига ўрнатилган машина ўз роторининг айланиши натижасида балкага

инерция кучи таъсир қилади. t Бу инерция кучининг вертикал ташкил этувчиси ($P(t) = P_0 \sin \omega t$) таъсиридан балкада мажбурий тебраниш ҳаракати ҳосил бўлади (534-шакл).

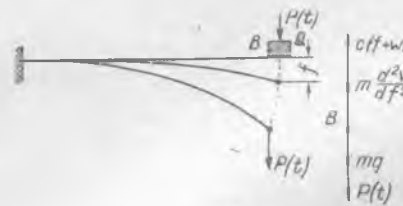
Ёки эгилувчан баланд иншоот схематик равишда пастки учи билан асосга қистириб тиралган консоль деб қаралса, ер зилзилага келганда, иншоот асосий сейсмограмма графиги билан тасвирланган қонун асосида горизонтал йўналишда тебраниш ҳаракат қилади (535-шакл). Натижада ер устидаги иншоот мажбурий тебрана бошлайди. Мажбурий тебраниш текширилганда, инженернинг эътиборини тебраниш амплитудасининг максимал қиймати жалб қилиши керак, чунки тебранувчи элементларда ҳо-



534-шакл



535-шакл.



536-шакл.

сил бўладиган кучланишларни шу қиймат орқали ифодалаш мумкин. Яна, эркинлик даражаси битта бўлган, оғирлиги ҳисобга олинмайдиган, учига Q юк қўйилган консолни оламиз. Унга эластик тикловчи Cw куч, инерция кучи $m \frac{d^2 w}{dt^2}$ ва $P(t)$ уйғотувчи кучлар таъсир қилсин (536-шакл). У ҳолда консоль учигаги тебранувчи B нуқтанинг дифференциал тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$m \frac{d^2 w}{dt^2} + C(f + w) = mg + P(t);$$

$Cf = mg$ ни кўзда тутиб, мажбурий ҳаракат тенгламасини қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + \omega^2 w = \frac{P(t)}{m}. \quad (154.1)$$

Маълумки, бу ҳилдаги дифференциал тенгламанинг интегралли унинг бир жинсли қисмининг умумий интегралли билан ўнг томонини ҳисобга олиб ечганда ҳосил бўладиган хусусий интегралларнинг йиғиндисидан иборат бўлади. Тенгламанинг бир жинсли қисмининг умумий интегралли қуйидаги кўринишда ёзилиши бизга назарий механикадан маълум:

$$w = a \sin(\omega t + \alpha); \quad (154.2)$$

бу ерда a — эркин тебраниш ҳаракатининг амплитудаси, α — бошланғич фаза. Булар ҳаракатнинг бошланғич шартидан аниқланади. Энди (154.1)

нинг хусусий интегралини топишга ўтамиз. Бунинг учун биз текширган балкани олиб, унинг B нуқтасига τ онда S импульсини қўйиб, бундан ҳосил бўладиган эркин тебранишни текшираемиз. Импульс S қўйилиб, сўнгра йўқолиши биланоқ юк қўйилган B нуқта қўзғалишга улгурмайди, шунинг учун:

$$w(\tau) = 0 \quad (a)$$

бўлади. Аммо ҳаракат миқдори ҳақидаги теоремага мувофиқ, импульс таъсиридан юк қўйилган B нуқта бу онда $\frac{dw}{dt}$ тезликни олишга улгуради, бу тезликни қуйидаги боғланишдан топамиз:

$$m \frac{dw}{dt} = S.$$

Бундан:

$$w(\tau) = \frac{dw}{dt} = \frac{S}{m}. \quad (b)$$

Макур (a) ва (b) формулалар ёрдамида эркин тебраниш ҳаракатининг бошланғич шarti аниқланади. Эркин тебраниш ҳаракати $t > \tau$ давомида бажарилади. Бу шартлардан фойдаланиш мақсадида (154.2) дан B нуқтанинг тезлигини ҳисоблаймиз:

$$w(t) = a \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \alpha); \quad (c)$$

t нинг ўрнига τ ни қўйиб, (a) ва (b) дан фойдаланиб, импульс S таъсиридан ҳосил бўлган тебранма ҳаракатининг амплитудаси билан α фазасини топамиз:

$$0 = a \sin(\omega \tau + \alpha) \quad \frac{S}{m} = a \omega \cos(\omega \tau + \alpha).$$

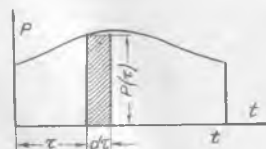
Бу тенгламалардан:

$$a = \frac{S}{m \cdot \omega}, \quad \alpha = -\omega \tau$$

бўлади. Демак, ҳаракат қуйидаги қонунга биноан бажарилар экан:

$$w = \frac{S}{m\omega} \sin(\omega t - \omega \tau) = \frac{S}{m\omega} \sin \omega(t - \tau). \quad (154.3)$$

Бу ёрдамчи масала оқибатидан фойдаланиб, асосий масалани уйғотувчи куч $P(t)$ таъсиридан ҳосил бўладиган мажбурий тебраниш ҳаракат тенгламасини чиқарамиз. $P(t)$ кучнинг ўзгариш қонуни 537-шаклда кўрсатилганидек, график равишда тасвирланган деб фарз қилайлик. Уйғотувчи $P(t)$ куч балкадаги B нуқтага кетма-кет қўйилган чексиз кичик импульслар $P(t)dt$ дан иборат деб қаралса, нуқта $t \geq \tau$ онда, (154.3) га мувофиқ, $\frac{P(t) d\tau}{m\omega} \sin \omega(t - \tau)$ қонуни бўйича ҳаракатланади. Барча кетма-кет импульслар таъсиридан ҳосил бўлган ҳаракат мазкур чексиз кичик $P(t)dt$ импульс туғдирган ҳаракатни $(0, t$ оралиғида) интеграллаш йўли билан топилади:



537-шакл.

$$w(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t P(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau. \quad (154.4)$$

Шундай қилиб уйғотувчи $P(t)$ куч таъсиридаги эластик системага оид нуқтанинг ҳаракати қуйидагича ифодаланади:

$$\omega(t) = a \sin(\omega t + \alpha) + \frac{1}{m\omega} \int_0^t P(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau. \quad (154.5)$$

Бу тенгламанинг биринчи ҳади нуқтанинг эркин тебранишини ифодалаб, иккинчи ҳади эса $P(t)$ таъсиридан ҳосил бўладиган мажбурий тебранишини аниқлайди. Бошланғич пайтда $\omega_0 = 0$, $\omega_{(0)} = 0$ бўлса, яъни ҳаракат фақат мажбурий тебранишдан иборат бўлса, у (154.4) ифода билан аниқланади. Аммо эркин тебраниш ҳаракатига тааллуқли такрорлик ω ни аниқламасдан туриб, мажбурий тебраниш бўлмаслиги (154.4) ифодадан равшан кўриниб турибди.

Мажбурий тебранишнинг муҳим ҳолларини текшираимиз. Балкага қўйилган уйғотувчи куч гармоник қонун бўйича ўзгарган ҳолни олайлик:

$$P(t) = P_0 \sin pt. \quad (154.6)$$

Бу хилдаги куч машина роторини озгина бўлса ҳам эксцентрик ўрнатилиши туфайли рўй бериши бу боб бошида айтиб ўтилган эди (534-шакл). Юқорида келтирилган (154.6) боғланишдаги куч $P(t)$, роторнинг эксцентрик ўрнатилиши натижасида ҳосил бўладиган марказдан қочирма куч бўлиб, унинг вертикал ташкил этувчиси $P \sin pt$ га тенгдир. Бунда p роторнинг бурчак тезлиги бўлиб, у аynи пайтда уйғотувчи кучнинг такрорлиги бўлади. Бу хилдаги уйғотувчи куч таъсиридан балканинг мажбурий тебранишининг ҳаракат тенгламасини (154.4) ифодадан аниқлаймиз:

$$\omega(t) = \frac{P_0}{m\omega} \int_0^t \sin pt \sin \omega(t - \tau) d\tau.$$

Интегрални ҳисоблаб ҳаракат тенгламасини топамиз:

$$\omega(t) = \frac{P_0}{m(\omega^2 - p^2)} \left(\sin pt - \frac{p}{\omega} \sin \omega t \right),$$

$\omega^2 = \frac{C}{m}$ ва $f = \frac{p}{C} = A_0$ боғланишларни назарга олиб юқорида келтирилган ҳаракат тенгламасини қуйидагича ёзамиз (кейинги боғланишдаги f_0 куч P_0 нинг статик таъсиридан ҳосил бўлган эгилишдир):

$$\omega(t) = \frac{A_0}{1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2} \left(\sin Pt - \frac{p}{\omega} \sin \omega t \right). \quad (154.7)$$

Гармоник равишда ўзгарадиган уйғотувчи куч икки қисмдан иборат бўлган мураккаб тебраниш ҳаракатини ҳосил қилади: бири уйғотувчи куч такрорлиги p бўлган тебранувчи ҳаракат ва иккинчиси эркин тебраниш такрорлиги ω билан тебранувчи ҳаракатдир. Икки хил такрорликдаги тебраниш процессининг қўшилиши 538-шакл, a ва b да кўрсатилган (538-шакл, a , $p > \omega$ бўлган ҳол учун 538-шакл, b эса $p < \omega$ бўлган ҳол учун берилган). Гарчи эластик бўлмаган қаршилиқ ҳисобга олинмаган бўлса-да, ҳар иккала ҳол учун (154.7) нинг қавс ичидаги эркин тебранишини тасвирловчи иккинчи ҳад сўнмоқда. Шунинг учун тебраниш процессида сўнмасдан стационар равишда бажарилувчи мажбурий тебранма ҳаракатни ўрганиш мақсадга мувофиқдир. Мажбурий тебранишнинг бу қисми қуйидаги кўринишда ифодаланади:

$$\omega = \frac{A_0}{1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2} \sin pt. \quad (154.8)$$

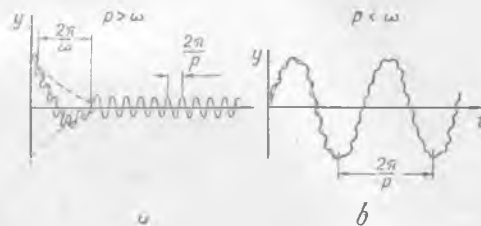
Демак, мажбурий тебраниш уйғотувчи куч такрорлиги билан содир бўлиб, амплитудаси P_0 юкнинг статик таъсиридан ҳосил бўладиган A_0 эгилишдан тамоман фарқ қилар экан. Мажбурий тебраниш амплитудасини A десак, у қуйидагича ёзилади:

$$A = \frac{A_0}{1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2}. \quad (154.9)$$

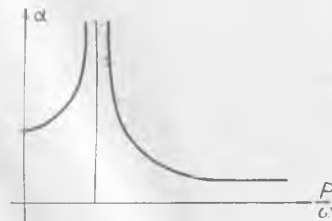
Динамик юкнинг таъсиридан ҳосил бўлган амплитуда A нинг шу юк статик равишда қўйилганда ҳосил бўладиган эгилиши A_0 га нисбати $\left(\frac{A}{A_0}\right)$ ни α билан белгиласак, қуйидаги боғланиш ҳосил бўлади:

$$\alpha = \frac{1}{1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2}. \quad (154.10)$$

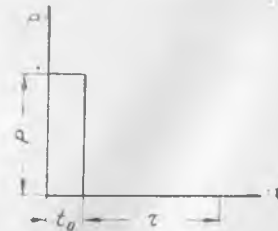
Ҳосил бўлган бу ифода *динамик коэффициент* дейилади. Бу боғланишдан кўринадики, динамик коэффициент фақат тебранишлар такрорлигининг нисбатига боғлиқ экан. Уларнинг графиги 539-шаклда тасвирланган. Уйғотувчи куч такрорлиги p нинг кичик қийматлари учун динамик коэффициент $\alpha > 1$ дир. Уйғотувчи кучнинг такрорлиги p нинг ортиши билан α ҳам ўсиб, $p = \omega$ бўлганда чексиз қийматга интилади, бу ҳол *резонанс* деб аталади. Эластик бўлмаган қаршиликни ҳисобга олганда резонансда рўй бергандагидек, амплитуда чексиз қийматга интилмаса-да, у етарли даражада катта қийматга эга бўлиб эластик система учун хавф туғдиради. Мажбурий тебраниш такрорлиги p , эркин тебраниш такрорлиги ω га нисбати ўсган сари динамик коэффициент α камаяди ва динамик юкнинг эффекти статик юк эффектига қараганда сусаяди. Қўрамизки, такрорлиги паст бўл-



538-шакл.



539-шакл.



540-шакл.

ган эластик системага такрорлиги юқори бўлган динамик куч қўйилса, унинг таъсиридан сезиларли даражадаги мажбурий тебраниш ҳаракати рўй бермас экан. Эластик система жуда тез ўзгарадиган уйғотувчи куч таъсирига берилишга улгурмайди. Эластик бўлмаган кучни ҳисобга олмай, резонансда рўй берадиган процессларни назарий механика курсининг 153-параграфда батафсил текширганимиз учун, бу ҳақдаги қўшимча маълумотларни хотиралашларини ўқувчиларнинг ўзларига ҳавола қиламиз.

Энди, эластик системага жуда ҳам қисқа муддатли уйғотувчи куч таъсир қилишини текшираамиз. Эластик системага қўйилган динамик юк, эркин тебраниш давридан камроқ вақт ичида таъсир кўрсатса, унинг таъсири ҳеч қандай хавф туғдирмайди. Эластик системага $t = 0$ вақтда P куч бирданига қўйилиб, у жуда ҳам оз t_0 муддатда таъсир кўрсатиб, яна унинг таъсири қўққисдан тўхтатилади, деб фараз қилайлик (540-шакл). Юкнинг таъсир этиш муддати $t_0 < \frac{\pi}{2}$ бўлса, бундай юк таъсиридан ҳосил бўладиган максимал эгилиш, эластик система юк таъсиридан бўшатилган пайтдагидек рўй беришини кўрсатамиз. Юқорида келтирилган (154.4) ифодадан $t > t_0$ бўлган ҳол учун ҳаракат тенгламасини чиқарамиз:

$$W = \frac{1}{m\omega} \int_0^{t_0} p \sin \omega(t - \tau) d\tau$$

интегрални чиқариб, қуйидаги ифодани оламиз:

$$W = \frac{2p}{C} \sin \frac{\omega t_0}{2} \sin \omega \left(t - \frac{t_0}{2} \right). \quad (154.11)$$

Агар $\frac{t_0}{\tau} = \lambda$ десак:

$$\frac{\omega t_0}{2} = \frac{\pi t_0}{\tau} = \lambda \pi$$

бўлади. Энди (154.11) дан максимал оғиш, яъни тебранишнинг максимал амплитудаси:

$$A = W_{\max} = 2A_0 \sin \lambda \pi \quad (154.12)$$

бўлади. Бу ҳолда динамик коэффициент қуйидаги ифодадан топилади:

$$\alpha = \frac{A}{A_0} = 2 \sin \lambda \pi. \quad (154.13)$$

Қисқа муддат ичида таъсир этувчи куч учун динамик коэффициент қуйидаги жадвалда берилган:

t_0	0	0,01	0,02	0,03	0,05	0,10	0,15	0,25	0,5
α	0	0,062	0,126	0,188	0,313	0,618	0,908	1,413	2,00

Динамик куч эркин тебраниш даврининг юздан бир қисми давомида таъсир этса, унинг эффекти статик равишда қўйилган юк эффектига қараганда 16 марта кам бўлади.

Энди динамик юк синусоиданинг ярим тўлқини орқали тасвирланган бўлсин (541-шакл). Бу гарзда тасвирланган юкнинг қисқа муддат ичида

таъсирини унинг импульси орқали баҳолаш мумкин. $t > t_0$ бўлганда бажариладиган ҳаракатни (154.4) дан аниқлаймиз:

$$W = \frac{1}{m\omega} \int_0^{t_0} p(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau = \frac{1}{m\omega} \left[\sin \omega t \int_0^{t_0} p(\tau) \cos \omega \tau d\tau - \cos \omega t \int_0^{t_0} p(\tau) \sin \omega \tau d\tau \right] = \frac{1}{m\omega} \left[\sin \omega t \int_0^{t_0} p(\tau) \cos \frac{2\pi\tau}{\tau_0} d\tau - \cos \omega t \int_0^{t_0} p(\tau) \sin \frac{2\pi\tau}{\tau_0} d\tau \right].$$



541-шакл.

Эркин тебраниш даврини τ_0 ҳарфи билан белгиласак, $\frac{\tau}{\tau_0} < \frac{t_0}{\tau}$ бўлганидан $\frac{\tau}{\tau_0}$ жуда ҳам кичик сондир. Шунинг учун, $\sin 2\pi \frac{\tau}{\tau_0} = 0$, $\cos 2\pi \frac{\tau}{\tau_0} = 1$ деб олишимиз мумкин. Бу ҳолда ҳаракат тенгламасини тақрибан қуйидаги кўринишда ёзишимиз мумкин:

$$W = \frac{\sin \omega t}{m\omega} \int_0^{t_0} p(\tau) d\tau.$$

$\int_0^{t_0} p(\tau) d\tau = S$ куч импульси бўлгани сабабли ҳаракат тенгламаси:

$$W = \frac{S}{m\omega} \sin \omega t$$

кўринишда ёзилади. Бу формула ҳаракатни қисқа муддат ичида таъсир этувчи импульс орқали ифода қилади. Қисқа вақт t_0 мобайнида динамик кучнинг қандай қонун билан ўзгаришининг ҳаракат характери таъсири бўлса, унинг шу вақт ичидаги куч импульсига боғлиқ эканлигини кўраемиз. Демак, эркин тебраниш даври мобайнида таъсир кўрсатиб, ўзи деярли ўзгармайдиган уйқотувчи кучни статик куч деб, бу даврнинг қисмини ташкил қилувчи вақт ичида таъсир этувчи кучни эса импульс деб қараш мумкин экан. Импульс оний таъсир кўрсатган ҳоллар учун юқорида чиқарилган (154.13) формула аниқ бўлиб, бошқа ҳоллар учун эса тақрибийдир.

155-§. Эластик системанинг мажбурий тебранишига эластик бўлмаган кучларнинг таъсири

Эластик бўлмаган қаршиликнинг мажбурий тебраниш ҳаракатига кўрсатадиган таъсирини текшираемиз. Бунинг учун мажбурий тебраниш ҳаракатининг 154-параграфда чиқарилган дифференциал, тенгламасини эластик бўлмаган қаршиликни ҳисобга олган ҳолда ёзамиз. Масалани мураккаблаштирмаслик мақсадида ва инженерлик практикасида кўпроқ учрайдиган ҳолни, яъни ҳаракат тезлигининг биринчи даражасига пропорционал бўлган қаршилик таъсирининг текшириш билан чеклаймиз. У ҳолда эластик бўлмаган қаршилик кучини $R = 2p \cdot m \frac{dW}{dt}$ кўринишда олиб, мажбурий тебраниш ҳаракат тенгламасини қуйидагича ёзамиз:

$$\frac{d^2 W}{dt^2} + 2p \frac{dW}{dt} + \omega^2 W = \frac{P(t)}{m}. \quad (155.1)$$

Бу тенгламадан ҳам $P(t)$ нинг ҳар қандай қиймати учун тегишли бўлган мажбурий тебранишини ифодаловчи интегрални топиш мумкин. Аммо, биз тажрибада кўпроқ учрайдиган гармоник қонун билан ўзгарадиган уйғотувчи куч таъсирини текшириш билан чекланамиз:

$$P = P_0 \sin pt$$

бўлсин. Бу ҳол учун (155.1) тенгламага тегишли мажбурий тебранма ҳаракат амплитудасини назарий механика курсининг 155-параграфиди* қуйидаги курунишда берган эдик:

$$A = \frac{P_0}{m \sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2}}.$$

Илдиз остидан ω^2 ни чиқариб, $m\omega^2 = C$ ва $\frac{P_0}{C} = A_0$ тенгликларини кўзда тутсак, мажбурий тебраниш амплитудаси A учун қуйидаги формулани оламиз:

$$A = \frac{A_0}{\sqrt{(1 - \frac{p^2}{\omega^2})^2 + \frac{4b^2 p^2}{\omega^4}}}. \quad (155.2)$$

Бу ҳол учун динамик коэффициент:

$$\alpha = \frac{A}{A_0} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{p^2}{\omega^2})^2 + \frac{4b^2 p^2}{\omega^4}}}. \quad (155.3)$$

кўрунишда ёзилади. Бу масалада динамик коэффициентининг қиймати уйғотувчи куч такрорлигининг ҳар қандай қиймати учун ҳам чексизликка интилмайди. $\alpha = \frac{A}{A_0}$ нисбатининг ўзгаришига тегишли тавсифий маълумотлар назарий механика курсида берилган.

Эластик системанинг мустаҳкамлигини текшириш учун унда ҳосил бўладиган энг катта деформацияни аниқлаш лозим. Масалан, чўзилиш, буралиш ёки эгилишдаги энг катта статик деформация бўлсин. Динамик юк таъсирида ҳосил бўлган деформация унинг мажбурий тебранма ҳаракатининг амплитудаси A билан ифодаланади. Шунинг учун эластик системанинг энг катта деформацияси қуйидагича ифодаланади:

$$\delta_{\max} = A_0 + A = A_0(1 + \alpha) \mu A_0; \quad (155.4)$$

бунда

$$\mu = 1 + \alpha. \quad (155.5)$$

Эластик системанинг деформацияси система материалининг эластиклик чегарасида бўлса, кучланиш деформацияга пропорционал бўлган ҳолда ўзгаради, шунинг учун:

$$\sigma_d = \sigma_{\max}(1 + \alpha) = \mu \sigma_{\max} \leq [\delta]. \quad (155.6)$$

Шундай қилиб, динамик кучланишни аниқлаш масаласини динамик коэффициент μ ни аниқлашга келтирдик. Кейинги μ коэффициентининг қиймати $R\alpha$ га боғлиқ бўлиб, у (155.3) ва (155.5) боғланишлар ёрдамида аниқланади. Юқорида айтилганларни конкрет масалалар билан тушунтирамиз.

*М. Т. Ҳрозбоев. «Назарий механика асосий, курси», «Ўқитувчи», Тошкент, 1966.

МАСАЛАЛАР

198. Уzunлиги $l = 1\text{ м}$ бўлган пўлат стерженнинг кўндаланг кесим диаметри $d = 2\text{ см}$ бўлиб, учига оғирлиги $Q = 100\text{ кг}$ юк осилган. Стерженнинг оғирлигини ҳисобга олмай, унинг тебраниш такрорлиги ва даври аниқлансин (542-шакл) $E = 2 \cdot 10^6\text{ кг/см}^2$.
Е чи ш. Қўйидаги формула билан стерженнинг статик чўзилишини аниқлаймиз.



542-шакл.

$$\Delta l = \frac{Ql}{EF} = \frac{100 \cdot 100}{2 \cdot 10^6 \cdot \pi} = \frac{1}{200\pi} \text{ см.}$$

Стерженнинг тебраниш такрорлиги ва унинг даврини эса қўйидаги формулалар билан толамиз:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta l}} = \sqrt{981 \cdot 200\pi} = 785^1/\text{сек.}$$

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{\Delta l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{200\pi \cdot g}} = 0,008 \text{ сек.}$$

199. Бир учи қистириб тиралган балканинг иккинчи учига оғирлиги $Q = 490\text{ кг}$ юк қўйилган. Балканинг оралиғи $l = 150\text{ см}$, бикрлиги $EI = 2200 \cdot 10^8\text{ кг/см}^2$ бўлса, унинг ўз тебраниш такрорлиги ҳисоблансин.

Жавоби: $\omega = \sqrt{\frac{g}{f}} = 62,5^1/\text{сек.}$

200. Икки таянчга шарнир воситаси билан бириктирилган балкага қўйилган юк Q нинг ҳолатини ўзгартириш билан, тебраниш такрорлигининг қандай ўзгариши текширилсин. Балканинг оралиғи l , бикрлиги EI бўлсин (543-шакл).

Е чи ш. Балканинг тебранишдаги такрорлигини аниқлашда Q куч қўйилган нуқтадаги эгилиш салқилигининг қийматини қўйидагича толамиз:

$$f = \frac{Qx^2(l-x)^2}{3EI}$$

шунга кўра:

$$\omega = \sqrt{\frac{3EIg}{Qx^2(l-x)^2}} = \frac{1}{x(l-x)} \sqrt{\frac{3EIg}{Q}}$$

бўлади.

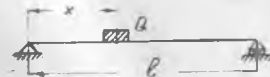
201. Консоль балкага ўрнатилган электромотор минутига энг камида $n = 900$ марта айланади (544-шакл). Айланувчи қисмларнинг мувозанатлашмаслиги натижасида, марказдан қочма инерция кучи ҳосил бўлиб унинг вертикал тузувчиси $P_1 = 20\text{ кг}$ дир. Қистириб тиралган жойдан мотор қандай масофада ўрнатилганда резонанс ҳодисаси рўй беради. Балканинг эркин тебраниш такрорлиги мажбурий тебраниш такрорлигидан 33% ортиқ бўлиши учун, моторни қандай оралиққа қўйиш лозим. Бу ҳол учун мажбурий тебраниш амплитудаси ҳамда динамик коэффициентни ҳисоблансин. Балканинг кўндаланг кесими $N30^a$ швеллер бўлиб, мотор оғирлиги $P = 100\text{ кг}$, $E = 2 \cdot 10^9\text{ кг/см}^2$.

Е чи ш. Мажбурий тебра иш такрорлиги:

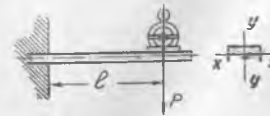
$$p = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi 900}{30} = 94^1/\text{сек.}$$

$P = \omega$ бўлганда резонанс бўлади. Бу ҳолда юк қўйилган қирқимнинг статик салқилиги қўйидагича аниқланади:

$$f = \frac{g}{\omega^2} = \frac{981}{94,2^2} = 0,111 \text{ см.} \quad f = \frac{Pl^2}{3EI}$$



543-шакл.



544-шакл.

бундан

$$l_{cp} = \sqrt{\frac{3EI\bar{f}}{P}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 259,5 \cdot 0,111}{100}} = 1,81 \cdot 10^6 \text{ см}^3;$$

$l_{cp} = 1,22 \text{ м}$ бўлади.

Эркин тебраниш такрорлиги ω_1 мажбурий тебранишдан 33% ортиқ бўлганидан, $\omega_1 = 1,33$, $p = 125,16 \text{ 1/сек}$ бўлади.

Бу такрорликка тегишли статик салқилик эса:

$$f_1 = \frac{Pl_1^3}{3EI} = \frac{g}{\omega_1^2} \quad f = \frac{Pl_{кр}^3}{3EI} = \frac{g}{p^2} \text{ бўлади;}$$

булардан:

$$l_1 = \frac{l_{кр}}{\sqrt{\left(\frac{\omega_1}{p}\right)^2 - 1}} = 1,03 \text{ м}$$

бўлади.

Мажбурий тебраниш амплитудасини ҳисоблашда муҳит қаршилиги ҳисобга олинмаслиги, яъни $b = 0$ бўлиши керак. Шунинг учун:

$$A = \frac{P_1 g}{P(\omega_1^2 - p^2)} = \frac{P_1 g}{P p^2 \left[\left(\frac{\omega_1}{p}\right)^2 - 1 \right]} = \frac{20 \cdot 981}{100 \cdot 0,69 \cdot 94,2^2} = 0,032 \text{ см}$$

бўлади.

Энди динамик коэффициент μ ни ҳисоблаш қийин эмас. Бу коэффициент қуйидагича ҳисобланади:

$$\mu = 1 + \frac{A}{f} = 1 + \frac{Pl_1^3}{3EIA}.$$

Балканинг мустақкамлигини текшириш учун динамик юкни бевосита қуйидагича аниқлашимиз мумкин:

$$P_\partial = C(f + A) = \frac{3EI}{l_1^3} (f_1 + A) = \frac{3 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 259,5 \cdot 0,143}{103^3} \approx 214 \text{ кг;}$$

$$\sigma_\partial = \frac{M_\partial}{W} = \frac{P_\partial \cdot l_1}{41,1} = \frac{214 \cdot 1,03}{41,1} = 540 \text{ кг/см}^2.$$

156-§. Эркин тебранувчи стерженлар массасининг таъсирини тақрибий равишда ҳисобга олиш

Призматик стерженларнинг эркин тебранишини текширганимизда, қўйилган юк Q га қараганда стерженларнинг ўз оғирлиги бир неча марта кичик бўлгандан, уларни ҳисобга олмаган эдик. Бунинг натижасида эластик системанинг эркин тебранишини, бу системани эркинлик даражаси битта бўлган системага айлантириб, масалани ўзгармас коэффициентли оддий чизиқли дифференциал тенгламани интеграллашга келтирдик. Қўпгина ҳолларда тебранувчи система масаласини ҳисобга олмаслик дағал хатоларга олиб боради. Тебранувчи система массаси ҳисобга олинса, масала мураккаблашиб, хусусий ҳосилалик дифференциал тенгламаларни ечиб, системанинг турли пайтдаги тебранишларини текширишга тўғри келади. Эластик системанинг энг катта даврий тебранишлари техника масалаларида муҳим аҳамиятга эгадир (катта даврий тебранишга аксари асосий тебраниш ҳаракати ҳам дейилади). Бу тарздаги тебранишларнинг даврини тақрибий равишда аниқлашга ўтамиз. Ўтказилган тажрибалар натижасидан фойдаланиб, эластик системанинг тебраниш типи олдиндан белгиланса, эркинлик даражаси чексиз бўлган мураккаб системани эркинлик даражаси

битта бўлган оддий системага келтириш мумкин. Бунинг учун эластик системанинг, энергиянинг сақланиш қонунини ишлатган тақдирда, тегишли ҳаракат тенгламаларини чиқариш қулай бўлади. Эластик системани статик мувозанат ҳолатидан оғдириб, эркин тебраниш берилади, бу жараёнда эластик система ва унга қўйилган юкда ҳосил бўладиган кинетик ва потенциал энергияларнинг йиғиндиси ўзгармас миқдор бўлиб қолади, яъни:

$$U + T = \text{const} \quad (155.1)$$

бўлади.

Бу тенгламани бир нечта оддий конкрет ҳолларга ишлатамиз. Учига Q юк осилган призматик стерженнинг эркин тебранишини текшираамиз (526-шакл). Диск AB нинг энг пастки ҳолати A_2B_2 да деформация максимал қийматга эришиб, унга тегишли потенциал энергия ҳам ўзининг максимал қиймати $U_{\max}$ га тенг бўлади ва кинетик энергия T нолга айланади. Диск ўзининг статик мувозанат ҳолати A_1B_1 дан ўтиш пайтида деформация нолга тенг бўлиб, тезлик максимал қийматга эришгани сабабли кинетик энергия T максимум бўлиб, потенциал энергия U эса нолга айланади. Тебраниш даврида U билан T ларнинг ҳар бирининг ҳамма вақт ўз қийматлари ўзгариб турса-да, бироқ уларнинг йиғиндиси ўзгармайди. Дискнинг A_1B_1 дан қандайдир W миқдорига оғган ҳолати учун U билан T ни ҳисоблаймиз. Системанинг потенциал энергияси стерженнинг қўзилиш энергияси билан, юкнинг пасайишидан ҳосил бўладиган энергиялардан иборатдир. Яъни:

$$U = \frac{F\ell}{2l} (\omega + \Delta l)^2 - Q\omega.$$

ω статик мувозанат ҳолат A_1B_1 дан ҳисобланади. Системанинг кинетик энергияси — стерженнинг кинетик энергияси T_1 билан юкнинг кинетик энергияси $T_2 = \frac{Q\omega^2}{2g}$ дан иборатдир. Стерженнинг кинетик энергияси T_1 ни ҳисоблаш учун осилган нуқтадан ҳаракатдаги кесимни олиб, унинг кўчишини аниқлаймиз. Стержень барча кесимларининг маҳкамланган кесимга нисбатан тебранишдаги кўчиши, юкнинг статик таъсиридаги кўчишидек ўзгаради, деб фараз қилайлик. У ҳолда x билан аниқланган кўчишни ω_x десак: $\omega_x = \omega \frac{x}{l}$ бўлади. Тебранишда бу кесимнинг тезлиги эса:

$$\frac{d\omega_x}{dt} = \frac{x}{l} \frac{d\omega}{dt}$$

бўлади. x билан аниқланган кесим олдида бир чексиз кичик dx элементини ажратиб, dT_1 ни қуйидагича ҳисоблаймиз:

$$dT_1 = \frac{\gamma F dx}{2g} \left(\frac{x}{l} \right)^2 \left(\frac{d\omega}{dt} \right)^2.$$

У вақтда бутун стерженнинг кинетик энергияси қуйидагича ифодланади:

$$T_1 = \frac{\gamma F}{2g} \omega^2 \int_0^l \left(\frac{x}{l} \right)^2 dx = \frac{\gamma Fl}{3g} \cdot \frac{\omega^2}{2g}.$$

Демак, стержень массасининг кинетик энергияси, тезлиги ω бўлиб, массаси $\frac{\gamma Fl}{3g}$ бўлган юкнинг кинетик энергиясига тенг бўлар экан. Шундай қилиб, стерженнинг ўз оғирлигини ҳисобга

олиш учун, унинг учига осилган юк Q га, стержень оғирлигининг $\frac{1}{3}$ қисмини қўшиш билан эришиш мумкин экан:

$$T = T_1 + T_2 = \left(\frac{\gamma Fl}{3} + Q \right) \frac{\omega^2}{2g}.$$

Энди U ва T нинг қийматларини (156.1) га қўйиб қуйидаги тенгликни оламиз:

$$\frac{EF}{2l} (\omega + \Delta l)^2 - Q\omega + \left(\frac{\gamma Fl}{3} + Q \right) \frac{\omega^2}{2g} = \text{const.}$$

Агар

$$\Delta l = \frac{Ql}{EF}$$

эканлиги қўзда тутилса, бу тенглама қуйидагича ёзилади:

$$\frac{EF}{2g} \omega^2 + \left(\frac{\gamma Fl}{3} + Q \right) \frac{\omega^2}{g^2} = \text{const.}$$

Вақт t га нисбатан ҳосила олиб, бундан қуйидаги дифференциал тенгламани чиқарамиз:

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} + \omega^2\omega = 0. \quad (156.2)$$

бу ерда

$$\omega^2 = \frac{\frac{g}{\left(Q + \frac{\gamma Fl}{3} \right) l}}{\frac{EF}{EF}} = \frac{g}{\Delta l_{\text{келт}}}. \quad (156.3)$$

$\Delta l_{\text{келт}}$ — юк $\left(Q + \frac{\gamma Fl}{3} \right)$ таъсиридан ҳосил бўлган статик чўзилиш.

Қўрамызки, эркин тебраниш ҳаракат тенгламаси (152.4) ва такрорлик ифодаси (152.6) дан ҳеч нарса билан фарқланмаётир. Факат қўйилган юкка стерженнинг келтирилган оғирлигини қўшиш зарур экан. Кинетик чўзилиш статик чўзилишга қараганда бирмунча катта бўлгани сабабли, такрорлик озяпти.

Иккинчи мисол тарзида учлари шарнир билан туташтирилиб, ўртасига Q юк қўйилган балкани оламиз (528-шакл). Юк қўйилган кесимини статик салқилиги қуйидагича ифодаланади:

$$\bar{f} = \frac{Ql^3}{48EI}.$$

Ўрта кесимнинг тебранишдаги қўшимча динамик салқилигини ω билан белгилаймиз. Тебранишдаги салқилик статик салқилик каби ўзгаради, деб фарз қиламиз. Унда статик салқиликнинг қуйидагича ифодаланиши бизга маълум:

$$\omega_{\text{ст}} = \frac{Ql^3}{48EI} \cdot \frac{3l^2x - 4x^3}{l^3} = \frac{f}{l^3} (3l^2x - 4x^3).$$

Тебранишда юк қўйилган кесимнинг статик ҳолатига нисбатан динамик оғишини ω десак, ундан x оралиқдаги кесимнинг динамик салқилиги қуйидагича бўлади:

$$\omega_x = \frac{\omega}{l^3} (3l^2x - 4x^3).$$

Бу кесимнинг тезлиги $\dot{w}_x = \frac{\dot{w}}{l^3} (3l^2x - 4x^3)$ дир. Балканинг dx узунлик-даги элементининг кинетик энергияси қуйидагича ифодаланади:

$$dT_1 = \frac{\gamma F}{2g} \dot{w}^2 \left| \frac{3l^2x - 4x^3}{l^3} \right|^2 dx.$$

Бутун балканинг кинетик энергияси эса:

$$T_1 = 2 \cdot \frac{\gamma F}{2g} \frac{\dot{w}^2}{l^6} \int_0^{\frac{l}{2}} (3l^2x - 4x^3)^2 dx = \frac{17}{35} \cdot \frac{\gamma Fl}{2g} \dot{w}^2$$

бўлади.

Юкнинг кинетик энергияси илгаригидек, $T_2 = \frac{Q\dot{w}^2}{2g}$ дир. Балканинг эги-лишдаги потенциал энергияси қуйидаги формуладан аниқланади:

$$U = \int \frac{M^2 dx}{2EI} = \int \frac{EI}{2} \left(\frac{d^2wx}{dx^2} \right)^2 dx, \quad \frac{d^2wx}{dx^2} = -\frac{24}{l^3} w \cdot x.$$

Шунинг учун:

$$U = 2 \frac{EI}{2} \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{24wx}{l^3} \right)^2 dx = \frac{24EI}{l^3} \cdot w^2$$

бўлади.

U ва T нинг қийматларини (156.1) га қўйиб, унинг вақт t га нисбатан ҳосиласини олиб, тенгламани қуйидагича ёзамиз:

$$\ddot{w} + \frac{g}{\omega^2} w = 0; \quad \text{бунда } \omega^2 = \frac{48EI}{l^3} \cdot \frac{g}{Q + \frac{17}{35} \gamma Fl} = \frac{g}{f_{\text{келт}}}$$

бўлади. Бу ҳолдаги такрорлик формуласи ҳам илгариги формуланинг ўзи бўлади, бироқ текширилаётган ҳол учун балканинг ўз оғирлигини ҳисобга олиш зарур бўлгани сабабли балкага қўйилган юкка унинг оғирлигининг $\frac{17}{35}$ қисмини қўшиш лозим бўлур экан. Бу ифодадаги $f_{\text{келт}}$ балканинг ўрта кесимига қўйилган $(Q + \frac{17}{35} \gamma Fl)$ юк таъсиридан ҳосил бўлган статик сал-қилиқдир. Худди шу тарзда бошқача юкланган ва таянч типлари турлича бўлган ҳоллар учун келтирилган оғирликларни ҳисоблаш мумкин. Демак, тебранувчи системанинг ўз оғирлиги ҳисобга олинса, так-рорлик ва тебраниш даврига тегишли миқдорлар қуйидаги формулалардан аниқланар экан:

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{g}{f_{\text{келт}}}}, \\ \tau &= 2\pi \sqrt{\frac{f_{\text{келт}}}{g}}. \end{aligned} \quad (156.4)$$

Текширилаётган ҳол учун такрорлик миқдори камайиб, давр миқдори эса ошиб бормоқда. Эластик системаларнинг ўз оғирликларининг тебраниш такрорлиги ва унинг тебраниш даврига бўлган таъсирларини баҳолаш учун қуйида битта конкрет масала келтирамиз.

202- масала. Қўш тавр $N20^a$ балканинг ўртасига $P = 500$ кг юк қўйилган (545- шакл а,б). Икки хилдаги балка учун уларнинг оғирлиқларини аввало ҳисобга олмай, кейин ҳисобга олган ҳолда тебраниш такрорлиги ва тебраниш даври ҳисоблансин.

$$E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2, l = 4 \text{ м}; \gamma = 7,81 \text{ з/см}^3$$

Е чи ш . а схемадаги балка учун

$$f_{\text{ст}} = \frac{Pl^3}{48EI}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{f_{\text{ст}}}} = 21,4 \sqrt{16} = 85,6 \text{ }^1/\text{сек}$$

$r = 0,0734$ сек бўлсин.

Балканинг ўз оғирлигини ҳисобга олишда

$$P + \frac{17}{35} Q = 554 \text{ кг юкни олиш лозим. У ҳолда:}$$

$$\omega_1 = 85,6 \sqrt{\frac{500}{554}} = 81,3 \text{ }^1/\text{сек}$$

$$r = 0,0774 \text{ сек}$$

бўлади.

$$\delta \text{ схемадаги балка учун } f_{\text{ст}} = \frac{Pl^3}{192EI}$$

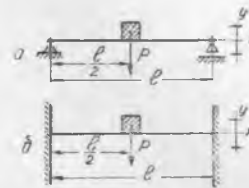
$$\text{Тебраниш такрорлиги } \omega = 12,4 \sqrt{64} + 171,2 \text{ }^1/\text{сек}$$

$$r = 0,0367 \text{ сек бўлсин.}$$

Балканинг оғирлигини ҳисобга олиш учун P юкка Q ни қўйиш лозим (бунда Q —балканинг оғирлиги). Биз текшираётган ҳол учун $\alpha = \frac{13}{70}$ дир. Шунинг учун.

$$\omega_1 = 164,4 \text{ }^1/\text{сек}; \quad \tau_1 = 0,0382 \text{ сек}$$

бўлади.



545- шакл

157-§. Зарбали кучлар таъсиридан ҳосил бўладиган кучланишлар

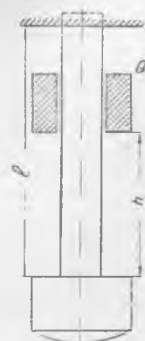
Назарий механика курсидан маълумки, ҳаракат тезлигининг бирда-нига кескин ўзгаришига сабаб бўладиган таъсир зарбали таъсир дейилади. Бу ўзгариш жуда ҳам қисқа муддат ичида бажарилади. Юк эластик системага таъсир этишдан аввал, у маълум қийматга эга бўлган тезланиш таъсирида бўлади, бу тезланиш юк эластик системага бориб теккандан сўнг нолга айланади ва шундан кейин у яна маълум қийматли тезланишга эришади. Зарбали куч таъсиридан ҳосил бўладиган кучланишларни Даламбер принциpidан фойдаланиб аниқлаш кийин, чунки зарба таъсиридан ҳосил бўладиган тезланишлар эластик системанинг ҳар қайси нуқтасида ҳар хил бўлгани учун уларни аниқлаш жуда мураккаб масала бўлиб қолади. Шунинг учун зарба таъсиридан ҳосил бўладиган кучланишлар энергиянинг сақланиш қонуни ёрдамида аниқланади. Зарба бераётган жисмга онд бўлган кинетик энергиянинг ҳаммаси зарбалаётган эластик система деформациясининг потенциал энергиясига айланади, деб фараз қиламиз, яъни:

$$T = U_{\delta}. \quad (157.1)$$

Бу муносабатдан фойдаланиб, зарбали куч таъсиридан турли хусусий ҳолларда ҳосил бўладиган динамик кучланишларни ҳисоблашимиз мумкин.

Энг оддий ҳоллардан бири булган чўзувчи ёки сиқувчи зарба таъсирини текшираимиз.

Чўзувчи ёки сиқувчи зарбани қуйидагича фараз қилайлик: чўзилаётган стерженнинг учига оғирлиги Q бўлган юк h баландликдан тушсин (516-шакл). h баландликдан тушаётган юkning стержень учигаги қаршилиқ сиртига тегиш олдидаги тезлиги $V_0 = \sqrt{2gh}$ бўлади. Юк стерженнинг учига зарба бериши биланоқ унинг тезлиги V_0 дан V га ўзгаради. Юк зарба бергандан кейин стерженнинг учи билан бирга жуда ҳам қисқа муддат ичида V тезлик билан пасаяди. Бу тезлик *деформациянинг бошланғич тезлиги* деб аталади. Стерженнинг пастки учи юк билан бирга Δl_d га пасайганда, тезлик V нолга тенглашади. Натижада Δl_d миқдорида чўзилган стержень юк Q билан бирга олган ўзининг кинетик энергиясини бутунлай сарфлайди, у энергия қуйидагича ифодаланади:



$$\left(\frac{Q + \frac{gl}{3}}{g} \right) \frac{V^2}{2}.$$

Бу энергияни сарфлаб, юк Δl_d йўлни босиб ўтади, шунинг учун у $Q \cdot \Delta l_d$ ишни бажаради. Шундай қилиб, сарфланган энергия қуйидаги ифодага тенг бўлади:

$$\left(\frac{Q + \frac{gl}{3}}{g} \right) \frac{V^2}{2} + Q \Delta l_d.$$

546 - шакл.

Бу энергия стержень деформациясининг тўла потенциал энергиясига айланади. Зарба натижасидаги деформациянинг потенциал энергиясини ҳисоблаш учун, деформация билан зарба орасидаги муносабат маълум бўлиши керак. У муносабатнинг аналитик ифодаси ёки у муносабатни тасвирловчи график бўлмагани учун, деформация потенциал энергиясининг аналитик ифодаси номаълумдир. Зарба билан унга тегишли деформация орасидаги муносабатни (*динамик диаграммани*) статик диаграмма каби деб фараз қилинса, яъни динамик пропорционаллик чегараси бор деб қаралса, бу чегарада динамик чўзилиш Δl_d га тегишли потенциал энергия ифодасини статик чўзилиш учун чиқарилган формуладан фойдаланиб қуйидагича аниқлашимиз мумкин:

$$U_d = \frac{EF}{2l} (\Delta l_d)^2$$

Бу ифода тақрибий бўлиб, унинг қиймати тажриба йўли билан ҳисобланган миқдорлардан кам фарқ қилади. Аниқланган потенциал ва кинетик энергиялар қийматини (157.1) га қўйсак, тенглама қуйидагича ёзилади:

$$\left(\frac{Q + \frac{gl}{3}}{g} \right) \frac{V^2}{2} + Q \Delta l_d = \frac{EF}{2l} (\Delta l_d)^2. \quad (157.2)$$

Кинетик энергия ифодасини ҳисоблашда динамик чўзилувчи стерженнинг ўз массасига тегишли қисмини тебранишдаги кинетик энергия ифодасидан олдик, чунки деформацияланиш процесси бу икки ҳолда бир хилдандир. Тушаётган юкни эса абсолют каттиқ деб фараз қилганимиз туфайли уни деформацияланмайди деб қабул қилдик.

(157.2) тенгламада иккита номаълум сон бор, улар V ва Δl_d миқдорлардир. Шунинг учун яна бир қушимча тенглама тузишимиз зарур. Бунинг учун ҳаракат миқдори теоремасидан фойдаланамиз. *Юкнинг зарба олдида-*

ги ҳаракат миқдори зарба вақтидаги юк ва стерженнинг ҳаракат миқдорига тенг бўлиши керак, яъни:

$$Qv_0 = v \left(Q + \frac{kl}{3} \right);$$

бундан:

$$v = \frac{Q}{Q + \frac{2}{3}} v_0. \quad (157.3)$$

(157.3) формулани қуйидагича умумийроқ кўринишда ёзишимиз мумкин:

$$v = \frac{Q}{Q + kgl} \cdot v_0. \quad (157.4)$$

бунда: k — стерженнинг массасини ҳисобга олувчи коэффициент.

Энди Δl_∂ ни аниқлаш учун (157.4) ни (157.2)га қўйиб, тенгламани қуйидагича ёзамиз:

$$\frac{Q^2 v_0^2}{2g(Q + kgl)} + Q(\Delta l_\partial) = EF \frac{(\Delta l_\partial)^2}{2l}$$

$v_0^2 = 2gh$ эканлигини кўзда тутиб, тенгламани Q га қисқартирсак, уни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{Qh}{Q + kgl} + (\Delta l_\partial) = \frac{(\Delta l_\partial)^2}{2} \cdot \frac{EF}{Ql}.$$

Бундаги $\frac{Ql}{EF} = \Delta l$ статик чўзилишни ифодалайди. Шундай қилиб, Δl_∂ ни аниқлаш тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$\Delta l_\partial^2 - 2\Delta l \cdot \Delta l_\partial - \frac{2h(\Delta l)Q}{Q + kgl} = 0.$$

Бундан:

$$\Delta l_\partial = \Delta l + \sqrt{\Delta l^2 + \frac{2h(\Delta l)Q}{Q(1 + kgl/Q)}} \quad (157.5)$$

келиб чиқади.

Қўрамизки, зарбадаги динамик чўзилиш статик чўзилишга қараганда икки мартадан кўпроқ катта бўлар экан. (157.5) ни қуйидагича ёзамиз:

$$\Delta l_\partial = \Delta l \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l \left(1 + \frac{kgl}{Q} \right)}} \right] = \alpha_\partial \Delta l. \quad (157.6)$$

Бу формуладан зарбали юк учун динамик коэффициент α_∂ ни аниқлаймиз:

$$\alpha_\partial = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l \left(1 + \frac{kgl}{Q} \right)}}. \quad (157.7)$$

Энди Δl_∂ тегишли кучланишни ҳисоблаймиз. Зарбадан ҳосил бўладиган кучланиш жуда мураккаб бўлиб, у умуман вақтнинг функцияси бўлади. Ҳатто юкнинг энг пастки ҳолатида ҳам кучланиш стерженнинг турли қундаланг қесимларида турлича бўлиб, у зарба тўлқинининг тезлигига боғлиқдир. Биз, зарба вақтида ҳам кучланиш билан деформация орасидаги

муносабат юкнинг статик таъсиридагидек бўлади, деган эдик. Бундан тақрибий динамик кучланишни аниқлаш учун фойдаланамиз:

$$\frac{\sigma_{ст}}{\sigma_d} = \frac{\epsilon_{ст}}{\epsilon_d};$$

бундан: $\sigma_d = \sigma_{ст} \frac{\epsilon_d}{\epsilon_{ст}} = \sigma_{ст} \frac{\Delta l_d}{\Delta l}$ бўлади. Δl_d нинг қийматини (157.6) дан келтириб қўйсак, σ_d қуйидагича ифодаланади:

$$\sigma_d = \sigma_{ст} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l} \cdot \frac{1}{\left(1 + k \frac{gl}{Q}\right)}} \right] \quad (157.8)$$

ёки (157.7) кўзда тутилса:

$$\sigma_d = \alpha_d \sigma_{ст} \quad (157.9)$$

бўлади.

(157.6), (157.9) формулалардан динамик чўзилиш ва кучланиш миқдорлари статик деформацияга боғлиқ эканлиги кўриниб турибди, чунки динамик коэффициент α_d бевосита статик чўзилишга ва тегишли бикрликларга боғлиқдир.

Динамик коэффициент α_d ифодасидаги h ни, $v_0 = \sqrt{2gh}$ формуладан фойдаланиб, бошланғич тезлик v_0 орқали ифодалашимиз мумкин:

$$\alpha_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{v_0^2}{\Delta l \cdot g} \cdot \frac{1}{\left(1 + k \frac{gl}{Q}\right)}} \quad (157.10)$$

α_d ни қуйидагича ифодалаш ҳам мумкин:

$$\frac{2h}{\Delta l} = \frac{Qh}{\frac{1}{2} Q \Delta l} = \frac{T_0}{U_d}.$$

Бу муносабат кўзда тутилса, (157.7) қуйидагича ёзилади:

$$\alpha_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\left(1 + k \frac{gl}{Q}\right)} \cdot \frac{T_0}{U_d}} \quad (157.11)$$

бундаги $T_0 = Qh$ бўлиб, у зарба бераётган энергиядир.

Динамик коэффициент α_d нинг қийматини бир неча хусусий ҳоллар учун ҳисоблаймиз.

Юк бирданига қўйилсин, у ҳолда $h = 0$ бўлиб, $\alpha_d = 2$ бўлади. Шунинг учун: $\Delta l_d = 2\Delta l_{ст}$; $\sigma_d = 2\sigma_{ст}$ бўлади. Демак бирданига қўйилган юкдан ҳосил бўладиган чўзилиш ёки кучланиш унинг статик равишда қўшилишдан ҳосил бўладиган ўша миқдорларнинг қийматига қараганда икки марта катта булар экан.

Аксинча, юк тушаётган баландлик h жуда катта бўлиб, стерженнинг хусусий оғирлиги юк миқдорига қараганда жуда ҳам кичик бўлса, $k \frac{gl}{Q}$ нинг қийматини қавсдаги 1 миқдорига нисбатан ҳисобга олмаслигимиз ва илдиэ остидаги 1 ни ҳам $\frac{2h}{\Delta l}$ ҳадга қараганда ҳисобга олмаслигимиз мумкин. У ҳолда:

$$\alpha_d = 1 + \sqrt{\frac{2h}{\Delta l}} \quad (157.12)$$

бўлади. Агар h жуда катта бўлса, илдиз олдидаги 1 ни ҳам эътиборга олмас бўлади. У ҳолда формулачи қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$\alpha_d = \sqrt{\frac{2h}{\Delta l}} = v_0 \sqrt{\frac{1}{g\Delta l}} = \sqrt{\frac{T_0}{U_0}}. \quad (157.13)$$

Илдиз олдидаги 1 ни эътиборга олмаслик натижасида қилган хатомиз 5% дан ошмаслиги учун, $\frac{2h}{\Delta l} > 10$ бўлиши керак. $\frac{2h}{\Delta l} > 110$ бўлган ҳолдагина илдиз олдидаги 1 ни ҳисобга олмаслигимиз мумкин. Бу ҳол учун динамик коэффициентни стерженнинг бикрлиги орқали ифодалаймиз:

$$\alpha_d = \sqrt{\frac{T_0}{U_0}} = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{2T_0 E F}{l}} = \frac{1}{\sigma_{cr}} \sqrt{\frac{2T_0 E}{F l}} = \frac{1}{\Delta l} \sqrt{\frac{2T_0 l}{E F}}. \quad (157.14)$$

Бунга тегишли динамик чўзилиш Δl_d ва кучланиш σ_d қуйидагича ёзилади:

$$\Delta l_d = \sqrt{\frac{2T_0 l}{E F}}, \quad \sigma_d = \sqrt{\frac{2T_0 E}{E l}}. \quad (157.15)$$

Юкнинг статик таъсирида бўлганидек, динамик таъсири вақтида ҳам чўзилишдаги кучланиш чўзувчи куч билан кўндаланг кесим ўлчамига боғлиқдир. Аммо юк Q статик таъсир қилганда ҳосил бўладиган кучланиш стерженнинг узунлик ўлчамига ва унинг эластиклик модулига боғлиқ эмас. Зарбада эса кучланишни ҳосил қилувчи зарбали куч P_d зарба берувчи жисмнинг тезланишига, яъни зарбанинг давомига ва материалнинг эластиклик хусусиятига боғлиқдир. Зарба давоми ўз навбатида динамик чўзилиш Δl_d нинг миқдorigа боғлиқдир. Стерженнинг эластиклик модули E қанча кичик ва узунлиги l қанча катта бўлса, динамик чўзилиш Δl_d ва зарба давоми шунча катта бўлади ва зарбали куч P_d шунча кичик бўлади. Шунинг учун ҳам зарба таъсирини енгиллаштириш ниятида зарбаланувчи қисмлар орасига рессоралар ва пружиналар ўрнатилади.

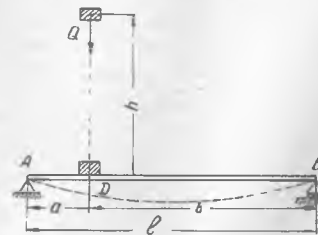
Эгувчи зарба. Шарнир воситаси билан икки таянчга бириктирилган балканинг чап таянчидан a масофадаги нуқтасига h баландликдан оғирлиги Q га тенг юк тушади (547-шакл). Юк остида динамик салқилик ҳосил бўлади. Юқоридаги мулоҳазаларга кўра энергиянинг сақланиш қонуни қуйидагича фойдаланилади:

$$(Q + kgl) \frac{v^2}{2g} + Qf_d = U_d. \quad (157.16)$$

U_d ни ҳисоблашдан аввал, статик салқиликни аниқлаш учун чиқарилган формуладан фойдаланиб, зарба таъсиридан ҳосил бўладиган динамик салқиликни аниқлаймиз. Масалан, биз текшираётган ҳол учун юк қўйилган нуқтанинг статик салқилиги қуйидаги формуладан аниқланади:

$$f = \frac{Pl^3}{\beta EI},$$

бунда β — юкнинг қўйилиш нуқтасига ва таянчларнинг тузилишига боғлиқ коэффициент. Масалан, юк балканинг ўртасига қўйилган бўлса, $\beta = 48$ бўлади. Бу формулага асосан, динамик салқилик қуйидагича ифодаланади:



547-шакл.

$$f_{\partial} = \frac{P_{\partial} l^3}{3EI}.$$

Потенциал энергия U_{∂} ни қуйидаги формула билан ҳисоблаймиз:

$$U_{\partial} = \frac{P_{\partial} f_{\partial}}{2} = \frac{3EI}{2l^3} f_{\partial}^2. \quad (157.17)$$

Буни (157.16) га қўйиб, (157.4) тенглик кўзда тутилса, f_{∂} ни аниқлаш учун тенгламани қуйидагича ёзамиз:

$$f_{\partial}^2 - 2ff_{\partial} - 2fh \frac{1}{\left(1 + \frac{kgl}{Q}\right)} = 0;$$

бунда:

$$f_{\partial} = f + \sqrt{f^2 + 2fh \frac{1}{\left(1 + \frac{kgl}{Q}\right)}} = \alpha_{\partial} f \quad (157.18)$$

эканлигидан:

$$\alpha_{\partial} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{f} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{kgl}{Q}\right)}} \quad (157.19)$$

бўлади.

Бу ҳол учун ҳам динамик кучланиш илгаригидек аниқланади:

$$\sigma_{\partial} = \alpha_{\partial} \sigma_{ст}. \quad (157.20)$$

Динамик коэффициент α_{∂} ни таъсир қилаётган юкнинг кинетик энергияси T_0 ва статик юк таъсиридан балкада ҳосил бўладиган деформациянинг потенциал энергиясини U_0 орқали ифодалашимиз мумкин. У (157.11) кўринишида ёзилади:

$$\alpha_{\partial} = 1 + \sqrt{1 + \frac{T_0}{U_0} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{kgl}{Q}\right)}}.$$

Масалан, икки таянчда ётувчи балканинг чап учидан a масофада ётувчи нуқтага тушаётган юк таъсирдаги балка учун динамик коэффициент α_{∂} қуйидагича ёзилади:

$$\alpha_{\partial} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2\beta T_0 EI}{Q^2 l^2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{kgl}{Q}\right)}}. \quad (157.21)$$

Балканинг оғирлиги таъсир қилаётган юк миқдорига қараганда кичик бўлса, (157.21) қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\alpha_{\partial} = 1 + \sqrt{\frac{2\beta T_0 EI}{Q^2 l^2}}. \quad (157.22)$$

T_0 нинг миқдори жуда катта бўлса, илдиз остидаги ва олдидаги 1 ни ҳисобга олмаслигимиз мумкин. У ҳолда юқорида келтирилган динамик коэффициент қуйидагича ифодаланади:

$$\alpha_{\partial} = \sqrt{\frac{2\beta T_0 EI}{Q^2 l^2}}, \quad (157.23)$$

Демак, бу ҳол учун хос бўлган динамик кучланишни қуйидаги кўринишда ёзсак бўлади:

$$\sigma_d = \alpha_d \sigma_{ст} = \frac{Q \cdot a \cdot b}{lW} \sqrt{\frac{2\beta T_0 EI}{Q^2 l^3}} = \sqrt{\frac{2\beta a^2 b^2 T_0 EI}{l^5 W^2}}. \quad (157.24)$$

Масалан, юк икки таянчга тиралган балканинг ўрта нуқтасига тушса, $\beta = 48$ бўлиб, $a = b = \frac{l}{2}$ бўлади. У ҳолда динамик кучланиш қуйидагича ифодаланади:

$$\alpha_d = \sqrt{\frac{\sigma T_0 EI}{W^2 l}}. \quad (157.25)$$

Бизга маълум бўлган ифодалар: $l = r^2 F$, $W = \frac{l}{z_{\max}}$ кўзда тутилса, $\frac{l}{W^2} = \left(\frac{z_{\max}}{r}\right)^2 \cdot \frac{1}{F}$ бўлади. Шунинг учун (157.25) формула қуйидагича ёзилади:

$$\sigma_d = \frac{z_{\max}}{r} \sqrt{\frac{6T_0 E}{Fl}}. \quad (157.26)$$

Бу тақрибий формуладан эгилишдаги динамик кучланиш, балка материалнинг эластиклик модули унинг хажми ҳамда қундаланг кесимининг шаклига, яъни $\frac{z_{\max}}{r}$ нисбатга боғлиқ эканлиги кўришиб турибди. Динамик кучланиш, булардан ташқари, балканинг таянчга тиратиш шартига ва юкланиш схемасига, яъни β га боғлиқдир (биз текшираётган ҳолда $\beta = 48$ эди). Масалан, баландлиги h , кенглиги b га тенг тўғри тўртбурчак кесимли балкани олсак, унда зарба таъсиридан ҳосил бўладиган максимал динамик кучланиш тақрибий формула (157.26) га мувофиқ қирраси билан қўйилганда ҳам, ётқизиб қўйилганда ҳам бир хилда бўлиб, қуйидагича ифодаланади:

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{18T_0 E}{Fl}}.$$

Бу ифода балканинг қирраси билан ёки ётқизиб қўйилишига боғлиқ эмас, чунки:

$$\frac{z_{\max}}{r} = \frac{\frac{h_1}{2}}{\sqrt{\frac{bh_1^3}{12bh_1}}} = \sqrt{3}$$

дир. Маълумки, статик юкланган балка учун, ётқизиб қўйилган ҳолдаги кучланиш қирраси билан қўйилган ҳолдаги кучланишга қараганда $\frac{h}{b}$ нисбатда катта бўлади.

Буровчи зарба таъсиридан ҳосил бўладиган кучланишни аниқлаймиз. Айланиб турган валнинг бир учидаги шкивга бирданига тормоз бериб тўхтатилса, унинг бошқа учидаги шкивга вални буровчи инерция жуфт кучи таъсир қилади. Шу моментдаги кинетик энергияни T_0 деб белгилаймиз. Бу ҳолда ҳам кучланишни юқоридагидек аниқлаш мумкин. Вал тормозловчи жуфт кучнинг моменти билан инерция жуфт кучи моментлари таъсиридан динамик буралади. Динамик буралишни статик буралиш орқали қуйидагича ифодалаймиз:

$$\varphi_d = \alpha_d \varphi_{ст} = \sqrt{\frac{T_0}{U_0 \varphi_{ст}}}. \quad (157.27)$$

бунда:

$$\alpha_d = \sqrt{\frac{T_0}{U_0}} = \sqrt{\frac{2T_0 l}{\varphi_{ст}^2 J_p}} = \frac{1}{\varphi_{ст}} \sqrt{\frac{2T_0 l}{J_p}}.$$

Шунинг учун:

$$\varphi_{ст} = \sqrt{\frac{2T_0 l}{J_p}} \quad (157.28)$$

бўлади. Динамик кучланиш қуйидагича:

$$\tau_d = \alpha_d \tau_{ст} = \tau_{ст} \sqrt{\frac{T_0}{U_0}} = \tau_{ст} \sqrt{\frac{2T_0 l}{\tau_{ст}^2 J_p}} = 2 \sqrt{\frac{T_0 l}{J_p}} \quad (157.29)$$

бўлади чунки

$$U_0 = \frac{M^2 l}{2J_p} = \frac{\varphi_{ст}^2 G J_p}{2l} = \frac{\tau_{ст}^2 J_p}{2G l_p}$$

дир. Бундан ташқари:

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32}; \quad J_p = \frac{\pi d^4}{16}; \quad \frac{J_p}{G l_p} = \frac{2}{\pi d^4} = \frac{2}{F}.$$

Энди кинетик энергия T_0 ни ҳисоблаймиз. Айланувчи жисм кинетик энергиясининг назарий механика курсида қуйидагича ифодаланиши бизга маълум:

$$T_0 = I_0 \frac{\omega^2}{2}.$$

Бундаги I_0 айланувчи жисм массасининг айланиш ўқиға нисбатан инерция моментиدير. Биз текшираётган ҳолда у вал учига ўрнатилган шкив массаси билан вал массасининг вал ўқиға нисбатан инерция моментиدير. Агар катта аниқлик талаб қилинмаса, валнинг массасини шкивга қараганда ҳисобга олмаслик мумкин. У ҳолда I_0 вал учига ўрнатилган шкив массасининг инерция моменти бўлади, ω эса валнинг бурчак тезлигидир. Булар кўзда тутилса, динамик кучланишни аниқлаш формуласи қуйидагича ёзилади

$$\tau_d = \omega \sqrt{\frac{2I_0 l}{F}}. \quad (157.30)$$

Шундай қилиб, зарбали буровчи моментдан ҳосил бўладиган динамик кучланиш ҳам валнинг эластиклик модули билан ҳажмига боғлиқ бўлар экан.

МАСАЛАЛАР

203. Узунлиги $l = 1$ м, қўшдаланг кесими квадрат (томонлари $a = 5$ см) бўлган пўлат стержень бир уч билан маҳкамланган бўлиб, иккинчи учига $l = 10$ см баландликдан оғирлиги $Q = 10$ кг юк таъсир қилади (548-шакл). 1. Стерженьдаги энг катта сиқувчи кучланиш аниқлансин. 2. Стерженьдаги сиқувчи кучланиш пропорционаллик чегараси $\sigma_n = 2000$ кг/см² дан ошмаслиги учун Q юкни қандай баландликдан ташлаш мумкин? Масалани ечишда стерженьнинг оғирлиги ҳисобга олинсин.

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2, \quad \gamma = 7,85 \text{ г/см}^3.$$

Ечиш. Олдин (157.7) дан динамик коэффициентни аниқлаймиз. Бунинг учун статик сиқилиш Δl ни қуйидаги формуладан толамиз:

$$\Delta l = \frac{Ql}{EF} + \frac{10 \cdot 200}{2 \cdot 10^6 \cdot 25} = \frac{1}{5 \cdot 10^4 \text{ см}}.$$

Стерженнинг уз оғирлиги $ql = 7,85 \cdot 10^{-3} \cdot 25 \cdot 100 \cong 20$ кг. Динамик коэффициент:

$$\alpha_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 10}{5 \cdot 10^4} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{20}{100}}} + \sqrt{\frac{16 + 15 \cdot 10^4}{16}} \cong 1000$$

Динамик чўзилиш:

$$\Delta l_d = \alpha_d \Delta l = \frac{10^2}{5 \cdot 10^4} = 0,02 \text{ см},$$

Динамик кучланишни ҳисоблашимиз учун олдин $\Delta l = \frac{1}{5 \cdot 10^4}$ сиқилишга тегишли кучланишни аниқлаб оламиз:

$$\sigma_{ст} = E \epsilon = E \frac{\Delta l}{l} = \frac{2 \cdot 10^6}{5 \cdot 10^3 \cdot 10^2} = \frac{2}{5} \text{ кг/см}^2.$$

Бунини динамик коэффициент α_d га кўпайтириб, σ_d ни аниқлаймиз:

$$\sigma_d = \alpha_d \sigma_{ст} = 1000 \cdot \frac{2}{5} = 400 \text{ кг/см}^2.$$

Масаланинг иккинчи қисмини ечиш учун қуйидаги тақрибий формула (157.15) дан фойдаланамиз:

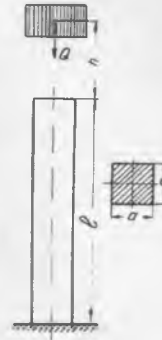
$$\sigma_d = \sqrt{\frac{2T_0 E}{Fl}} < \sigma_n.$$

будан:

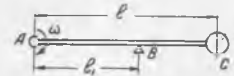
$$T_0 = Qh_1 < \frac{\sigma_n^2 Fl}{2E}$$

ёки:

$$h_1 < \frac{\sigma_n^2 Fl}{2EQ} = \frac{4 \cdot 10^6 \cdot 25 \cdot 100}{2 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 10} = 250 \text{ см}.$$



548-шакл.



549-шакл.

204. Оғирлиги ҳисобга олинмайдиган стерженнинг C учига оғирлиги P бўлган юк ўрнатилган ҳолда, иккинчи учи эса A дан ўтувчи вертикал ўқ атрафида горизонтал текисликда бурчак тезлиги (ω) билан айланади ва бирданига B нуқтадаги тўсиққа учрайди. Стерженда ҳосил бўладиган энг катта динамик эгувчи момент аниқлансин (549-шакл).

Ечиш. Стержень B нуқтага урилиши биланоқ, ундаги юкнинг тула кинетик энергияси стерженнинг эгилишдаги потенциал энергиясига айланади. Юкнинг кинетик энергияси қуйидагича бўлади:

$$T = \frac{P}{2g} v^2 = \frac{Pl^2}{2g} \omega^2.$$

Стерженнинг C нуқтасида ҳосил бўладиган зарбали куч P таъсиридан стерженда тўпланган эгилиш потенциал энергияси қуйидагича бўлади:

$$U_d = \frac{1}{2EI} \left[\int_0^{l_1} M_1^2 dx + \int_0^{l-l_1} M_2^2 dx \right] = \frac{P_d^2 l (l-l_1)^2}{6EI};$$

буанда:

$$M_1 = -\frac{P_d (l-l_1)}{l_1} x, M_2 = -P_d x.$$

$T = U_d$ шартдан P_d ни қуйидагича толамиз:

$$P_d = \frac{\omega}{l-l_1} \sqrt{\frac{3EIPl}{g}}.$$

Максимал эгувчи момент:

$$M_{\max} = P\delta(l - l_1) = \omega \sqrt{\frac{3EIPl}{g}}$$

бўлади.

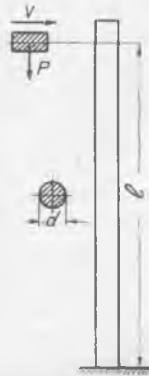
205. Оғирлиги $P = 240$ кг бўлган юк $v = 1$ м/сек горизонтал тезлик билан ҳаракатланиб, уз йўлида узунлиги $l = 3$ м, қўндаланг кесимининг диаметри $d = 20$ см бўлган ва бир учи қистириб тиралган ёғоч устунининг учига туқнашади (550-шакл). Агар устун материалнинг эластик модули $E = 0,11 \cdot 10^8$ кг/см² бўлса ва устунининг уз оғирлиги ҳисобга олинмаса устунда ҳосил бўладиган максимал кучланиш ҳисоблансин.

Ечиш. Зарба таъсирида устун эгилади. Эгилишдаги потенциал энергияни қуйидаги формулалар ёрдамида аниқлаймиз:

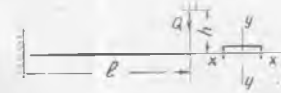
$$M = P \delta x;$$

$$U_{\delta} = \int_0^l \frac{M_{\delta}^2 dx}{2EI} = \int_0^l \frac{P_{\delta}^2 x^2 dx}{2EI} = \frac{P_{\delta}^2 l^3}{6EI}$$

Ҳаракатдаги жисмнинг кинетик энергияси $T = \frac{Pv^2}{2g}$ бўлади.



550-шакл.



551-шакл.

Бу энергияларни солиштириб, P_{δ} ни қуйидагича аниқлаймиз:

$$P_{\delta} = \sqrt{\frac{3EI P v^2}{g l^3}} = \frac{v}{l} \sqrt{\frac{3EI P}{g l}} = 446 \text{ кг};$$

$$\sigma_{\delta} = \frac{P_{\delta} l}{W} = \frac{446 \cdot 200}{800} = 111,5 \text{ кг/см}^2.$$

206. Консоль балканинг қўндаланг кесими $N 30^a$ швеллер бўлиб, узунлиги $l = 2$ м, узунлик бирлигидаги оғирлиги $P = 34,45$ кг/м. Балка бўйича интенсивлиги $q = 50$ кг/м бўлган тенг ёйилган юк таъсир қилади. Балка учига $h = 10$ см баландликдан оғирлиги $Q = 100$ кг бўлган юк тушади. Балкада ҳосил бўладиган энг катта нормал кучланиш аниқлансин.

Ечиш. Олдин динамик коэффициент α_2 ни аниқлаймиз:

$$\alpha_2 = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{f} \cdot \frac{1}{1 + k \frac{P+q}{Q}}};$$

бундан

$$f = \frac{Q l^3}{3EI} = \frac{100 \cdot 200^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 260} = 0,48 \text{ см}$$

бўлади.

Балка массасининг келтириш коэффициенти бу ҳолда $K = \frac{33}{144}$ бўлади. Шунинг учун:

$$\alpha_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 10}{0,48} \cdot \frac{1}{1 + \frac{33}{144} \cdot \frac{34,45 + 50}{100 \cdot 100}}} = 6,54;$$

$$f_d = \alpha_d f = 6,54 \cdot 0,48 = 3,14 \text{ см}$$

бўлади.

Динамик кучланишчи топиш учун қуйидаги муносабатлардан фойдаланамиз:

$$\sigma_d = \alpha_d \sigma_{ст} = \alpha_d \frac{Ql}{W}, \quad f_d = \alpha_d f = \alpha_d \frac{Ql^3}{3EI}.$$

Буларнинг нисбатини оламиз:

$$\sigma_d = \frac{3Ez_d}{l^2} \cdot \frac{l}{W} = \frac{3z_{\max} E}{l^2} f_d.$$

$z_{\max}$ нинг қийматини $N 30^a$ швеллер учун сортамент жадвалидан аниқлаймиз:
 $z_{\max} = 6,3 \text{ см}$; шундан:

$$\sigma_d = \frac{3 \cdot 6,3 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 3,14}{4 \cdot 10^4} = 3120 \text{ кг/см}^2$$

бўлади.

207. Затвор ствол қутчасига бориб урилганида унда ҳосил бўладиган энг катта кучланиш аниқлансин. Зарба вақтида затворнинг тезлиги $v = 3 \text{ м/сек}$. Затвори пўлат цилиндр деб, ствол қутчасини эса деформацияланмайдиган абсолют қаттиқ жисм деб қаралсин. Затвор учун:

$$\gamma = 7,85 \text{ г/см}^3, E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2 \text{ дир.}$$

Е ч и ш. Затвор узунлигидаги кучланиш қуйидаги қонун бўйича ўзгаради деб қабул қиламиз:

$$\sigma_x = \sigma_{\max} \cdot \frac{x}{l},$$

бунда $\sigma_{\max}$ — затворда ҳосил бўладиган максимал динамик кучланиш. Затворнинг dx узунлигида тупланган потенциал энергия қуйидагича бўлади:

$$dU_d = \frac{\sigma_x^2}{2E} F \cdot dx = \frac{\sigma_{\max}^2}{2E} F \frac{x^2}{l^2} dx.$$

Затворда ҳосил бўладиган потенциал энергия эса

$$U_d = \int_0^l \frac{\sigma_{\max}^2}{2E} F \frac{x^2}{l^2} dx = \frac{\sigma_{\max}^2}{6E} F l$$

бўлади.

Затворнинг зарбадаги кинетик энергияси бутунлай потенциал энергияга айланади десак, тенгламани қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$\frac{Fl \gamma}{2g} v^2 = \frac{\sigma_{\max}^2}{6E} F l;$$

бундан:

$$\sigma_{\max} = v \sqrt{\frac{3E \gamma}{g}} = 2080 \text{ кг/см}^2.$$

бўлади.

208. Узунлиги $l_2 = 2 \text{ см}$ бўлган ва диаметри затвор диаметри билан бир хил бўлган пўлат цилиндрик тўсикка (буферга) олдинги масаладаги затвор урилсин. Затворнинг узунлиги $l_1 = 8 \text{ см}$. Затворда ҳосил бўладиган максимал кучланиш аниқлансин.

Е ч и ш. Зарба вақтидаги кинетик энергия бутунлай затвор билан буфер потенциал энергиясига айланади, яъни:

$$T = U_1 + U_2$$

бўлади.

Затвор учун, юқоридаги масаладан, $U_1 = \frac{\sigma_{\max}^2}{6E} Fl$ эди.

Буфернинг барча кесимларидаги кучланишни $\sigma_{\max}$ га тенг деб, U_2 ни қуйидагича ифодалаймиз:

$$U_2 = \frac{\sigma_{\max}^2}{2E} F l_2.$$

Шунга кўра:

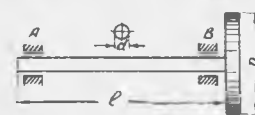
$$\frac{F l_1 \gamma}{2g} v^2 = \frac{\sigma_{\max}^2}{6E} F l_1 + \frac{\sigma_{\max}^2}{2E} F l_2$$

Бундан:

$$\sigma_{\max} = v \sqrt{\frac{3E\gamma}{(l_1 + 3l_2)g}} = 1570 \text{ кг/см}^2$$

бўлади.

209. Диаметри $d = 6 \text{ см}$, узунлиги $l = 1 \text{ м}$ бўлган AB валнинг учига диаметри $D = 20 \text{ см}$, оғирлиги $P = 50 \text{ кг}$ бўлган шкив ўтказилган. Вал минутага $n = 120$ марта айланади (552-шакл). Валнинг A учига бирданига тормоз бериб тўхтатилганда, унда ҳосил бўладиган максимал тангенциал кучланиш аниқлансин:



552-шакл.

$$G = 8 \cdot 10^9 \text{ кг/см}^2.$$

$$\text{Ечиш. } \omega = \frac{\pi n}{30} = 4\pi \frac{1}{\text{сек}}.$$

(157. 30) формулага мувофиқ:

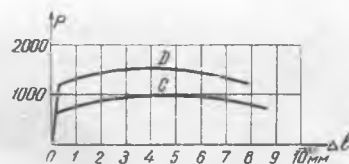
$$\tau_{\theta} = \omega \sqrt{\frac{2I_0 G}{F l}} = 4\pi \sqrt{\frac{8I_0 G}{\pi d^4 l}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 2,55 \cdot 8 \cdot 10^9 \cdot 16\pi^2}{\pi \cdot 100 \cdot 36}} = 478 \text{ кг/см}^2$$

бўлади.

153-§. Зарба синаш. Синаётган материалнинг механик хоссаларига деформация тезлигининг таъсири

Динамик юк таъсиридан ҳосил бўладиган кучланишлар статик юкдан ҳосил бўладиган кучланишларга қараганда бошқача бўлади. Шунинг билан бирга, динамик юк таъсиридаги материал ҳам ўзини тамоман бошқача тутади. Бу ҳодиса хусусан зарба таъсири вақтида сезилади. Пулатнинг де-

формация тезлигининг кўпайиши, унинг оқим чегараси билан мустаҳкамлик чегарасини оширишни ўтказилган тажрибалар тасдиқлайди. Статик синов вақтида кучланиш ҳар секундда 100 кг/см^2 га кўпайтирилса, динамик синов вақтида ҳар секундда 850 кг/см^2 га кўпайтирилади. натижада оқим чегараси 20% ошади. Зарбий юклар таъсирида деформация тезлиги бундан ҳам юқори бўлиб, унга тегишли оқим чегараси 50% дан ҳам кўпроқ оши-



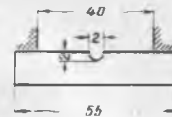
553-шакл.

ши мумкин. Мустаҳкамлик чегараси ҳам ошади, ammo у оқим чегарасидан ошмайди. Зарб таъсиридаги намуна статик юк таъсиридаги намунага қараганда бирмунча оз деформация билан емирилганидан, тегишли диаграмманинг ординатаси баланд бўлса ҳам, статик юк таъсирида синалаётган намуна диаграммасига қараганда калтароқ бўлади. 553-шаклда юмшоқ пулатдан ясалган намуналар зарбий ва статик юк таъсирига синалгандан ҳосил бўлган диаграммаси келтирилган. Шаклда D ишораси билан динамик юк таъсиридаги, C ишораси билан статик юк таъсиридаги намуналарнинг диаграммаси тасвирланган. Кўпинча, намуна статик юк таъсирига синалганда, пластик сифати билан ажратилган материал зарб таъсиридан ўзини мўрт

материал каби тутади. Шунинг учун зарб таъсирига дуч келадиган машина ва иншоот қисмларига онд материаллар танланганида зарбий проба тушунчаси киритилади. Бунинг маъноси шундан иборатки, зарбга дуч келадиган материал намунасини олиб, уни чузувчи, кўпинча эгувчи зарба таъсирида синдириб, унга сарфланган иш миқдорини зарбий проба номи билан юритиладиган баҳо учун қабул қилинади. Намунани синдириш учун сарфланган иш T намунанинг синган жойидаги кўндаланг кесим юзаси F бўлса, $\frac{T}{F}$ нисбат зарбий қовушоқлик дейилади ва a билан белгиланади:

$$a = \frac{T}{F} \text{ кг/см}^2. \quad (158.1)$$

Зарбий пробада материал хоссасини яққол аниқлаш учун синалаётган намунанинг зарб бериладиган жойи махсус шаклга келтирилади. Зарба тегадиган кесим маълум чуқурликда кесилади (554-шакл). Намунани кесиб қўйишдан мақсад шуки, уни зарб таъсирига қаршилик кўрсатиш шароитини ёмонлаштириш, кучланишни шу кесилган жойга тўплаб, сарфланган ишнинг асосий қисмини намуна узунлигининг кичкина қисмига тўплашдир. Зарб таъсирида намуна емирилишига сарфланган ишни ҳисоблаб, зарбий қовушоқлик аниқланади. Бу миқдор зарбий юклар таъсирига дуч келадиган элементларини лойиҳалашда материални характерловчи асосий параметрлардан бири саналади.



554-шакл.

Қуйидаги жадвалда юмшатиш ва тобланган пўлатлар учун зарбий қовушоқлик билан муваққат қаршилик қиймати келтирилган.

Зарбий қовушоқлик

(кг/см² ҳисобида)

Пўлатнинг сорти	Термик ишланганлиги			
	Юмшатишган пўлат		Тобланган пўлат	
	Зарбий қовушоқлик	Муваққат қаршилик	Зарбий қовушоқлик	Муваққат қаршилик
CO,15 сортли юшмоқ пўлат	25	35—45	25	30—50
CO,20—0,30 сортли пўлат	20	50—60	15	55—75
CO,30—0,40 сортли пўлат	1	60—70	12	70—85
CO,50—0,60 сортли пўлат	10	80—90	5	90—105
13 ва CO,20 сортли пўлат	15—20	50—60	24—18	70—80

Бу жадвалдан жуда бикр пўлатлар учун зарбий қовушоқликнинг кичиклигини кўрамиз. Бу тарздаги материаллар зарб таъсиридан деярли пластик деформациясиз, яъни мўрт материаллар каби емирилади.

XXIII боб

КУЧЛАНИШЛАР ЎЗГАРУВЧАН БЎЛГАН ҲОЛДА МАТЕРИАЛЛАРНИНГ МУСТАҲҚАМЛИГИНИ ТЕКШИРИШ

159-§. Ўзгарувчан кучланишларнинг материал мустаҳкамлигига таъсири ва бу ҳолда мустаҳкамлик шарти

Конструкция қисмлари материалнинг миқдор ва йўналиши жиҳатидан систематик равишда ўзгариб турадиган (ўзгарувчан) юклар таъсирига қаршилик кўрсатиши унинг статик юклар таъсирига қаршилик кўрсатишидан фарқ қилади. Шунинг учун, ўзгарувчи юклар таъсиридаги жисмларнинг мустаҳкамлик шартини текшириш масаласи материаллар қаршилигида махсус ўринни олади.

Кўп марта такрорланадиган ўзгарувчан юклар таъсиридаги машиналарнинг баъзи қисмлари билинар-билинмас пластик деформация оқибатида бирданига синади. Ҳолбуки, бу материал айнан шундай статик юклар таъсирида бўлса, бундай кучланишда улар катта ишонч билан ишлаши мумкин эди. Оддий статик синовда жуда соз пластик хусусиятлари бор материаллардан танланган машина қисмлари ўзгарувчан юклар таъсиридан худди мўрт материаллардан тайёрлангандек емирилади. Бу эса инженерлар диққатини кўпдан бўён жалб қилиб келади. Гарчи, кўп вақтлар бу ҳодисани тушунтиришда физик жиҳатдан нотўғри фикрлар ўрин олиб келган бўлса-да, кейинги вақтларда металлнинг тузилиши соҳасида ўтказилган текширишлар бу ҳодисани сабабини тўғри тушунтирди.

Ўзгарувчан кучланишлар таъсиридан металлдан тайёрланган буюм сиртида дарз ҳосил бўлиб, у тобора чуқурлашади. Деформациянинг ўзгарувчан бўлиши гуфайли буюм сиртида ҳосил бўлган дарз кирғоклари олдин яқинлашиб, бир-бирини босади, кейин узоклашади. Бу процесс жуда кўп марта такрорлангани сабабли дарз кетган зона сирти бир-бирига ишқаланиб, силлиқлашади. Дарз чуқурлашган сари, кундаланг кесимнинг қаршилик кўрсата олиши ҳам озая боради. Бу дарз худди зарба пробаси учун тайёрланган намунадаги кесикдек жуда хавфлидир, чунки бирор туртки ёки зарба натижасида материал бу дарз кетган жойдан емирилади.

Ўзгарувчан юклар таъсиридаги пластик материалнинг мўрт материал каби емирилиши юқорида тилга олинган сабабларга биноан содир бўлади. Ўзгарувчан юклар таъсиридан ҳосил бўладиган дарзнинг чуқурлашиши натижасида материалнинг емирилиши толиқиш деб юргизилади. Илгариги вақтларда ўзгарувчан юклар таъсиридаги материалнинг толиқиш натижасида унинг макротузилиши ўзгаради ва у емирилади, деб тушунтирилар эди. Ҳақиқатан ҳам ўзгарувчан юклар таъсиридан емирилган материалнинг кундаланг кесимида икки зона бўлиб, биринчиси ҳалиги, биз юқорида айтган дарз чуқурлиги бўйича ўзаро босим таъсиридан силлиқланган сирт зонаси бўлса, иккинчиси эса зарба ёки туртки натижасида емирилган юза зонасидир. Бу зоналарнинг тузилиш жиҳатидан бир-биридан тамоман фарқ қилиши инженерларни юқоридаги хато фикрларга олиб борган (555-шакл.) Синган кесимнинг дарз зонаси *A* билан, емирилган зонаси эса *B* билан белги-

ланган. Ўзгарувчан юклар таъсиридан материалда дарз ҳосил бўлиши натижасида унинг емирилишини битта термин билан ифодалаш зарурияти мазмун жихатидан мос келмаса ҳам, тарихий жиҳатдан адабётда ва инжечерлар орасида қатъий ўрнашиб қолган толиқиш термини қабул қилишга мажбурмиз. Бу термин ўзгарувчан юк таъсиридан ҳосил бўладиган ҳодисанинг туғри тушунчасини ифодалайди деб қабул қиламиз.

Энди, қандай шароитда материалда толиқиш рўй бериши ва қандай қилиб машина қисмларида унинг ҳосил бўлмаслик чораларини кўриш масаласи устида тўхтаб ўтамыз.

Толиқишни факат систематик равишда ўзининг максимал ва минимал қийматлари орасида тебранадиган ўзгарувчан кучланишлар таъсирдаги материалларда ҳосил бўлишини ўтказилган тажрибалар кўрсатади. Маълумки, жуда ҳам кўп машина ва иншоот элементлари, уларда ҳосил бўладиган кучланишлар маълум чегарадан ўтмаса, ўзгарувчан юклар таъсирига қаршилиқ кўрсатиб, узоқ вақтлар ўз вазифасини хавфсиз ўтайди. Шунинг учун факатгина кучланишнинг ўзгарувчан бўлиши материалнинг толиқишига асосий сабаб бўла олмайди. Систематик равишда тебранувчан кучланишнинг максимал қиймати маълум чегарадан ўтиши билан материалда толиқиш ҳосил бўлади. Кучланишнинг бу қиймати *толиқиш чегараси ёки чидамлилик чегараси* деб аталади. *Даврий ўзгарувчан кучланишнинг энг катта қиймати, чидамлилик чегарасига оид қийматга эришигунча материал толиқмасдан чексиз узоқ вақт ўзгарувчан юклар таъсирига қарши тура олади.*

Чидамлилик чегарасига тегишли кучланиш σ , билан белгиланса, даврий ўзгарувчан кучланишнинг максимал қиймати қуйидаги шартни қаноатлантириши зарур:

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma}{k}, \quad (159.1)$$

бу ерда k , — чидамлилик коэффициенти.

Бу шартдан амалий масалаларни ечиш учун чидамлилик чегарасига оид кучланиш σ , билан даврий кучланишнинг максимал қиймати $\sigma_{\max}$ ни ҳисоблаш усулларини белгилаш лозим.



555-шакл.

160-§. Симметриқ ва тескари симметриқ цикллар учун чидамлилик чегарасини аниқлаш

Тула кучланишни p билан белгилаймиз. Сўз нормал ёки тангенциал кучланишлар устида кетганда, уларни тегишлича σ ёки τ билан алмаштириб ёзишимиз мумкин. Тебранувчан кучланишнинг бир марта такрорланиши яъни максимал кучланиш $p_{\max}$ нинг минимал кучланиш $p_{\min}$ гача тушиб, унинг яна $p_{\max}$ гача кўтарилиш даври *цикл* дейилади.

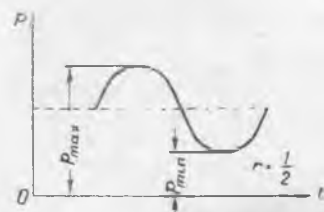
Тебранувчан кучланишларнинг энг максимал қиймати $p_{\max}$ ва минимал қиймати $p_{\min}$ сон жиҳатдан бир-бирига тенг бўлиб, ишоралари тескари бўлса, бу *симметриқ цикл* дейилади (556-шакл).

Тебранувчан кучланишнинг энг максимал қиймати $p_{\max}$ унинг минимал қиймати $p_{\min}$ га тенг бўлмаса, у *тескари симметрик цикл* дейилади. Бу ҳолда $p_{\min}$ нинг ишораси ҳар хил бўлиши мумкин (557-шакл). Цикллар одатда қуйидаги параметр билан характерланади: *кучланишлар* ($p_{\max}$ ва $p_{\min}$) *айирмасининг ярмиси кучланиш циклининг амплитудаси дейилади* ва у p_a ҳарфи билан белгиланиб, қуйидагича ифодаланади:

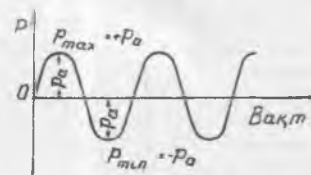
$$p_a = \frac{p_{\max} - p_{\min}}{2}. \quad (160.1)$$

$p_{\max}$ билан $p_{\min}$ йиғиндисининг ярмиси *орта кучланиш* дейилади ва у p_e билан белгиланиб, қуйидагича ифодаланади:

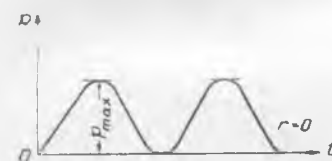
$$p_e = \frac{p_{\max} + p_{\min}}{2}. \quad (160.2)$$



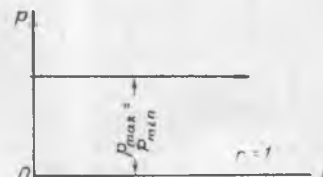
556-шакл.



557-шакл.



558-шакл.



559-шакл.

$p_{\min}$ нинг $p_{\max}$ га нисбати *цикл характеристикаси* дейилади ва r билан белгиланиб, қуйидагича ифодаланади:

$$r = \frac{p_{\min}}{p_{\max}}. \quad (160.3)$$

Симметрик цикл учун $r = -1$ дир; аммо $r = 1$ бўлса, $p_{\max} = p_{\min}$, $p_a = 0$ бўлиб, кучланиш даврий бўлмайди (558-шакл). Агар $r = 0$ бўлса, материал бир хил ишорадаги даврий куч таъсирида бўлади, яъни кучланиш $p_{\max}$ га етгандан кейин нолгача камайиб, яна $p_{\max}$ гача кўтарилади (559-шакл).

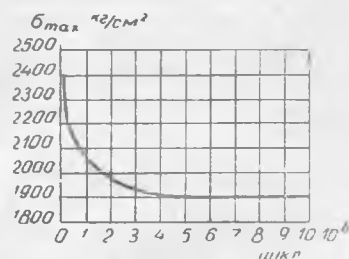
Маълум бир материал учун *чидамлик чегараси* σ , ҳар хил бўлиб, у *цикл характеристикаси* r га боғлиқдир. Чидамлик чегарасининг энг кичик қиймати симметрик циклга, яъни -1 бўлган ҳолга тўғри

келади. Симметрик цикли тебранувчан кучланишлар таъсиридаги материал тескари симметрик цикли тебранувчан кучланишлар таъсиридаги материалга караганда оғир вазиятда бўлади. Чидамлилик чегараси (σ_r) билан цикл характеристикаси (r) орасидаги умумий аналитик муносабат ҳозирги назарий мулоҳазалар билан аниқланмаганлиги сабабли, муҳим хусусий ҳоллар учун улар орасидаги эмпирик муносабатлар аниқланган. r нинг қийматига қараб, σ_r ни аниқлаш учун махсус синов машиналари ихтиро қилинган. Бу синов машиналарининг куччилиги материал учун энг хавфли бўлган симметрик циклини ҳосил қилади. Симметрик цикли намунани эгиш учун ўтказилган тажрибалардан олиш жуда осон. Шунинг учун ҳам биз ушбу тажриба устида тўхтаймиз. Тажриба ўтказишда 6—10 дона бир партия намуна тайёрланади ва улар кетма-кет 1, 2, 3, ... рақамлар билан номерланади. Биринчи намунани статик синов машинасига қўйиб, у маълум σ_1 кучланишни олгунча юкланади.

Бу кучланиш одатда $\sigma_1 = (0,5 \div 0,6) \sigma_b$ қилиб олинади (бунда σ_b — материалнинг мустаҳкамлик чегараси). Кейин намунани тебранувчан кучланиш таъсирига чидамлилигини синаш машинасига қўйиб, у σ_1 дан — σ_1 гача ўзгарувчан кучланиш таъсирида то намуна сингунча тебратилади. Намуна синиши биланоқ, махсус тормозловчи асбоб билан таъминланган машина дарҳол тўхтайди. Намунанинг синиши учун зарур бўлган цикллар сони n_1 ни синов машинасига ўрнатилган счётчик кўрсатиб туради. Иккинчи намуна учун ундаги кучланишни аввалги тажрибада берилган кучланишга қараганда бир оз кичикроқ қилиб олиб, юқоридаги тажрибани айнан такрорлаймиз. Учинчи намуна учун $\sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1$ ни олиб, тегишли цикл n_3 ни аниқлаймиз. Намунадаги ҳосил бўладиган кучланиш амплитудаси (σ_a) озайган сари, цикллар сони кўпайиб боради. Оқибатда бирор N -намунага шундай бир кучланиш σ_{PN} ни бериш мумкин бўладигани, цикллар сони n ҳар қандай қийматга эришганда ҳам у бу кучланишда синмай, қаршилик кўрсатиб тура олади. Бу кучланиш чидамлилик чегарасидаги кучланишга яқин бўлганидан, у чидамлилик чегараси учун қабул қилинади, яъни $\sigma_f \approx \sigma_N$ деб олинади.

Пулат учун цикллар сони $10 \cdot 10^6$ га етганда намуна синмаса, амалий жиҳатдан цикллар $n = \infty$ га эришганда ҳам синмайди деб, $\sigma_N = \sigma_f$ қилиб олинади. Мисдан ишланган машина қисмлари учун цикллар сонини ($100 \cdot 10^6$ — $200 \cdot 10^6$) га олиб боришга ижозат берилади. 560-шаклда толиқмасдан ҳосил бўладиган кучланиш билан цикллар сони орасидаги мунсabatни тасвирловчи график берилган. Чидамлилик чегараси назарий жиҳатдан график асимптотасини аниқлаётир. Намунани эгиб тажриба ўтказилганидан чидам чегарасидаги кучланиш σ , ҳам эгилишга оиддир. У кучланиш материалнинг муваққат қаршилигининг маълум қисмини ташкил этганидан уни қўйидагича ифодалаймиз мумкин:

$$\sigma_f = \lambda \sigma_b. \quad (160.4)$$



560-шакл.

Симметрик циклдаги пулат учун $\lambda = 0,4$ дир. Пулат стерженнинг ўқи бўйлаб таъсир кўрсатувчи симметрик циклли кучланиш учун $\lambda = 0,28 - 0,30$ дир.

Чидамлилик чегарасига оид кучланиш амплитудаси ва ўрта кучланишларни (160.1) (160.2) ва (160.3) формулалардагидек ҳарфлар билан белгилаймиз, фақат у миқдорларнинг чегарага оид қийматларининг тепасига k ишора қўйилади, яъни:

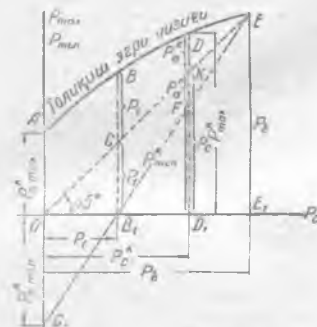
$$P_{\max}^k, P_{\min}^k, P_a^k, P_o^k.$$

161-§. Чидамлилик чегарасини цикл характеристикаси бўйича аниқлаш диаграммалари

Барча циклларга оид чидамлилик чегараларини аниқлаш билан ўтказилган тажриба натижаларини махсус диаграммалар билан тасвирлаш чидамлилик чегараларини аниқлашда жуда қулайдир. Бу диаграммаларда барча циклларга тегишли чидамлилик чегарасидан бошқа максимал, минимал ва ўртача кучланишларнинг амплитудаси ҳам тасвирланган. Бу хилдаги диаграммалар даврий юклар таъсиридаги материаллар учун йўл қўйилган кучланишларни белгилашда катта қулайлик туғдиради.

Бундай диаграммаларнинг типи бир нечта бўлиб, улардан энг кўп ишлатиладигани Смит ва Хей, бошқача айтганда — $-P_{\max}^k - P_a^k$ ва $P_a^k - P_o^k$ диаграммалардир. Масалан, $P_{\max}^k - P_a^k$ диаграммасини қуриш учун тўғри бурчакли координаталар системасини олиб, унинг абсциссалар ўқи бўйлаб ўрта кучланиш $P_c^k = \frac{P_{\max}^k + P_{\min}^k}{2}$, ординаталар ўқи бўй-

лаб эса тажриба воситаси билан аниқланган чидамлилик чегарасига тегишли $P_{\max}^k$ қўйилади. Бу маълумотлар асосида қурилган $OABE$ эгри чизик (561-шакл), ўзгарувчан юкнинг турли тартибда қўйилишига қараб ҳар хил цикллар учун тегишли



561-шакл.

ли чидамлилик чегарасини аниқлаб беради. Бу диаграмма энг хавфли ҳол бўлган симметрик циклга оид кучланишдан (диаграмма ординатаси OA дан) тортиб, то ўзгармайдиган юкка ҳам тегишли бўлган муваққат қаршилик P_b (EE_1 ордината) гача бўлган кучланишларни ўз ичига олади. Симметрик цикл учун $P_{\max}^k = -P_{\min}^k$ бўлганидан $P_o^k = 0$ бўлади, шунинг учун координаталар бошидаги OA ордината ҳақиқатан ҳам симметрик циклга мос келади. Диаграмманинг кейинги ординаталари эса тескари симметрик циклга мос келади. Диаграмманинг B_1 ординатаси абсцисса OB_1 га тенг бўлган ҳолда, бир хил қийматли циклга мос келиб, унинг учун $P_{\max}^k = 2P_1$ ва $P_{\min}^k = 0$ бўлади. Бу ҳолда ўртача кучланиш $P_c^k = P_1$ дир. Диаграмманинг энг четдаги нуқтаси E нинг ординатаси EE_1 материалнинг мустаҳкамлик чегараси P_b га мос келиб, унга тегишли абсцисса OE_1 ҳам P_b га тенгдир. Бундай ҳол материални ўзгармас кучланиш P_b ни ҳосил қилувчи юк билан юклаб-

ганда, яъни $p_{\max}^k = p_{\min}^k = p_b$ бўлганда ҳосил бўлиши мумкин. Бу ҳол учун:

$$p_0^k = \frac{p_{\max}^k + p_{\min}^k}{2} = p_b; \quad p_a^k = 0 \quad \text{бўлади.}$$

Агар координата ўқларига 45° бурчак билан координата бошидан OE чизигини ўтказсак, у чизиқ чидамлилик чегарасига тегишли ҳар қандай $p_{\max}^k = DD_1$ ординатани иккита кесмага бўлиб ўтади. Улардан DK кесмаси цикл амплитудаси ($p_0^k = \frac{p_{\max}^k - p_{\min}^k}{2}$) га, KD_1 кесмаси эса циклниң ўртача кучланиши ($p_0^k = \frac{p_{\max}^k + p_{\min}^k}{2}$) га тенгдир.

Агар K нуқтадан ординаталар ўқи йўналишида пастга қараб цикл амплитудаси $p^k = kf$ га тенг кесма қўйиб, уларнинг учларини туташтирсак, EFG_1G_1 чизиқ ҳосил бўлади. Бу чизиқнинг ординаталари қабул қилинган масштабда, тегишли цикллар учун $p_{\min}^k$ га тенг бўлади. Шундай қилиб, ўртача кучланиш p_c^k нинг турли қийматлари учун, юқоридаги эгри чизиқ $ABDE$ нинг ординаталарини ўлчаб $p_{\max}^k$ ни, пастки чизиқ EFG_1G_1 ординаталарини ўлчаб $p_{\min}^k$ ни топамиз.

Шундай қилиб, $p_{\max}^k - p_{\min}^k$ бўлган ҳар қандай циклдаги кучланиш хавфсиз бўлиб, шу билан бирга, материал толиққанда ҳам у *емирилмайди*. Бу кучланиш диаграммада толиқиш эгри чизиги $ABDE$ нинг пастда ётувчи нуқталар билан тасвирланади.

Энди, $p_{\max}^k - p_c$ диаграммасидан фойдаланиб, ўзгарувчан юк таъсиридан ҳосил бўладиган кучланиш ҳолати учун чидамлилик чегарасини қандай қилиб аниқлаш устида тўхтаб ўтамиз. Кучланиш ҳолати ўртача кучланиш p_c , амплитуда p_a билан берилган деб фараз қилайлик: $p_{\max}^k = p_c + p_a < p_{\max}^k$ бўлиб, у диаграмманиң A нуқтаси билан тасвирлансин (562-шакл). Берилган циклга тегишли чидамлилик чегарасига эришиши учун юкнинг қандай муносабатда кўтарилишини аниқлаймиз. Бунинг учун диаграммада шундай p_c^k ва p_a^k кесмаларини аниқлашимиз лозимки, улар берилган кучланишлар p_c ва p_a каби муносабатда бўлсин. Бунинг учун координаталар бошида ва топилган M нуқта орқали OM чизигини ўтказамиз. Бу чизиқ AE эгри чизиги билан M' нуқтада учрашади. Диаграмманиң $M'B$ ординатаси устида яшаш йўли билан аниқланган p_c^k ва p_a^k кесмалари ҳам худди p_c ва p_a кесмалари каби муносабатда, яъни:

$$\frac{p_a^k}{p_c^k} = \frac{p_a}{p_c} = \frac{p_{\max}^k - p_{\min}^k}{p_{\max}^k + p_{\min}^k} = \frac{1-r}{1+r}$$

бўлади. M' нуқта ва $p_{\max}^k = p_c^k + p_a^k$ берилган цикл учун чидаш чегарасини аниқлайди. Шундай қилиб, $p_{\max}^k - p_c$ диаграммасидан чидамлилик чегарасини аниқлашни ўргандик. Толиқиш диаграммаси $p_a - p_c$ ни қуришда абсциссалар ўқи бўйича ўртача кучланиш p_c ординаталар ўқи бўйича амплитуда p_a қўйилади (562-шакл).

Юқорида (561-шакл) келтирилган диаграммадаги AB эгри чизигининг нуқталари материалнинг чидаш чегарасидаги кучланиш ҳолатини тасвирлайди. Бу эгри чизиқ пастда ётувчи ҳар қандай нуқта, масалан, C нуқта чидамлилик чегарасидан пастдаги кучланиш бўлиб, яъни толиқиш маъносиди

кучланиш тўпламига онд кучланиш стерженда чўзилиш, буралиш, эгилиш натижасида ҳосил бўладиган номинал кучланишни тегишли кучланиш тўплами коэффиценти (σ_k) га кўпайтириб аниқланади яъни:

$$P_M = \alpha_k P, \quad (162.1)$$

буерда: P_M — кучланиш тўпланган жойда ҳосил бўлган максимал кучланиш;

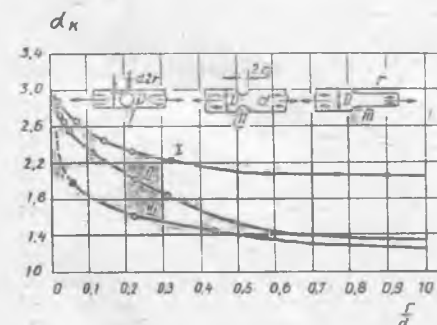
α_k — кучланиш тўплами коэффиценти;

P — силлиқ стерженда ҳосил бўладиган номинал кучланиш.

Кучланиш тўплами коэффицентини назарий ёки тажриба йўли билан аниқлаш мумкин. Ўзгарувчи юклар таъсиридаги жисмда ҳосил бўладиган кучланиш тўплами $P_{M, \max}^k$ ва унга тегишли коэффицент β_k статик юклар таъсиридан ҳосил бўладиган кучланиш P_k ва α_k коэффицентларидан фарқ қилгани сабабли, α_k ни назарий β_k ни эса ҳақиқий коэффицент деб юргитамиз. Коэффицент β_k фақат тажриба йўли билан қуйидагича аниқланади:

$$\beta_k = \frac{P_{M, \max}^k}{P_k^k}$$

α_k эластиклик чегарасида, β_k эса чидамлилиқ чегарасида аниқланиши билан бир-биридан фарқ қилади. Шунинг учун, бу — намунанинг шакли билан бирга, унинг чидамлилиқ чегарасидаги ҳолатига ва материалнинг хоссасига ҳам боғлиқ. Шунинг ҳам айтиш керакки, $\beta_k \leq \alpha_k$ бўлади. β_k нинг энг катта қиймати α_k га тенг бўлади. Унинг энг кичик қиймати эса бирга тенг бўлиб, бу ҳол учун кучланиш тўпланишининг



565-шакл.

кучланиш тўпланишидаги кучланишлар орттирмаси қуйидагича ифодаланади:

$$P_{\max} (\beta_k - 1) = q P_{\max} (\alpha_k - 1).$$

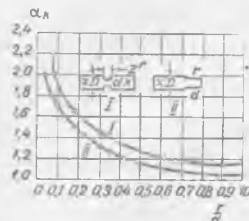
бундан:

$$\beta_k = 1 + q(\alpha_k - 1) \quad (162.3)$$

бўлади; бу ердаги q материал хоссасига, ўлчамига ва кертик шаклига боғлиқдир. α_k нинг энг кўп учрайдиган ҳоллар учун (тешик, кертик, йўғон

таъсири бўлмайди. Кўп текширувчилар β_k билан α_k орасидаги аналитик муносабатни назарий мулоҳазалар асосида чиқаришга уриниб, ҳозиргача деярли муваффақиятга эриша олмадилар. Шунинг учун, ҳақиқий коэффицент β_k фақатгина тажриба йўли билан аниқланмоқда. Баъзи текширувчилар β_k билан α_k орасидаги муносабатни сезгирлик коэффиценти q орқали ифодалаш фикрини айтганлар. Бу фикрга мувофиқ, статик ва даврий юклар таъсиридан ҳосил бўладиган

қйсмдан ингичка қисмга ўтиш) $\frac{r}{d}$ га боғлиқ бўлган графиги чўзилиш, сиқилиш учун 565-шаклда, эгилиш учун 566-шаклда тасвирланган. Цилиндрик стержень диаметри d нинг ўзгариши билан сезгирлик коэффициенти q нинг ўзгариш графиги 567-шаклда тасвирланган. Юқоридаги 1 рақам билан кўрсатилган эгри чизиқ легирланган қаттиқ пўлат учун, 2 рақами билан кўрсатилгани эса углеродли пўлат учун сезгирлик коэффициентининг ўзгаришини тасвирлайди.



566- шакл.



567- шакл.

Бу графиклардан фойдаланиб, $\frac{r}{d}$ ва d нинг турли қийматлари учун α_A ҳамда q ни аниқлашимиз мумкин.

163- §. Ўзгарувчан юклар таъсиридаги материаллар учун рухсат этилган кучланишни аниқлаш

Ўзгарувчан юклар таъсиридаги жисмлар учун хавфли кучланиш чидамлилик чегарасидир. Ўзгарувчан юкнинг циклига қараб, тегишли чидамлилик чегарасини аниқлаш лозим. Бу ҳолда рухсат этилган кучланиш қуйидагича ёзилади:

$$p_{\max} \leq \frac{p_{\max}^k}{k} = [p_r]. \quad (163.1)$$

$p_{\max}^k$ ни кучланиш амплитудаси p_a ва ўртача кучланиш p_c орқали ифодаласак:

$$p_a + p_c \leq [p_r] \quad (163.2)$$

бўлади.

Рухсат этилган кучланиш цикл характеристикаси r га боғлиқ бўлганидан, у r ишораси билан таъминланди.

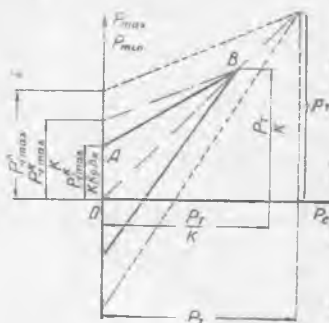
Чидамлилик натижи текширилатган деталга зарбий юк таъсир қилган бўлади, бунинг устига деталда кучланиш тўплами туғилишига шароит бўлса, у ҳолда, албатта, (163.1) ёки (163.2) ифодаларини динамик коэффициент K_d ва кучланиш тўплами коэффициенти β_k га бўлиш лозим. У ҳолда рухсат этилган кучланиш қуйидагича ифодаланади:

$$[p_r] = \frac{p_{\max}^k}{K \cdot K_d \cdot \beta_k} \quad (163.3)$$

Мустақамлик шартини ёзамиз:

$$p_a + p_c \leq \frac{p_{\max}^k}{K \cdot K_d \cdot \beta_k} = [p_k]. \quad (163.4)$$

$P_{\max}^*$ қиймати $P_{\max} - p_a$ ёки $p_a - p_c$ диаграммаси (561 ва 563-шакл) да аникланади. Қўпинча, диаграмма қуриш учун тажриба маълумотларни етарли бўлмаганидан, $ABDE$ эгри чизиқли диаграмма урнига AB тўғри чизиқни олиб, мазкур тақрибий шакл, яъни (564-шаклда) курсатилган диаграммадан фойдаланилади. A ва B нуқталарнинг координаталарини тегишлича мустаҳкамлик коэффициенти k га бўлиб, симметрик цикл учун A ординатаси P_1^k ни яна қўшимча k_d билан P_d га бўлиш лозим. Координата бошидан A ординатаси $\frac{P_1^k}{kk_d \beta}$ ни ва B ординатаси $\frac{P_2^k}{k}$ билан



568-шакл.

абсцисса $p_c = \frac{F_m}{k}$ ни қўйиб, A ва B нуқталарни туташтириш натижасида рухсат этилган кучланишни аниқлаш диаграммасини оламиз (568-шакл). Бу диаграммадан ҳар қандай цикл учун рухсат этилган кучланишни аниқлай оламиз. Рухсат этилган кучланиш формуласини тузиш учун (161.8) формуладан фойдаланамиз. У формуладаги P_1^k билан P_m миқдорини 568-шаклдаги диаграммага мувофиқ, тегишли коэффициентларга бўлиш лозим. У ҳолда рухсат этилган кучланиш қуйидагича ифодаланади:

$$[P_r] = \frac{r[P+1][P-1]}{(1+r)[P-1] + (1-r)[P+1]} \quad (163.6)$$

бу ерда $[P_{-1}] = \frac{P_{-1}^k}{kk_d \beta}$ — симметрик цикл учун рухсат этилган кучланиш.

$[P_{+1}] = \frac{P_T}{K}$ — юк статик таъсир этгандаги рухсат этилган кучланиш.

Рухсат этилган кучланиш $[P_r]$ аникланадиган (163.6) формула тақрибийдир, чунки эгри чизиқли $P_{\max} - p_0$ диаграммаси оддийлаштирилди, ундан ташқари деталь шакли ва унда мавжуд бўлиши мумкин булган кучланиш тўплами ҳам бошқа технологик сабабларни ҳисобга олувчи коэффициентлар тақрибий равишда ҳисобга олинди.

Амалий масалаларни ечишда ва (163.6) формуладан рухсат этилган кучланиш $[p_r]$ ни аниқлашда чидамлилик чегараси $[p_{-1}^*]$ ҳамда оқувчанлик чегараси $[p_{+1}^*]$ нинг қийматлари берилган бўлиши керак. Юқорида p_{-1}^* билан p_b орасидаги муносабатни боғлайдиган формула $p_{-1}^* = \lambda p_b$ берилган эди. λ деформация турларига боғлиқ коэффициентдир. Масалан:

$$\begin{aligned} \text{Чўзилиш ва сиқилишда} & \dots \dots \dots p_{-1}^* = 0,28pb \\ \text{Эгилишда} & \dots \dots \dots p_{-1}^* = 0,4pb \\ \text{Бурилишда} & \dots \dots \dots p_{-1}^* = 0,22pb. \end{aligned}$$

Шундай муносабатни оқувчанлик чегараси билан мустаҳкамлик чегараси учун ҳам тузиш мумкин, у қуйидагича бўлади:

$$P_T = \lambda_T p_b \quad (163.7)$$

Ўтказилган бир канча тажрибалар натижасида оқувчанлик чегараси учун қуйидаги қийматлар аниқланади:

Углеродли пўлат учун:

$$\begin{aligned} \text{Чўзилиш ва сиқилишда} & \dots p_T^k = (0,56 \div 0,60)p_\sigma, \\ \text{Эгилишда} & \dots p_T^k = (0,67 \div 0,72)p_\sigma, \\ \text{Буралишда} & \dots p_T^k = (0,34 \div 0,36)p_\sigma. \end{aligned}$$

Махсус пўлатлар учун:

$$\begin{aligned} \text{Чўзилиш ва сиқилишда} & \dots p_T^k = (0,75 \div 0,8)p_\sigma, \\ \text{Эгилишда} & \dots p_T^k = (0,83 \div 0,89)p_\sigma, \\ \text{Буралишда} & \dots p_T^k = (0,45 \div 0,48)p_\sigma. \end{aligned}$$

Юқорида келтирилган формулалар оддий кўринишдаги кучланиш ҳолати (чўзилиш ёки сиқилиш, буралиш ҳам эгилиш) учундир. Агар ўзгарувчан юклар таъсиридаги жисм мураккаб кучланишга қаршилиқ кўрсатса, статик юклар таъсиридагидек, ҳисоб тенгламасини тузишда мустаҳкамлик назарияларидан фойдаланиш зарур.

Энди юқорида айtilганларни ойдинлаштириш учун қуйида бир нечта конкрет масалаларни келтираимиз.

МАСАЛАЛАР

210. Диаметри $d = 12$ см бўлган қривошип аризонининг эгилишдаги рухсат этилган кучланиш аниқлансин. Бармоқнинг ингичкаланган жойидаги (галтель) радиуси $r = 5$ мм бўлиб, у мустаҳкамлик чегараси $\sigma_b = 6000$ кг/см² бўлган углеродли пўлатдан тайёрланган. Кучланиш цикли симметрик деб қабул қилинсин.

Ечиш. Бу ҳолда $[p_k] = [p_{-1}] = p_{-1}^k$ дир.

Симметрик цикл учун чидамлик чегараси:

$$p_{-1}^k = 0,4p_b = 0,4 \cdot 6000 = 2400 \text{ кг/см}^2$$

бўлади.

$$\frac{r}{d} = \frac{5}{120} = 0,042.$$

565-шаклдаги графикдан $\frac{r}{d} = 0,042$ га тегишли α_k ни аниқлаймиз. $\alpha_k = 1,90$ га тенг.

567-шаклдаги графикда 120 мм ли диаметр учун q ни аниқлаймиз:

$$q \cong 0,57.$$

Кучланиш тўлами коэффициентининг ҳақиқий қиймати:

$$\beta_k = 1 + (\alpha - 1)q = 1 + (1,9 - 1)0,57 = 1,61.$$

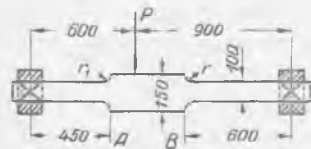
Асосий коэффициент k ни (динамик кучланишни ҳисобга олган ҳолда) 2 га тенг қилиб оламиз, у ҳолда рухсат этилган кучланиш қуйидагича бўлади:

$$[p_{-1}^k] = \frac{2400}{2 \cdot 1,61} = 195 \text{ кг/см}^2.$$

211. 569-шаклда тасвирланган вал учун рухсат этилган юк P аниқлаясн. Вал махсус пўлатдан тайёрланган бўлиб, $P_b = 9000 \text{ кг/см}^2$ дир. P юк икки қисмдан иборатдир: $0,25P$ қисми ҳамма вақт ўз йўналишини ўзгартмайди; $0,75P$ қисми эса вал бир айланганда ўз йўналишини 2π га ўзгартиради. Мустаҳкамлик коэффициентини $k = 2$.

Ечиш. Олдин цикл характеристикасини аниқлаймиз.

$$r = \frac{P_c - P_a}{P_c + P_a} = \frac{0,25P - 0,75P}{0,25P + 0,75P} = -0,5.$$



569-шакл.

А ва В кесимлари катта диаметрдан кичик диаметрغا ўтаётган жой бўлганидан, у ерда кучланиш гўплами ҳосил бўлгани сабабли, бу кесимлар хавфли ҳисобланади. Бу кесимларнинг қаршилиқ momenti:

$$W = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi \cdot 10^3}{32} \approx 100 \text{ см}^3.$$

А кесимдаги эгувчи момент:

$$M_1 = \frac{90 \cdot 45P}{150} = 27P \text{ кгсм.}$$

А кесимдаги энг катта нормал кучланиш:

$$\sigma_1 = \frac{M_1}{W} = \frac{27P}{100} = 0,27P \text{ кг/см}^2$$

бўлади.

* Худди шундай мулоҳазалар билан В кесимдаги кучланишни ҳисоблаймиз:

$$M_2 = \frac{60 \cdot 60P}{150} = 24P \text{ кгсм,} \quad \sigma_2 = \frac{M_2}{W} = \frac{24P}{100} = 0,24P.$$

(163.6) формуладан рухсат этилган кучланиш $[p_{-0,1}]$ ни аниқлаймиз:

$$[p_r] = [\sigma_1^u] = \frac{\sigma_T^u}{k}.$$

Бу кучланиш иккала кесим учун бир хил қийматга эгадир. Вал махсус пўлатда тайёрлангандан 163-параграфда келтирилган маълумотлардан σ_T^u ни топамиз:

$$\sigma_T^u = 1,11 \cdot 0,75 \sigma_b = 1,11 \cdot 9,75 \cdot 9000 = 7500 \text{ кг/см}^2.$$

Шунинг учун $[\sigma_{-1}^u] = \frac{7500}{2} = 3750 \text{ кг/см}^2$ бўлади.

$[p_{-1}] = [\sigma_{-1}^u] = \frac{\sigma_T^u}{k \beta_k}$ ни ҳисоблаш учун олдин σ_{-1}^u ни ва β_k ни ҳисоблаш лозим. β_k нинг қиймати А ва В кесимлари учун ҳар хил бўлади. $\sigma_{-1} = 0,4 \sigma_b = 0,4 \cdot 9000 = 3600 \text{ кг/см}^2$. А кесими учун галтель радиуси $r_1 = 2 \text{ см}$, В кесими учун $r_2 = 0,5 \text{ см}$. Вал диаметри $d = 10 \text{ см}$. А кесими учун $\frac{r}{d} = 0,2$. Бунга тегишли α_k нинг қийматини 566-шаклда тасвирланган графикдан аниқлаймиз. $\alpha = 1,48$; сезгирлик коэффициентини $d = 100 \text{ мм}$ учун 566—567-шаклларда тасвирланган графикдан аниқлаймиз: $q = 0,7$.

Демак:

$$\beta_k = 1 + (1,48 - 1,0)0,7 = 1,34.$$

В кесими учун:

$$\frac{r_2}{d} = \frac{0,5}{10} = 0,05; \alpha_k = 1,9; q = 0,7; \beta_k = 1 + (1,9 - 1)0,7 = 1,69.$$

Рухсат этилган кучланиш $[\sigma_{-1}^u]$:

А кесим учун:

$$\sigma_{-1}^u = \frac{3600}{2 \cdot 1,34} = 1340 \text{ кг/см}^2.$$

$$B \text{ кесим учун } [\sigma_{-1}^u] = \frac{3000}{2 \cdot 1,69} = 1032 \text{ кг/см}^2.$$

Толиқ иш учун рухсат этилган кучланишни аниқлашимиз мумкин:
 А кесим учун:

$$[\sigma_{-0,5}^u] = [\sigma_{-0,5}^k] = \frac{2 \cdot 3750 \cdot 1340}{(1 + 0,5)3750 + (1 - 0,5)1340} = 1600 \text{ кг/см}^2.$$

В кесим учун:

$$[\sigma_{-0,5}^u] = [\sigma_{-0,5}^k] = \frac{2 \cdot 3750 \cdot 1020}{(1 + 0,5)3750 + (1 - 0,5)1062} = 1300 \text{ кг/см}^2.$$

Р кучнинг қиймати қуйидаги иккита тенгсизликдан аниқланади:

$$0,276P < 1600; \quad 0,245P < 1300,$$

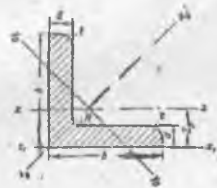
булардан:

$$P < \frac{1600}{0,276} = 5780 \text{ кг}, \quad P < \frac{1300}{0,245} = 5300 \text{ кг}.$$

$P = 5300$ кг қилиб олиш лозим.

И Л О В А Л А Р

ГОСТ 8508-57 ГА МУВОФИҚ ПРОКАТ ПЎЛАТНИНГ
СОРТАМЕНТИ



1- жадвал

Ёнлари тенг бурчакликлар

Профил- лар номери	Ўлчамлари				Профилнинг юз. F см ²	Оғирлиги	Ўқлар учун аниқланган катталиклар							
	b	d	R	r			$x - x$		$x_0 - x_0$		$y_0 - y_0$		$x_1 - x_1$	Z_0
							I_x	I_x	I_{x0}	I_{x0}	I_{y0}	I_{y0}	I_{x1}	
2	20	$\frac{3}{4}$	3,5	1,2	1,13 1,46	0,89 1,15	0,40 0,50	0,59 0,58	0,63 0,78	0,75 0,73	0,17 0,22	0,39 0,38	0,81 1,09	0,60 0,64
2,5	25	$\frac{3}{4}$	3,5	1,2	1,43 1,86	1,12 1,46	0,81 1,03	0,75 0,74	1,29 1,62	0,95 0,93	0,34 0,44	0,49 0,48	1,57 2,11	0,73 0,76
2,8	28	3	4	1,3	1,62	1,27	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	2,20	0,80
3,2	32	$\frac{3}{4}$	4,5	1,5	1,86 2,43	1,46 1,91	1,77 2,26	0,97 0,96	2,80 3,58	1,23 1,21	0,74 0,94	0,63 0,62	3,26 4,39	0,89 0,94
3,6	36	$\frac{3}{4}$	4,5	1,5	2,10 2,75	1,65 2,16	2,56 3,29	1,10 1,09	4,06 5,21	1,39 1,38	1,06 1,36	0,71 0,70	4,64 6,24	0,99 1,04

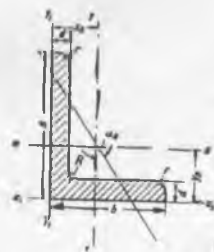
4	40	$\frac{3}{4}$	5	1,7	2,35 3,08	1,85 2,42
4,5	45	$\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$	5	1,7	2,65 3,48 4,29	2,08 2,73 3,37
5	50	$\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$	5,5	1,8	2,96 3,89 4,80	2,32 3,05 3,77
5,6	56	$\frac{3,5}{4}$ $\frac{4}{5}$	6	2	3,86 4,38 5,41	3,03 3,44 4,25
6,3	63	$\frac{4}{5}$ $\frac{5}{6}$	7	2,3	4,96 6,13 7,28	3,90 4,81 5,72
7	70	$\frac{4,5}{5}$ $\frac{6}{7}$ $\frac{7}{8}$	8	2,7	6,20 6,86 8,15 9,42 10,7	4,87 5,38 6,39 7,39 8,37
7,5	75	$\frac{5}{6}$ $\frac{7}{8}$ $\frac{8}{9}$	3	3	7,39 8,78 10,1 10,5 12,8	5,80 6,89 7,96 9,02 10,1

3,55 4,58	1,23 1,22	5,63 7,26	1,55 1,53	1,47 1,90	0,79 0,78	6,35 8,53	1,09 1,13
5,13 6,63 8,03	1,39 1,38 1,37	8,13 10,5 12,7	1,75 1,74 1,72	2,12 2,74 3,33	0,89 0,89 0,88	9,04 12,1 15,3	1,21 1,26 1,30
7,11 9,21 11,2	1,55 1,54 1,53	11,3 14,6 17,8	1,95 1,94 1,92	2,95 3,80 4,63	1,00 0,99 0,98	12,4 16,6 20,9	1,47 1,55 1,63
11,6 13,1 16,0	1,73 1,73 1,72	18,4 20,8 25,4	2,18 2,18 2,16	4,80 5,41 6,59	1,12 1,11 1,10	20,3 23,3 29,2	1,50 1,52 1,57
18,9 23,1 27,1	1,95 1,94 1,93	29,9 36,6 42,9	2,45 2,44 2,43	7,81 9,52 11,2	1,25 1,25 1,24	33,1 41,5 50,9	1,69 1,74 1,78
29,0 31,9 37,6 43,0 48,2	2,16 2,16 2,15 2,14 2,13	46,0 50,7 59,6 68,2 76,4	2,72 2,72 2,71 2,69 2,68	12,0 13,2 15,5 17,8 20,0	1,39 1,39 1,38 1,37 1,37	51,0 56,7 68,4 80,1 91,9	1,88 1,90 1,94 1,99 2,02
39,5 46,6 53,3 59,8 66,1	2,31 2,30 2,29 2,28 2,27	62,6 73,9 84,6 94,9 105	2,91 2,90 2,89 2,87 2,86	16,4 19,3 22,1 24,8 27,5	1,49 1,48 1,48 1,47 1,46	69,6 83,9 98,3 113 127	2,02 2,06 2,10 2,15 2,18

Жадвалнинг давоми

Ўлчамлари					Профилнинг юзин, F см ²	Оғирлиги	Ўқлар учун аниқланган катталиклар							
Профи- лар номери	d	b	R	r			$x - x$		$x_0 - x_0$		$y_0 - y_0$		$x_1 - x_1$	Z_0
							I_x	I_x	I_{x_0}	I_{x_0}	I_{y_0}	I_{y_0}	I_{x_1}	
8	80	5,5 6 7 8	9	3	8,63 9,38 10,8 12,3	6,78 7,36 8,51 9,65	52,7 57,0 65,3 73,4	2,47 2,47 2,45 2,44	83,6 90,4 104 116	3,11 3,11 3,09 3,08	21,8 23,5 27,0 30,3	1,59 1,58 1,58 1,57	93,2 102 119 137	2,17 2,19 2,23 2,27
9	90	6 7 8 9	10	3,3	10,6 12,3 13,9 15,6	8,33 9,64 10,9 12,2	82,1 94,3 106 118	2,78 2,77 2,76 2,75	130 150 168 186	3,50 3,49 3,48 3,46	34,0 38,9 43,8 48,6	1,79 1,78 1,77 1,77	145 169 194 219	2,43 2,47 2,51 2,55
10	100	6,5 7 8 10 12 14 16	12	4	12,8 13,8 15,6 19,2 22,8 26,3 29,7	10,1 10,8 12,2 15,1 17,9 20,6 23,3	122 131 147 179 209 237 264	3,09 3,08 3,07 3,05 3,03 3,00 2,98	193 207 233 284 331 375 416	3,88 3,88 3,87 3,84 3,81 3,78 3,74	50,7 54,2 60,9 74,1 86,9 99,3 112	1,99 1,98 1,98 1,96 1,95 1,94 1,94	214 231 265 333 402 472 542	2,68 2,71 2,75 2,83 2,91 2,96 3,00
11	110	7 8	12	4	15,2 17,2	11,9 13,5	176 198	3,40 3,39	279 315	4,29 4,28	72,7 81,8	2,19 2,18	308 353	2,96 3,00
12,5	125	8 9 10 12 14 16	14	4,6	19,7 22,0 24,3 28,9 33,4 37,8	15,5 17,3 19,1 22,7 26,2 29,6	294 327 360 422 482 539	3,87 3,86 3,85 3,82 3,80 3,78	467 520 571 670 764 853	4,87 4,86 4,84 4,82 4,78 4,75	122 135 149 174 200 224	2,49 2,48 2,47 2,46 2,45 2,44	516 582 649 782 916 1051	3,36 3,40 3,45 3,53 3,61 3,68

14	140	9	14	4,6	24,7	19,4	466	4,34	739	5,47	192	2,79	818	3,78
		10			27,3	21,5	512	4,33	814	5,46	211	2,78	911	3,82
		12			32,5	25,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	1097	3,90
16	160	10	16	5,3	31,4	24,7	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30
		11			34,4	27,0	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35
		12			37,4	29,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39
		14			43,3	34,0	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	1911	4,47
		16			49,1	38,5	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	2191	4,55
		18			54,8	43,0	1299	4,87	2031	6,13	537	3,13	2472	4,63
		20			60,4	47,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70
18	180	11	16	5,3	38,8	30,5	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	2128	4,85
		12			42,2	33,1	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	2324	4,49
20	200	12	18	6	47,1	37,0	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	3182	5,37
		13			50,9	39,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	3452	5,42
		14			54,6	42,8	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	3722	5,46
		16			62,0	48,7	2363	6,17	3755	7,78	970	3,95	4264	5,54
		20			76,5	60,1	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5355	5,70
		25			94,3	74,0	3466	6,05	5494	7,65	1438	3,91	6733	5,89
		30			111,5	87,6	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	8130	6,07
22	220	14	21	7	60,4	47,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	4941	5,93
		16			68,6	53,8	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	5661	6,02
25	250	16	24	8	78,4	61,5	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	8286	6,75
		18			87,7	68,9	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	9342	6,83
		20			97,0	76,1	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	10401	6,91
		22			105,1	83,3	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	11464	7,00
		25			119,7	94,0	7000	6,65	11125	9,64	2887	4,91	13064	7,11
		28			133,1	104,5	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	14674	7,23
		30			142,0	111,4	8177	7,59	12965	9,56	3389	4,89	15753	7,31



Енлари тенгмас бурчакликлар

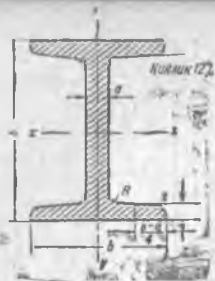
Сортамент

2-жадвал

Профилларнинг номери	Ўлчамлари					Профилнинг юзи	1 пог. м даги огирлиги	Ўқлар учун аниқланган катталиқлар										
	B	b	d	R	r			x — x		y — y		x ₁ — x ₁		y ₁ — y ₁		u — u		
								I _x	I _x	I _y	I _y	I _{x₁} мин	Оғирлик марказининг масофаси x ₀ — y ₀	I _{y₁} мин	Оғирлик маркази- нинг масо- фаси x ₀	I _u мин	I _u мин	Ўқнинг қиялик бурчаги, tg α
2,5/1,6	25	16	3	3,5	1,2	1,16	0,91	0,70	0,78	0,22	0,44	1,56	0,86	0,43	0,42	0,13	0,34	0,392
3,2/2	32	20	$\frac{3}{4}$	3,5	1,2	1,49 1,94	1,17 1,52	1,52 1,93	1,01 1,00	0,46 0,57	0,55 0,54	3,26 4,38	1,08 1,12	0,82 1,12	0,49 0,53	0,28 0,35	0,43 0,43	0,382 0,374
4/2,5	40	25	$\frac{3}{4}$	4,0	1,3	1,89 2,47	1,48 1,94	3,06 3,93	1,27 1,26	0,93 1,18	0,70 0,69	6,37 8,53	1,32 1,37	1,58 2,15	0,59 0,63	0,56 0,71	0,54 0,54	0,385 0,381
4,5/2,8	45	28	$\frac{3}{4}$	5	1,7	2,14 2,80	1,68 2,20	4,41 5,68	1,43 1,42	1,32 1,69	0,79 0,78	9,02 12,1	1,47 1,51	2,20 2,98	0,64 0,68	0,79 1,02	0,61 0,60	0,382 0,379
5/3,2	50	32	$\frac{3}{4}$	5,5	1,8	2,42 3,17	1,90 2,49	6,17 7,98	1,60 1,59	1,99 2,56	0,91 0,90	12,4 16,6	1,60 1,65	3,26 4,42	0,72 0,76	1,18 1,52	0,70 0,69	0,403 0,401

5,6/3,6	56	36	3,5	6,0	2,0	3,16	2,48	10,1	1,79	3,30	1,02	20,3	1,80	5,43	0,82	1,95	0,79	0,407
			4			3,58	2,81	11,4	1,78	3,70	1,02	23,2	1,82	6,25	0,84	2,19	0,78	0,406
			5			4,41	3,46	13,8	1,77	4,48	1,01	29,2	1,86	7,91	0,88	2,66	0,78	0,404
6,3/4,0	63	40	4	7,0	2,3	4,04	3,17	16,3	2,01	5,16	1,13	33,0	2,03	8,51	0,91	3,07	0,87	0,397
			5			4,98	3,91	19,9	2,00	6,26	1,12	41,4	2,08	10,8	0,95	3,73	0,86	0,396
			6			5,90	4,63	23,3	1,99	7,28	1,11	49,9	2,12	13,1	0,99	4,36	0,86	0,393
			8			7,68	6,03	29,6	1,96	9,15	1,09	66,9	2,20	17,9	1,07	5,58	0,85	0,386
7/4,5	70	45	4,5	7,5	2,5	5,07	3,98	25,3	2,23	8,25	1,28	51	2,25	13,6	1,03	4,88	0,98	0,407
			5			5,59	4,39	27,8	2,23	9,05	1,27	56,7	2,28	15,2	1,05	5,34	0,98	0,406
7,5/5	75	50	5	8	2,7	6,11	4,79	34,8	2,39	12,5	1,43	69,7	2,39	20,8	1,17	7,24	1,33	0,436
			6			7,25	5,69	40,9	2,38	14,6	1,42	83,9	2,44	25,2	1,21	8,48	1,08	0,435
			8			9,47	7,43	52,4	2,35	18,5	1,40	112	2,52	34,2	1,29	10,9	1,07	0,430
8/5	80	50	5	8	2,7	6,36	4,99	41,6	2,56	12,7	1,41	84,6	2,6	20,8	1,13	7,58	1,09	0,387
			6			7,55	5,92	49,0	2,55	14,8	1,40	102	2,65	25,2	1,17	8,88	1,08	0,386
9/5,6	90	56	5,5	9	3	7,86	6,17	65,3	2,88	19,7	1,58	132	2,92	32,2	1,26	11,8	1,22	0,384
			6			8,54	6,70	70,6	2,88	21,2	1,58	145	2,95	35,2	1,28	12,7	1,22	0,384
			8			11,18	8,77	90,9	2,85	27,1	1,56	194	3,04	47,8	1,36	16,3	1,21	0,380
10/6,3	100	63	6	10	3,3	9,59	7,53	98,3	3,2	30,6	1,79	191	3,23	49,9	1,42	18,2	1,38	0,393
			7			11,1	8,70	113	3,19	35,0	1,78	232	3,28	58,7	1,46	20,8	1,37	0,392
			8			12,6	9,87	127	3,18	39,2	1,77	266	3,32	67,6	1,50	23,4	1,36	0,391
			10			15,5	12,1	154	3,15	47,1	1,75	333	3,40	85,8	1,58	28,3	1,35	0,387
11/7	110	70	6,5	10	3,3	11,4	8,98	142	3,53	45,6	2	286	3,55	74,3	1,58	26,9	1,53	0,402
			7			12,3	9,64	152	3,52	48,7	1,99	309	3,57	80,3	1,6	28,8	1,53	0,402
			8			13,9	10,9	172	3,51	54,6	1,98	353	3,61	92,3	1,64	32,3	1,52	0,400

Профилларнинг номери	Ўлчамлари					Профилнинг юзи	1 пог. м даги оғирлиги	Ўқлар учун аниқланган катталиклар										
	B	b	d	R	r			x—x		y—y		x ₁ —x ₁		y ₁ —y ₁		u—u		Ўқнинг княдик дурчаги, и
								l _x	l _x	l _y	l _y	l _{x₁} мин	оғирлик марказининг масофаси x ₀ —x ₀	l _{y₁} мин	оғирлик маркази- нинг масо- фаси y ₀	l _u мин	l _u мин	
мм					см	кг	см ⁴	см	см	см ⁴	см	см ⁴	см	см ⁴	см	см ⁴		
12,5/8	125	80	7	11	3,7	14,1	11	227	4,01	73,7	2,29	452	4,01	119	1,8	43,4	1,76	0,407
			8			16	12,5	256	4	83,0	2,28	518	4,05	137	1,84	48,8	1,75	0,406
			10			19,7	15,5	312	3,98	100	2,26	649	4,14	173	1,92	59,3	1,74	0,404
			12			23,4	18,3	365	3,95	117	2,24	781	4,22	210	2	69,5	1,72	0,400
14/9	140	90	8	12	4	18	14,1	364	4,49	120	2,58	727	4,49	194	2,03	70,3	1,98	0,411
			10			22,2	17,5	444	4,47	146	2,56	911	4,58	245	2,12	85,5	1,96	0,409
16/10	160	100	9	13	4,3	22,9	18	606	5,15	185	2,85	1221	5,19	300	2,23	110	2,2	0,391
			10			25,3	19,8	667	5,13	204	2,84	1359	5,23	335	2,28	121	2,19	0,390
			12			30	23,6	784	5,11	239	2,82	1634	5,32	405	2,36	142	2,18	0,388
			14			34,7	27,3	897	5,08	272	2,8	1910	5,40	477	2,43	162	2,16	0,385
18/11	180	110	10	14	4,7	28,3	22,2	952	5,8	276	3,12	1933	5,88	444	2,44	165	2,42	0,375
			12			33,7	26,4	1123	5,77	324	3,1	2324	5,97	537	2,52	194	2,40	0,374
20/12,5	200	125	11	14	4,7	34,9	27,4	1449	6,45	446	3,58	2920	6,5	718	2,79	264	2,75	0,392
			12			37,9	29,7	1568	6,43	482	3,57	3189	6,54	786	2,83	285	2,74	0,392
			14			43,9	34,4	1801	6,41	551	3,54	3726	6,62	922	2,91	327	2,73	0,390
			16			49,8	39,1	2026	6,38	617	3,52	4264	6,71	1061	2,99	367	2,72	0,388
25/16	250	160	12	18	6	48,3	37,9	3147	8,07	1032	4,62	6212	7,97	1634	3,53	604	3,54	0,410
			16			63,6	49,9	4091	8,02	1333	4,58	8308	8,14	2200	3,69	781	3,50	0,408
			18			71,1	55,8	45	7,99	1475	4,56	9358	8,23	2487	3,77	866	3,49	0,407
			20			78,5	61,7	4987	7,97	1613	4,53	10410	8,31	2776	3,85	949	3,48	0,405



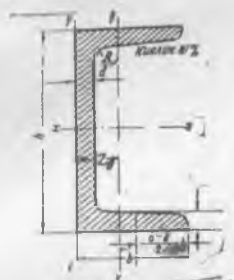
ГОСТ
8239—56

Құштаврили балкалар

Сортамент

3-жадал

Профиллар- нинг номери	I пог. м даги оғир- лиги кг	Ўлчамлари						Кесим юзини F, см²	x — x				y — y			
		h	b	d	t	R	r		I _x	W _x	I _y	S _y	I _y	W _y	i _y	
																см⁴
мм																
10	11,1	100	70	4,5	7,2	7,0	3,0	14,2	244	48,8	4,15	28,0	35,3	10,1	1,58	
12	13,0	120	75	5,0	7,3	7,5	3,0	16,5	403	67,5	4,94	38,5	43,8	11,7	1,63	
14	14,8	140	82	5,0	7,5	8,0	3,0	18,9	632	90,3	5,78	51,5	58,2	14,2	1,75	
16	16,9	160	90	5,0	7,7	8,5	3,5	21,5	945	118	6,63	57,0	77,6	17,2	1,90	
18	18,7	180	95	5,0	8,0	9,0	3,5	23,8	1330	148	7,47	83,7	94,6	19,9	1,99	
18a	19,9	180	102	5,0	8,2	9,0	3,5	25,4	1440	160	7,53	90,1	119	23,3	2,17	
20	20,7	200	100	5,2	8,2	9,5	4,0	26,4	1810	181	8,27	102	112	22,4	2,06	
20a	22,2	200	110	5,2	8,3	9,5	4,0	28,3	1970	197	8,36	111	148	27,0	2,29	
22	23,7	220	110	5,3	8,6	10,0	4,0	30,2	2530	230	9,14	130	155	28,2	2,26	
22a	25,4	220	120	5,3	8,8	10,0	4,0	32,4	2760	251	9,23	141	203	33,8	2,50	
24	27,3	240	115	5,6	9,5	10,5	4,0	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37	
24a	29,4	240	125	5,6	9,8	10,5	4,0	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63	
27	31,5	270	125	6,0	9,8	11,0	4,5	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54	
27a	33,9	270	135	6,0	10,2	11,0	4,5	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80	
30	36,5	300	135	6,5	10,2	12	5	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69	
30a	39,2	300	145	6,5	10,7	12	5	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95	
33	42,2	330	140	7,0	11,2	13	5	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79	
36	48,6	360	145	7,5	12,3	14	6	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89	
40	56,1	400	155	8,0	13,0	15	6	71,4	18930	947	16,3	540	666	85,9	3,05	
45	65,2	450	160	8,6	14,2	16	7	83,0	27450	1220	18,2	699	807	101	3,12	
50	76,8	500	170	9,5	15,2	17	7	97,8	39290	1570	20,0	905	1040	122	3,26	
55	89,8	550	180	10,3	16,5	18	7	114	55150	2000	22,0	1150	1350	150	3,44	
60	104	600	190	11,1	17,8	20	8	132	75450	2510	23,9	1450	1720	181	3,60	
65	120	650	200	12,0	19,2	22	9	153	101400	3120	25,8	1800	2170	217	3,77	
70	138	700	210	13,0	20,8	24	10	176	134600	3840	27,7	2230	2730	260	3,94	
70a	158	700	210	15,0	24,0	24	10	202	152700	4360	27,5	2550	3240	309	4,01	
70c	184	700	210	17,5	28,2	24	10	234	175370	5010	27,4	2940	3910	373	4,09	



ГОСТ 8240—56

Швеллерлар

Сортамент

4-жадвал

Профил- ларнинг номери	i тоғ. м дага оғирлиги	Ўлчамлари						Кесим музи F, см²	x — x				y — y			Z ₀ , см
		h	b	d	t	R	r		I _x	W _x	i _x	S _x	I _y	W _y	i _y	
		мм							см⁴	см³	см	см³	см⁴	см³	см	
5	5,42	50	37	4,5	7,0	6,0	2,5	6,90	26,1	10,4	1,94	6,36	8,41	3,59	1,10	1,36
6,5	6,50	65	40	4,5	7,4	6,0	2,5	8,28	54,5	16,8	2,57	10,0	11,9	4,58	1,20	1,40
8	7,78	80	45	4,8	7,4	6,5	2,5	9,91	99,9	25,0	3,17	14,8	17,8	5,89	1,34	1,48
10	9,20	100	50	4,8	7,5	7,0	3,0	11,7	187	37,3	3,99	21,9	25,6	7,42	1,48	1,55
12	10,8	120	54	5,0	7,7	7,5	3,0	13,7	313	52,2	4,78	30,5	34,4	9,01	1,58	1,59
14	12,3	140	58	5,0	8,0	8,0	3,0	15,7	489	69,8	5,59	40,7	45,1	10,9	1,70	1,66
14a	13,2	140	62	5,0	8,5	8,0	3,0	16,9	538	76,8	5,65	44,6	56,6	13,0	1,83	1,84
16	14,1	160	64	5,0	8,3	8,5	3,5	18,0	741	92,6	6,42	53,7	62,6	13,6	1,87	1,79
16a	15,1	160	68	5,0	8,8	8,5	3,5	19,3	811	101	6,48	58,5	77,3	16,0	2,00	1,98
18	16,1	180	70	5,0	8,7	9,0	3,5	20,5	1080	120	7,26	69,4	85,6	16,9	2,04	1,95
18a	17,2	180	74	5,0	9,2	9,0	3,5	21,9	1180	131	7,33	75,2	104	19,7	2,18	2,13
20	18,4	200	76	5,2	9,0	9,5	4,0	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
20a	19,6	200	80	5,2	9,6	9,5	4,0	25,0	1660	166	8,15	95,2	137	24,0	2,34	2,27
22	20,9	220	82	5,3	9,6	10,0	4,0	26,7	2120	193	8,91	111	151	25,4	2,38	2,24
22a	22,5	220	87	5,3	10,2	10,0	4,0	28,6	2320	211	9,01	121	186	29,9	2,55	2,47
24	24,0	240	90	5,6	10,0	10,5	4,0	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
24a	25,8	240	95	5,6	10,7	10,5	4,0	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67
27	27,7	270	95	6,0	10,5	11	4,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	31,8	300	100	6,5	11,0	12	5	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33	36,5	330	105	7,0	11,7	13	5	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	41,9	360	110	7,5	12,6	14	6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40	48,3	400	115	8,0	13,5	15	6	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

М У Н Д А Р И Ж А

Бет

Биринчи нашрига сўз боши	3
Иккинчи нашрига сўз боши	4
I б о б. Кириш	5
1- §. Материаллар қаршилиги фанининг моҳияти	5
2- §. Тўғри ва эгри стерженлар, юпқа пластинкалар ва қобиклар таърифи	7
3- §. Иншоот ва машиналарга қўйиладиган кучлар ва уларнинг турлари	8
4- §. Деформация ва унинг турлари	10
5- §. Каттиқ жисм статикаси теоремаларининг материаллар қаршилигидаги татбиқи	11
6- §. Ички кучлар ва уларни топиш	11
7- §. Кучланиш ва унинг турлари	14
8- §. Материаллар қаршилиги масалаларини ечиш тартиби	15
9- §. Иншоот қисмларига қўйиладиган ташқи кучлар таъсири-нинг асосий кўринишлари ва улар таъсиридан ҳосил бўладиган деформациялар.	16
II б о б Эластиклик чегарасида призматик стерженларнинг чўзилиши ва сиқилиши	18
10- §. Чўзилувчи (сиқилувчи) стержень кўндаланг кесимидаги кучланиш. Ҳисоб тенгламаси	18
11- §. Чўзилувчи (сиқилувчи) призматик стерженнинг бўйлама ва кўндаланг деформациялари. Пуассон коэффициенти	19
12- §. Гук қонуни	20
III б о б. Материалларнинг мустаҳкамлигини синов йўли билан ўрганиш	26
13- §. Материалларни синаш машиналари	26
14- §. Намунанинг шакли. Синов натижаларига намуна шаклининг ва узунлигининг таъсири	28
15- §. Чўзилиш диаграммаси	29
16- §. Синов процессига оид баъзи мулоҳазалар ва қўшимча маълумотлар	35
17- §. Пластик ва мўрт материалларнинг чўзилиш диаграммалари	36
18- §. Пластик ва мўрт материалларнинг механик хара-ктеристикаларини таққослаш	39
19- §. Каттиқлик	42
20- §. Материалнинг механик хоссаларига температуранинг таъсири	43
21- §. Кейинги таъсир ва ўзича чўзилувчанлик	44
22- §. Эластик гистерезис	46
23- §. Толиқиш ва толиқиш натижасида материалнинг емирилиши	47

IV б о б. Чўзилиш ва сиқилишга оид баъзи мураккаб масалалар 48

24- §. Статик аниқмас масалалар	48
25- §. Айрим қисмларнинг аниқ тайёрланмаслиги натижасида конструкция элементларида ҳосил бўладиган зуриқишлар	50
26- §. Температуранинг узгайишдан ҳосил бўладиган кучланишлар	53
27- §. Статик аниқмас системаларни рухсат этилган юкка мувофиқ ҳисоблаш	54
28- §. Ҳусусий оғирликни эътиборга олиб, кўндаланг кесимни танлаш	59
29- §. Критик узунлик	63
30- §. Ҳусусий оғирлик таъсиридан бўладиган деформация	64
31- §. Эгилувчан ипни ҳисоблаш	64

V б о б. Кучланишларнинг анализи 71

32- §. Қия кесимлардаги кучланишлар	71
33- §. Текис кучланиш ҳолати	75
34- §. Кучланиш эллипси	78
35- §. Текис кучланиш ҳолати учун Мор усули (Мор доираси)	79
36- §. Текис кучланиш ҳолати учун бош юзалар ва бош кучланишлар	80
37- §. Фазовий кучланиш ҳолати	84
38- §. Чўзилишдаги ва сиқилишдаги стерженларнинг кўндаланг деформацияси (Пуассон коэффициент)	87
39- §. Кучланиш билан деформациянинг умумий муносабати	88

VI б о б. Мустаҳкамлик назариялари 91

40- §. Мустаҳкамлик назариялари ҳақида тушунча	91
41- §. Мураккаб кучланиш ҳолатидаги жисмларнинг мустаҳкамлигини турли мустаҳкамлик назариялари асосида текшириш	93
42- §. Энергетик назария	95

VII б о б. Силжиш 101

43- §. Соф силжиш	101
44- §. Силжишга қаршилик кўрсатувчи призматик стерженлар учун рухсат этилган кучланиш	103
45- §. Силжишга ишловчи конструкция элементларининг ҳисоби	105
46- §. Пайванд бирикманинг ҳисоби	112

VIII б о б. Буралиш 115

47- §. Доиравий кесимли стерженнинг буралиши	118
48- §. Доиравий цилиндр кўндаланг кесимининг поляр инерция моменти ва қаршилик моменти	122
49- §. Буралишдаги деформацияни аниқлаш	123
50- §. Валларни буралишга ҳисоблаш. Буровчи моментлар эпюраси	124
51- §. Буралувчи стерженнинг қия кесимидаги кучланишлар	125
52- §. Буралиш деформациясининг потенциал энергияси (Буровчи моментнинг иши)	126
53- §. Кесими доиравий бўлмаган стерженларнинг буралиши	127
54- §. Қадами кичик винт пружиналардаги кучланишлар ва деформациялар	130

IX б о б. Текис шаклларнинг статик ва инерция моментлари . . . 131

55-§. Текис шаклларнинг ўққа нисбатан статик моментлари .	131
56-§. Текис шаклларнинг инерция моментлари	139
57-§. Бош инерция ўқлари ҳақидаги тушунчалар	140
58-§. Текис шаклнинг марказий ўқига параллел ўққа нисбатан инерция моменти	141
59-§. Энг оддий текис шаклларнинг инерция моментлари . .	142
60-§. Мураккаб геометрик шаклларнинг инерция моментларини ҳисоблаш	143
61-§. Марказдан кочувчи инерция моментини ҳисоблаш . . .	146
62-§. Координата ўқлари айлантирилганда инерция моментларининг ўзгариши	147
63-§. Бош инерция ўқларининг йўналишини ва бош инерция моментларини аниқлаш	149
64-§. Инерция эллипси	151
65-§. Текис юзаларнинг инерция моментларини тақрибий усулда ҳисоблаш	154

X б о б. Кундаланг эгилиш 156

66-§. Эгилишга оид тушунчалар	156
67-§. Таянчларнинг хиллари ва реакциялари	157
68-§. Таянч реакцияларини аниқлаш	159
69-§. Балкаларда ҳосил буладиган кучланишларнинг характери. Эгувчи момент ва кесиб ўтувчи куч	162
70-§. Эгувчи момент ва кесиб ўтувчи кучлар эпюрасини аналитик равишда тузиш	165
71-§. Мураккаб юклар учун кесиб ўтувчи куч ва эгувчи момент эпюраларини ясаш	171
72-§. Эгувчи момент, кесиб ўтувчи куч ва ёйилган куч интенсиивлиги орасидаги дифференциал муносабатлар	172
73-§. Жуфт кучлар билан юкланган балкалар учун Q ва M эпюраларини ясаш	175
74-§. Q ва M эпюраларини чизишда кучлар таъсирини қўшиш усули	177
75-§. M ва Q эпюраларини график усулда ясаш	179
76-§. Тугунлар орқали юкланган балкалар учун M ва Q эпюраларини ясаш	183

XI б о б. Эгилишдаги кучланишларни ҳисоблаш 184

77-§. Соф эгилиш. Эгилиш назариясига оид гипотезалар . .	184
78-§. Соф эгилишдаги нормал кучланишлар	186
79-§. Эгилиш учун ҳисоб тенгламаси	190
80-§. Балка кесимларининг рационал шакллари	192
81-§. Кундаланг кесими тўғри тўрт бурчакли балкадаги тангенциал кучланишлар	194
82-§. Қуш таврли кесим учун тангенциал кучланишлар . . .	199
83-§. Доиравий кесим учун тангенциал кучланиш	201
84-§. Балкаларнинг мустаҳкамлигини тангенциал кучланишларга нисбатан текшириш	202
85-§. Балканинг мустаҳкамлигини бош кучланишлар асосида текшириш	204
86-§. Бош кучланишларнинг йўналиши. Кучланишлар траекторияси	209

XII боб. Балкаларнинг эгилишдаги деформацияларини аниқлаш 218

87-§. Балкаларнинг салқилигини ва қўндаланг кесимларнинг айланишини аналитик усулда аниқлаш	218
88-§. Тақрибий назариянинг қўлланиш чегараси	221
89-§. Эластик чизиқнинг дифференциал тенгламасини интеграллаш	223
90-§. Балка давомида эгувчи момент битта аналитик функция билан ифодаланмайдиган ҳоллар	226
91-§. Эластик чизиқнинг универсал тенгламаси	230
92-§. Эластик чизиқни график усулда яшаш	234
93-§. Графо-аналитик усулда балканинг деформацияларини текшириш	237
94-§. Графо-аналитик усулнинг конкрет ҳоллар учун татбиқи	238

XIII боб. Эзгарувчи кесимли балкалар ҳисоби 246

95-§. Эгилишга тенг қаршилиқ кўрсатувчи балкалар	246
96-§. Тенг қаршилиқ кўрсатувчи балкалар профили	247

XIV боб. Статик аниқмас балкалар ҳисоби 252

97-§. Ортикча боғланишлар	252
98-§. Ортикча номаълумларни аниқлаш усуллари	253
99-§. Уч таянчда ётувчи балкалар ҳисоби	262
100-§. Уч момент теоремаси	263

XV боб. Конструкция элементларининг устиворлиги 271

101-§. Устивор ва устивормас мувозанатлар	271
102-§. Критик кучни аниқлаш учун Эйлер формуласи	273
103-§. Учлари турлича маҳкамланган стерженлар учун критик куч ифодаси	275
104-§. Эйлер формуласининг татбиқ этилиш чегараси	276
105-§. Сиқилган стерженларнинг устивор мувозанатини текшириш	279

XVI боб Мураккаб қаршилиқ 285

106-§. Мураккаб эгилиш (қийшиқ эгилиш)	287
107-§. Балкаларнинг қийшиқ эгилишдаги деформациялари	293
108-§. Чузилиш ёки сиқилишнинг эгилиш билан бирга таъсири	296
109-§. Марказий қўйилмаган чўзувчи ёки сиқувчи кучлар таъсири	300
110-§. Кесим ядроси	305
111-§. Буралишнинг эгилиш билан бирга таъсири	309
112-§. Энг оддий тирсакли валларнинг ҳисоби	317
113-§. Цилиндрик винт пружиналар ҳисоби.Умумий ҳол	322

XVII боб. Балкаларнинг эгилишига оид баъзи мураккаб ҳоллар 326

114-§. Эгилишда ҳосил бўлган кучланишларнинг тўпланиши	326
115-§. Бош текислик симметрия текислиги бўлмаган ҳолдаги эгилиш. Эгилиш маркази	329
116-§. Улама балкалар ва уларнинг ҳисоби	334
117-§. Улама балкалар элементларини туташтирувчи парчин михлар ҳисоби	341
118-§. Пайвандлаб уланган улама балкалар ҳисоби	343
119-§. Улама ёғоч балкалар ҳисоби ҳақида тушунча	345
120-§. Темир-бетон балкаларни рухсат этилган кучланишлар асосида ҳисоблаш	348
121-§. Темир-бетон балкалардаги тангенциал кучланишлар	351
122-§. Эластик таянчда ётувчи балкалар	359

XVIII боб. Материаллар қаршилигининг умумий теоремалари	364
123- §. Деформациянинг потенциал энергияси	364
124- §. Умумлаштирилган координаталар ва умумлаштирилган кучлар	369
125- §. Эластик система потенциал энергиясининг умумий ифодаси	370
126- §. Кастильяно теоремаси	372
127- §. Кастильяно теоремасининг бошқача исботи	375
128- §. Кастильяно теоремасининг татбиқи	376
129- §. Минимал иш ҳақидаги теорема	379
130- §. Кўчишларнинг ўзаро муносабатда бўлиши ҳақидаги теорема (Максвелл-Бетти теоремаси)	380
131- §. Мор усули	383
132- §. Верещагин усули	386
133- §. Каноник тенгламалар. Рамалар ҳисоби	386
 XIX боб. Эгри стерженлар ҳисоби	393
134- §. Эгри стержень кесимида ҳосил бўладиган кучланишлар	393
135- §. Эгри стержень кундаланг кесими нейтрал ўқининг ҳолатини аниқлаш	397
136- §. Баъзи хусусий ҳоллар учун нейтрал қатламнинг эгрилик радиусини аниқлаш	399
137- §. Эгри стерженларнинг деформацияси	401
138- §. Икки шарнирли аркалар ҳисоби	403
 XX боб. Юпқа деворли идишлар ва қалин деворли трубалар ҳисоби	410
139- §. Ички босим таъсиридаги юпқа деворли идишлар	410
140- §. Юпқа қобикларнинг энг оддий кўринишлари	412
141- §. Ички ва ташқи симметрик босим таъсиридаги қалин деворли трубалар ҳисоби	414
142- §. Қўшма трубалар	418
143- §. Резервуар деворида ҳосил бўладиган эгилиш	421
144- §. Цилиндрик резервуар ҳисоби	425
145- §. Босим таъсиридаги газ баллонларининг ҳисоби	426
 XXI боб. Балкаларнинг устиворлигига оид баъзи мураккаб масалалар	428
146- §. Масаланинг қўйилиши	428
147- §. Бўйлама ва кундаланг эгилиш	428
148- §. Бўйлама ва кундаланг куч таъсиридаги балканинг мустаҳкамлигини энергетик усулда ҳисоблаш	432
149- §. Балкаларнинг кундаланг эгилишидаги устиворлиги	437
 XXII боб. Динамик юкларнинг таъсири	442
150- §. Умумий мулоҳазалар	442
151- §. Инерция кучлари таъсиридаги иншоот ва машина қисмларининг ҳисоби	443
152- §. Динамик юклар таъсиридан иншоот ва машина қисмларида ҳосил бўладиган тебранма ҳаракатлар	449
153- §. Эластик системанинг эркин тебранишига эластик бўлмаган қаршиликларнинг таъсири	453
154- §. Эркинлик даражаси битта бўлган эластик системанинг мажбурий тебраниши	456
155- §. Эластик системанинг мажбурий тебранишига эластик бўлмаган кучларнинг таъсири	462
156- §. Эркин тебранувчи стерженлар массасининг таъсирини тақрибий равишда ҳисобга олиш	465

157- §. Зарбли кучлар таъсиридан ҳосил бўладиган кучланишлар	469
158- §. Зарбга синаш. Синалаётган материалнинг механик хос- саларига деформация тезлигининг таъсири	480
XXIII б о б. Кучланишлар ўзгарувчан бўлган ҳолда материаллар- нинг мустаҳкамлигини текшириш	482
159- §. Ўзгарувчан кучланишларнинг материал мустаҳкамлиги- га таъсири ва бу ҳолда мустаҳкамлик шarti	482
160- §. Симметрик ва тескари симметрик цикллар учун чидамли- лик чегарасини аниқлаш	483
161- §. Чидамлилик чегарасини цикл характеристикаси бўйича аниқлаш диаграммалари	486
162- §. Кучланиш тўпланишининг толиқишга таъсири	489
163- §. Ўзгарувчан юклар таъсиридаги материаллар учун рухсат этилган кучланишни аниқлаш	491
Иловалар	

□

Махсус редактор *И. А. Одилахжаев*
Редактор *А. Мирзаев*
Бадий редактор *Е. И. Соин*
Техн. редактор *Э. Вильданова*
Корректор *Ж. Нуриддинова*

Теришга берилди 10/V-1970 й. Босишга рухсат этилди 3/IV-1973 й. Қогози № 2.
70X108 $\frac{1}{16}$. Физик б. л. 32,0. Шартли босма л. 44,8. Нашр, л. 39,55. Тиражи
20000. Р09416.

«Ўқитувчи» нашриги. Тошкент, Навоий кўчаси, 30. Шартнома 243-69.
Баҳоси I с. II т. Муқоваси 30 т.

ЎзССР Министрлар Совети Матбуот Давлат комитетининг Тошкент полиграфия
комбинати. Тошкент, Навоий кўчаси, 30. 1973 й. Заказ № 1260.

Ташкентский полиграфкомбинат Государственного комитета Совета Министров
УзССР по печати. Ташкент, Навои, 30.

